Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGAVE

Lengdemåling og representasjonsformer

En dokumentanalyse av Multi med fokus på variert bruk av representasjonsformer innenfor lengdemåling.

Length measurement and mathematical representations

A document analysis of Multi with a focus on use of variable mathematical representations in length measurement.

Åsne Vestrheim

Master i matematikk i Grunnskolelærerutdanningen 1-7

Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett

Institutt for språk, litteratur, matematikk og tolking

Veileder: Silke Lekaus

Innleveringsdato: 15.05.2022

Jeg bekrefter at arbeidet er selvstendig utarbeidet, og at referanser/kildehenvisninger til alle kilder som er brukt i arbeidet er oppgitt, *jf. Forskrift om studium og eksamen ved Høgskulen på Vestlandet, § 12-1.*

Forord

Denne masteroppgaven markerer slutten på min femårige grunnskolelærerutdanning ved Høgskulen på Vestlandet. Det har vært fem fine år som har gitt meg gode venner, gode minner og en utdanning jeg er stolt av. Arbeidet med denne masteroppgaven har vært både en krevende og en givende prosess. Oppgaven har gitt meg innsikt i læreverket Multi, og jeg gleder meg til å bruke denne kunnskapen ute i skolen.

Først vil jeg takke veilederen min, Silke Lekaus. Tusen takk for all faglig hjelp underveis, og konstruktive tilbakemeldinger på oppgaven min. Takk for at du hadde troen på meg da jeg tok en helomvending i oppgaven min, og at du fulgte meg opp tett i denne perioden.

Takk til familie og venner for all støtte underveis. Dere har gitt meg troen på meg selv og prosjektet mitt. Takk for alle gode stunder der dere har hjulpet meg til å tenke på noe annet enn masteroppgaven.

Takk til mine medstudenter for at vi har delt både oppturer og nedturer. Takk for alle oppmuntrende smil i gangen og på lesesalen.

Tusen takk til Eira, Hilde, Bjørnar, Vegard og pappa for korrekturlesing av oppgaven. Det var til stor hjelp!

Til slutt vil jeg takke Vegard som har støttet meg gjennom alt arbeidet med denne masteroppgaven. Takk for at du har trodd på meg hele veien og lyttet på all min frustrasjon underveis. Tusen takk for alle de fine gåturene du har tatt meg med på, for å tenke på noe annet enn denne oppgaven.

15.mai 2023, Bergen

Åsne Vestrheim

Sammendrag

I denne oppgaven har jeg gjennomført en dokumentanalyse av læreverket Multi, med fokus på lengdemåling og representasjonsformer. Målet med oppgaven var å finne ut hvordan Multi legger til rette for konseptfokusert kunnskap i lengdemåling, ved bruk av ulike representasjonsformer. For å finne ut av dette har laget et rammeverk for lengdemåling, med utgangspunkt i Sarama et al. (2022), Hurrell (2015) og Clements og Stephan (2004). Dette rammeverket består av ni utviklingsnivåer for elevers forståelse i lengdemåling. For å kategorisere representasjonsformer har jeg brukt et rammeverk av Lesh (1981).

Den første prosessen i arbeidet var å velge ut relevant materiale fra læreverket Multi. Etter en gjennomgang av alle de trykte lærebøkene bestod utvalget av oppgaver i Multi 1A, Multi 2B, Multi 3A, Multi 4B og Multi 6A, totalt 148 oppgaver. Lærerveiledningen til alle bøkene ble brukt som en sentral del i analysen. Analysen viser hvordan hvert eksempel ble kategorisert, ut ifra hvilke representasjonsformer oppgaven legger opp til, og hvilket utviklingsnivå elever kan være på for at oppgaven er på et passende nivå i lengdemåling.

Resultatene av analysen viser at 74 prosent av oppgavene inneholdt en eller flere transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. Dette kan være et godt grunnlag for utvikling av en konseptfokusert kunnskap i lengdemåling. En hindring for konseptfokusert kunnskap kan være at hele 64 prosent av de 148 oppgavene tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling. Utvalget inneholder flere oppgaver der elevene skal måle lengden av en tegning gjenstand i boken, fremfor en reell gjenstand. Dette kan føre til at elevene ikke føler en sammenheng mellom skolematematikken og hverdagen, som kan skape en mer prosedyrefokusert kunnskap.

Resultatene viser også at representasjonsformene endres etter hvert som oppgavene er passende for elever på høyere utviklingsnivå. Representasjonsformene er mer abstrakte og formelle for oppgaver som passer for elever på niende utviklingsnivå.

Abstract

This thesis is a document analysis of the Norwegian textbook Multi, with focus on length measurement and mathematical representations. The aim of this study was to examine how Multi facilitates for conceptual knowledge in length measurement, with use of various mathematical representations. I made a framework to answer the research question. The framework consists of theories from Sarama et al. (2022), Hurrell (2015) and Clements and Stephan (2004). This framework includes nine levels of progress in students understanding of length measurement. I used a model from Lesh (1981) as framework for coding mathematical representations.

To sort out the relevant material, I made a systematic review of all textbooks from Multi. After this sorting process the material consisted of tasks from Multi 1A, Multi 2B, Multi 3A, Multi 4B and Multi 6A, a total of 148 tasks. For each textbook there was a teacher´s guide. I used the teacher´s guide as a central part in the analysis. In the analysis chapter I show how the tasks were analysed, by using the two frameworks.

The results shows that 74 percent of the tasks contains one or more transformations between different mathematical representations. Such tasks can be a great base for students' conceptual knowledge in length measurement. But on the other hand, 64 percent of the tasks, is based on static figural models. This can be a barrier for students' conceptual knowledge. The selected material contains tasks where the students are supposed to measure the length of a drawn object, instead of a real object. This can lead to a more procedural knowledge, if the students do not experience a connection between school mathematics and everyday life.

The results also shows that the mathematical representations changes, based on the level of development in length measurement. The mathematical representations were more abstract and formal in tasks that were suitable for students on the ninth level of development.

Innhold

Figurliste

Tabelloversikt

1. Innledning

«Og mennesket brukte sin egen kropp for å måle. Det er ikke uten grunn at måleenhetene for lengde var tomme – tommelfinger, alen – underarm, fot og favn» (Isdahl, 2002, s. 7). Hans Isdahl påpeker at mennesker har foretatt målinger så lenge vi kan huske, og viser blant annet til eksempler fra vikingtiden. Måling har altså vært viktig for mennesker i lang tid, og er fortsatt en sentral del av skolematematikken.

I denne studien søker jeg svar på hvordan lengdemåling blir presentert for elever gjennom et læreverk og dens lærerveiledning, og hvordan læreverkets bruk av representasjonsformer utvikler seg igjennom de ulike klassetrinnene på barneskolen.

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Måling er et av de mest nyttige temaene i matematikk, ifølge Van de Walle et al. (2013). De forklarer at temaet er nært knyttet til elevers virkelighet utenfor skolen, og er derfor et tema elevene kan se glede og nytte i. Likevel er det ikke nødvendigvis slik at elever har svært god forståelse for måling, selv om det ligger nærmere deres hverdagsliv enn andre elementer i skolematematikken (Smith III et al., 2013). Pind (2011) skriver at et av målene i småskolen er at elevene skal forstå begrepet måling. Hun påpeker at for noen elever innebærer dette en overgang fra naturlige måleenheter, som skrittlengde, til standardiserte måleenheter. Mens andre elever i småskolen allerede er godt kjent med standardiserte måleenheter.

I denne undersøkelsen har jeg valgt å avgrense fokuset til lengdemåling. Grunnen til dette er at lengdemåling er den første formen for måling som elevene møter i den norske skolematematikken (Kunnskapsdepartementet, 2019), som er grunnlaget for videre læring om måling, men også andre matematiske temaer. Clements og Stephan (2004) trekker frem lengdemåling som en brobygger mellom det romlige aspektet i matematikken, og det tallsymbolske aspektet. Mitchell og Horne (2008) trekker frem sammenhengen mellom lengdemåling, tallinjer og brøk. Kieren (henvist i Mitchell & Horne, 2008, s. 353) forklarer at rasjonale tall er nødvendig for å beskrive en eventuell rest ved en måling ved bruk av heltall. For eksempel ved måling av en blomst som er 13,5 cm lang. Da er det ½ til overs mellom tallet 13 og 14 på linjalen. Mitchell og Horne skriver også at å forstå overførbarheten mellom de ulike temaene i skolematematikken er en viktig forutsetning for *relational understanding* i matematikk. Dette begrepet forklares i kapittel 2.2. På bakgrunn av det Mitchell og Horne beskriver, og forklaringen ovenfor fra van de Walle et al. kan måling være et viktig utgangspunkt for å skape en robust forståelse for andre temaer i matematikken.

Smith III et al. (2013) påpeker at flere tester har vist manglende forståelse hos elever av de grunnleggende prinsippene i lengdemåling. De påpeker også at selv mange voksne har en manglende forståelse av areal og bakgrunnen for formelen for utregning av areal. Smith III et al. (2013, s. 389-390) viser til en studie gjennomført blant amerikanske fjerdeklassinger, og deres bruk av linjal som måleredskap. Resultatet tyder på at elevene kan lese av et tallsymbol på en linjal, men at mange ikke forstår om tallet er korrekt svar og reflekterer ikke rundt linjalens funksjon og oppbygning. Selv om forskningen tyder på at flere elever sliter med å lære de grunnleggende prinsippene i lengdemåling, og Smith III et al. har påpekt dokumenterte feilmønstre, så har de ikke funnet bakgrunnen for elevenes utfordringer.

Aspenes (2022) observerte norske elever på 5. trinn sin bruk av standardiserte måleenheter. I denne masteroppgaven fant hun at begynneropplæringen i lengdemåling er et viktig grunnlag for å bygge videre forståelse for måling gjennom barneskolen. Aspenes trekker frem bruken av ikke-standardiserte måleenheter som et godt utgangspunkt for læring av lengdemåling. Dersom mange elever har vansker med å forstå hvordan man bruker en linjal og hvorfor det er hensiktsmessig å bruke dette måleredskapet, kan de ha nytte av å bruke ikke-standardiserte måleenheter som første steg i læringen av lengdemåling. Som Aspenes påpeker er begynneropplæringen i lengdemåling viktig for å forebygge manglende forståelser som det Smith III et al. (2013) beskriver. Det er altså liknende funn i Aspenes sin undersøkelse, som ble gjort i Norge, og Smith III et al. sin studie som ble gjennomført i USA.

Smith III et al. (2013) beskriver fenomenet *conceptual knowledge* og forklarer dette som en forståelse av årsakene til hvorfor bestemte prosedyrer er hensiktsmessige og gyldige i matematikken. Forfatterne setter dette i kontrast til en *procedural knowledge* som en forståelse av hvordan man bruker de bestemte prosedyrene i matematikken. Disse begrepene og fenomenene blir oversatt og beskrevet mer utfyllende i kapittel 2, tidligere forskning. Konseptfokusert kunnskap (conceptual knowledge) pekes på som viktig for å forebygge utfordringene ved bruk av linjal og forståelse av måling. Smith III et al. forklarer at en slik forståelse kan utvikles gjennom bruk av ulike representasjonsformer, som konkreter, matematiske symboler og kontekster fra virkeligheten. Derfor er det viktig at elever møter dette tidlig i lengdemåling, for å forebygge manglende forståelse i måling.

Selv om variert bruk av representasjoner blir ansett som et viktig grunnlag for konseptfokusert kunnskap i lengdemåling, er det likevel gjort lite forskning på hvordan representasjoner knyttet til akkurat måling blir tatt i bruk i lærebøker i den norske skolen. På bakgrunn av dette har jeg i denne oppgaven undersøkt hvordan ett læreverk bruker ulike representasjonsformer i kapitlene om lengdemåling.

1.2 Lærebøker i matematikk

Ruwisch og Huang (2018) gjennomførte en studie av lengdemåling i lærebøker i Tyskland og Taiwan, og påpeker at elever i verden får ulike læringsmiljøer, fordi undervisningen baseres på ulike læreplaner, og at dette vil føre til ulik kunnskap blant elevene. Deres funn beskrives mer utdypende i kap. 2.3. Smith III et al. (2013) poengterer at lærebøker i matematikk ofte inneholder statiske representasjonsformer, da dette enklest lar seg fremstille i en trykt lærebok. Smith III et al. påpeker også at elevenes opplevelse av matematikk ofte er styrt av læreboken. De forklarer at undervisningen i klasserommet delvis styres av læreplanen, da lærebøkene som blir brukt er laget for å implementere læreplanens innhold ut i klasserommene. Men hvordan dette utspiller seg i ulike klasserom, varierer altså fra land til land, ut ifra hvordan læreplanen er lagt opp.

Lærebøker er en sentral del av matematikkundervisningen i den norske skolen, ifølge Kongelf (2015). Han påpeker at læreboken ofte er lærerens primærkilde til fagstoff og undervisningsopplegg. Det samme beskriver også Robitaille og Travers (henvist Fan et al., 2013, s. 635), som hevder at læreboken muligens er mer styrende i matematikkfaget enn i andre fag. Kongelf påpeker også at lærebøker spiller en viktig rolle i implementeringen av læreplanen i skolen. I Norge kom en fornyelse av Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. På bakgrunn av det Kongelf (2015) hevder, vil lærebøkene i matematikk altså være en viktig del av hvordan denne læreplanen kommer til uttrykk i klasserommet. I denne undersøkelsen fokuserer jeg på lengdemåling og representasjonsformer. Videre vil jeg kort presentere hvordan disse to elementene behandles i læreplanen i matematikk.

1.3 Måling og representasjoner i Kunnskapsløftet 2020

Da den nye læreplanen ble innført i 2020 ble det for første gang utnevnt kjerneelementer i hvert fag, som representerer det viktigste innholdet i de enkelte fagene (Utdanningsdirektoratet, 2019). I læreplanen for matematikk står representasjon nevnt som en del av seks kjerneelementer i faget (Kunnskapsdepartementet, 2019). Læreplanen fokuserer på at elevene skal kunne bruke representasjonsformer både fra matematikken og hverdagslivet, og kunne veksle mellom disse. Representasjoner er altså en sentral del av matematikkfaget, allerede fra tidlig alder.

I løpet av barneskolen møter elevene det matematiske temaet måling flere ganger. På 2. trinn, 3. trinn, 4. trinn og 6. trinn finner vi kompetansemål som omhandler måling (Kunnskapsdepartementet, 2019). Under kompetansemålene for 2. trinn finner man ett kompetansemål som eksplisitt nevner måling: «måle og samanlikne storleikar som gjeld lengd og areal, ved hjelp av ikkje-standardiserte og standardiserte måleiningar, beskrive korleis og samtale om resultata» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Dette kompetansemålet nevner implisitt bruk av flere representasjonsformer. Å måle ved bruk av ikke-standardiserte måleenheter involverer ofte bruk av ulike konkreter. Å beskrive og samtale krever at elevene kan bruke muntlig språk som en matematisk representasjon. Videre finner vi ett kompetansemål for 3. trinn som handler om lengdemåling: «bruke ulike måleiningar for lengd og masse i praktiske situasjonar og grunngi valet av måleining». På 4. trinn er det kompetansemål som omhandler måling, men disse handler om areal og volum, ikke lengde. På 5. og 7. trinn er det ingen kompetansemål som nevner lengdemåling. På 6. trinn finner vi tre kompetansemål som nevner måling. Det første er: «måle radius, diameter og omkrins i sirklar og utforske og argumentera for samanhengen». Dette kompetansemålet nevner ikke lengdemåling direkte, men lengdemåling er en forutsetning for å kunne måle radius og diameter av en sirkel. Det andre kompetansemålet for 6. trinn om måling er: «bruke ulike strategiar for å rekne ut areal og omkrins og utforske samanhengar mellom desse». Dette kompetansemålet bygger direkte på lengdemåling, da måleoperasjoner med lengde er utgangspunkt for å regne ut areal og omkrets. Det siste kompetansemålet på barneskolen som nevner måling er: «utforske mål for areal og volum i praktiske situasjonar og representere dei på ulike måtar». Dette kompetansemålet inkluderer ikke lengdemåling på samme måte som de andre kompetansemålene. Men som nevnt har Smith III et al. (2013) pekt på god forståelse i lengdemåling som en viktig faktor for god forståelse av areal.

Videre brukes måling på ungdomskolen, på en måte som krever at eleven har forstått bruken av måling. Dette ser man i kompetansemålet «utforske og argumentere for formler for areal og volum av tredimensjonale figurer» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 12) fra 9. trinn. For at elever på 9. trinn skal kunne oppfylle dette kompetansemålet bør elevene ha en grunnleggende kunnskap om hvilke egenskaper ved figurer som kan måles og hvordan dette utføres. Derfor bør de ha erfart hvordan disse måleresultatene kan brukes til å regne ut for eksempel areal og volum som kompetansemålet påpeker. Bruken av disse formlene startet på barneskolen, og danner dermed grunnlaget for bruken av måling i den videre skolegangen. På ungdomsskolen fokuseres det mer på utforsking av hvordan disse formlene fungerer, slik det nevnte kompetansemålet krever.

1.4 Problemstilling

Som nevnt i kapittel 1.1 blir måling pekt på som et virkelighetsnært tema innenfor matematikken. Flere av kompetansemålene i læreplanen for matematikk krever at elevene mestrer bruk av ulike matematiske representasjonsformer. Representasjon er også nevnt som et kjerneelement i læreplanen, og Smith III et al. (2013) mener at å mestre bruken av flere representasjonsformer er en forutsetning for konseptfokusert kunnskap i lengdemåling. Som nevnt har Smith et al. dokumentert feilmønstre i lengdemåling blant amerikanske elever, men de har ikke funnet bakgrunnen for elevenes utfordringer. På bakgrunn av dette ønsket jeg å undersøke hvordan det norske læreverket Multi behandler representasjonsformer i kapitlene om lengdemåling. Dette innebærer alle klassetrinn på barneskolen der lengdemåling er inkludert i lærebøkene.
Jeg vil derfor se på hvordan temaet lengdemåling behandles i læreverket Multi, med fokus på representasjoner. Problemstillingen for denne undersøkelsen er:

Hvordan benytter læreverket Multi representasjonsformer i oppgaver på ulike i utviklingsnivå innen lengdemåling?

For å finne ut av dette har jeg undersøkt hvilke deler av læreverket Multi som inneholder temaet lengdemåling. For de aktuelle klassetrinnene har jeg undersøkt både elevbok og lærerveiledning. Lærerveiledningen er inkludert i analysearbeidet for å ikke gå glipp av eventuelle tilpasninger eller ekstra informasjon om oppgavene som ikke kommer frem i elevbøkene. Slik kan jeg undersøke om Multi utfordrer det Smith III et al. (2013) mener om at lærebøker inneholder mye statiske representasjonsformer.

1.5 Beskrivelse av det valgte læreverket

Det valgte læreverket i denne studien er Multi, utgitt av Gyldendal Norsk Forlag. Læreverket selv skriver i lærerveiledningene (Alseth et al., 2020b, 2020d, 2020f, 2021b, 2021d) at Multi hjelper lærere med å ta i bruk LK20 i skolen, slik som Kongelf (2015) beskriver lærebokens rolle. Det finnes ingen offentlig tilgjengelige salgstall for dette læreverket, som gjør det utfordrende å si noe eksakt om hvor utbredt læreverket Multi er i den norske skolen. Gyldendal er et av de store forlagene i Norge, og har gitt ut læreverk i matematikk siden 1997. I kapittel 4.2 beskriver jeg mer detaljert hvorfor jeg valgte Multi av Gyldendal som utgangspunkt for undersøkelsen.

Fokuset for undersøkelsen av læreverket er lengdemåling og representasjoner. Bakgrunnen for at hele dette læreverket ble undersøkt er læreverkets egne beskrivelse av en gradvis *abstrahering* gjennom matematikkbøkene på barneskolen (Alseth et al., 2020a, 2020b 2020c, 2020d, 2020e, 2020f, 2021a, 2021b, 2021c, 2021d). De beskriver abstrahering som en overgang fra bruk av konkreter til mer formelt matematisk språk. Forfatterne av Multi (Alseth et al. 2020b, 2020d, 2020f, 2021b, 2021d) beskriver i lærerveiledningene at læreverket inneholder varierte arbeidsmåter, deriblant samtalebilder, utforskingsoppgaver, øveoppgaver, forklaringer, spill og aktiviteter. Lærerveiledningene i læreverket beskriver også at de bruker en lang rekke representasjonsformer som konkreter, tegninger og diagrammer. Disse beskrivelsene er grunnlag for en undersøkelse av hvordan Multi benytter seg av ulike representasjonsformer i lengdemåling, og transformasjoner mellom de ulike representasjonene. Selv om Multi legger opp til en gradvis abstrahering i representasjonsformene trenger ikke dette å bety at representasjonsformene er varierte i bøkene for de ulike klassetrinnene.

1.6 Oppgavens oppbygning

I denne masteroppgaven vil jeg beskrive hvordan jeg har gått frem for å undersøke min problemstilling, med utgangspunkt i teori og tidligere forskning om lengdemåling og matematiske representasjonsformer.

I dette første kapittelet har jeg presentert jeg bakgrunn for valg av tema, samt temaets relevans i skolens styringsdokumenter og faglitteraturen i matematikkdidaktikk. I kapittel to beskriver jeg tidligere forskning om lengdemåling og lærebøker, kombinert med forskning på representasjonsformer. Det tredje kapittelet inneholder teori om lengdemåling og representasjoner som ble brukt som utgangspunkt for analyse av datamaterialet. Det fjerde kapittelet tar for seg forskningsmetode og beskriver fremgangsmåten for undersøkelsen. I femte kapittel viser jeg et utvalg fra analyseprosessen, og hvilke resultater dette første til. Videre drøfter jeg disse resultatene i det sjette kapittelet, før jeg konkluderer i siste og sjuende kapittel.

2. Tidligere forskning

I dette kapittelet introduserer jeg kort temaet lengdemåling og matematiske representasjoner. Etter dette presenterer jeg et eget delkapittel om tidligere forskning på elevers forståelse i lengdemåling og lærebøker med fokus på lengdemåling. Deretter beskriver jeg tidligere forskning på matematiske representasjoner, og hvordan dette kan påvirke elevenes læring.

Van de Walle et al. (2013) peker på måling som et av de mest nyttige temaene i matematikk, da det er en viktig del av matematikken som brukes i hverdagslivet. Clements og Stephan (2004) støtter dette synet på måling, og hevder at måling er en brobygger mellom det romlige aspektet av matematikken, som geometri og areal, og det tallsymbolske i matematikken. Begge disse grenene er viktige elementer for måling, og i matematikken. På bakgrunn av dette ser Clements og Stephan på måling som en av de viktigste anvendelsene av matematikk i den virkelige verden.

Hurrell (2015) hevder at det finnes sju ulike former for måling; lengde, areal, volum, kapasitet, masse, tid og temperatur. Lengde er den første formen for måling som elevene møter i matematikkfaget i den norske skolen. Aspenes (2022) fant i sin masteroppgave at begynneropplæringen legger et viktig grunnlag for videre utvikling av forståelse av måling. Derfor er det viktig at undervisningen om lengdemåling gir elevene et robust utgangspunkt.

Emanuelsson (1995) beskriver læring i matematikk som «process där målet är att upptäcka och använda abstrakta strukturer och relationer» (s. 2). Videre understreker han at en slik prosess ikke kan foregå kun gjennom arbeid med matematiske symboler. Emanuelsson nevner blant annet hverdagsspråk, modeller, diagram og matematisk språk som viktige representasjoner. Smith III et al. (2013) beskriver lengdemåling som et unikt tema når det kommer til konkrete verktøy og redskaper som tas i bruk i matematikken. Linjalen er kanskje det mest selvsagte redskapet, som direkte fører til at elevene måler lengde.

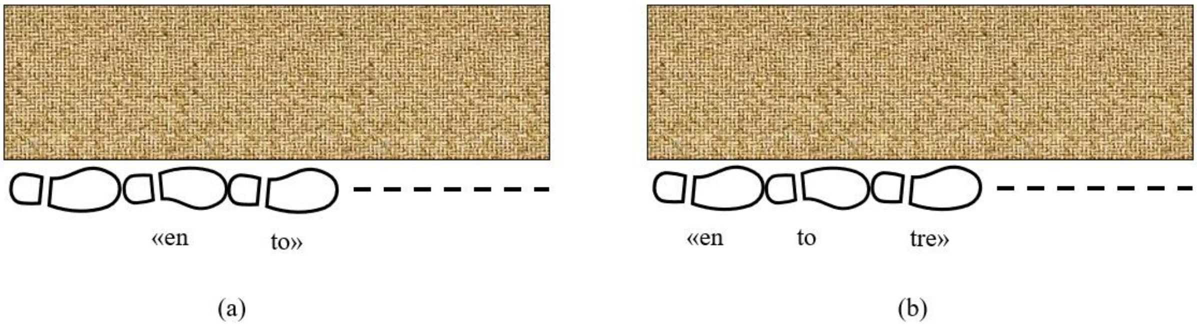
2.1 Elevers oppfatning av måling

Forskning på elevers forståelse av lengdemåling begynte, ifølge Smith III et al. (2013), med Piagets grunnleggende studier. Kamii (2006) bygger også på Piagets grunnleggende teorier. Hun bruker tidligere forskning på lengdemåling til å foreslå en ulike måter å forbedre undervisningen i lengdemåling. Dette beskrives mer detaljert senere i kapittelet. Jeg går ikke nærmere inn på Piagets teorier i denne teksten, men det at litteraturen er bygd på disse studiene plasserer min fremstilling innenfor det kognitive konstruktivistiske perspektivet. Det innebærer en forestilling av læring som en kognitiv prosess. I det tredje kapittelet presenteres teorier om elevers utvikling av forståelse i lengdemåling, gjennom ulike stadier i en kognitiv prosess. Før dette beskriver jeg her hvordan elever uttrykker sine oppfatninger av måling.

For å kunne vite hvordan man skal jobbe med måling med elever trengs det kunnskap om elevers oppfatning av hva måling er og hvordan elever ser for seg en måleoperasjon. Clements og Stephan (2004) hevder at barns utvikling av forståelse for måling begynner i barnehagen. De argumenterer for at barn i denne alderen har et forhold til vekt, lengde og masse, selv om de ikke kan måle det nøyaktig. Barn har ofte et bevisst forhold til å dele noe likt. Dette kan være basert på volum, i form av å helle like mye saft i to glass, eller lengde i form av å knekke en sjokolade i to. Selv om barn kan bruke en visuell form for hverdagslig måling, er de ukjente med mer formell måling. Clements og Stephan (2004) beskriver hvordan elever tidlig på barneskolen ikke har utviklet forståelse for hvordan man kan bruke en meterstokk til å måle noe som er lengre enn en meter. Elevene spør etter flere meterstokker for å kunne måle hele klasserommet, da de ikke har nok til å dekke hele lengden.

Kamii (2006) beskriver at lengdemåling er vanskelig for mange elever på barneskolen. Hun viser til en elevtest der amerikanske barneskoleelever ble testet i lengdemåling. Resultatene viser at 14 prosent av tredjeklassingene og 49 prosent av sjuendeklassingene oppga korrekt svar. Oppgaven gikk ut på å bestemme lengden på en tegnet linje. Linja var tegnet langs en linjal, fra markeringen 3 cm til 8 cm. Svaret var at linja var 5 cm lang, noe bare omtrent halvparten av de spurte sjuendeklassingene oppga som svar. Kamii understreker at tilsvarende tester har blitt gjennomført i USA i flere år, med lignende resultater. Det er altså mange elever som har vansker med bruk av linjal og måling med standardiserte måleenheter. Dette rapporteres det om også i Norge. Johnsen-Høines og Rangnes (2002) presenterer et eksempel der elever på sju år etterspør linjal eller målebånd når de skal måle en gjenstand. Dette er interessant, da det viser seg at elevene som bruker linjal ikke mestrer bruken av dette måleredskapet. Det kan se ut til at flere elever har en forventing om at måling innebærer bruk av et redskap med en standardisert måleenhet. Likevel er det flere forskere som peker på at ikke-standardiserte måleenheter egner seg godt for de mindre elevene, deriblant Hurrell (2015) og Sarama et al. (2022), samt Aspenes (2022) som i sin masteroppgave peker på ikke-standardiserte måleenheter som et godt verktøy for begynneropplæringen i måling. Hvordan ulike måleredskaper kan brukes for å utvikle forståelse i lengdemåling kommer jeg tilbake til i neste kapittel, der jeg ser nærmere på ulike teorier for elevers utvikling av forståelse i lengdemåling.

Stephan et al. (2001) viser også til ulike oppfatninger av måling blant skoleelever. I denne undervisningen brukte elevene føttene sine til å måle lengden av et teppe. Elevene varierte mellom to fremgangsmåter. (a) gikk ut på å sette en fot ved begynnelsen av teppet. Deretter satte de neste fot foran den første, og telte én. Deretter tråkket de seg videre og telte to, tre, fire osv. for hvert skritt. (b) startet på 1 ved den første foten og telte seg videre for hvert skritt.



Figur 1: To ulike fremgangsmåter brukt av elever for å måle lengden på et teppe. Basert på Stephan et al. (2001, s. 65).

På denne måten vil elevene ende opp med to ulike resultater på måleoperasjonen. Stephan et al. (2001) beskriver at dette førte til en matematisk diskusjon om målenøyaktighet, og hvordan ulike føtter og ulike strategier kan føre til ulike resultater.

Elever kan altså ha mange ulike oppfatninger av hvordan man måler lengden av en gjenstand. Noen har ikke utviklet forståelse for å kunne bruke en måleenhet gjentatte ganger, dersom gjenstanden som måles er lengre enn måleredskapet. Andre har ikke utviklet forståelse for hvordan man måler en gjenstand fra en ende til en ende, slik som fremgangsmåte (a) i figur 1.

Som nevnt, påpeker Kongelf (2015) at lærere ofte tar utgangspunkt i lærebøker i matematikk for å lage undervisningsopplegg til sine klasser. Slik undervisning har ofte et smalt fokus, ifølge Smith et al. (henvist i Barrett et al., 2012, s. 29). De fant at undervisning som tar utgangspunkt i trykte lærebøker ofte inneholder lite bruk av matematiske samtaler, og at denne typen undervisning kan føre til en forståelse som er mindre utviklet enn prosedyrefokusert kunnskap. Dette betyr at elevene kan ha en lite utviklet forståelse for hvordan eller hvorfor lengdemåling fungerer som det gjør. Prosedyrefokusert kunnskap beskrives mer detaljert i neste delkapittel.

2.2 Konseptfokusert og prosedyrebasert kunnskap i lengdemåling

Som nevnt i kapittel 1, beskrev Smith III et al. (2013) amerikanske fjerdeklassingers utfordringer ved bruk av linjal som måleredskap. Selv om lengdemåling legger opp til «action, socialisation and reflection» slik Hurrell (2015, s. 14) beskriver det, er det ikke en selvfølge at elevene forstår de ulike representasjonsformene og arbeidsmåtene, ifølge Smith III et al. (2013).

Smith III et al. (2013) skiller mellom det de kaller *conceptual knowledge* og *procedural knowledge* i sin lærebokanalyse med fokus på lengdemåling. Conceptual knowledge kan sammenlignes med det Skemp (1976) forklarer som *relational understanding*. Skemp beskriver det som å forstå hva man skal gjøre for å løse et matematisk problem og hvorfor man skal gjøre akkurat dette. Dette innebærer å forstå hensikten med hvilke prosedyrer man utfører i matematikk. En slik forståelse bygger ofte på en evne til å kunne veksle mellom representasjoner og velge den mest hensiktsmessige representasjonsformen til det gjeldende problemet. Relational understanding gir en fleksibilitet i møte med problemer der man må tilpasse en eksisterende matematisk prosedyre. Skemp refererer til Mellin-Olsen i sin beskrivelse av disse begrepene. Mellin-Olsen skrev i 1984 om to ulike oppfatninger i matematikkfaget. Den første er *strukturoppfatningen*, som bygger på det han kaller det sosiale fornuftsgrunnlaget. Strukturoppfatningen er forståelsen av hvordan regelen er knyttet til sin struktur, altså hvorfor regelen fungerer slik som den gjør. Mellin-Olsen beskriver det sosiale fornuftsgrunnlaget som alt som gjør kunnskap viktig og interessant, slik at elevene får lyst til å lære, med unntak av motivasjon som prøver og eksamen. Dette kan for eksempel være ved at elevene ser nytten som måling kan ha i hverdagslivet, slik Van de Walle et al. (2013) beskrev.

Den andre oppfatningen som Mellin-Olsen (1984) beskriver er *regeloppfatningen*. Dette er kun en forståelse av hvordan man bruker regler og prinsipper i matematikken. Skemp (1976) bruker begrepet *instrumental understanding* og påpeker at han i utgangspunktet ikke ser på dette som en form for matematisk forståelse, da man ikke har forstått hvorfor en regel eller prosedyre fungerer til bestemte matematiske problemer. Dette tilsvarer det Smith III et al. (2013) procedural knowledge. I denne undersøkelsen har jeg støttet meg på Smith III et al. sine begreper, da disse i større grad tar utgangspunkt i lengdemåling som matematisk tema. På bakgrunn av dette har jeg oversatt begrepene til konseptfokusert kunnskap (conceptual knowledge) og prosedyrefokusert kunnskap (procedural knowledge), og vil bruke disse videre i teksten. Disse begrepene fra Smith III et al. ble brukt som kategorier for å kode deres data. I denne undersøkelsen bruker jeg andre kategorier for å kode datamaterialet, men begrepene konseptfokusert kunnskap og prosedyrefokusert kunnskap blir brukt til å drøfte funn fra analysen. Kategoriene som ble brukt til å analysere materialet presenteres i kapittel 3.

Konseptfokusert kunnskap i lengdemåling kan for eksempel komme til uttrykk som en forståelse av hvorfor man kan bruke linjalen slik vi gjør, og hvilken betydning dette har for måleresultatet. Som Smith III et al. (2013) påpeker er dette manglende hos amerikanske fjerdeklassinger, som beskriver utstrakt feil bruk av linjal hos disse elevene. Dette er et tegn på at elevene muligens ikke har forstått hvordan ukorrekt bruk av linjal kan påvirke måleresultatet. Det tyder også på at elevene heller ikke har prosedyrefokusert kunnskap om bruk av linjal. De har altså ikke forstått hverken hvordan eller hvorfor man bruker linjalen på en bestemt måte.

Kamii (2006) beskriver de samme utfordringene, men bruker ikke tilsvarende begreper. Hun peker på at elever ofte får i oppgave å måle seg frem til et enkelt tall, fremfor å sammenligne to eller flere objekter ved bruk av lengdemåling. Hun frykter at dette kan føre til at elevene ikke produserer et tall fordi de føler et behov for å finne ut av noe, men at motivasjonen er at læreren har sagt det. Det er likheter mellom det Kamii skisserer og Mellin-Olsen sitt instrumentelle fornuftsgrunnlag. Begge beskriver elever som handler etter ordre fra læreren, fremfor sitt eget ønske om å undersøke eller finne ut av noe. Kamii tar det så langt som å si at måling er unødvendig ved bruk av ett objekt, da hun mener at hensikten med måling er å sammenligne flere objekter.

2.3 Tidligere forskning på lengdemåling

Som nevnt i kap. 1.2 har Ruwisch og Huang (2018) gjennomført en studie av lengdemåling i lærebøker i Tyskland og Taiwan. I denne studien brukte de Smith III et al. (2013) sitt rammeverk for å kategorisere oppgaven som konseptfokusert kunnskap, prosedyrefokusert kunnskap eller det Smith III et al. kaller conventional knowledge. Ruwisch og Huang fant at alle de undersøkte lærebøkene inneholdt et flertall av oppgaver som fremmet en prosedyrefokusert kunnskap. De tyske lærebøkene hadde et enda høyere prosentandel av oppgaver som fremmet prosedyrefokusert kunnskap enn lærebøkene fra Taiwan. De tyske lærebøkene la større vekt på å lese av riktig tallsymbol langs en linjal. Lærebøkene fra Taiwan fokuserte mer på omregning mellom ulike måleenheter og estimering av lengde.

Lee og Smith III (2011) har undersøkt hvordan lengdemåling blir introdusert for elever i USA og Singapore. De konkluderte med at i begge land er det lagt mye vekt på innlæring av hvordan man gjennomfører en måling, som en prosedyre. Forfatterne trekker også frem en liten forskjell, at de amerikanske lærebøkene legger mer til rette for konseptfokusert kunnskap, fremfor Singapore som hadde større fokus på innlæring av matematiske prosedyrer. Innenfor måling er det altså utbredt at lærebøker fremmer synet på måling som en prosedyre, fremfor forståelsen av hva som ligger bak denne prosedyren. Selv om det var ulike resultater for de ulike landene konkluderte forskerne med at alle lærebøkene hadde en stor andel oppgaver som fremmet en prosedyrefokusert kunnskap, i Tyskland, Taiwan, USA og Singapore.

Som tidligere nevnt er linjalen et viktig fokus innenfor forskning på lengdemåling i skolematematikken. Flere forskere har foreslått å bruke en knekt linjal som måleredskap for å utvikle forståelse av hvordan man teller langs en linjal. Nunes et al. (1993) beskriver et eksempel med elever som brukte en linjal som startet på fire cm. De argumenterer for at dette hjalp elevene med å forstå hvorfor man ikke bare kan lese av tallet som står på linjalen. Clements og Stephan (2004) hevder at bruk av knekt linjal som måleredskap kan utvikle elevers forståelse av måling som å dekke en gjenstand gjentatte ganger med samme enhet. Den knekte linjalen umuliggjør direkte avlesning, og krever at elevene kompenserer for at utgangspunktet er noe annet enn null, eller telle seg frem til svaret på hvor mange ganger gjenstanden er dekket med enheten centimeter.

2.4 Representasjoner i matematikk

Duval (2006) beskriver representasjoner som noe som står for noe annet. Ikke selve fenomenet, men en representasjon av fenomenet. Som nevnt i innledningen til dette kapittelet nevner Emanuelsson (1995) hverdagsspråk, modeller, diagram og matematisk språk som eksempler på matematiske representasjoner. I denne oppgaven vil representasjonene være begrenset til ulike former for representasjoner av lengde.

Alseth og Røsseland (2014) hevder at barns forståelse i matematikk avhenger av om tallstørrelsene blir uttrykt på måter som barna er fortrolige med. Det vil derfor være viktig at lærebøkene som er utgangspunkt for analysen benytter representasjonsformer som er tilpasset elevenes alder. Alseth og Røsseland påpeker at for de yngste elevene er det ofte snakk om konkrete ting som elevene kan ta og føle på. Men Enge og Valenta (2013) advarer mot å se på konkreter som noe magisk, noe som gjør at matematikken bare faller på plass hos elevene. Det er ikke redskaper eller matematiske verktøy i seg selv som fører til forståelse, men hvordan lærere legger opp til bruken av disse redskapene. Enge og Valenta beskriver at å velge passende representasjonsformer er vanskelig, og at det viktigste er at læreren er oppmerksom på hvordan de ulike representasjonene blir brukt av elevene.

Lesh (1981) hevder at en elev først forstår et matematisk begrep når han eller hun kan benytte seg av ulike representasjonsformer og transformasjoner mellom disse. De fem representasjonsformene som Lesh snakker om er erfaringsbaserte situasjoner, manipulerbare modeller, ikoniske fremstillinger, skriftlig språk og muntlig språk. Hva som kjennetegner de ulike representasjonene og hvordan de brukes i matematikken kommer jeg tilbake til i det neste kapittelet, teori, da Lesh sine idéer ble brukt som utgangspunkt for analyse av representasjonsformer i lærebøkene.

2.5 Oppsummering av tidligere forsking

For å oppsummere dette kapittelet om tidligere forskning vil jeg trekke frem utfordringene som Smith III et al. (2013) peker på. Både at mange fjerdeklassinger sliter med korrekt bruk av linjal, men også at flere voksne har vanskeligheter med arealregning, med bakgrunn i hvordan man regner dette ved bruk av lengdemålinger. Flere av tekstene trekker frem bruk av ulike representasjonsformer som et forslag til hvordan man kan bygge en mer robust lengdeforståelse blant elever og fremtidens voksne.

Flere av tekstene jeg har vist til i dette kapittelet skisserer elevers mulige utvikling av forståelse for lengdemåling, samt bruk av representasjonsformer. I det neste kapittelet vil jeg gjøre rede for ulike teorier for utvikling av forståelse for lengdemåling, og beskrive hvordan jeg har sett disse i sammenheng med hverandre for å lage et teoretisk rammeverk for kategorisering av utviklingsnivå i lengdemåling i matematikkbøker.

3. Teori

I dette kapittelet presenterer jeg det teoretiske rammeverket som ble brukt som utgangspunkt for analysen av lærebøkene. Litteraturen omhandler det matematiske temaet lengdemåling, samt representasjonsformer i matematikk. Denne litteraturen er relevant for å kunne svare på problemstillingen om hvordan Multi benytter representasjonsformer i oppgaver på ulike i utviklingsnivå innen lengdemåling.

Jeg har kombinert tre ulike teorier for elevers utvikling av forståelse i lengdemåling, som utfyller hverandre. Først presenterer jeg Sarama et al. (2022), deretter presenterer jeg Clements og Stephan (2004) og til slutt presenterer jeg Hurrell (2015). Etter dette beskriver jeg hvordan jeg gikk frem for å sette disse teoriene sammen til et teoretisk rammeverk for denne studien. I del to av teorikapittelet beskriver jeg hvordan jeg har brukt Lesh (1981) og Duval (2006) sine teorier om representasjonsformer. Teori om lengdemåling og representasjoner blir i første omgang presentert uavhengig av hverandre. Videre i kapittel 4 forklarer jeg hvordan disse teoriene blir brukt for å analysere undersøkelsens datamateriale.

3.1 Elevers utvikling av forståelse for lengdemåling.

Sarama et al. (2022) presenterer tre nivåer for elevers tenking innenfor læring av lengdemåling, i overgangen fra barnehage og opp til slutten av småtrinnet.

1. Det første nivået kalles Length Direct Compare, på norsk *direkte sammenligning av lengde*. Elever på dette nivået kan legge to gjenstander inntil hverandre for å se hvilken som er lengst. Sarama et al. påpeker at linjalen brukes mest som pinne, der de bruker hele lengden til linjalen som måleenhet, fremfor å bruke markeringene på linjalen. Elevene bruker ord som lang, lengre og lengst.
2. Det andre nivået, End-to-End Length Measurer, *lengdemåling fra ende til ende*, beskriver elever som kan måle med ikke-standardiserte måleenheter, og legge de helt inntil hverandre. De kan også bruke linjal med veiledning.
3. Det tredje og siste nivået i denne modellen kalles Length Unit Relater and Repeater, *velge passende måleenhet og gjennomføre måleoperasjon*. Eleven bruker linjal med minimal veiledning. Eleven kan også reflektere over ulike standardiserte måleenheter: «If you measure with cm, not inches, you'll need more because each one is smaller» (Sarama et al., 2022, s. 270). Slike utsagn kan tyde på at elever på dette nivået har god

forståelse av hvordan man kan bruke linjal for å få et mest mulig nøyaktig måleresultat. Ved å trekke slutninger som at et måleresultat med centimeter vil få et høyere måltall enn ved bruk av tommer (inch), tyder dette på at eleven har en konseptfokusert kunnskap om linjalens oppbygning.

Denne modellen favner bredt, men har få utviklingsnivåer. Dette innebærer at det er store forskjeller mellom det første og det siste utviklingsnivået. Det første utviklingsnivået representerer en forståelse der elever legger to gjenstander inntil hverandre for å avgjøre om hvilken som er lengst. Dette står i kontrast til det tredje utviklingsnivået, der elevene kan bruke en linjal med lite behov for veiledning. Sarama et al. gjør kun rede for ett utviklingsnivå mellom disse forståelsene, mens andre forskere beskriver flere utviklingsnivå fra å måtte sammenligne direkte til å mestre bruken av linjal. Derfor presenterer jeg to modeller som delvis overlapper denne, og som bidrar med mer informasjon om hva som ligger mellom de tre nivåene til Sarama et al.

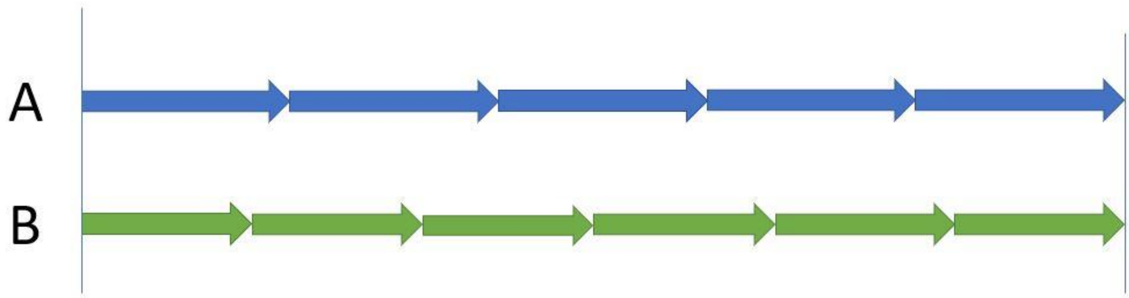
Den neste modellen jeg har brukt for å sette sammen rammeverket er av Clements og Stephan (2004). De presenterer en modell med seks aspekter for måling som begynner med elever i barnehagealder frem til 8-årsalderen.

1. Det første nivået, *Partitioning*, oversatt til *oppdeling*, går ut på at elevene mentalt kan se for seg et objekt delt opp i like store deler før en fysisk måler objektet. Dette krever en utviklet forestillingsevne hos elevene.
2. På det andre nivået, *Unit iteration*, oversatt til *gjenta valgt måleenhet*, er elever i stand til å se at en liten gjenstand (valgt måleenhet), for eksempel en centikube, kan være en del av helheten langs en gjenstand som skal måles. Men elever på dette nivået har ikke klart for seg viktigheten av å plassere måleenheten helt inntil hverandre for hver gang den gjentas. Elevene har altså forståelse for hvordan en måleenhet kan brukes, men ikke forståelse for verdien av nøyaktig bruk av måleenheten.
3. Det tredje nivået, *Transitivity*, oversatt til *transitivitet*, kjennetegnes av forståelsen for at dersom objekt A er lengre enn B, og C er lengre enn A, så må C være lengre enn B. Dette muliggjør sammenligning av objekter som ikke kan sammenlignes direkte. Tenk deg følgende eksempel: Anna ønsker å finne ut hva som er høyest av døra og vinduet i et rom. Disse gjenstandene kan ikke sammenlignes direkte. Anna finner derfor frem et tau. Når hun strekker ut tauet er dette lengre enn høyden på vinduet. Deretter går Anna bort til døra og strekker ut tauet. Tauet rekker ikke opp til enden av døra. Dette betyr

at døra er høyere enn vinduet, og at tauet er mellom høyden av døra og høyden av vinduet. Det er denne forståelsen som betegnes som transitivitet.
Clements og Stephan (2004) påpeker at transitivitet er en svært sentral del av å forstå måling som fenomen og operasjon. «[…] most researchers argue that students must reason transitively before they can understand measurement» (s. 302). Kamii (2006) hevder også at transitivitet er en forutsetning for å forstå konseptet med måling som gjentakelse av en bestemt enhet. Piaget (henvist i Kamii, 2006, s. 154) fant at dette først ble logisk for barn rundt sju til åtte år, og at yngre barn vil påstå at direkte sammenligning er den eneste måten å avgjøre hvilken av to gjenstander som er lengst.

4. Det fjerde nivået, *Conservation,* oversatt til *bevaring av lengde*, bygger på forståelsen av et objekt ikke blir lengre eller kortere selv om det flyttes. Dette innebærer at eleven forstår at noe som ser opplagt ut kan være et synsbedrag. Eksempel: Per og Pål er like høye. Selv om Pål stiller seg på en stol og ser høyere ut enn Per, så betyr det ikke at han har blitt lengre enn Per. Clements og Stephan påpeker at denne forståelsen ofte utvikles hos barn fra de er fem til sju år.
5. På det femte nivået, *Accumultation of distance*, oversatt til *akkumulering av avstand*, har elevene forståelse for at antall ganger en måleenhet gjentas gir uttrykk for hvor mange ganger objektet er dekket, med en bestemt måleenhet. Dette står i kontrast til det andre nivået, gjenta valgt måleenhet. På det andre nivået bruker eleven måleenheten mest til å telle hvor mange ganger man kan legge den langs en gjenstand, mens på det femte nivået ser eleven på hvor mange ganger måleenheten kan brukes til å dekke <u>hele</u> gjenstandens lengde, uten hull.
6. Det sjette, og siste nivået er *Relation to number*, oversatt til *sammenheng mellom antall og måling*. Elever i barneskolen teller ofte antall enheter det er plass til når de

skal måle en gjenstand. Clements og Stephan (2004) viser til bruker en lignende figur som vist nedenfor for å beskrive fenomenet.



Figur 2: Oppgave som undersøker elevers telling i måleoperasjoner. Utformet etter Clements og Stephan (2004, s. 303).

Clements og Stephan (2004) beskriver at en vanlig misoppfatning er at en linje med plass til fem enheter er lengre enn en linje med plass til seks enheter, selv om enhetene ikke er like lange. I dette eksempelet ville det bety at linje B blir sett på som lengre enn linje A, da denne inneholder seks piler, mens linje A bare har fem. Å forstå at lengden på måleenheten har innvirkning på måltallet er et viktig konsept for å forstå måling, ifølge Clements og Stephan.

Den tredje og siste modellen jeg brukte for å sette sammen rammeverket er av Hurrell (2015). Hurrell skriver mer generelt om måling, og har ikke avgrenset fokuset til kun lengdemåling. Denne teksten er i større grad erfaringsbasert enn forskningsbasert, i motsetning til Sarama et al. (2022) og Clements og Stephan (2004). Hurrell presenterer fem idéer for hvordan lærere kan legge til rette for elevers utvikling av måling. Dette er ikke direkte nivåer for forståelse av lengdemåling, men Hurrell sine fem grunnprinsipper for undervisningen har ulike krav til elevers forståelse. Hvert av de fem prinsippene krever en forståelse som bygger på det foregående prinsippet. På den måten fungerer disse prinsippene på samme måte som nivåene til Sarama et al. (2022) og Clements og Stephan (2004). Jeg presenterer her en norsk oversettelse av prinsippene, i tråd med Aspenes (2022), da min egen oversettelse ble relativt lik. Her beskriver jeg hva de ulike prinsippene for undervisning i lengdemåling kan kreve av elevene sin forståelse.

1. Identifisere egenskaper som skal måles. Eleven må kunne avgjøre om det er objektets høyde, vekt eller andre egenskaper som skal måles. Hvilken egenskap som skal måles bestemmer fokuset for de andre prinsippene. I dette tilfellet er det objektets lengde.
2. Sammenligne. Eleven kan stille spørsmål som «hvilken gjenstand er lengst?» Eleven kan gjøre rede for et svar på spørsmålet ved å sammenligne de to gjenstandene.

Hurrell skiller ikke direkte og indirekte sammenligning, da han ikke har delt disse prinsippene inn i nivå, slik som Sarama et al. (2022) og Clements og Stephan (2004). Da jeg formet et teoretisk rammeverk med utgangspunkt i de tre nevnte tekstene måtte jeg splitte opp Hurrells prinsipp, sammenligne. Selv om prinsippet å sammenligne rommer både direkte og indirekte sammenligning, så svarer de to begrepene til to ulike nivåer som jeg presenterte tidligere i dette kapittelet. I neste delkapittel viser jeg hvordan jeg har delt opp dette prinsippet og plassert det i det teoretiske rammeverket sammen med andre nivåer som krever samme ferdigheter hos elevene.

3. Bruke ikke-standardiserte måleenheter. Eleven kan bruke ikke-standardiserte måleenheter for å måle en gjenstand og deretter sammenligne med andre gjenstander og andre elevers resultater. Her vil elevene oppdage at det kan være vanskelig sammenligne resultater med elever som har brukt andre ikke-standardiserte måleenheter. Hurrell argumenterer for at måling med ikke-standardiserte måleenheter er like nøyaktig som måling med standardiserte måleenheter, men det er vanskeligere å kommunisere resultatene. Dersom det er brukt binderser som måleenhet kan man ikke garantere at andre som skal etterprøve din måling har like lange binderser. Han argumenterer også for at bruk av ikke-standardiserte måleenheter kan gi elever forståelse av hvorfor man bruker ulike måleenheter. Det er enklere å måle lengden av en fotballbane med skritt enn med binders. På samme måte er det enklere å bruke meter enn centimeter i det samme eksempelet.
4. Bruke standardiserte måleenheter. Eleven kan bruke innsikter fra bruk av ikke-standardiserte måleenheter i overgangen til bruk av standardiserte måleenheter. De fleste elever vil erfare at det blir lettere å sammenligne resultatene sine med andre elever ved bruk av standardiserte måleenheter.
5. Bruk av måling. Når elevene har god kjennskap til måling, kan de ta i bruk formler. På dette nivået er ikke målingen i seg selv lenger et mål, men brukes som en del av større regneoperasjoner.

Hurrell (2015) sitt siste nivå reflekterer bruken av måling på samme måte som læreplanen for 6. trinn legger opp til. De to andre modellene, Sarama et al. (2022) og Clements og Stephan (2004) er i større grad rettet mot elever i småskolen. Til sammen dekker disse tre modellene den forventede utviklingen av elevers forståelse av lengdemåling, som starter på 1. trinn og avsluttes på 6. trinn.

3.1.1 Rammeverk for kategorisering av utviklingsnivå i lengdemåling

Med utgangspunkt i de tre teoriene jeg nå har presentert, har jeg utformet et rammeverk for kategorisering av utviklingsnivå i lengdemåling. Ser man de tre modellene opp mot hverandre er det flere nivåer som sammenfaller. Likevel har hver av modellene aspekter som de andre ikke har. Det er derfor en sammenheng mellom de tre modellene, samtidig som de utfyller hverandre. Sarama et al. (2022) fokuserer mest på yngre elevers utvikling av forståelse i lengdemåling, mens Hurrell (2015) sine prinsipper strekker seg lengre, mot en forståelse der måling i seg selv ikke er hovedpoenget med oppgaven, men brukes som en del av løsningen. Likevel har Sarama et al. og Hurrell to nivåer som er tilsvarende hverandre. Jeg har valgt å se disse modellene opp mot hverandre, og sett hva som overlapper og hva som skiller seg ut i hver enkelt modell. Dette arbeidet resultert i et rammeverk, tabell 1, som ble brukt i analysen av lærebøkene. Rammeverket er en sammenveving av fremstillingene til Clements og Stephan (2004), Hurrell (2015) og Sarama et al. (2022). For hvert utviklingsnivå følger en beskrivelse av hvilke ferdigheter elever på dette nivået mestrer. Beskrivelsen er en oppsummering av kjennetegn hentet fra hvert nivå i alle de tre teoriene. Hver av de tre teoriene til Clements og Stephan, Hurrell og Sarama et al. kan leses for seg, i hver sin kolonne i tabell 1. For å lese rammeverket som en helhet begynner man øverst i venstre hjørne. På den andre raden presenteres det første nivået. Man leser hver rad horisontalt mot høyre, kolonne for kolonne. Videre går man til den tredje raden, og leser all informasjon om dette utviklingsnivået. På denne måten forsetter man nedover, rad for rad. Slik får man innsikt i hvilke teorier som danner de ulike utviklingsnivåene, og hvilke ferdigheter og forståelser som kjennetegner elever på hvert utviklingsnivå.

Tabell 1: Rammeverk for kategorisering av utviklingsnivå i lengdemåling. Basert på Clements og Stephan (2004), Hurrell (2015) og Sarama et al. (2022).

Nivå	Clements & Stephan (2004)	Hurrell (2015)	Sarama et al. (2022)	Ferdigheter
0		Identifisere egenskaper som skal måles		Eleven kan avgjøre hvilke egenskaper ved en gjenstand som skal måles.
1		Direkte sammenligning	Direkte sammenligning av lengde	Eleven kan legge to gjenstander inntil hverandre og avgjøre hvilken som er lengst.
2	Oppdeling			Eleven kan se for seg en mental oppdeling av gjenstanden i like store deler.
3	Gjenta valgt måleenhet			Eleven kan bruke en gitt måleenhet og legge den gjentatte ganger langs gjenstanden. Ser ikke verdien av at måleenheten må legges inntil hverandre.
4	Transitivitet	Indirekte sammenligning		Eleven kan stille spørsmål om hvilket objekt som er høyest og avgjøre dette. uten å kunne sammenligne objektene direkte.
5	Bevaring av lengde			Eleven har forståelse for at lengden til en gjenstand ikke endres ved at gjenstanden flyttes.
6	Akkumulering av avstand	Bruke ikke-standardiserte måleenheter	Lengdemåling fra ende til ende	Kan måle med ikke-standardiserte måleenheter, og ser verdien av å legge de helt inntil hverandre. Kan bruke linjal med veiledning.
7	Sammenheng mellom antall og måling			Eleven ser sammenhenger og forskjeller mellom telling og måling.
8		Bruke standardiserte måleenheter	Velge passende måleenhet og gjennomføre måleoperasjon	Eleven bruker linjal med minimal veiledning. Kan reflektere over ulike standardiserte måleenheter.
9		Bruk av måling		Når elevene har god kjennskap til måling, kan de ta i bruk formler. Herfra kan elevene bruke måling som et middel, ikke lenger et mål i seg selv.

Videre beskriver jeg hvordan denne modellen ble utarbeidet, ved å trekke frem nivåer fra de ulike modellene som sammenfaller. I kapittel 4.4 beskriver jeg mer detaljert hvordan jeg brukte dette rammeverket i analysen av de utvalgte lærebøkene.

Utviklingsnivå null handler om å identifisere egenskaper som skal måles, som er et av Hurrell (2015) sine prinsipper. Dette prinsippet er en forutsetning for å kunne snakke om lengdemåling. For å beskrive en utvikling av forståelse i lengdemåling må man først være i stand til å avgrense målingen til å handle om en gjenstands lengde. Derfor er dette prinsippet plassert som et utviklingsnivå null. Dette er ikke direkte et utviklingsnivå innenfor lengdemåling, da dette utviklingsnivået også vil være grunnleggende for andre former for måling, som å kunne identifisere egenskaper som en gjenstands vekt eller volum.

Det første utviklingsnivået i denne modellen representerer en lite utviklet forståelse for lengdemåling, som er vanlig ved skolestart (Sarama et al., 2022). Det niende utviklingsnivået skisserer en god forståelse av lengdemåling, som reflekterer målene som er satt i læreplanen for 6. trinn. Dette rammeverket er ikke en absolutt rekkefølge for hvordan elevers forståelse av lengdemåling utvikles. Elever kan bevege seg mellom de ulike nivåene, eller hoppe over enkelte nivåer. For eksempel ved at elever har forståelse for hvordan man kan måle ved bruk av standardiserte måleenheter (sjette utviklingsnivå) uten å ha forstått fenomenet transitivitet (fjerde utviklingsnivå).

Som vist i tabellen favner Sarama et al. (2022) sin modell bredt. I det sammensatte rammeverket går den fra første utviklingsnivå til åttende utviklingsnivå. Mellom disse nivåene er det flere utviklingsnivåer fra de andre modellene. Modellen til Sarama et al. starter med elevens forståelse for direkte sammenligning av gjenstander og strekker seg helt til eleven kan velge en standardisert måleenhet og gjenta denne på en nøyaktig måte. Ifølge de andre modellene foregår det det mange ulike prosesser mellom disse to nivåene.

Her beskrives hvert utviklingsnivå og hvordan rammeverket er satt sammen av ulike elementer fra de tre nevnte teoriene:

0) Utviklingsnivå null består av Hurrell (2015) sin beskrivelse av ferdigheten å kunne identifisere egenskaper som skal måles.
1) Det første utviklingsnivået beskriver den tidligste forståelsen av lengdemåling i dette teoretiske rammeverket. Dette utviklingsnivået består av Sarama et al. (2022) sitt første, og laveste nivå, direkte sammenligning av lengde, og Hurrell (2015) sitt prinsipp om direkte sammenligning. Som navnet på nivået sier, kan eleven avgjøre

hvilken av to gjenstander som er lengst, ved bruk av direkte sammenligning. Dette nivået innebærer ikke bruk av en bestemt måleenhet. Resultatet blir fremstilt ved å legge to gjenstander inntil hverandre og se hvilken som rekker forbi den andre gjenstanden.

2) Det andre utviklingsnivået består av Clements og Stephan (2004) sitt første nivå oppdeling. For å mentalt kunne dele opp en gjenstand i like store deler, slik som Clements og Stephan beskriver, må man også avgjøre hvilken egenskap ved gjenstanden som brukes for å dele opp gjenstanden i like store deler. Det andre utviklingsnivået bygger altså tydelig på utviklingsnivå null.
3) Tredje utviklingsnivå består kun av Clements og Stephan sitt andre nivå, gjenta valgt måleenhet. Ingen av de andre teoriene beskriver tilsvarende ferdigheter eller forståelse. På dette utviklingsnivået kan eleven gjenta en bestemt måleenhet, ved å legge den gjentatte ganger langs objektet som skal måles. Men eleven har enda ikke forståelse for at måleenhetene må legges inntil hverandre for at man skal få et nøyaktig måleresultat.
4) Fjerde utviklingsnivå består av Clements og Stephan (2004) sitt tredje nivå, transitivitet, og Hurrell (2015) sitt prinsipp om indirekte sammenligning. Disse nivåene tilsvarer hverandre, ved at begge legger til grunn at eleven kan sammenligne lengden til to gjenstander, uten å kunne sette de to gjenstandene opp mot hverandre. Dette nivået kjennetegnes ved forståelsen av at gjenstander kan sammenlignes på ulike måter, både direkte og indirekte. Denne forståelsen kan brukes til å sammenligne to gjenstander som ikke kan legges inntil hverandre. I forklaringen av dette nivået i Clements og Stephan sin modell, beskrev jeg Anna som skal sammenligne en dør og et vindu. Dersom Anna ikke har utviklet en transitiv forståelse, ville hun hatt utfordringer med å sammenligne de to gjenstandene. Sammenligning er altså et viktig begrep i dette utviklingsnivået. Til sammen danner nivåene indirekte sammenligning fra Hurrell, og transitivitet fra Clements og Stephan, det fjerde utviklingsnivået i dette rammeverket.
5) Det femte utviklingsnivået i dette rammeverket består at Clements og Stephan sitt fjerde nivå, bevaring av lengde. Det er ingen av de andre teoriene som har et nivå som fokuserer på den samme forståelsen. Dette nivået krever at elevene har forståelse for at lengden til en gjenstand ikke endres selv om gjenstanden flyttes på.
6) Videre har alle de tre modellene et nivå som mer eller mindre sammenfaller, sjette utviklingsnivå i dette rammeverket. Det består av Clements og Stephan (2004) sitt

femte nivå, *akkumulering av avstand*, samt Hurrell (2015) sitt tredje nivå, *bruke ikke-standardiserte måleenheter*, og Sarama et al. (2022) sitt andre nivå, *lengde fra ende til ende*. Til sammen innebærer dette nivået at eleven kan måle med ikke-standardiserte måleenheter, og ser verdien av å legge de helt inntil hverandre. Eleven kan også bruke linjal med veiledning, men er enda ikke helt bekvem med bruk av standardiserte måleenheter.

7) På det sjuende utviklingsnivået bygger elevene forståelse for sammenhenger mellom antall og måling. Dette innebærer en forståelse av at en gjenstand som er 7 cm lang kan legges ved siden av linjal og dekke fra markeringen 0 til markeringen 7. Denne forståelsen rommer også sammenhengen mellom måleenhet og måltall, som at en lengre måleenhet vil gi et lavere måltall og motsatt. For å arbeide med forståelse av denne sammenhengen brukes gjerne en knekt linjal, som jeg beskrev i kapittel 2.3.
8) Åttende utviklingsnivå er en kombinasjon av Sarama et al. (2022) sitt tredje nivå, *velge passende måleenhet og gjennomføre måleoperasjon* og Hurrell (2015) sin beskrivelse av å *bruke standardiserte måleenheter*. Sarama et al. beskriver at på dette nivået kan elevene bruke linjal med minimal veiledning. Dette passer med det matematiske nivået med å bruke standardiserte måleenheter. Hurrell beskriver at for å si at en elev kan å bruke standardiserte måleenheter, må eleven være i stand til å reflektere over valg av standardiserte måleenheter. Dette er det samme som å være i stand til å velge en passende måleenhet til Sarama et al. beskriver det. I begge tilfeller må eleven ha kjennskap til ulike standardiserte måleenheter og hvilken måleenhet som kan egne seg til hvert enkelt tilfelle, ut ifra hvor lange avstander eleven skal måle.
9) Det niende utviklingsnivået består av det Hurrell (2015) forklarer som *bruk av måling*. På dette nivået er ikke lenger måleoperasjonen det matematiske målet med en oppgave, men brukes som en del av arbeidet for å løse oppgaven. Eksempler på dette kan være oppgaver som går ut på å regne ut omkrets av ulike geometriske figurer.

Gjennom denne sammenvevingen av tre modeller gir sluttproduktet et eksempel på hvordan elevers forståelse av lengdemåling kan utarte seg gjennom hele barneskolen.

Det teoretiske rammeverket kunne også inkludert andre forskeres arbeid med elevers utvikling av forståelse i lengdemåling, som for eksempel Clarke et al. (2003). Denne modellen kunne fungert godt i sammenheng med de andre. Likevel er den utelatt, da den ikke ville tilført noe nytt. Alle de fem nivåene til Clarke et al. kan plasseres sammen med de eksisterende utviklingsnivåene i det teoretiske rammeverket, og den ville derfor ikke hatt påvirkning på resultatene.

Smith III et al. (2013) nevner at måling er et matematisk tema som åpner opp for mange ulike representasjonsformer. Hurrell (2015) påpeker det samme, og understreker at måling egentlig krever ulike representasjonsformer. I utvikling av nivåene tar elevene i bruk ulike representasjonsformer, fra det konkrete som fotlengder og binders, via centikuber, til bruk av linjaler med standardiserte måleenheter som centimeter og meter. Videre gjør jeg rede for ulike representasjonsformer i matematikk, og kobler dette til lengdemåling.

3.2 Bruk av ulike representasjonsformer i matematikk

Som nevnt i innledningen til dette kapittelet hevder Van de Walle et al. (2013) at måling er en stor del av matematikken som elevene bruker i hverdagslivet. I læreplanen for matematikk er representasjon en del av ett av kjerneelementene i faget. Læreplanen peker på at elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er derfor viktig at elevene er kjent med ulike former for representasjoner innenfor måling, dersom de skal mestre måling både i skolematematikken og i hverdagen.

Hana (2014) beskriver et skille mellom interne og eksterne representasjoner. Interne representasjoner er indre bilder hver enkelt person lager seg av et objekt eller en prosess, og vil ikke være aktuelt i denne oppgaven. Interne representasjoner er individuelle fremstillinger og tanker, som kan være ulike for alle individer. Derfor er det ikke mulig å se på interne representasjoner i en trykt lærebok. I denne sammenhengen er de eksterne representasjonene mest relevante, da disse kan uttrykkes fysisk og brukes i kommunikasjon mellom mennesker. Derfor vil en trykt lærebok kun inneholde eksterne representasjoner. Eksterne representasjoner favner mange ulike former for representasjoner, og kan være både muntlig språk, skriftlige matematiske uttrykk og matematiske modeller.

Representasjonsformer kan klassifiseres på ulike måter, og først i dette kapittelet beskriver jeg hvordan Duval (2006) klassifiserer mono- og multifunksjonelle registre, samt diskursive og ikke-diskursive representasjoner. Videre beskriver jeg Lesh (1981) sine semiotiske registre, kombinert med Hana (2014) sine innspill til samme modell. Det var Lesh sin modell som ble brukt som utgangspunkt for klassifiseringen av lengdemålingsoppgavene i Multi, men Duval sine perspektiver er likevel relevant og ble brukt i kombinasjon med Lesh sin modell for å drøfte resultatene.

3.2.1 Duval sine registre

Duval (2006) klassifiserer registre etter om de er *monofunksjonelle* eller *multifunksjonelle*, og representasjoner ut ifra om de er *diskursive* eller *ikke-diskursive*. Hana (2014) forklarer at monofunksjonelle registre har én funksjon, å utføre matematiske prosesser. Denne kan for eksempel være matematiske formler og uttrykk, som kun brukes til å regne ut matematiske problem. Multifunksjonelle register inneholder flere funksjoner, og Hana trekker frem muntlig språk som et multifunksjonelt register. Man kan bruke det muntlige språket til å løse matematiske problem, men det muntlige språket har mange andre funksjoner i tillegg til dette, som vanlig hverdagsspråk.

Ved bruk av diskursive representasjoner man uttrykke matematiske utsagn, men ikke-diskursive representasjoner kan ikke brukes til å uttrykke matematiske utsagn (Hana, 2014). Innenfor ikke-diskursive representasjoner finner man for eksempel tegninger. Tegninger er ikke i stand til å uttrykke et matematisk utsagn, slik man kan gjøre med ord. Tegninger er likevel relevant innenfor matematikken, for eksempel i denne undersøkelsen dukker tegninger opp som utgangspunkt for en måleoperasjon. Det at tegninger i seg selv ikke uttrykker matematikk, men krever et innslag av ord, tanker, eller symboler gjør at Duval klassifiserer tegninger innenfor ikke-diskursivt representasjoner. Tegninger kan altså brukes til matematiske formål, men kan også brukes til helt andre formål. Dette gjør at Duval klassifiserer tegninger innenfor multifunksjonelle registre. De ulike registrene rommer ulike former for representasjoner. De ulike representasjonsformene for hvert register er vist nedenfor i figur 3. Tegninger finnes i figur 3 i krysningspunktet mellom ikke-diskursive representasjoner og multifunksjonelle registre. Dette er fordi tegninger i seg selv ikke er matematiske, men at de likevel kan brukes til matematiske formål, og andre formål.

Hana (2014), som bygger på Duval (2006) påpeker at noen matematiske problemer kun har én bestemt representasjon som enkleste fremgangsmåte, mens andre problemer krever at man bruker flere representasjoner samtidig. Det finnes ingen spesiell representasjon som vil fungere til alle formål, og Hana understreker at matematikkundervisning derfor bør inneholde mer enn enkeltrepresentasjoner. Dette viser behovet for læreplanens mål om at elevene skal kunne veksle mellom ulike representasjoner, som nevnt i kapittel 1.3. Duval kaller denne vekslingen mellom ulike representasjoner for *transformasjoner* (transformations). Duval (2006) skiller mellom to former for transformasjoner og kaller disse *overganger* (conversement) og *behandlinger* (treatments). Den norske oversettelsen av de tre begrepene er hentet fra Hana (2014). For å skille disse tre begrepene fra hverandre bruker jeg ordet transformasjon om å veksle mellom representasjonsformer, der andre kanskje ville brukt ordet overgang. Når jeg skriver ordet overgang brukes det med Duval sin betydning av ordet. Overganger er transformasjoner som innebærer et skifte mellom to ulike registre. Dette kan være å gå veien fra et funksjonsuttrykk med matematiske symboler til en grafisk fremstilling. Behandlinger er transformasjoner av representasjoner som skjer innenfor samme register. Det kan være å regne ut en likning, som hele tiden foregår i et monofunksjonelt register, der man bruker matematiske symboler som representasjon gjennom hele prosessen.

	Diskursive representasjoner	**Ikke-diskursive representasjoner**
Multifunksjonelle registre	Naturlig språk, skriftlig eller muntlig (eks. forklaringer)	Ikonisk (eks. tegning, skisse, mønster) Ikke-ikonisk (eks. geometriske konstruksjoner)
	Overgangsrepresentasjoner	
Monofunksjonelle registre	Symbolske system (eks. beregninger)	Diagram, grafer

Figur 3: Klassifisering av ulike registre benyttet i matematikk. (Hana, 2014, s. 146, basert på Duval, 2006, s. 110).

I denne figuren er transformasjonene mellom ulike registre, overganger, markert med grønne piler mellom de ulike rubrikkene. De grønne pilene representerer altså operasjoner som krever at elevene kan veksle mellom ulike matematiske registre. Transformasjoner innenfor samme register, behandlinger, er markert med røde piler innenfor hver rubrikk. De ulike registrene krever ulik forståelse av elevene. Duval (2006) påpeker at multifunksjonelle registre ligger nærmest verden utenfor matematikken, men understreker at å utvikle forståelse for disse registrene kan være utforendrende for mange. Duval har funnet at overganger fra monofunksjonelle til multifunksjonelle registre er vanskeligere for elever enn overganger mellom andre registre. På bakgrunn av dette er det derfor viktig at elever møter slike overganger gjennom hele skoleløpet, slik at de blir bekvemme med disse overgangene.

Duval (2006) sine registre fokuserer mye på transformasjoner som foregår mellom de ulike registrene. Videre beskriver jeg hvordan Lesh (1981) beskriver matematiske representasjonsformer og hva som kjennetegner de ulike formene.

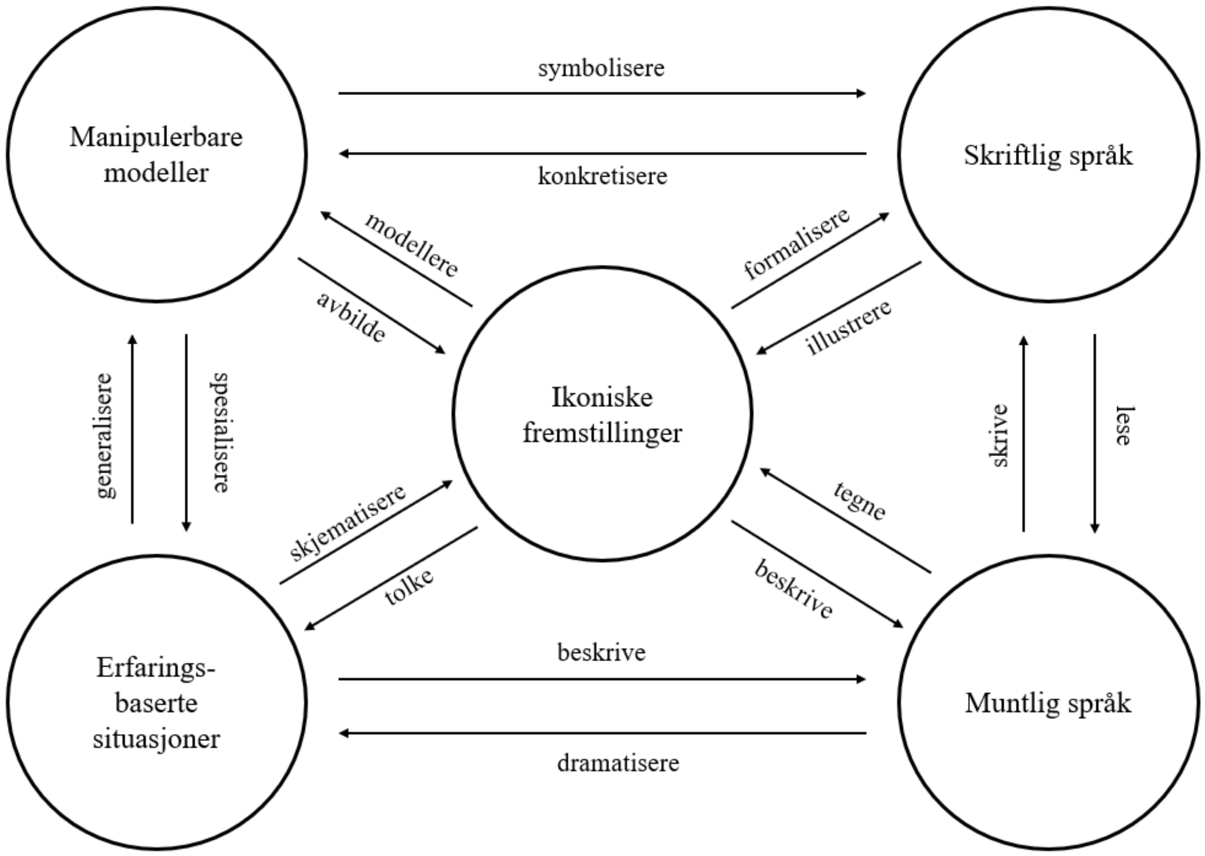
3.2.2 Rammeverk for kategorisering av representasjonsformer

Lesh (1981) beskriver også disse transformasjonene, men fokuserer mer på hva som kjennetegner hver enkelt representasjonsform.

Lesh (1981) kategoriserer disse representasjonene i fem ulike registre for matematikklæring. Den norske oversettelsen av disse registrene er hentet fra Hana (2014). De ulike registrene er:

1) **Erfaringsbaserte situasjoner** Kontekster fra verden utenfor skolematematikken. Brukes til å tolke og velge fremgangsmåter for å løse en matematisk situasjon.
2) **Manipulerbare modeller** Visuelle hjelpemidler som konkretiseringsmateriell, som kan manipuleres av elevene. For eksempel en tallinje eller centikuber.
3) **Ikoniske fremstillinger** Bilder og andre statiske fremstillinger.
4) **Muntlig språk**
5) **Skriftlig språk** Inkluderer alt skriftlig tekst, både hverdagslig språk og matematiske symboler.

Clement og Janvier (henvist i Lesh, 1981, s. 246) påpeker at oversettelsesprosessene mellom de ulike representasjonene er viktige for elevene når de senere skal bruke algebraiske uttrykk, tallbegreper og geometri for å løse reelle problemer i virkelige situasjoner. Lesh presenterer en modell som kobler sammen de ulike representasjonsformene ved bruk av disse oversettelsesprosessene. Her presenteres Hana (2014) sin norske oversettelse av denne modellen:



Figur 4: Rammeverk for kategorisering av representasjoner. Transformasjoner mellom representasjoner i Lesh sin klassifisering (basert på Hana, 2014, s. 150).

Selv om de ulike representasjonene kan virke veldig ulike, kan det være noen tilfeller der det er utfordrende å skille noen av kategoriene, blant annet om en oppgave kvalifiserer til ikonisk fremstilling eller manipulerbar modell. Lesh (1981) skriver at det tydeligste skillet mellom disse representasjonene er at fysiske handlinger er en stor del av manipulerbare modeller, noe som er vanskelig å integrere i ikoniske fremstillinger. Denne modellen med fem ulike representasjonsformer var utgangspunkt for å kategorisere oppgavene om lengdemåling i Multi. Hvordan dette ble utført, og hvilke egenskaper som ble avgjørende for hvordan en oppgave ble kategorisert beskrives nærmere i kapittel 4.5.

3.2.3 Lesh og Duval i sammenheng

Det er noen forskjeller mellom Lesh (1981) og Duval (2006) sine måter å fremstille representasjoner på. De skiller blant annet mellom hvordan de klassifiserer språket. Duval (2006) deler språket inn i naturlig språk og symbolsystemet. Det naturlige språket innebærer muntlig og skriftlig språk som brukes til å beskrive og forklare. Symbolsystemet er de skriftlige matematiske symbolene, som tallsymboler og algebraiske symboler. Lesh (1981) skiller derimot mellom det muntlige og skriftlige språket. Lesh skiller mer på språkets form, i motsetning til Duval som skiller etter innhold. En skriftlig forklaring på hvordan man bruker en linjal (se for eksempel side 86 i Alseth et al., 2020e, s. 86) vil Duval kategorisere som naturlig språk, mens Lesh kategoriserer det som skriftlig språk. Forklaringen 100cm = 1m vil kategoriseres innenfor symbolsystemet av Duval, men som skriftlig språk av Lesh.

Ser man Lesh og Duval sine ulike registre i sammenheng kan man se hvordan ulike representasjonsformer og transformasjoner mellom disse stiller ulike krav til elevene. Som Duval (2006) påpeker er overganger til multifunksjonelle registre ofte mer krevende enn en behandling innenfor samme register. Duval har ikke navngitt overgangene eller behandlingene, mens Lesh (1981) har gitt et navn til hver prosess som kobler de ulike representasjonene sammen. Dette blir brukt senere i oppgaven for å beskrive hvilke prosesser Multi setter i gang i oppgaver om lengdemåling.

4. Metode

I dette kapittelet beskriver jeg først lærebokanalyse som forskningsmetode generelt, før jeg går nærmere inn på forskningsmetoden for denne spesifikke oppgaven. I forrige kapittel presenterte jeg teoriene som denne oppgaven bygger på. I dette kapittelet gjør jeg rede for hvordan denne teorien ble brukt som utgangspunkt for en systematisk analyse og gjennomgang av datamaterialet. Jeg beskriver også de ulike kriteriene som ble brukt for å kategorisere materialet.

4.1 Lærebokanalyse som metode

For å undersøke et læreverk som Multi er det naturlig å bruke dokumentanalyse som forskningsmetode. I 1982 skrev Angvik i Norsk pedagogisk tidsskrift om lærebokanalyse som forskningsmetode og om hvordan dette kan gi verdifull innsikt i fagets utvikling. Han påpeker at dette er kunnskap som alle lærere og lærerstudenter bør ha kjennskap til.

Innenfor lærebokanalyse i matematikk er Charalambous et al. (2010) et kjent teoretisk rammeverk. De skiller mellom det *horisontal analyse* og *vertikal analyse*. Den horisontale analysen tar for seg et overordnet blikk på et læreverk. Den vertikale analysen går mer i dybden på hvert enkelt matematiske tema. Nedenfor vises rammeverket til Charalambous et al. (2010):

Tabell 2: Horisontal og vertikal analyse. Hentet fra Charalambous et al. (2010, s. 123).

<table>
<tr><th colspan="6">Horisontal analyse av lærebok</th></tr>
<tr><td colspan="3">Bakgrunnsinformasjon
• Tittel
• Antall bøker
• Sider
• Forfattere og bidragsytere
• Forlag og utgivelsesår
• Ekstra materiale som lærerveiledning eller ressursmateriell</td><td colspan="3">Overordnet struktur
• Antall timer og gjennomsnittlig antall sider per tema
• Oppbygning av hvert tema
• Hvilke temaer som dekkes
• Rekkefølgen på temaene</td></tr>
<tr><th colspan="6">Vertikal analyse av lærebok</th></tr>
<tr><td colspan="2">Kommunisert til elevene</td><td colspan="2">Krav til elevene</td><td colspan="2">Sammenhenger</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matematisk innhold
• Emnespesifikke konstruksjoner, strukturer
• Definisjoner, regler og konvensjoner
• Illustrasjons-representasjoner</td><td colspan="2" rowspan="3">• Potensielle kognitive krav
• Type respons</td><td colspan="2" rowspan="3">• Sammenhenger innenfor det matematiske temaet og mellom andre matematiske tema
• Klasseromsintruksjoner – lærebokforbindelse
• Forbindelser til kontekster utenfor skolen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matematiske praksiser
• Utførte eksempler
• Modellert tenking</td></tr>
<tr><td colspan="2">Holdninger
• Rettferdig og upartisk
• Syn på matematikk</td></tr>
</table>

Det er likheter mellom min metode for analyse av oppgavene i Multi og det Charalambous et al. beskriver som vertikal analyse. Jeg valgt å bruke et rammeverk som er mer matematikkfaglig spisset mot lengdemåling enn den vertikale analysemetoden. Hvordan dette rammeverket ble brukt beskriver jeg mer detaljert i kapittel 4.4. I kapittel 4.3 beskriver jeg hvordan jeg foretok en utvelgelse av materialet, som har likheter med det Charalambous et al. beskriver som horisontal analyse.

Det finnes flere måter å undersøke lærebøker i matematikk. Fan et al. (2013) har gjennomført en samlestudie av lærebokanalyser. Denne gir oversikt over hvilke lærebokanalyser som var gjennomført innen 2013. Fan et al. deler disse inn i flere kategorier, ut ifra hvordan analysen var bygd opp. De ulike kategoriene var analyser av enkeltstående lærebøker, sammenligning av flere bøker og undersøkelser av bruken av lærebøker i klasserommet. Angvik (1982) deler lærebokanalyser inn i enkeltanalyser eller gruppeanalyser. I denne undersøkelsen ser jeg på ett læreverk, som er det Angvik beskriver som en enkeltanalyse. Jeg undersøker selve læreboken, og ikke hvordan læreboken brukes i klasserommet, jamfør Fan et al.

Min analyse kan plasseres innenfor det Angvik (1982) beskriver som kvalitativ innholdsanalyse. Han beskriver at denne metoden blant annet ser på lærebokens innhold, fremstilling og arbeidsoppgaver, ved bruk av kategorisystem. En slik tilnærming er brukt i denne undersøkelsen. Videre i dette kapittelet beskrives prosessen med valg av læreverk, utvikling av kriterier for kategorisering, og hvordan disse kriteriene ble brukt i analysen av datamaterialet.

4.2 Valg av læreverk

Utgangspunktet for denne studien er Gyldendals læreverk Multi. Jeg har hentet informasjon om dette læreverket gjennom direkte kontakt med en redaktør i Gyldendal, Bjørn Andre Møst. Gyldendal er et av Norges største forlag, og har produsert læreverk i matematikk siden 1997. Læreverket Multi ble utgitt for første gang i 2006, i forbindelse med Kunnskapsløftet 2006. Tidligere har Gyldendal gitt ut læreverket Delta for matematikk på barnetrinnet (B.A. Møst, personlig kommunikasjon, 31. januar 2023).

Noe av grunnen til at Multi er valgt som analyseobjekt i denne studien er min egen erfaring med læreverket i skolen. Multi har blitt brukt som læreverk på alle praksisskolene jeg har vært på, samt i min egen skolegang. Det er altså et mye brukt læreverk, men det er vanskelig å bruke dette som et holdbart argument, da jeg ikke har lykkes med å finne salgstall for Multi eller andre læreverk i matematikk. I personlig kommunikasjon påpeker Bjørn Andre Møst i Gyldendal at Multi er brukt av en del skoler, samt oversatt og tatt i bruk i Sverige og Island. Dette tyder på at Multi er et anerkjent læreverk i fagmiljøet.

Med utgangspunkt i disse faktorene nevnt ovenfor landet jeg på å bruke læreverket Multi. Videre beskriver jeg hvordan jeg startet arbeidet med å sortere ut relevant materiale fra læreverket, og hvilke avgjørelser som ble tatt underveis i denne prosessen.

4.3 Valg av metode og utvalg

På grunn av tidsbegrensning har jeg ikke hatt mulighet til å se på alt innhold av måling i Multi. Som tidligere nevnt har jeg begrenset fokuset til lengdemåling, da dette er det grunnleggende temaet som videre læring i måling bygger på, slik som Aspenes (2022) poengterte i sin masteroppgave. Det første steget i prosessen var en systematisk gjennomgang av alle elevbøker og tilhørende lærerveiledning i læreverket Multi. Her kartla jeg hvilke klassetrinn og bøker som inneholdt kapitler om måling.

Videre sorterte jeg ut sidene som handlet spesifikt om lengdemåling. Denne metoden har likheter med det Charalambous et al. (2010) kaller for horisontal analyse. Ut ifra dette ble rammene for datamaterialet satt. Dette inkluderte bøkene Multi 1A, Multi 2B, Multi 3A, Multi 4B og Multi 6A. Videre foretok jeg en gjennomgang av disse bøkene og gjorde en opptelling av hvor mange oppgaver, aktiviteter, forklaringer, samtalebilder og andre elementer som innehold lengdemåling. I denne opptellingen tok jeg en avgjørelse om å telle hele oppgaver, altså å ikke telle deloppgaver som en egen oppgave. Dette valget tok jeg fordi Multi 1A, Multi 2B, Multi 3A ikke har delt inn oppgavene på samme måte som Multi 4B og Multi 6A. I de tre første bøkene skriver elevene direkte inn i læreboken, mens i Multi 4B og Multi 6A må de føre oppgaven og svaret i en rutebok. Da kan det være nødvendig dele inn flere av oppgavene i for eksempel 13a, 13b og 13c, slik det er gjort i Multi 4B og Multi 6A. I de tre første bøkene er det ofte flere oppgaver til hver oppgavetekst, uten at de er kalt a, b og c. For å skape et best mulig grunnlag for sammenligning på tvers av alderstrinnene har jeg derfor telt hver hele oppgave. Altså har jeg telt 13a, 13b og 13c som én oppgave, nummer 13. Dersom jeg hadde telt deloppgavene ville det blitt skjevt i sammenligningen mellom oppgavene i de tre første bøkene og 4B og 6A. Dette kunne ført til at hver hele oppgave i 4B og 6A hadde fått større innflytelse på resultatet enn en oppgavene i de tre første. Ved å se på forekomsten av oppgaver der skriftlig språk er brukt som representasjon ville en oppgave med tre deloppgaver i 6A gi tre forekomster i resultatet. Mens en oppgave med tre deloppgaver i 3A ville bare gi én forekomst i resultatet. På bakgrunn av dette er oppgavene telt opp likt, etter oppsettet i de tre første bøkene. Dersom jeg hadde valgt å gjøre dette på en annen måte ville det i liten grad påvirke resultatet. Hvis jeg hadde telt deloppgaver for seg selv ville utvalget rommet et større antall oppgaver. Resultatet kunne blitt påvirket dersom mange hele oppgaver innenfor en eller to spesifikke representasjonsformer eller utviklingsnivå inneholdt mange deloppgaver. I analyseprosessen oppdaget jeg ingen deloppgaver som passet for elever på et annet utviklingsnivå, eller brukte en annen representasjonsform enn hovedoppgaven.

Ved å avgrense temaet til lengdemåling ble det samlede datamaterialet håndterbart innenfor den gitte tidsrammen. Til slutt konkluderte jeg med 55 enkeltsider og 148 elementer som utgangspunkt for analyseprosessen.

4.4 Kategorisering av oppgaver etter nivå for lengdemåling

Utgangspunktet for analysen av lengdemåling var tabell 1, presentert i kapittel 3.1.1. For hvert nivå følger en beskrivelse av hvilke ferdigheter og innsikter som kjennetegner elevers forståelse på det gjeldende utviklingsnivået. Disse beskrivelsene ble brukt for å kategorisere hvilket utviklingsnivå for lengdemåling som oppgaven krever. Altså hvilket utviklingsnivå en elev må være på for at oppgaven er på et passende nivå. I dette delkapittelet beskriver jeg hvordan dette ble analysert og avgjort. I neste delkapittel beskriver jeg den tilsvarende prosessen for representasjonsformer. Videre viser jeg en eksempeloppgave og hvordan denne ble analysert med utgangspunkt i de gitte kriteriene.

Kriterier for kategorisering av oppgaver:

1) For at en oppgave skulle kategoriseres som passende for elever på første utviklingsnivå måtte oppgaven innebære en direkte sammenligning, der det er mulig å sette to gjenstander opp mot hverandre og se hvilken som er lengst.
2) Andre utviklingsnivå er en kombinasjon av Clements og Stephan (2004) sin beskrivelse av oppdeling, og Hurrell (2015) sin beskrivelse av ferdigheten å kunne identifisere egenskaper som skal måles. Oppgaver som kategoriseres som passende for elever på dette utviklingsnivå krever at elevene kan avgjøre om det er en gjenstand sin lengde, overflate, vekt eller volum som skal måles. Ut ifra dette kan eleven se for seg objektet oppdelt i like store enheter. Dette kan for eksempel være en indre forestilling av at en pinne kan deles opp i tre like lange deler. I stedet for å knekke pinnen for å lage tre like lange deler, kan eleven se for seg pinnen som et linjestykke med markeringer som danner tre like lange deler.
3) Oppgaver som krever at elevene kan gjenta en valgt måleenhet ble kategorisert som passende for elever på tredje utviklingsnivå. På dette nivået er det ikke et krav at elevene kan utføre måleoperasjonen nøyaktig og forstå hensikten med å legge måleenhetene inntil hverandre. Dette kunne være oppgaver der måleoperasjonen allerede var gjennomført, og elevene skal foreta en opptelling av antall måleenheter

som ble brukt. Et annet eksempel var måleoppgaver på lavere trinn som krevde mindre nøyaktighet.

4) Oppgaver som var passende for fjerde utviklingsnivå hadde ofte noen likheter med oppgaver på første utviklingsnivå. Men de skiller seg fra hverandre ved at oppgaver som kategoriseres som fjerde utviklingsnivå ikke tillater en direkte sammenligning. Oppgaver som ble kategorisert som passende for elever på dette utviklingsnivået inneholdt ulike elementer som ikke tillot direkte sammenligning. Dette krever at elevene har forstått fenomenet transitivitet, som beskrevet i kapittel 3.1 i eksempelet med Anna som vil finne ut hva som er lengst av døra og vinduet ved hjelp av et tau.
5) Oppgaver som var passende for elever på femte utviklingsnivå bygget ofte videre på den transitive forståelsen fra fjerde utviklingsnivå. Som nevnt i kapittel 3.1 innebærer dette at eleven forstår at noe som ser opplagt ut kan være et synsbedrag. Slik som eksempelet med Pål som står på en stol, og dermed ser det ut som han er høyere enn Per, selv om han egentlig ikke er det.
6) For å kategorisere en oppgave som passende for elever på sjette utviklingsnivå må oppgaven legge opp til korrekt bruk av ikke-standardiserte måleenheter. Dette innebærer å legge måleenhetene inntil hverandre. Slike oppgaver ga muligheter for å lære hvilken betydning dette har for måleresultatet. Dette henger sammen med en forståelse av at antall ganger en måleenhet gjentas, gir uttrykk for hvor mange ganger objektet er dekket, med en bestemt måleenhet. Slik jeg viste i figur 2, der en vanlig misoppfatning er at linjen med plass til seks piler er lengre enn linjen med plass til fem piler, selv om linjene er like lange. Det å forstå at lengden på måleenheten har innvirkning på måltallet er en viktig forutsetning for å mestre måling på dette nivået.
7) Typiske oppgaver for sjuende utviklingsnivået var oppgaver med bruk av en ødelagt linjal som redskap. Slike oppgaver krever at eleven har forstått en forskjell og en sammenheng mellom måling og antall. Dette bygger på forståelsen fra sjette utviklingsnivå, at antall ganger en måleenhet gjentas, gir uttrykk for hvor mange ganger objektet er dekket, med en bestemt måleenhet. I sjuende utviklingsnivå videreutvikles dette ved at eleven forstår hvorfor null ofte brukes som utgangspunkt for måleoperasjoner. Ved å bruke null som utgangspunkt kan man lese direkte av linjalen og få korrekt svar på måleoperasjonen. Oppgaver som utvikler denne forståelsen, bruker som nevnt ofte ødelagte linjaler som redskap for en måleoperasjon. For å gjennomføre måleoperasjonen må eleven enten telle antall enheter, eller beregne ut ifra siffermarkeringen på linjalen ved hver ende av gjenstanden.

8) For å kategorisere en oppgave som passene for elever på åttende utviklingsnivå måtte oppgaven legge opp til korrekt bruk av standardiserte måleenheter, eller refleksjon rundt dette.
9) Niende utviklingsnivå inkluderte oppgavene som ikke direkte innebærer en måleoperasjon, men som bruker måling som en kontekst for regneoppgaver. Eksempler på dette kan være oppgaver der elever skal regne ut omkretsen på en todimensjonal figur. Dette krever at elevene har forståelse for hvordan resultatene fra en allerede gjennomført måleoperasjon kan brukes for å komme frem til det oppgaven etterspør.

Disse kriteriene var utgangspunktet for analysen av det utvalgte datamaterialet. For å gjenkjenne hvordan en oppgave kan passe til elever på ulike utviklingsnivå har jeg sett på oppgaveteksten, og hva lærerveiledningen foreslår som passende fremgangsmåte. Lærerveiledningen ga mye informasjon om hvordan det er tenkt at elevene skal jobbe, og hva som kan være utfordrende med oppgaven. Lærerveiledningen ble brukt i hver oppgave, slik at det er læreverket som helhet som ble undersøkt, ikke bare elevboken.

En mulig feilkilde i dette arbeidet kan være min egen oppfatning om at lavere trinn ville ha oppgaver med lavere utviklingsnivå i måling. Dette ble jeg oppmerksom på underveis i arbeidet, og dette gjorde at jeg gikk tilbake til de første bøkene og gikk gjennom disse oppgavene en ekstra gang. I denne prosessen ble jeg oppmerksom på utforskingsoppgaven på side 67 og side 65 i Multi 1A. Ved første gjennomgang hadde jeg kategorisert disse som passende for elever på andre utviklingsnivå. Etter å ha gått tilbake i litteraturen som var utgangspunkt for rammeverket så jeg at disse oppgavene ville kreve at elevene hadde samme forståelse som sjuende utviklingsnivå. For å unngå at slike mistolkninger skulle bli en del av resultatene har jeg gått gjennom datamaterialet i sin helhet flere ganger, samt diskutert med veileder i de tilfellene jeg har vært mest usikker. Nedenfor viser jeg et eksempel på hva som er avgjørende i en analyse av utviklingsnivå i lengdemåling.

4.5 Kategorisering av representasjonsform

Utgangspunktet for analysen av representasjonsformer var figur 4, presentert i kapittel 3.2.2. For å fastsette kriterier for oppgaver som skulle kategoriseres tok jeg utgangspunkt i Lesh (1981) sine beskrivelser av de ulike representasjonsformene. På bakgrunn av dette har jeg formulert følgende kriterier:

1) **Erfaringsbaserte situasjoner.** Lesh skaper et skille mellom erfaringsbaserte situasjoner og manipulerbare modeller ved å påpeke at manipulerbare modeller skaper mindre «støy» enn de erfaringsbaserte situasjonene. På bakgrunn av hans beskrivelser har jeg satt som premiss for de erfaringsbaserte situasjonene at de må foregå utenfor den trykte læreboken. Dette er et viktig kriterium, da flere oppgaver i Multi tar utgangspunkt i virkelighetsnære eksempler for elevene. Et eksempel på dette er forskjellen mellom å måle en blomst og å måle en tegning av en blomst. Å måle en blomst er en erfaringsbasert situasjon, som foregår utenfor den trykte læreboken. Å måle en tegning av en blomst foregår i den trykte læreboken, og er kun en ikonisk fremstilling av en blomst, som skal brukes til å gjennomføre en måleoperasjon.
   Selv om jeg ovenfor skisserte et skille mellom manipulerbare modeller og erfaringsbaserte situasjoner så henger disse to representasjonene sammen. I en erfaringsbasert situasjon er det en ekte gjenstand som skal måles. Gjenstanden i seg selv representerer sin egen lengde. Men så fort man måler en gjenstand vil den oppmålte lengden være en representasjon av gjenstandens lengde. Denne representasjonen av gjenstandens lengde er en manipulerbar modell, uavhengig om man bruker for eksempel hendene eller en linjal til å representere lengden. Dermed ble hver oppgave som inneholdt måling i en erfaringsbasert situasjon kategorisert med en transformasjon til en manipulerbar modell. Den erfaringsbaserte situasjonen er selve gjenstanden og dens lengde, mens den manipulerbare modellen er en representasjon av gjenstandens lengde.
2) **Manipulerbare modeller**. Som nevnt er manipulerbare modeller begrenset til arbeid som helt eller delvis foregår i den trykte læreboken, da situasjoner utenfor læreboken ble kategorisert med utgangspunkt i en erfaringsbasert situasjon. Dette gjør det mer utfordrende å skille manipulerbare modeller fra de ikoniske fremstillingene i læreboken. Som nevnt i kap. 3.2.2 anser Lesh aktive handlinger som en stor del av manipulerbare modeller, men vanskelig å integrere i ikoniske fremstillinger. I denne undersøkelsen blir dette et viktig premiss for kategoriseringen av manipulerbare modeller. For at en oppgave skal kategoriseres som en manipulerbar modell må den involvere en aktiv handling, og kreve at eleven tilfører noe annet enn den trykte læreboken og en blyant. Dette kan være konkreter som centikuber, eller bruk av linjal til å måle for eksempel ikoniske fremstillinger i boken. Dersom måleoperasjonen er satt utenfor den trykte læreboken ble den som nevnt kategorisert som en erfaringsbasert situasjon, og deretter en transformasjon til en manipulerbar modell.

3) **Ikoniske fremstillinger**. Som nevnt ovenfor er ikoniske fremstillinger statiske fremstillinger som ikke involverer muligheten for fysiske handlinger eller bearbeidelser. Eksempler på dette er tegnede figurer eller tabeller i den trykte læreboken. Oppgaver ble kategorisert som ikoniske fremstillinger dersom et bilde, en tegning eller lignende var satt som en forutsetning for å kunne svare på det oppgaven krevde. En oppgave som går ut på å måle lengden av en tegnet gjenstand i boken, ble kategorisert som en ikonisk fremstilling, med en transformasjon til manipulerbar modell, dersom oppgaven krevde utstyr som linjal eller centikuber og lignende. Dersom det var en illustrasjon til pynt, eller annet lignende formål, ble det ikke kategorisert som en ikonisk fremstilling, da denne ikke kunne brukes som matematisk representasjon for oppgaven.
4) **Muntlig språk**. Muntlig språk er ikke videre beskrevet av Lesh. Oppgaver som inneholdt muntlig språk var ofte igangsatt av læreren, og kun nevnt i lærerveiledningen. Å avgjøre om en oppgave kunne kategoriseres med bruk av muntlig språk som representasjonsform var relativt uproblematisk. Dersom lærerveiledningen foreslo muntlig samtale ble dette inkludert som en representasjonsform i oppgaven. Det er mulig at muntlig samtale blir brukt mer i klasserommet enn det som er anslått i lærerveiledningen, for eksempel ved at elevene samarbeider to og to, og bruker språket underveis for å komme frem til en løsning. Dette er ikke relevant for denne oppgaven, da jeg primært undersøker hvordan læreboken er utformet, ikke hvordan den blir tatt i bruk. For å finne ut av dette må man benytte andre metoder enn det som blir brukt i denne undersøkelsen.
5) **Skriftlig språk**. Lesh utdyper ikke mye om hva han legger i skriftlig språk som representasjonsform. Hana (2014) som også har skrevet om denne modellen påpeker at skriftlig språk inkluderer all skriftlig tekst, både hverdagslig språk og matematiske symboler. Flere av oppgavene i Multi har en skriftlig forklaring av hva oppgaven etterspør. Denne teksten er ikke inkludert som en selvstendig representasjonsform, da den er inkludert i de aller fleste oppgavene og ikke brukes aktivt i arbeidet med oppgaven. Denne teksten fungerer som en igangsetter for oppgaven, men selve oppgaven bruker ikke nødvendigvis skriftlig språk som en representasjonsform. For at en oppgave ble kategorisert med skriftlig språk som første representasjonsform, var det avgjørende at skriftlig språk var det matematiske utgangspunktet for oppgaven. Et eksempel på oppgaver som bruker skriftlig språk som representasjonsform kan leses i

kapittel 5.1.9, figur 18. Oppgaver som krevde et skriftlig svar ble kategorisert som for eksempel en ikonisk fremstilling med transformasjon til skriftlig språk.

I kategoriseringen av oppgavene brukte jeg en tabell med to kolonner. En kolonne for notasjon av utviklingsnivå for lengdemåling og en kolonne for notasjon av representasjonsform og eventuelle transformasjoner. Nedenfor vises tabell 2, som er et utsnitt fra analysen av Multi 1A. Oppgaven som er nevnt i tabellen vises i neste delkapittel. Tabellen ble brukt for å notere begrunnelse for kategorisering av utviklingsnivå i lengdemåling og representasjon.

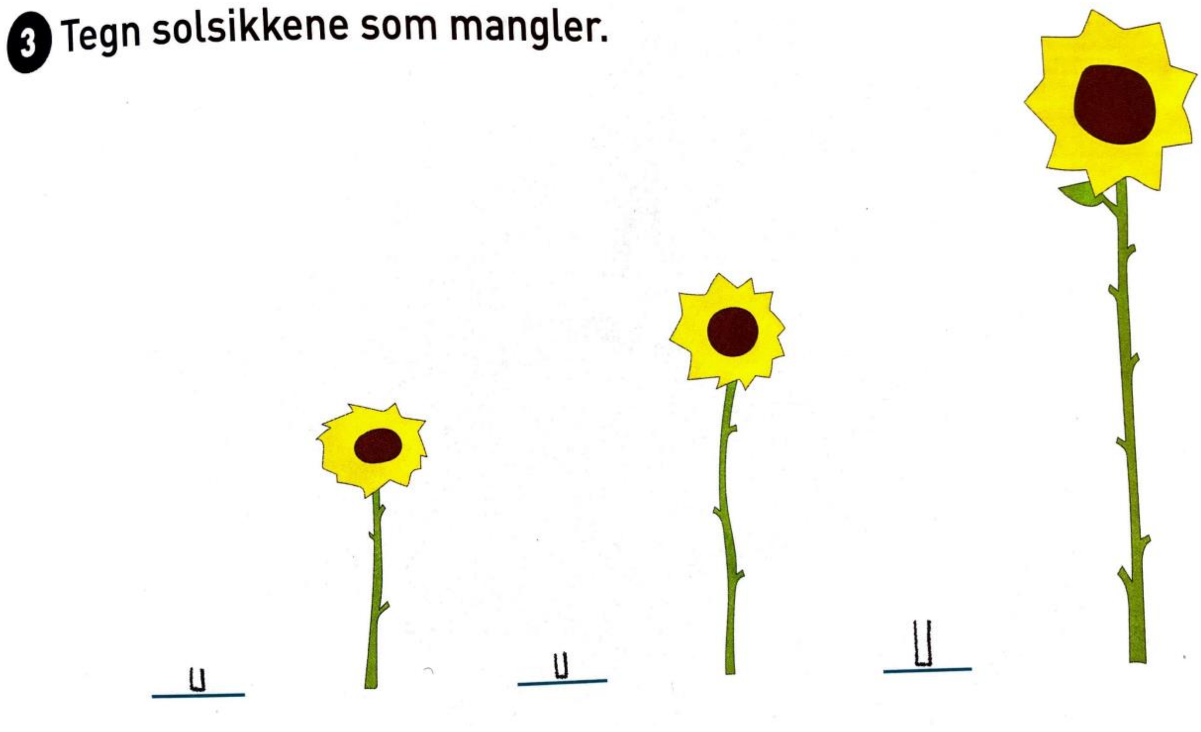
Tabell 3: Tabell for notasjon under analyseprosessen.

Oppgave	Utviklingsnivå	Representasjon
3 side 61	1 Direkte sammenligning av lengde. Eleven skal tegne noe som er mellom to gitte lengder.	Ikoniske fremstillinger. Oppgaven tar utgangspunkt i en tegning av solsikker. Oppgaven krever ikke annet utstyr enn blyant og elevbok.

Tallet i ruten under utviklingsnivå henviser til nummeret for utviklingsnivået som oppgaver passer til. Videre følger navn på utviklingsnivået og en kort beskrivelse av hvilke elementer i oppgaven som ar avgjørende for hvorfor jeg anser den som passende for elever på det nevnte utviklingsnivået. Beskrivelsen som står her er ikke enn fullstendig analyse, men en kort kommentar til meg selv. Denne beskrivelsen noterte jeg ved første gjennomgang av datamaterialet, og brukte denne til å oppklare eventuelle mistolkninger ved senere gjennomganger.

4.5.1 Eksempel på kategorisering

I dette kapittelet viser jeg et eksempel på hvordan det teoretiske rammeverket ble brukt for å analysere utviklingsnivå og representasjonsformer. Her vises et utsnitt av en oppgave i Multi 1A:



Figur 5: Oppgave 3 side 61 i Multi 1A. Illustrasjon: Anne Tryti.

Det første jeg så på var representasjonsformen og hvordan oppgaven er fremstilt i elevboken. Oppgavens fremstilling og representasjonsform er synlig for eleven allerede før selve oppgaven er presentert. I denne oppgaven er det en tegning av tre solsikker. Dette er en ikonisk fremstilling. Videre fant jeg den samme oppgaven i lærerveiledning og undersøkte om det var forslag til fremgangsmåter som kunne endre eller legge til andre representasjonsformer. For denne gjeldende oppgaven skriver lærerveiledningen (Alseth et al., 2020b) følgende:

> 3) Tegn solsikker i stigende lengde. Elevene tegner solsikker på de blå strekene, slik at blomstene er sortert i stigende rekkefølge. Det er ikke nødvendig at elevene legger stor flid i å tegne fine blomster. Det vesentlige er lengde, og at solsikkene gradvis blir lengre. (s. 61)

Denne informasjonen tilfører ingen andre representasjonsformer enn det elevene møter i elevboken. Svaret skal fremstilles ved bruk av tegning, som gjør at elevene arbeider med oppgaven som en ikonisk fremstilling gjennom hele prosessen. Representasjonsformen i denne oppgaven ble dermed kategorisert som en ikonisk fremstilling, uten transformasjoner til andre representasjonsformer.

Det neste steget i analysen var å se på utviklingsnivå for lengdemåling, og undersøke hva oppgaven krever av elevene. Denne oppgaven krever at elevene ser hvordan høyden på solsikkene endrer seg for hvert steg til høyre. Elevene får ikke opplyst at solsikkene skal stige i høyde, det må de selv komme frem til. Dermed bygger denne oppgaven på utviklingsnivå null, der elevene må identifisere at det er gjenstandens lengde som skal undersøkes i denne konteksten. I denne oppgaven kan elevene sammenligne solsikkene direkte, da de starter langs den samme linjen. På bakgrunn av dette kategoriserte jeg oppgaven som passende for elever på første utviklingsnivå, der elevene kan avgjøre hvilken gjenstand som er lengst, ved bruk av direkte sammenligning.

4.6 Fremstilling av resultater

For å samle resultatene av representasjonsformer og transformasjoner har jeg brukt en tabell der de fem ulike formene står listet opp vertikalt og horisontalt. I denne tabellen markerte jeg hver transformasjon med en tellestrek. For å føre inn resultatene tok jeg utgangspunkt i første representasjonsform i oppgaven, og fant denne i den vertikale kolonnen, for eksempel ikoniske fremstillinger. Videre fulgte jeg denne raden horisontalt og satte en markering ved den neste representasjonsformen som ble brukt i oppgaven. I krysningspunktet mellom disse to representasjonsformene satte jeg en markering. Denne prosessen gjentok jeg for alle de 148 oppgavene.

Tabell 4: Tabell for transformasjoner mellom representasjonsformer

	Skriftlig språk	Muntlig språk	Ikoniske fremstillinger	Manipulerbare modeller	Erfaringsbaserte situasjoner
Skriftlig språk					
Muntlig språk					
Ikoniske fremstillinger					
Manipulerbare modeller					
Erfaringsbaserte situasjoner					

Alle oppgaver ble markert med grønt i tabellen. Oppgaver som ikke inneholdt transformasjoner mellom ulike representasjonsformer står oppført i krysningspunktet mellom samme representasjonsform, for eksempel i krysningen mellom skriftlig språk vertikalt og skriftlig språk horisontalt. Fra denne ruten, og diagonalt nedover mot høyre finner man alle oppgavene som ikke inneholdt transformasjoner mellom ulike representasjonsformer.

For oppgaver som inneholdt to eller flere transformasjoner mellom representasjonsformer markerte jeg dette med et fargeskifte på pennen. Oppgaver som har to transformasjoner, og altså benytter tre ulike representasjonsformer, er markert med rødt i tabellen. Utvalget inneholdt også oppgaver som benytter fire representasjonsformer, altså tre transformasjoner. Den tredje transformasjonen er markert med blått i tabellen.

Til sammen vil det være 148 grønne markeringer som tilsvarer antall oppgaver, og første (eller ingen) transformasjon mellom representasjonsformer. Videre beskriver de røde tallene hvor mange oppgaver som innehold tre representasjonsformer, og de blå tallene beskriver hvor mange oppgaver som innehold fire representasjonsformer, altså tre transformasjoner.

Lærerveiledningen er styrende for transformasjoner. Dersom lærerveiledningen foreslår flere representasjonsformer, er disse regnet med. Hvis ikke ville jeg ikke fått vist det fulle potensialet til læreverket. I kapittel 5.2.6 vises et eksempel på hvordan lærerveiledningen er avgjørende for kategorisering av representasjonsformer.

4.7 Studiens pålitelighet

I tillegg til den nevnte grupperingen av lærebokanalyser som enkeltanalyser eller gruppeanalyser, nevner Angvik (1982) en annen gruppering, ut fra interessene som står bak undersøkelsene. Hensikten med min undersøkelse er å finne ut hvordan Multi benytter representasjoner i oppgaver på ulike utviklingsnivå innen lengdemåling. En del av bakgrunnen for denne undersøkelsen er LK20 sin beskrivelse av representasjon som et kjerneelement i matematikkfaget. Angvik grupperer undersøkelser ut ifra tre ulike formål. Det første er studier som vurderer om lærebokens fremstilling er i samsvar med dagens forskingsresultater. Det andre er studier som tar utgangspunkt i pedagogisk teori, og kontrollerer om lærebøkene samsvarer med de nyeste oppfatningene på disse områdene. Den tredje typen er politiske eller ideologiske undersøkelser. Min undersøkelse svarer til Angviks første og andre beskrivelse av interessen bak undersøkelsen, nemlig hvordan læreverket Multi samsvarer med LK20 sitt fokus på representasjoner.

Et viktig aspekt i dokumentanalyse er å være så nøytral som mulig (Duedahl & Jacobsen, 2010). Men Duedahl og Jacobsen påpeker også at å være helt nøytral vil være umulig, uansett hvor mye man går inn for det. For å oppnå størst mulig nøytralitet har jeg i dette kapittelet beskrevet valgene jeg har tatt for å sortere ut relevant materiale og analysere dette materialet. Så langt har jeg presentert hvordan oppgavene systematisk ble valgt ut, på bakgrunn av det matematiske temaet lengdemåling. Videre har jeg beskrevet hvordan teorien ble brukt for å analysere de utvalgte oppgavene, for å gjøre leseren i stand til å forstå hvordan jeg har kommet frem til resultatene mine.

Postholm og Jacobsen (2018) beskriver forskning som både en prosess og et resultat. De understreker at forskningens kvalitet bestemmes i all hovedsak av hvordan kunnskapen er produsert. Dette innebærer hvordan prosessen har sett ut, og hvor transparent forskeren fremstiller prosessen. I denne oppgaven forsøker jeg å vise frem hva som ligger til grunn for valgene jeg har tatt, samt å vise frem eksempler jeg har vært usikker på. Dette kan være med på å sikre undersøkelsens pålitelighet. Validitet og reliabilitet er to sentrale begreper for alle forskningsprosjekter. Postholm og Jacobsen forklarer ordet validitet som gyldighet, og reliabilitet forklares som pålitelighet. Gyldighet og pålitelighet er viktig for all forskning, slik at gjennomførte studier kan legges til grunn for nye undersøkelser. Da er det avgjørende å forklare hvilke valg forskeren har tatt, og være åpen om hva som eventuelt kan være studiens svakheter. I dette kapittelet har jeg beskrevet hvordan jeg har gjennomført analysen. Dette er et grep for å sikre undersøkelsens reliabilitet. Ved å beskrive hvordan det teoretiske rammeverket ble tatt i bruk øker reliabiliteten, da det blir mulig å gjennomføre tilsvarende studie så likt som mulig. Dersom det er mulig for andre å komme frem til det samme som meg, kan det øke påliteligheten til denne undersøkelsen. Mine beskrivelser av utvikling av rammeverk, og bruk av teori øker muligheten for å etterprøve min undersøkelse og mine resultater.

Undersøkelsens gyldighet, eller validitet, handler om hvorvidt oppgaven er relevant, kan overføres til andre kontekster og undersøker det som er studiens hensikt (Christoffersen & Johannesen, 2012; Postholm & Jacobsen, 2018). Gjennom mine beskrivelser av problemstilling, utvelgelse av datamateriale og analyse av dette har jeg som hensikt å styrke oppgavens validitet. Postholm og Jacobsen (2018) deler validitet inn i indre og ytre gyldighet. Den indre gyldigheten i denne undersøkelsen handler om hvordan det jeg påstår at jeg har undersøkt samsvarer med det jeg faktisk har undersøkt. Derfor viser jeg 13 utvalgte eksempler fra analysen, slik at det blir tydelig for leseren hvordan jeg har gått frem for å undersøke hver enkelt oppgave. Dette kan ses i sammenheng med kapittel 4.4 og 4.5, der jeg presentere kriteriene for analysen, samt et eksempel. Et annet aspekt ved intern validitet, indre gyldighet, er hvilket grunnlag jeg har for å uttale med om årsak og virkning ut fra min undersøkelse (Postholm & Jacobsen, 2018). I det sjette kapittelet i denne oppgaven drøfter jeg resultatene fra analysen av Multi. Her er jeg tydelig på at jeg ikke kan si noe konkret om hvordan disse oppgavene vil påvirke elevenes læring, men jeg viser eksempler og begrunner hvordan og hvorfor oppgavene kan påvirke elevenes læring. Ut ifra en lærebokanalyse kan jeg ikke si noe om elevenes møte med oppgaven. Jeg kan kun uttale meg om hvordan oppgavene fremstår ut ifra hvilke representasjoner den legger opp til og hvordan det passer til elever på ulike utviklingsnivå i lengdemåling. I min undersøkelse er det Postholm og Jacobsen beskriver som den ytre gyldigheten mindre relevant. Dette handler om studiens overførbarhet. Ettersom jeg undersøker ett enkelt læreverk, er ikke mine resultater overførbare til andre kontekster. Ut ifra min analyse av Multi kan jeg ikke si noe om hvordan andre læreverk benytter representasjoner innenfor lengdemåling. Mine resultater vil heller ikke være overførbare til andre land, da utgangspunktet for min undersøkelse er den norske læreplanens beskrivelse av matematiske representasjoner. På den andre siden er teorien jeg har bygget oppgaven på hentet fra studier i ulike land, slik at denne vil være mer universell enn resultatene mine.

En utfordring i analysearbeidet har vært at jeg er alene om alt arbeidet. Jeg har møtt på oppgaver der har jeg vært usikker på hvordan jeg skal kategorisere oppgaven innenfor nivå av måling og representasjonsform. I slike situasjoner har jeg skrevet ned mine begrunnelser for å plassere en oppgave i en spesifikk kategori. Dette stiller krav til valgene mine skal være gjennomtenkt. Dette var et valg jeg tok for å møte det mulige problemet med at analysen kan bli for subjektiv når den gjennomføres av kun en person. I de største tvilstilfellene har jeg diskutert plasseringen med min veileder. Hun har utfordret meg på en god måte, ved å stille spørsmål til mine begrunnelser.

Ved å belyse utfordringen knyttet til objektivitet ønsker jeg å gjøre oppgaven så transparent som mulig. Som nevnt beskriver Duedahl og Jacobsen (2010) at det er utfordrende å være helt nøytral, selv ovenfor skrevne dokumenter, da man aldre helt kan legge fra seg sine egne synspunkter eller fordommer. Angvik (1982) understreker viktigheten av å gjøre leseren oppmerksom på hvordan man har valgt ut aktuelt materiale og bakgrunn for utvalg av sitater fra bøkene. I dette kapittelet, del 4.3, har jeg beskrevet hvordan utvelgelsesprosessen foregikk. Dette er med på å synliggjøre mine valg for leseren, slik at det er mulig å følge utviklingen frem til resultatene jeg har kommet frem til.

En mulig fallgruve i analysen var å kategorisere utviklingsnivå i lengdemåling ut ifra hvilket klassetrinn oppgaven var gitt på. Før jeg startet med analysearbeidet hadde jeg en hypotese om at utviklingsnivåene i lengdemåling ville bli gradvis høyere for hvert klassetrinn. Det var viktig å være klar over denne oppfatningen på forhånd, slik at den finne fikk styre min analyse og tolkning av oppgavene. Dette har jeg vært bevisst på underveis, og gått gjennom oppgaver jeg har vært usikker på flere ganger. Et eksempel på slike oppgaver blir vist i kapittel 5.1.3.

4.8 Forskningsetikk

I arbeidet med denne studien har jeg rettet meg etter de Forskningsetiske retningslinjene for samfunnsvitenskap og humaniora fra 2021. I denne studien er det kapittel 26, om direkte og indirekte berørte, som har størst relevans. Forfatterne av læreverket har ikke samtykket til at jeg bruker dette læreverket i min studie. Dette er ikke nødvendig, da bøkene er publisert og tilgjengelige for offentligheten. Likevel har jeg tatt hensyn til hvordan jeg fremstiller dette læreverket, med grunnlag i forskningsetikk.

For å yte rettferdighet mot det valgte læreverket har jeg inkludert lærerveiledningen i min analyse. Lærerveiledningen tilfører informasjon om hva som er hensikten med oppgaven, og konkrete tips til hvordan læreren kan tilpasse oppgaven, ved forenkling eller å gi mer utfordring. Dette er informasjon som var viktig i analyseprosessen, særlig i oppgaver der jeg var i tvil om kategoriseringen. Dersom jeg kun hadde sett på elevbøkene ville jeg kunne fått et feilaktig inntrykk av oppgavens hensikt.

I denne lærebokanalysen har jeg kun foretatt undersøkelser av det matematikkfaglige innenfor lengdemåling og representasjonsform. Jeg anser ikke dette som etisk utfordrende, da min undersøkelse ikke vil være til belastning for forfatterne av Multi. En del av undersøkelsen min tar for seg hvordan lengdemålingen utvikles gjennom bøkene i Multi, det er ikke et fokus på å avgjøre om denne utviklingen er god eller mindre god. Angvik (1982) henviser til tidligere eksempler på lærebokanalyse, som kan være kilde til flere etiske diskusjoner. Han nevner studier som har hatt som formål «å avdekke og bøte på mangler og feil i fremstilling av politiske, sosiale, kulturelle, religiøse eller etniske forhold» (Angvik, 1982)[1]. En slik tilnærming til lærebokanalyse ser jeg på som etisk utfordrende å skulle utføre. Ved å gå inn med et mål om å avdekke feil i lærebøkene ville jeg ha uttrykt mangel på tillitt til fagpersonene som har utarbeidet lærebøkene, noe som ikke er hensikten med denne undersøkelsen.

Det er viktig å påpeke at jeg ikke har foretatt en helhetlig vurdering av kvaliteten på Multi som læreverk. Jeg har sett på utviklingen av lengdemåling fra 1. trinn til 6. trinn og sett hvilke representasjonsformer som blir tatt i bruk i det Multi selv kaller «en gradvis abstrahering, fra arbeid med konkreter, via tegninger og diagrammer til de matematiske symbolene» (Alseth et al., 2020a, 2020b 2020c, 2020d, 2020e, 2020f, 2021a, 2021b, 2021c, 2021d). Ved å gjennomføre slik undersøkelse risikerer jeg at dette ses på som en kontrollsjekk om forfatterne av Multi oppfyller det de påstår om læreverket. Jeg understreker at dette er en undersøkelse av hvordan utviklingen foregår gjennom bøkene, og ikke en undersøkelse om Multi er et godt eller pålitelig læreverk.

Gjennom personlig kontakt med Bjørn Andre Møst i Gyldendal har jeg fått tillatelse til å bruke utsnitt fra lærebøkene. Eventuelle unøyaktigheter i fremstillingen skyldes min egen digitalisering av disse utsnittene.

[1] Denne henvisningen mangler korrekt sidetall. Jeg har brukt en heftet versjon med samling av alle utgaver av Norsk pedagogisk tidsskrift fra 1982, fra biblioteket ved HVL. I denne utgaven er sitatet hentet fra side 367.

5. Analyse

For å kunne si noe om utviklingen av representasjonsformer og utviklingsnivå i lengdemåling har jeg formulert følgende problemstilling: Hvordan benytter læreverket Multi representasjonsformer i oppgaver på ulike i utviklingsnivå innen lengdemåling?

I dette kapittelet presenterer jeg et utvalg av oppgavene som ble analysert med bruk av rammeverket for måling, sammensatt av Clements og Stephan (2004), Sarama et al. (2022) og Hurrell (2015) og rammeverket for analyse av representasjonsformer, Hana (2014) sin oversettelse av modellen til Lesh (1981).

I dette kapittelet presenterer jeg først noen utvalgte eksempler på analysearbeidet. Totalt viser jeg 13 eksempler. Disse eksemplene viser en oppgave fra første til femte utviklingsnivå, og to oppgaver fra sjette til niende utviklingsnivå. Oppgavene er valgt ut for å vise representativt bilde av oppgaver som ble kategorisert på de ulike utviklingsnivåene, samt for å få vist frem de fem ulike representasjonsformene. Det vises også minst ett eksempel fra hver av bøkene Multi 1A, 2B, 3A, 4B og 6A.

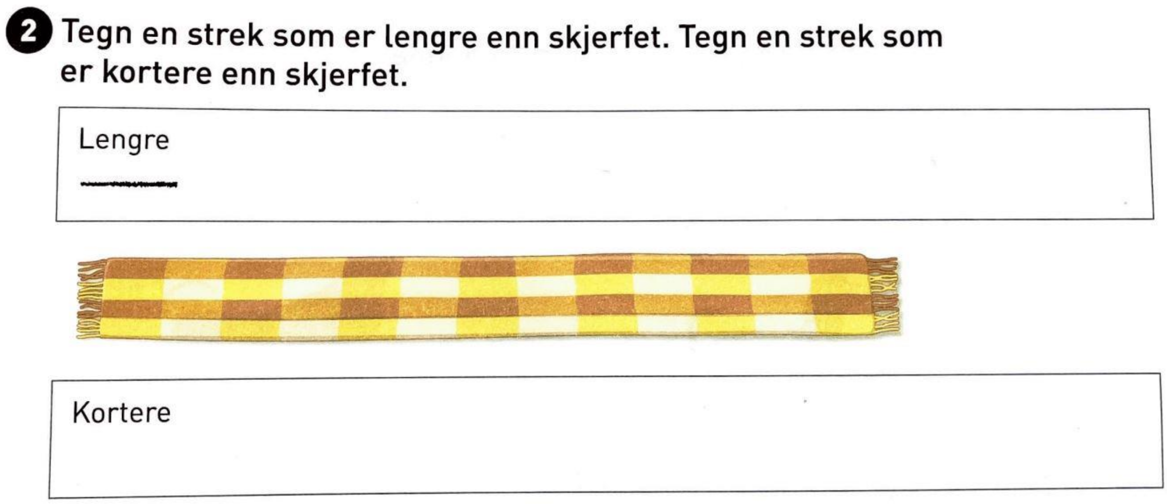
Mot slutten av kapittelet presenteres resultatene av analysen av representasjonsformer for hvert klassetrinn for seg selv, i stigende rekkefølge. Dette gjør jeg for å kunne sammenligne lærebøkene underveis, og se på hvordan bruk av representasjonsformer endrer seg på de ulike klassetrinnene. Til slutt i dette kapittelet presenterer jeg en samlet fremstilling av representasjonsformer og utviklingsnivå i lengdemåling.

5.1 Analyseeksempler

I dette delkapittelet presenterer jeg en oppgave for hvert av de ni utviklingsnivåene for lengdemåling. For hver av disse oppgavene analyserer jeg også bruk av representasjonsformer og transformasjoner mellom disse. Oppgavene som vises her er valgt ut på bakgrunn av utviklingsnivå og representasjonsform, for å få vist frem hver av de fem representasjonsformene og ulike transformasjoner, i tillegg til de ni utviklingsnivåene. Et stort flertall av oppgavene passet til elever på de fire siste utviklingsnivåene. For å vise bredden i disse utviklingsnivåene viser jeg to eksempler for hver av disse nivåene. Det var såpass få oppgaver som ble kategorisert som passende for de første utviklingsnivåene at jeg kun viser ett eksempel for hvert utviklingsnivå. Det var ingen oppgaver som ble kategorisert som passende for elever på utviklingsnivå null, og derfor kan jeg ikke vise til eksempel på dette i analysen.

5.1.1 Første utviklingsnivå

På det første utviklingsnivået er direkte sammenligning av lengde sentralt. Elever på dette nivået kan avgjøre hvilken gjenstand som er lengst ved å legge to gjenstander inntil hverandre. For dette utviklingsnivået presenterer jeg ett eksempel, hentet fra Multi 1A.



Figur 6: Oppgave 2 s. 61 i Multi 1A. Illustrasjon: Børre Holth.

Denne oppgaven krever at elevene skal tegne to streker, en som er lengre enn illustrasjonen av skjerfet, og en som er kortere. Dette innebærer at elevene må ha et forhold til begrepene lengre og kortere.

Dette eksempelet viser grensen for hva som er ikoniske fremstillinger og hva som er manipulerbare modeller. Ved første gjennomgang av oppgaven var jeg usikker på om den skulle kategoriseres som ikoniske fremstillinger med transformasjon til manipulerbare modeller. Oppgaven innebærer at elevene skal tegne to streker ut ifra et tegnet skjerf i boka. Den ene streken skal være lengre enn skjerfet og den andre streken skal være kortere. Som Lesh (1981) påpeker er fysiske handlinger en viktig forutsetning for at en oppgave skal kunne kategoriseres som en manipulerbar modell. Tegning oppfyller ikke kriteriet, da tegning kun tilfører mer til den ikoniske fremstillingen. Elevene jobber kun med en ikonisk fremstilling, det er ikke et ekte skjerf som de kan ta på og erfare lengden av. På bakgrunn av disse faktorene kategoriserte jeg oppgaven som en ikonisk fremstilling. Oppgaven krever ingen verktøy utover blyant og elevbok. Blyanten brukes til å tilføre to objekter til den ikoniske fremstillingen i boka. På bakgrunn av dette kategoriseres oppgaven kun som ikonisk fremstilling, da oppgaven ikke inneholder transformasjoner mellom ulike representasjonsformer.

Utviklingsnivå for lengdemåling var noe tydeligere i denne oppgaven. Jeg kategoriserte denne oppgaven som passende for elever som er på første utviklingsnivå, med bakgrunn i beskrivelsen av direkte sammenligning av lengde fra Sarama et al. (2022). Dette innebærer at elevene kan legge to objekter inntil hverandre og avgjøre hvilken som er lengst. Oppgaven krever at elevene har disse ferdighetene, samt en forståelse av begrepene lengre og kortere. Dette er altså en oppgave som samsvarer godt med alle beskrivelser av det første utviklingsnivået. Navnet i seg selv, direkte sammenligning av lengde, gir også en god indikasjon, da oppgaven innebærer direkte sammenligning av et tegnet skjerf og elevenes egne tegnede streker.

5.1.2 Andre utviklingsnivå

Det andre utviklingsnivået går ut på å kunne se for seg en gjenstand delt opp i like stole deler, uten å fysisk dele opp gjenstanden. På dette utviklingsnivået viser jeg ett eksempel, som jeg har hentet fra Multi 4B.

Figur 7: Samtalebilde s. 56 i Multi 4B. Illustrasjon: Kristine Berg Johnsen.

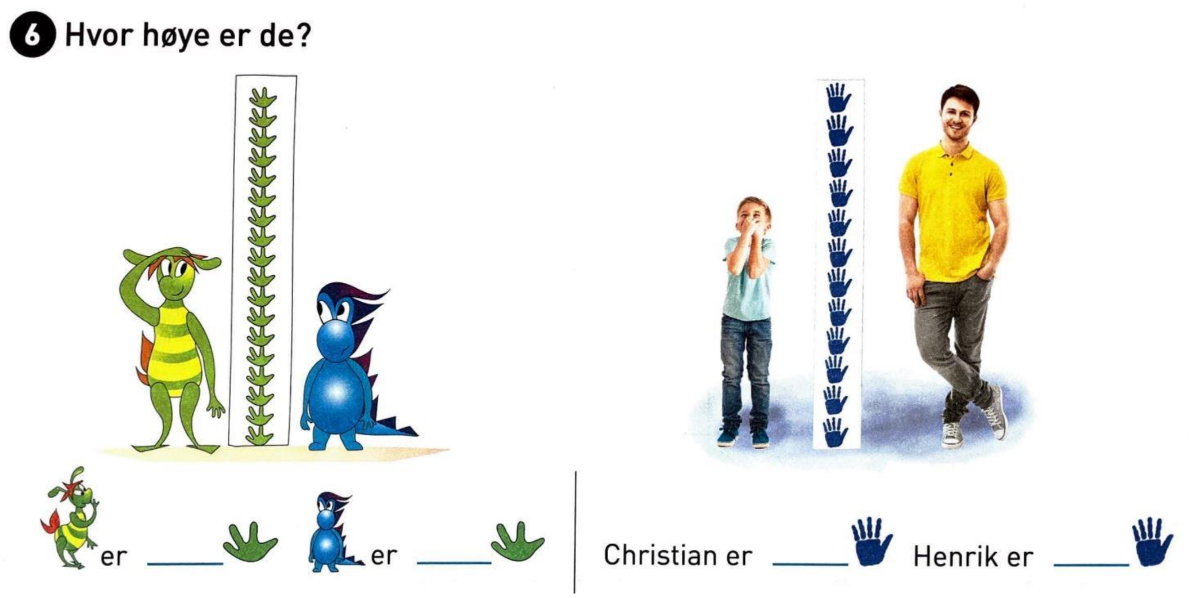
Dette bildet er markert som et samtalebilde i Multi 4A. I lærerveiledningen (Alseth et al., 2021b) er disse bildene tenkt som en oppstart på et nytt tema, i dette tilfellet måling. Elevboken inneholder kun dette bildet, mens lærerveiledningen inneholder forslag til spørsmål som læreren kan bruke som utgangspunkt for samtalen. Elevene ser først på bildet, og deretter følger en muntlig samtale, igangsatt av læreren. Fordi bildet er tenkt som utgangspunkt for samtalen, blir den første representasjonsformen som brukes en ikonisk fremstilling. Videre følger den muntlige samtalen, og man får en transformasjon fra den ikoniske fremstillingen til representasjonsformen muntlig språk. Transformasjonen som foregår fra ikoniske fremstillinger til muntlig språk er å beskrive.

Bildet inneholder mange elementer som kan danne grunnlag for diskusjoner om måling. Dette kan bety at man får flere rekker av transformasjoner mellom ikoniske fremstillinger og muntlig språk. For hvert nye element som diskuteres ser elevene først på bildet, og foretar deretter en transformasjon til det muntlige språket. I resultatene er denne oppgaven kun markert med én transformasjon mellom ikoniske fremstillinger og muntlig språk, da jeg ikke kan si noe om hvordan oppgaven faktisk blir brukt i skolen.

Lærerveiledningen foreslår at elevene skal finne ut hvilke målinger som kan foretas på bildet. Dette gjør at fokuset er på hvordan man kan måle gjenstandene på bildet. Dette kan være lengde, vekt eller volum. Det er sannsynlig at denne diskusjonen vil inneholde flere elementer enn lengdemåling, da bildet blant annet inneholder en bøtte, som gjerne blir utgangspunkt for en samtale om volum. Trerammen som er fylt med sement kan være utgangspunkt for en samtale om lengdemåling, for eksempel om hvordan man kan finne ut hvor lange planker man må ha for å lage rammen. Disse diskusjonene svarer til det andre utviklingsnivået, som innebærer den mentale oppdelingen av en gjenstand i like store deler, før man fysisk måler objektet, i henhold til Clements og Stephan (2004), som beskrevet i kapittel 3.1. For å kunne se for seg denne oppdelingen må eleven kunne bestemme kriteriene for oppdelingen, som er å identifisere hvilke egenskaper som ved gjenstanden som skal måles. Dette tilsvarer utviklingsnivå null i rammeverket for lengdemåling, som er hentet fra Hurrell (2015). Denne oppgaven krever mer enn ferdighetene på utviklingsnivå null, men denne oppgaven bygger videre på forståelsen elevene har fra dette utviklingsnivået. Lærerveiledningens beskrivelse av å undersøke hvilke målinger som kan foretas, gjør at kravet til elevene er høyere enn å vite hvilke egenskaper som skal måles. Elevene må også ha kunnskap om hvordan slike målinger kan utføres, ved å dele opp en gjenstand i like store deler. På bakgrunn av dette kategoriserte jeg oppgaven som passende for elever på det andre utviklingsnivået.

5.1.3 Tredje utviklingsnivå

Elever som er på det tredje utviklingsnivået kan bruke en gitt måleenhet og legge den langs en gjenstand. Deretter kan de telle opp antall ganger de brukte måleenheten, og oppgi dette som måltallet. Et viktig poeng er at elever på dette utviklingsnivået ikke har utviklet forståelse for viktigheten av å legge måleenhetene inntil hverandre. For dette utviklingsnivået presenterer jeg ett eksempel, fra Multi 1A.



Figur 8: Oppgave 6 s. 64 i Multi 1A. Illustrasjon: Anne Tryti og Shutterstock.

Denne oppgaven tar utgangspunkt i ikoniske fremstillinger som representasjonsform. De ikoniske fremstillingene skal brukes for å løse oppgaven, ved å telle antall enheter som dekker de to figurene, og bildet av en gutt og en mann. Videre etterspør oppgaven et skriftlig svar. Denne oppgaven er den første oppgaven i Multi 1A om måling som etterspør et tall i skriftlig språk som svar. Slike oppgaver, som går fra ikoniske fremstillinger til skriftlig språk, viste seg å forekomme mange ganger i utvalget som ble analysert. Mer detaljert beskrivelse av dette i finnes i kapittel 5.2, og totalt antall forekomster av slike oppgaver vises i tabell 9. Denne oppgaven ble kategorisert som en ikonisk fremstilling med transformasjon til skriftlig språk. Transformasjonen fra ikoniske fremstillinger til skriftlig språk er å formalisere.

Ved første overblikk på denne oppgaven så jeg den først som passende for elever på sjette utviklingsnivå, med fokus på å bruke ikke-standardiserte måleenheter. Mitt første innfall var at dette var et høyt nivå for å være såpass tidlig i boken for 1. trinn. Dette var ikke selve analysen, men en formening jeg dannet meg da jeg gikk gjennom oppgavene for å velge ut relevant datamateriale. Da jeg senere gikk systematisk inn på hver oppgave kategoriserte jeg denne som passende for elever på tredje utviklingsnivå. Forskjellen ved det overflatiske blikket og den systematiske analysen var at ved å se nærmere på oppgaven og kjennetegnene for de ulike utviklingsnivåene ble jeg oppmerksom på at selve måleoperasjonen er allerede gjennomført. Oppgaven krever at elevene skal telle antall måleenheter som er lagt inntil hverandre. Dette gjør at jeg har kategorisert den som passende for elever på tredje utviklingsnivå. Dette utviklingsnivået krever ikke at eleven forstår verdien av at måleenhetene legges inntil hverandre, men det kan være til hjelp for elevene at senere at de her kan se hvordan måleenhetene er lagt inntil hverandre. Multi 1A har illustrert hvordan en måleoperasjon kan se ut, og her er måleenhetene plassert inntil hverandre. Det er opp til eleven å telle antall måleenheter som brukes for dekke for eksempel den grønne fantasifiguren, Fiboline. Ved tilfeller som dette, der jeg var usikker på hvordan oppgaven skulle kategoriseres brukte jeg lærerveiledningen ekstra mye. I lærerveiledningen så jeg på hva som beskrives som oppgavens hensikt, og hva elevene skal øve på i hver enkelt oppgave. Dette kunne gi meg informasjon som ikke kom frem i elevboken, og som kunne være med på å bestemme kategoriseringen av oppgaven.

Lærerveiledningen (Alseth et al., 2020b) tilfører lite informasjon til denne oppgaven. Til oppgaven står det følgende: «Mål høyden ved å telle antall hender» (s. 64). Det at lærerveiledningen ikke inneholder mer informasjon enn dette gjorde meg sikrere på å kategorisere oppgaven som tredje utviklingsnivå, som tilsvarer andre nivå fra Clements og Stephan (2004), gjenta valgt måleenhet. Eleven skal altså telle seg oppover den måleenheten Multi 1A har valgt, og fremstille svaret ved bruk av skriftlig språk. Fordi oppgaven ikke krever at eleven utfører en fullstendig måleoperasjon passer den for elever som er på tredje utviklingsnivå.

5.1.4 Fjerde utviklingsnivå

På det fjerde utviklingsnivået er transitivitet og indirekte sammenligning sentralt. Elever som er på dette utviklingsnivået kan stille kan stille spørsmål om hvilket objekt som er høyest og avgjøre dette uten å kunne sammenligne objektene direkte. For dette utviklingsnivået presenterer jeg en oppgave, fra Multi 2B.

Figur 9: Aktivitet s. 86 i Multi 2B. Illustrasjon: Birgitte Reff Kolbeinsen / Melkeveien.

Denne oppgaven tar utgangspunkt i en tegning som viser elever i arbeid med en tilsvarende oppgave. Det er en ikonisk fremstilling av hvordan prosessen og resultatet kan se ut. Videre krever oppgaven at elevene skal klippe ut og lime papirstrimler som er mellom 5 og 16 cm. Dette gjør at elevene trenger flere eksterne verktøy og jobber utenfor boken. Oppgaven sier at elevene skal produsere et resultat som ser ut som et tre. Når elevene går i gang med å løse oppgaven vil dette foregå utenfor den trykte læreboken. Lærerveiledningen (Alseth et al., 2020d) beskriver resultatet som kunstbilder. Det at elevene bruker eksterne og dagligdagse verktøy, samt at de produserer et resultat som gjerne henges opp på veggen, gjør at dette kvalifiserer til en erfaringsbasert situasjon. Resultatet blir et konkret bilde som elevene gjerne vil forbinde med prosessen de gikk gjennom for å lage dette bildet. Utgangspunktet for denne oppgaven er altså en ikonisk fremstilling. Videre følger en transformasjon til representasjonsformen erfaringsbasert situasjon. Transformasjonen fra en ikonisk fremstilling til en erfaringsbasert situasjon er å tolke. Ut ifra denne erfaringsbaserte situasjonen foretar elevene en transformasjon til en manipulerbar modell. Papirstrimlene er en representasjon av de ulike lengdene elevene skal sette sammen for å lage en tre. Denne representasjonen er en manipulerbar modell. Videre skal elevene sette sammen papirstrimlene etter gitte kriterier, men dette krever ingen transformasjon til en annen representasjonsform. Den siste transformasjonen i denne oppgaven en dermed fra en erfaringsbasert situasjon til en manipulerbar modell, som kalles å generalisere.

Elevene får oppgitt hvor lang den korteste strimmelen skal være, 5 cm, og den lengste strimmelen, 16 cm. Videre kan det se ut til at det er opp til elevene å avgjøre hvor mange strimler de skal lage, og hvor lange de skal være, så lenge de er innenfor 5 og 16 cm. Men lærerveiledningen presiserer at elevene skal lage tolv strimler, som øker med en centimeter for hver strimmel. Dette er informasjon som er avgjørende for hvordan elevene løser denne oppgaven. Uten denne informasjonen kunne elevene ha løst oppgaven ved å selv bestemme antall strimler og lengden på hver enkelt. Læreren selv kan avgjøre hvor mye informasjon elevene får før de begynner med oppgaven. Hvor mye informasjon elevene får vil ikke påvirke bruk av representasjonsformer, men det vil kunne påvirke elevenes mulighet til å løse oppgaven, ut ifra hvilket utviklingsnivå elevene er på.

Dersom elevene får vite at de skal ha tolv strimler og den neste skal være 6 cm, og deretter 7 cm kan de lettere bruke direkte sammenligning. Det at strimlene skal settes sammen til et tre, krever at elevene sorterer de i riktig rekkefølge. Dersom elevene vet at hver strimmel skal øke med én cm kan de bruke direkte sammenligning for hver strimmel de produserer.

Men denne oppgaven kan også løses ved bruk av en mer transitiv tilnærming. Dersom elevene ikke får opplyst hvor lange strimlene skal være, må de selv finne ut av hvordan de skal fordele lengdene mellom 5 og 16 cm. Dersom elevene vet at de har laget en strimmel på 5 cm og en på 6 cm, så må den neste strimmelen være lengre enn begge de to strimlene for at resultatet skal se ut som et tre. Når elevene skal lime sammen strimlene til et tre er det naturlig å starte med den korteste eller den lengste strimmelen. Videre tar de den nest korteste eller den nest lengste. Etter dette vet de at de må ta den tredje korteste eller tredje lengste. For å kunne lage en tre-formasjon må de vite at strimmelen som er lengre enn nummer to også er lengre enn nummer en. Det er dette som kjennetegner en transitiv forståelse, som er det fjerde utviklingsnivået.

Transitivitet er en forståelse som går ut over direkte sammenligning. I denne oppgaven har elevene mulighet til å benytte seg av direkte sammenligning. Derfor kan man stille spørsmål ved å kategorisere denne oppgaven for elever på fjerde utviklingsnivå. Et annet aspekt som argumenterer imot fjerde utviklingsnivå, er bruken av linjal og standardiserte måleenheter. Dette kan være en indikator på et høyere utviklingsnivå. Men lærerveiledningen påpeker at læreren kan observere hvordan elevene bruker linjalen og gjerne kan veilede elevene underveis. Dette peker mer mot sjette utviklingsnivå, der elevene kan bruke linjal med veiledning.

Likevel har jeg kategorisert denne oppgaven for å passe til elever som er på fjerde utviklingsnivå. Bakgrunnen for dette er at selve oppgaven ikke fokuserer direkte på bruk av linjal. Oppgaven inneholder tre setninger som en instruks til elevene. Disse handler om å måle, men også klippe, lime og fokus på formasjonen som strimlene skal limes i. Slik jeg tolker denne oppgaven er hensikten å sette sammen strimlene i riktig rekkefølge, som kan være med på å utvikle en transitiv forståelse. Derfor vil jeg si at denne oppgaven passer for elever som er på det fjerde utviklingsnivået, men også at den kan hjelpe elever som er på det tredje utviklingsnivået til å utvikle forståelse opp mot det fjerde utviklingsnivået.

5.1.5 Femte utviklingsnivå

På det femte utviklingsnivået har eleven forståelse for at lengden til en gjenstand ikke endres ved at gjenstanden flyttes. I utvalget var det kun én oppgave jeg kategoriserte som passende for elever på dette utviklingsnivået. Dermed viser jeg kun dette eksempelet, som er hentet fra Multi 1A.

Figur 10: Utforsking s. 60 i Multi 1A. Illustrasjon: Birgitte Reff Kolbeinsen / Melkeveien.

Denne oppgaven spør etter hva som er lengst av to tegnende gjenstander. Utgangspunktet er altså representasjonsformen ikoniske fremstillinger. Lærerveiledningen (Alseth et al., 2020b) beskriver at målet med oppgaven er «å få elevene til å resonnere seg fram til hvordan man kan sammenligne lengdene» (s. 61). Svaret på oppgaven skal altså fremstilles ved bruk av representasjonsformen muntlig språk. Oppgaven er altså først en ikonisk fremstilling, før den skal transformeres til muntlig språk. Transformasjonen som finner sted mellom ikoniske fremstillinger og muntlig språk er å beskrive.

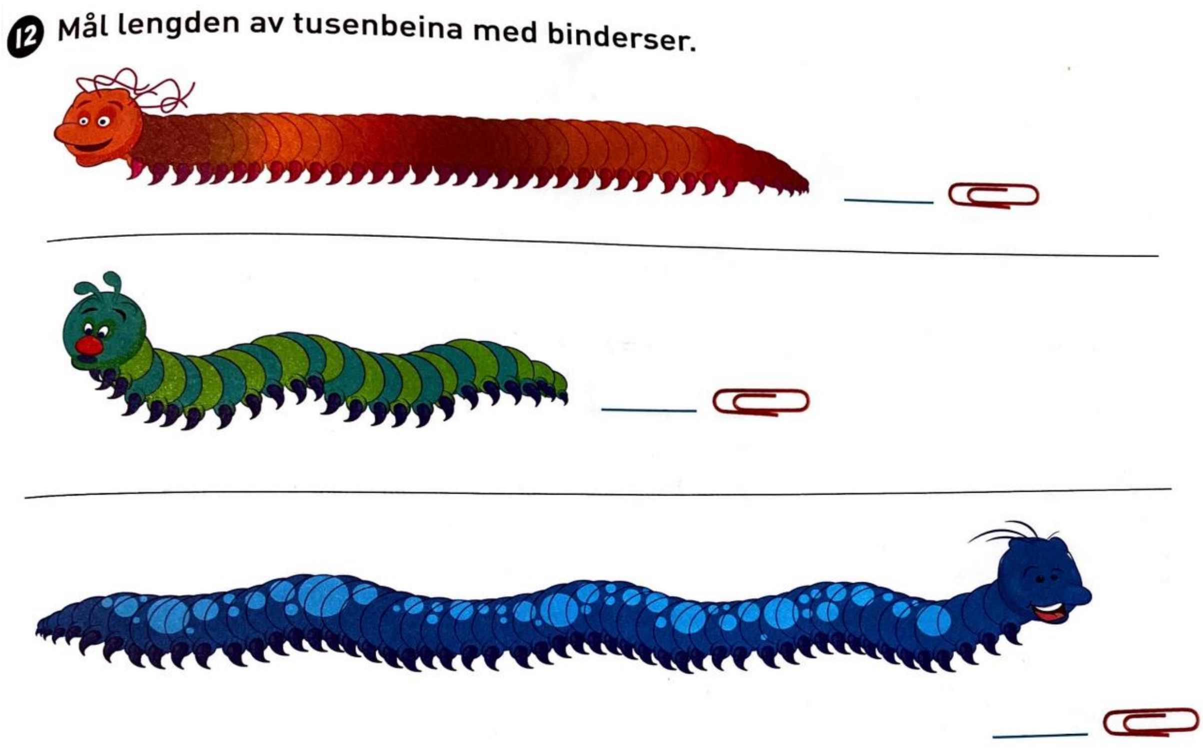
Denne oppgaven tillater ikke direkte sammenligning, og er altså for elever på et høyere utviklingsnivå enn det første utviklingsnivået. Lærerveiledningen beskriver at det sammenkrøllete skjerfet skal vise elevene hvordan man må strekke gjenstander helt ut for å kunne måle lengden. Dette er den samme forståelsen som det femte utviklingsnivået, der elevene forstår at lengden til en gjenstand ikke endres selv om gjenstanden flyttes. Dette illustreres ved bruk av de to skjerfene. Skjerfets lengde er fortsatt den samme selv om skjerfet er krøllet sammen. Fordi elevene kun har en ikonisk fremstilling av skjerfene tillates ikke direkte sammenligning av gjenstandene.

Lærerveiledningen har forslag til forenkling av denne oppgaven dersom noen elever trenger dette. Forenklingen går ut på å bygge et tårn av centikuber som er like høyt som den ene sjiraffen og bruker dette tårnet til direkte sammenligning ved å flytte tårnet til den andre sjiraffen. Denne forenklingen forutsetter en transitiv forståelse. For å kunne bruke tårnet som et referansepunkt må eleven mestre den transitive tilnærmingen. Dersom tårnet er like høyt som den ene sjiraffen og kortere enn den andre, så må den første sjiraffen være lengre enn den andre. Forenklingen av oppgaven gjør at den passer til elever på det fjerde utviklingsnivå. Dermed er det naturlig å tenke at oppgaven er tiltenkt elever som ligger på et høyere utviklingsnivå enn det fjerde. Dette støtter mitt argument for at oppgaven passer for elever på det femte utviklingsnivået.

De to sjiraffene kan hjelpe elevene med å forstå noe som ved første øyekast ser ut som en selvfølge kan være et synsbedrag. Ved å oppdage at den sjiraffen står oppå en kurv kan de bli mer bevisste på at man må undersøke begge ender ved begge gjenstandene for å kunne avgjøre hvilken som er lengst, og at en gjenstands lengde ikke endres selv om gjenstanden flyttes på.

5.1.6 Sjette utviklingsnivå

På sjette utviklingsnivå kan elevene gjennomføre måleoperasjoner ved bruk av ikke-standardiserte måleenheter. Elevene kan også legge måleenhetene inntil hverandre, for å gjennomføre en så nøyaktig måleoperasjon som mulig. På dette utviklingsnivået presenterer jeg to eksempler, ett fra Multi 1A og ett fra Multi 2B.



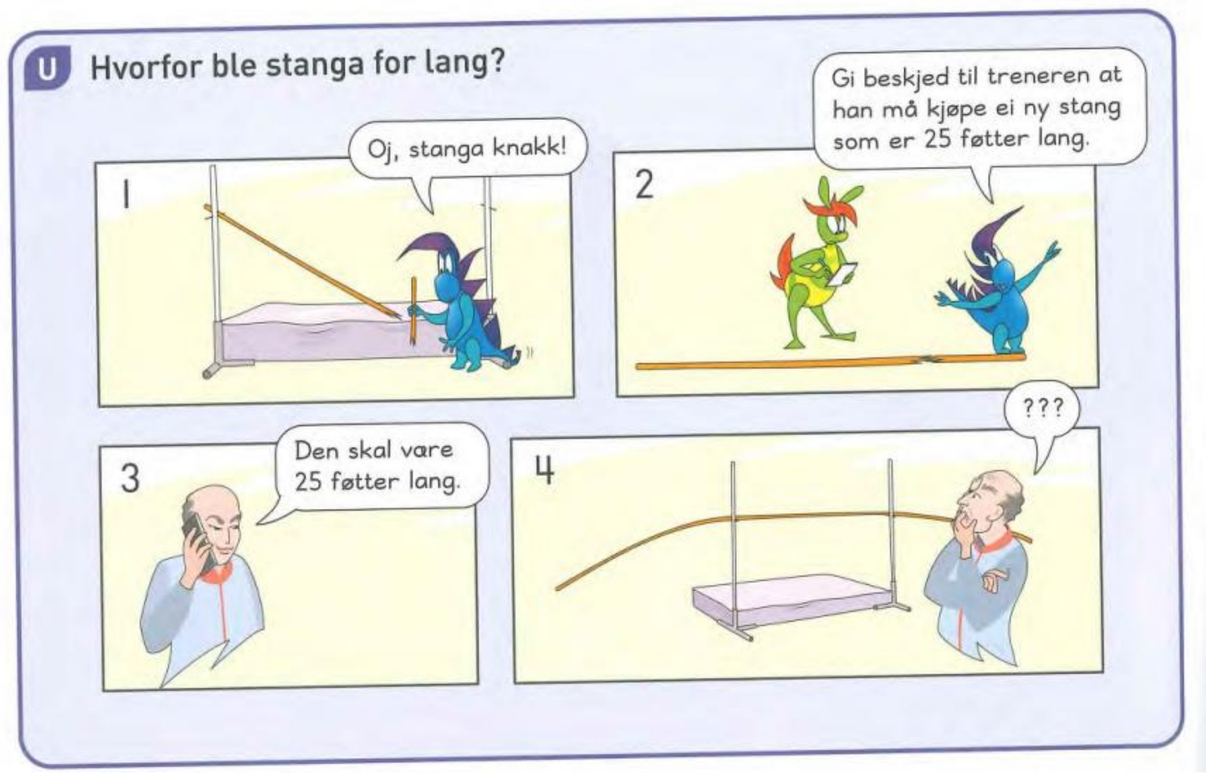
Figur 11: Oppgave 12 side 69 i Multi 1A. Illustrasjon: Birgitte Reff Kolbeinsen / Melkeveien

Denne oppgaven tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling av tre tusenbein. Oppgaven krever at elevene måler lengden av tusenbeina ved bruk av binderser som måleenhet. Dette innebærer bruk av et eksternt verktøy og en fysisk handling. Lesh (1981) sine beskrivelser av fysiske handlinger ble avgjørende for å kategorisere gjennomføringen av denne oppgaven som en manipulerbar modell. Binderser brukes som et redskap i tillegg til elevbok og blyant. Etter at elevene har gjennomført måleoperasjonen skal svaret fremstilles skriftlig i boka. Dette gjør at oppgaven legger opp til to transformasjoner mellom representasjonsformer. Først starter oppgaven som en ikonisk fremstilling, så foretar eleven en transformasjon til en manipulerbar modell ved bruk av binders, før svaret fremstilles skriftlig i boken og vi får en transformasjon til den tredje representasjonsformen i oppgaven, skriftlig språk.

Andre oppgaver som involverer et eksternt måleredskap, som ble brukt til å måle en tegning i boka ble kategorisert på tilsvarende måte. Først som en ikonisk fremstilling med transformasjon til en manipulerbar modell. Denne transformasjonen kalles å modellere.

Deretter legger oppgaven opp til en transformasjon fra manipulerbar modell til skriftlig språk. Denne transformasjonen kalles å symbolisere.

Denne oppgaven krever at elevene bruker binders som måleenhet. For å få et nøyaktig resultat må elevene forstå verdien av å legge bindersene inntil hverandre. Sarama et al. (2022) beskriver å se verdien av å legge måleenheten inntil hverandre som et kjennetegn på forståelse av lengdemåling fra ende til ende, sjette utviklingsnivå i det teoretiske rammeverket. Oppgaven innebærer bruk av ikke-standardiserte måleenheter, slik som Hurrell (2015) beskriver det. Begge disse teoriene er involvert i sjette utviklingsnivå i det teoretiske rammeverket for denne analyseprosessen. På bakgrunn av dette kategoriserte jeg denne oppgaven som passende for elever på sjette utviklingsnivå.



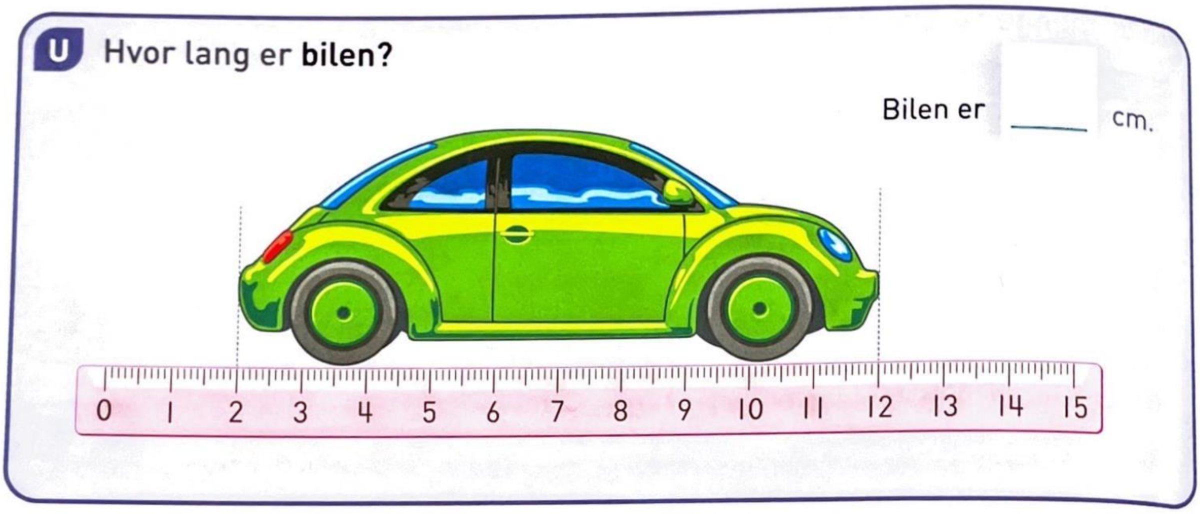
Figur 12: Utforsking s. 78 i Multi 2B. Illustrasjon: Anne Tryti.

Denne oppgaven er representert ved en ikonisk fremstilling i elevboka. Lærerveiledningen til Multi 2B (Alseth et al., 2020d) legger opp til samtale om hva som foregår i tegneserien. Elevboka viser ingen tegn til samtale, men lærerveiledningen er tydelig på dette. Dette viser viktigheten av å inkludere lærerveiledningen i analysen. Uten lærerveiledningen hadde man mistet et viktig perspektiv på denne oppgaven. Dette gjør at oppgaven er kategorisert som en ikonisk fremstilling med transformasjon til muntlig språk. Det er den muntlige diskusjonen som skal hjelpe elevene med å forstå eventuelle utfordringer ved bruk av ikke-standardiserte måleenheter. Transformasjonen fra ikoniske fremstillinger til muntlig språk er å beskrive.

Utviklingsnivå for lengdemåling i denne oppgaven viser tydelig hvordan ferdighetene som beskriver i modellene av Sarama et al. (2022), Clements og Stephan (2004) og Hurrell (2015) overlapper hverandre. Sarama et al. (2022) beskriver for sitt nivå, lengdemåling fra ende til ende, at eleven kan måle med ikke-standardiserte måleenheter og se verdien av å legge de helt inntil hverandre. Clements og Stephan (2004) beskriver sitt nivå, akkumulering av avstand, elevene har forståelse for at antall ganger en måleenhet gjentas gir uttrykk for hvor mange ganger objektet er dekket, med en bestemt måleenhet. Begge disse fremstillingene av elevers ferdigheter samsvarer med hvordan Hurrell (2015) påpeker at man bør bruke ikke-standardiserte måleenheter for de standardiserte. En slik forståelse av ikke-standardiserte måleenheter er nødvendig for å forstå diskusjonen i denne oppgaven. Slike diskusjoner være med på å få elever til å se viktigheten av å bruke måleenheter som er like lange, og utfordringene knyttet til kommunikasjon ved bruk av ikke-standardiserte måleenheter. I dette eksempelet virker det naturlig å snakke om forskjellen på Fibo, den blå dragen, og mannes føtter, og hvordan dette kan ha påvirket lengden på stanga. Et annet element i en slik diskusjon kan være verdien av å legge måleenhetene inntil hverandre, som også kan ha påvirket resultatet. På bakgrunn av dette passer denne oppgaven for elever som er på det sjette utviklingsnivået, eller i overgangen mellom det femte og det sjette utviklingsnivået.

5.1.7 Sjuende utviklingsnivå

Sjuende utviklingsnivå handler om å se sammenhengen mellom måling og antall. Oppgaver som ble kategorisert som passende for elever på sjuende utviklingsnivå tok gjerne i bruk en linjal som skulle brukes med et annet utgangspunkt enn null. På dette utviklingsnivået presenterer jeg to oppgaver, en fra Multi 2B og en fra Multi 6A.

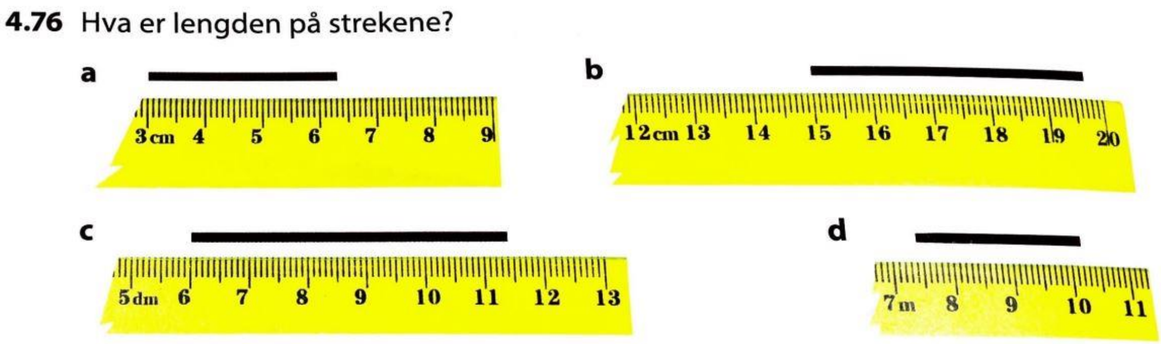


Figur 13: Utforsking side 84 i Multi 2B. Illustrasjon: Børre Holth.

Denne oppgaven spør om hvor lang bilen er. Det oppgaven egentlig spør om er hvor lang den ikoniske fremstillingen av bilen er, for det er ikke selve bilen som er utgangspunkt for måleoperasjonen. Utgangspunktet for denne oppgaven er en ikonisk fremstilling av en linjal og en bil. Den ikoniske fremstillingen av en linjal skal brukes til å finne lengden av tegningen av bilen. Derfor jobber elevene kun med ikoniske fremstillinger for å finne lengden av bilen. Til slutt skal svaret fremstilles skriftlig oppgitt i centimeter. Elevene går da gjennom transformasjonen fra ikoniske fremstillinger til skriftlig språk. Denne transformasjonen kalles å formalisere.

Den matematiske utfordringen knyttet til lengdemåling er at enden ved bilen ikke er plassert ved null på linjalen. I slike oppgaver øver elevene på å telle antall måleenheter som brukes for å dekke bilen, fremfor å lese av tallet på den stiplete linjen ved bilens front. Elevene er kanskje mest vant til fremgangsmåten ved å lese av tallet ved gjenstandens ende og oppgi dette som svar. I denne oppgaven ville dette gitt feil svar. Lærerveiledningen (Alseth et al., 2020d) nevner tre mulige svar de tror elevene kan foreslå: 10 cm, 11 cm og 12 cm. Elevene som svarer 10 cm kan ha telt strekene på linjalen fra og med 3, eller regnet ut at 12 - 2 = 10. Elevene som svarer 11 cm har gjerne telt strekene på linjalen fra og med 2. Elevene som svar 12 cm kan ha lest av på linjalen ved den stiplete linjen ved bilens front.

Denne oppgaven kan hjelpe elevene med å øve på å se på måling som hvor mange måleenheter som brukes for å dekke en gjenstand, og ikke som å lese av et tall på en markering på en linjal. Elevene som har svart 11 cm opplever kanskje å oppdage forskjellen på vanlig telling og telling på en linjal. Her kan elevene erfare at det er mellomrom mellom streker man teller, fremfor hver enkelt strek. Det er mellomrommet mellom strekene som viser til måleenheten centimeter. Der de vanligvis hadde telt med det første objektet må de i måling telle antall enheter som dekker gjenstanden. Da blir det feil å telle med første markering, siden dette bare markerer starten på gjenstanden, men er med på å dekke gjenstanden. Denne forståelsen er et kjennetegn på det sjuende utviklingsnivået, og jeg har derfor kategorisert oppgaven som passende for elever på dette nivået.



Figur 14: Oppgave 4.76 s. 140 i Multi 6A. Illustrasjon: Børre Holth / Kine Røst.

Representasjonsformen i denne oppgaven er en ikonisk fremstilling. Selv om skriftlig språk også er fremtredende i denne oppgaven er det den ikoniske fremstillingen som er utgangspunktet for arbeidet med oppgaven. Oppgaven krever ikke eksterne verktøy eller fysiske handlinger for å løses, og kategoriseres derfor som en ikonisk fremstilling. Som nevnt i kapittel 4.4, ble ikke oppgaveteksten definert som en egen representasjonsform. Svaret skal fremstilles skriftlig i elevenes skrivebok, i form av et måltall med centimeter som måleenhet. Dermed får man en transformasjon fra ikoniske fremstillinger til skriftlig språk. Transformasjonen som finner sted mellom ikoniske fremstillinger og skriftlig språk er å formalisere.

Denne oppgaven tar utgangspunkt i fire utsnitt av ulike linjaler. Linjalene starter ikke på null, og oppgaven krever at elevene bruker disse linjalene til å avgjøre lengden på fire streker i boken. Alseth et al. (2021d) beskriver at elevene enten kan lese av målebåndet i begge ender og finne differansen, eller telle seg fra den ene enden til den andre. Denne oppgaven har en mer formell og abstrakt utforming, men det matematiske innholdet har elevene møtt i tidligere bøker. Allerede på 2. trinn foreslår Alseth et al. (2020d) å bruke en knekt linjal som oppgave til elever som ønsker mer utfordring. Alseth et al. (2020f) foreslår også i lærerveiledningen for 3. trinn at læreren bør være oppmerksom på om elevene teller antall streker eller antall mellomrom. Som Smith III et al. (2013) påpekte er det vanlig at elever leser av tallet på linjalen som står ved enden av gjenstanden som måles. I noen tilfeller vil dette være korrekt svar, men Smith III et al. påpeker at elever gjør dette selv om det ikke er hensiktsmessig. I tilfeller der utgangspunktet for målingen startet ved en annen markering enn null vil dette gi et feil svar på måleoperasjonen.

For å løse oppgaven må elevene ha forståelse av måling som å dekke en gjenstand gjentatte ganger med samme enhet, som nevnt i kapittel 3.1. Denne sammenhengen mellom antall når man teller og antall når man måler er karakteristisk for det sjuende utviklingsnivået. På bakgrunn av oppgavens krav til elevenes forståelse passer denne oppgaven for elever på det sjuende utviklingsnivået.

5.1.8 Åttende utviklingsnivå

Åttende utviklingsnivå handler om måling med standardiserte måleenheter. Multi innfører oppgaver med bruk av standardiserte måleenheter i Multi 2B. På dette utviklingsnivået viser jeg to eksempler, ett fra Multi 2B og ett fra Multi 3A.

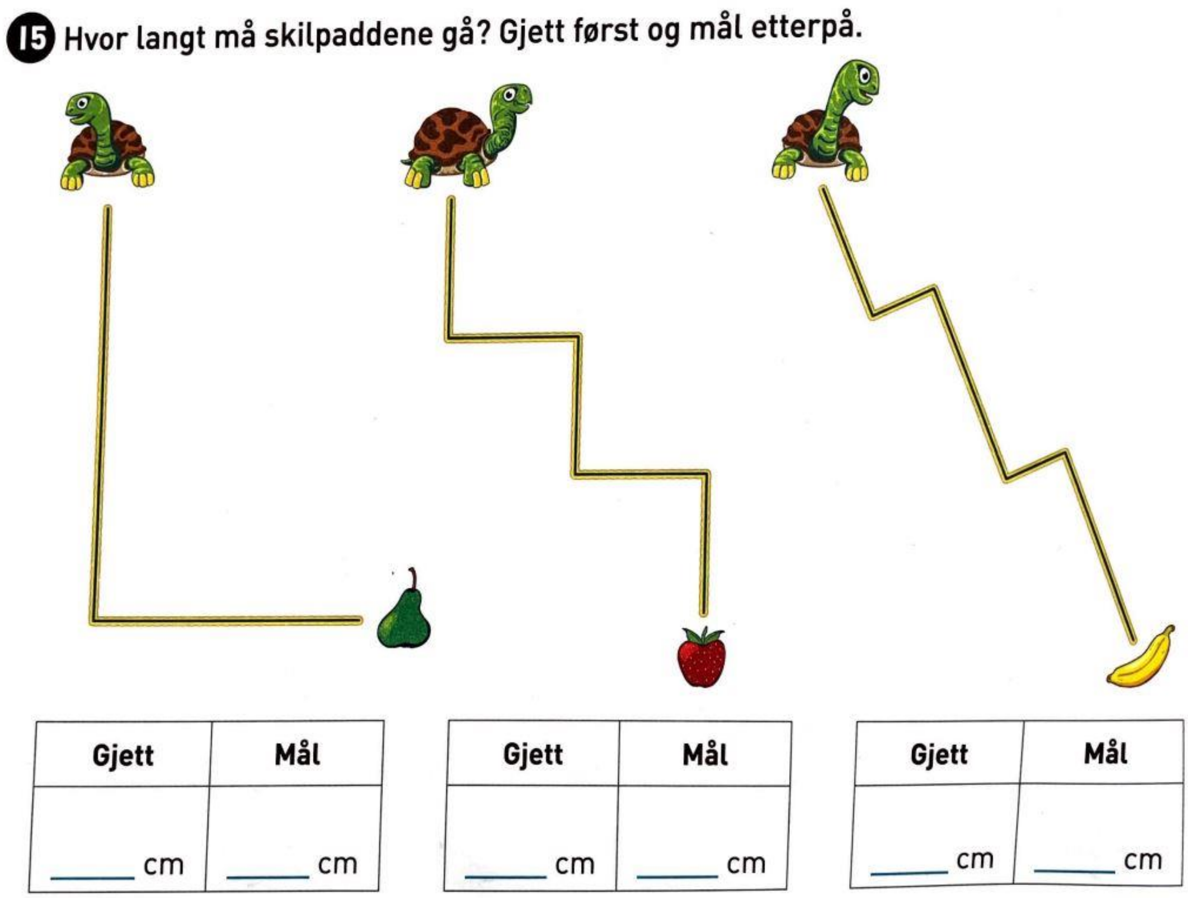

A Finn tre ting du vil måle med linjal.

Ting	Jeg måler
	______ cm
	______ cm
	______ cm

Figur 15: Aktivitet side 84 i Multi 2B.

Denne oppgaven viser en tabell som skal brukes til å føre opp resultater fra tre måleoperasjoner. Men utgangspunktet for elevene er en erfaringsbasert situasjon. Elevene skal finne tre ting som de vil måle. Deretter skal de måle denne tingen ved bruk av linjal. Når denne måleoperasjonen er utført vil gjenstandens lengde være representert på linjalen, som er en manipulerbar modell. Videre skal måltallet elevene fikk fremstilles skriftlig i centimeter i denne tabellen. I arbeid med denne oppgaven bruker elevene altså tre ulike representasjonsformer. Først en erfaringsbasert situasjon, og deretter en transformasjon til en manipulerbar modell. Denne transformasjonen kalles å generalisere. Videre fra den manipulerbare modellen foretar elevene en transformasjon til skriftlig språk. Denne transformasjonen kalles å symbolisere.

Oppgaven går ut på at elevene skal måle selvvalgte gjenstander med linjal, og svaret skal oppgis i centimeter. Dette plasserer måleoperasjonen innenfor standardiserte måleenheter. Dette er en oppgave som er passende for elever på det åttende utviklingsnivået. Lærerveiledningen (Alseth et al., 2020d) påpeker at elevene gjerne må finne gjenstander som er lengre enn linjalen eller som ikke er hele centimeter lange. Videre oppfordres læreren til å la elevene selv utforske hvordan de vil løse slike situasjoner. Denne oppgaven åpner opp for at elevene selv kan differensiere oppgaven ut ifra hvor trygge de føler seg i lengdemåling. Elever som ender opp med et svar med desimaler, men har utfordringer med dette kan få beskjed av læreren om at det er greit å se bort fra desimalene. Andre elever kan ha behov for denne utfordringen, og kan kanskje håndtere desimalene på egenhånd. Denne oppgaven gir altså rom for at alle elever kan finne gjenstander som kan måles ut ifra deres forutsetninger. Likevel stiller oppgaven krav til nøyaktighet innenfor hver centimeter, slik at måleenhetene må legges inntil hverandre for å dekke hele gjenstanden. Dette kan være ekstra viktig for de elevene som måler svært lange gjenstander med en kort linjal. Selv om oppgaven åpner opp for mange ulike måleoperasjoner og resultater er denne oppgaven passende for elever på det åttende utviklingsnivået. For elever som sliter med lengdemåling kan kanskje denne oppgaven være med på å hjelpe de opp på dette utviklingsnivået, ved at de blir mer bekvemme med å håndtere linjal og notere svar i standardiserte måleenheter.



Figur 16: Oppgave 15 s. 84 i Multi 3A. Illustrasjon: Børre Holth.

Denne oppgaven tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling. Videre skal denne ikoniske fremstillingen brukes som gjenstand for en måleoperasjon med bruk av linjal. Dette gjør at man får en transformasjon til representasjonsformen manipulerbare modeller. Fordi elevene trenger eksterne verktøy for å løse oppgaven er den kvalifisert til å kategoriseres som en manipulerbar modell. Videre skal elevene fremstille svaret på oppgaven ved bruk av skriftlig språk. Det betyr at denne oppgaven inneholder tre representasjonsformer, og dermed to transformasjoner. Transformasjonen fra ikoniske fremstillinger til manipulerbare modeller er å modellere. Videre følger transformasjonen fra manipulerbare modeller til skriftlig språk, som er å symbolisere.

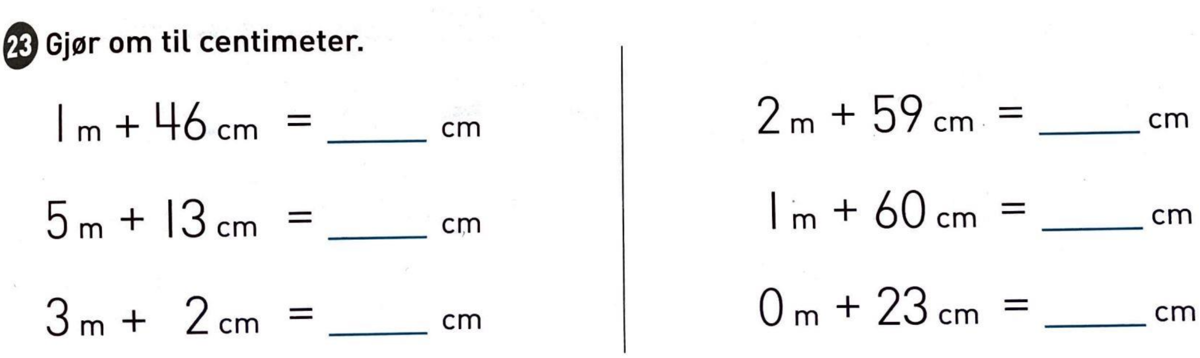
Oppgaven krever at elevene kan bruke linjal med minimal veiledning. Linjene som skilpaddene skal gå langs krever at eleven kan finne riktig start- og endepunkt for måleoperasjonen gjentatte ganger. Dette er karakteristisk for elevers ferdigheter på åttende utviklingsnivå. Her kan elevene også reflektere over bruk av standardiserte måleenheter. Lærerveiledningen til Multi 3A (Alseth et al., 2020f) poengterer at det finnes to ulike løsningsmåter for denne oppgaven. Den første går ut på at elevene måler streken før og etter «knekken» fra nullpunktet på linjalen og adderer de to resultatene. Denne måten viser at lengdemåling er additivt, altså at man kan finne en total lengde ved å summere alle lengdene. Den andre måten som lærerveiledningen foreslår er å fortsette fra sluttpunktet ved første måling, og måle lengden etter knekken videre fra dette punktet. Lærerveiledningen oppfordrer også læreren til å være oppmerksom på vanlige målefeil blant elevene, som for eksempel å begynne på markeringen 1 på linjalen i stedet for nullpunktet. Dette reflekterer at oppgaven skal legge til rette for at elevene mestrer bruk av linjal, som kjennetegner det åttende utviklingsnivået.

Denne oppgaven inneholder transformasjoner mellom tre ulike representasjonsformer. Det gir elevene mulighet for å skape konseptfokusert kunnskap, slik som beskrevet i kapittel 2.2. En slik forståelse bygger på et rikt forhold til representasjoner og at eleven kan ta i bruk ulike representasjonsformer i samme oppgave. Gjennom denne oppgaven lærer elevene å bruke linjalen på ulike måter, ved å måle linjestykker med vinkler. Transformasjonen til og fra den manipulerbare modellen har størst potensiale for å utvikle elevenes konseptfokuserte kunnskap i denne oppgaven. Den ikoniske fremstillingen og det skriftlige svaret er litt i bakgrunnen i denne oppgaven. Som lærerveiledningen (Alseth et al., 2020f) påpeker, er det selve måleoperasjonen som er hensikten med oppgaven. Den ikoniske fremstillingen av de «knekte» linjene kan gi utfordringer når elevene skal måle. Lærerveiledningen påpeker også at denne oppgaven kan være utfordrende for noen elever. De foreslår å bruke centikuber som måleredskap, i stedet for linjal. Ved å bruke centikuber får elevene bruke samme måleenhet og skal få samme svar, men det kan være lettere å se hvor mange centimeter linja faktisk er, da man unngår utfordringen med å begynne på riktig markering på linjalen. Det er altså mange måter å løse denne oppgaven på. Både ved å bruke andre måleredskaper, men også, som nevnt ovenfor, ved måle på ulike måter. Enten ved å måle del for del og deretter legge sammen lengdene, eller måle fra punktet i vinkelen på linjen og snu linjalen. Dette kan vise elevene at lengdemåling er additivt, og at lengde er en fast egenskap ved en gjenstand. Dette er et godt grunnlag for en konseptfokusert kunnskap i lengdemåling.

Oppgaven krever også at eleven skal gjette før måleoperasjonen gjennomføres. Dette kan hjelpe elevene med å utvikle et bevisst forhold til lengden av ulike måleenheter, og hva som kan være en realistisk gjetning, ut ifra at svaret skal oppgis i centimeter.

5.1.9 Niende utviklingsnivå

Det niende utviklingsnivået handler om å bruke måling på en annen måte enn selve måleoperasjonen. Utvalget i denne undersøkelsen inneholder mange oppgaver som ble kategorisert som passende for elever på det niende utviklingsnivået. Dette kommer av mange oppgaver som bruker måling som en kontekst for regneoppgaver, for eksempel som omgjøring mellom meter og centimeter. På dette utviklingsnivået presenterer jeg to eksempler, ett fra Multi 3A og ett fra Multi 6A.



Figur 17: Oppgave 23 side 91 i Multi 3A.

I denne oppgaven skal elevene gjøre om de oppgitte lengdene til centimeter og legge sammen alle lengdene. Til slutt skal svaret oppgis i centimeter. Dette er en oppgave som kun har skriftlig språk som representasjonsform.

For å løse oppgaven bør elevene ha kjennskap til de standardiserte måleenhetene meter og centimeter. Dette er et tegn på at oppgaven bygger på det åttende utviklingsnivået, som handler om å kunne bruke standardiserte måleenheter. Denne oppgaven passer for elever som er på det niende utviklingsnivået. På dette nivået kan eleven løse oppgaver som har måling som kontekst, men selve oppgaven handler ikke om å direkte måle lengde. I denne oppgaven bør elevene ha en konseptfokusert kunnskap av hvordan meter og centimeter står i forhold til hverandre. For eksempel at det er plass til hundre centimeter i en meter. Denne forståelsen kan eleven bruke til å regne om det oppgitte måltallet fra meter til centimeter og legge til de resterende oppgitte centimeterne.

Selv om jeg har kategorisert denne oppgaven som passende for elever på niende utviklingsnivå, så kan oppgaven løses av elever som ikke har en konseptfokusert kunnskap om de standardiserte måleenhetene fra åttende utviklingsnivå. En elev kan ha lært at dersom man ser på tallet som står foran benevningen meter og legge til to nuller bak, får man svaret i centimeter. Ved å bruke denne metoden er det ikke sikkert at eleven har forståelse for hvorfor man kan legge til de to nullene, men vil likevel kunne få rett svar på oppgaven. Dersom oppgaven løses på denne måten, uten veiledning fra læreren, kan denne oppgaven fremme en mer prosedyrefokusert kunnskap.

4.17 Finn omkretsen av

a en likesidet trekant hvor sidene er 6 cm.

b en likebeint trekant hvor to av sidene er 8 cm og den tredje siden er 4 cm.

c et rektangel hvor lengden er 13 cm og bredden er 5 cm.

d et parallellogram hvor to av sidene er 11 cm og de to andre er 7 cm.

e et kvadrat hvor alle sidene er 5 cm.

Figur 18: Oppgave 4.17 side 115 i Multi 6A.

Denne oppgaven har kun skriftlig språk som representasjonsform. Utgangspunktet for å løse oppgaven er skriftlig språk og den inneholder heller ingen transformasjoner til andre representasjonsformer. For å løse oppgaven brukes skriftlig språk som representasjon for å regne ut. Til slutt skal svaret fremstilles ved bruk av skriftlig språk. Lærerveiledningen (Alseth et al., 2021d) foreslår ingen alternative representasjonsformer for å løse oppgaven. Som forenkling nevner lærerveiledningen at elever som sliter med regningen kan ta i bruk lommeregner. Dette får ingen konsekvenser for representasjonsformene, da alt fremdeles vil foregå i det skriftlige språket.

Formålet med oppgaven er at eleven skal regne ut omkretsen av fire ulike geometriske figurer, ved hjelp gitt informasjon om lengden av figurenes sider. Dette innebærer ingen måleoperasjon som elevene skal utføre. Målingene er allerede utført, og elevene skal bruke resultatene fra denne målingen til å løse oppgaven. Dette er karakteristisk for niende utviklingsnivå, som jeg har kategorisert denne oppgaven som. Dette er gjort på grunnlag av at oppgaven bruker måling mer som en kontekst for en regneoppgave som elevene skal løse. Et kjennetegn for niende utviklingsnivå er at elevene kan ta i bruk formler som innebærer måling. Denne oppgaven krever at elevene kjenner til og kan bruke formelen for omkrets av likesidet trekant, likebeint trekant, rektangel, parallellogram og kvadrat. Dette stemmer godt overens med niende utviklingsnivå, og denne oppgaven er et typisk eksempel på dette utviklingsnivået.

Dette er en oppgave som handler om måling, men som ikke bruker noen av de naturlige verktøyene som Smith III et al. (2013) peker på, som linjal, meterstokk og målebånd. Dette er en indikator på at oppgaven legger opp til prosedyrefokusert kunnskap. Lærerveiledningen (Alseth et al., 2021d) skriver følgende om oppgaven: «Elevene bruker målene som er oppgitt og utnytter de geometriske egenskapene til å regne ut omkretsen» (s. 114). Denne beskrivelsen viser tydelig at oppgaven passer for elever som er på det niende utviklingsnivået. Elever som er på dette utviklingsnivået har kjennskap til de geometriske egenskapene som trengs for å regne ut omkretsen. Dette er altså tydelig eksempel på en oppgave som passer for elever på niende utviklingsnivå, og et eksempel på oppgaver som kun benytter skriftlig språk som representasjonsform.

Formålet med denne oppgaven er at elevene skal kunne regne ut omkretsen av ulike geometriske figurer. Dette i seg selv kan være grunnlag for en konseptfokusert kunnskap, dersom oppgaven hadde invitert til å se på hvordan kantenes lengde påvirker omkretsen. Men denne oppgaven har ikke et slikt perspektiv. Denne oppgaven er en ren utregningsoppgave, der elevene skal legge sammen lengdene av alle kantene for å regne ut omkretsen. Riktignok kreves det at elevene vet hvordan de ulike geometriske figurene er bygd opp, slik at de vet hvor mange ganger de skal legge sammen de oppgitte målene i oppgaven. Likevel er dette en oppgave som ikke tilrettelegger for konseptfokusert kunnskap, men heller prosedyrefokusert kunnskap.

Ved å hevde at denne oppgaven legger opp til prosedyrefokusert kunnskap påstår jeg ikke at elever umulig kan tilegne seg konseptfokusert kunnskap gjennom denne oppgaven. Jeg understreker at den ensformige bruken av representasjonsformer muligens vanskeliggjør konseptfokusert kunnskap. Denne oppgaven inviterer ikke til å velge hensiktsmessige representasjonsformer og veksle mellom disse, som er et av kjennetegnene ved oppgaver som tilrettelegger for konseptfokusert kunnskap.

5.2 Resultater av representasjoner

I dette delkapittelet presenteres resultatene for hvert alderstrinn, før disse slås sammen i kapittel 5.2.6, og kan leses i tabell 10. Grunnen til at hvert alderstrinn presenteres for seg er for å kunne se hvordan representasjonsformene endres eller utvikler seg i løpet av årene på barneskolen. Dette ville vært vanskelig å få frem i en samlet tabell, da det ville vært utfordrende å synliggjøre hvilke mengder i tabellen som tilhører de bestemte alderstrinnene.

Analysen viser flere oppgaver med ikoniske fremstillinger som representasjonsform i den trykte læreboken, før oppgaven krever en transformasjon til en annen representasjonsform. Dette er ikke overraskende, da Smith III et al. (2013) påpeker at det er naturlig at slike representasjonsformer er utbredt i trykte lærebøker. Men det er ikke lenger så naturlig når lærerveiledningen er inkludert i analysen. Dette diskuterer jeg videre i kapittel 6.

For hver dobbeltside i elevbøkene lister lærerveiledningen opp hvilket utstyr som kreves til oppgavene. Fra Multi 1A til Multi 6A brukes det mye ulikt utstyr, og både formålet og formatet endrer seg litt for hvert klassetrinn. For hvert klassetrinn viser jeg eksempler på hva slags utstyr som blir foreslått og hvordan dette står i sammenheng med representasjonsformene som brukes.

5.2.1 Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 1A

I Multi 1A har jeg undersøkt 27 oppgaver. Til sammen har disse oppgavene 36 transformasjoner mellom ulike representasjoner. For å lese av transformasjonene i tabell 5 ser man først på den vertikale representasjonsformen, og deretter den horisontale. I krysningspunktet mellom de ulike representasjonsformene står det oppført hvor mange tilfeller av de ulike transformasjonene man finner i Multi 1A. Den vertikale rekken med representasjonsformer viser hvilken representasjonsform som er utgangspunktet for oppgaven.

Tabell 5: Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 1A.

	Skriftlig språk	Muntlig språk	Ikoniske fremstillinger	Manipulerbare modeller	Erfaringsbaserte situasjoner
Skriftlig språk					
Muntlig språk					
Ikoniske fremstillinger	3	5	8	7	1
Manipulerbare modeller	7		1		
Erfaringsbaserte situasjoner				3 1	

Tilfeller som er transformasjon til en tredje representasjonsform, er markert med rødt. Som tabellen viser er det seks oppgaver som inneholder transformasjoner mellom tre ulike representasjonsformer. Fem av disse startet som en ikonisk fremstilling, før de inneholder en transformasjon til en manipulerbar modell. Deretter skal svaret fremstilles ved bruk av skriftlig språk. Disse oppgavene er markert både i krysningen mellom ikoniske fremstillinger og manipulerbare modeller, altså fem av de sju oppgavene i denne ruta. Videre er den andre transformasjonen markert i rødt, som nevnt i kapittel 4.6.

I Multi 1A er ikoniske fremstillinger en mye brukt representasjonsform. Som vist i tabell 5 er det kun tre oppgaver som ikke tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling. Altså tar 89 prosent av utvalget i Multi 1A utgangspunkt i en ikonisk fremstilling.

Ruten i tabell 5 som danner krysningspunktet mellom ikoniske fremstillinger vertikalt og ikoniske fremstillinger horisontalt, er den ruten med høyest antall oppgaver. Dette betyr at det er flest forekomster av oppgaver som bruker ikoniske fremstillinger gjennom hele oppgaven, sammenlignet med alle de andre krysningspunktene mellom de ulike representasjonsformene. Det er altså 30 prosent av oppgavene som kun benytter ikoniske fremstillinger. Dette er også de eneste oppgavene som ikke inneholder transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. Totalt var det 37 prosent av utvalget i Multi 1A som inneholdt én transformasjon fra en representasjonsform til en annen. Det var 33 prosent av utvalget i Multi 1A som inneholdt to transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. I Multi 1A var det dermed ganske lik andel oppgaver som inneholdt bruk av én, to eller tre ulike representasjonsformer.

I lærerveiledningen til Multi 1A (Alseth et al., 2020b) nevnes lekebil, plankebit, tråd, papirstripe, pinne, maling, A4-ark, centikuber og binderser som utstyr til kapittelet om lengdemåling. Dette utstyret gir utslag i tabell 5 i flere manipulerbare modeller og noen erfaringsbaserte situasjoner. Tabell 5 viser også mange ikoniske fremstillinger uten transformasjoner, eller med transformasjon til skriftlig eller muntlig språk. Disse representasjonsformene krever ikke noe spesielt utstyr. Derfor er utstyret som listes opp knyttet til de manipulerbare modellene og de erfaringsbaserte situasjonene.

5.2.2 Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 2B

I Multi 2B har jeg undersøkt 31 oppgaver. Til sammen legger disse oppgavene opp til 47 transformasjoner mellom ulike representasjoner. I likhet med Multi 1A er det mange oppgaver i Multi 2B som tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling. I tabell 6, er det i likhet med tabell 5 en stor forekomst i raden som går ut fra ikoniske fremstillinger. I tabell 6, for Multi 2B, er det 68 prosent av utvalget som tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling.

Elevene er fortsatt forholdsvis tidlig på barneskolen, og lærerveiledningen til Multi 2B (Alseth et al., 2020d) presiserer at boken legger opp til både direkte og indirekte sammenligning ved hjelp av eksterne verktøy som brukes utenfor den trykte læreboken. Dette gjenspeiles i resultatene ved at 10 av 31 oppgaver, 32 prosent, involverer bruk av erfaringsbaserte situasjoner.

Tabell 6: Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 2B

	Skriftlig språk	Muntlig språk	Ikoniske fremstillinger	Manipulerbare modeller	Erfaringsbaserte situasjoner
Skriftlig språk			3	1	
Muntlig språk					
Ikoniske fremstillinger	5	3	2	5	6
Manipulerbare modeller	2 6 1		3		
Erfaringsbaserte situasjoner				4 6	

I Multi 2B er det en oppgave som innebærer tre transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. Dette er den eneste oppgaven i hele utvalget som har en tredje transformasjon, dermed fire ulike representasjonsformer. Den siste transformasjonen i oppgaven er markert med blått. I tabell 6 ser vi at den siste transformasjonen er fra manipulerbare modeller til skriftlig språk. Denne oppgaven tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling i den trykte læreboken. Først kommer en transformasjon til erfaringsbaserte situasjoner der elevene skal klippe ut en tegning av sin høyre fot. Elevene skal deretter gjette hvor lang foten er, målt i binderser og centikuber. Videre kommer en transformasjon til manipulerbar modell, der elevene skal bruke binderser og centikuber til å måle den utklipte foten. Til slutt skal disse svarene fremstilles skriftlig i læreboken, og man får den siste transformasjonen til skriftlig språk.

I lærerveiledningen til Multi 2B (Alseth et al., 2020d) nevnes snor eller pinne som er 1 meter lang, binderser, centikuber, papp, saks, papirstrimler, selvlagde målebånd og linjal som utstyr. Gjenstandene er listet opp i den rekkefølgen de nevnes gjennom kapittelet. Dette viser en overgang fra ikke-standardiserte måleenheter som binderser, via centikuber, til bruk av linjal og standardiserte måleenheter. Utstyrslisten reflekterer også et høyt antall erfaringsbaserte situasjoner, da saks og papp brukes i disse situasjonene utenfor den trykte læreboken.

5.2.3 Transformasjonen mellom representasjonsformer i Multi 3A

I Multi 3A har jeg undersøkt 31 oppgaver. Til sammen har disse oppgavene 36 transformasjoner mellom ulike representasjoner. I Multi 3A finner vi den første forekomsten av oppgaver om lengdemåling som kun har skriftlig språk som representasjonsform, og ingen transformasjoner til andre representasjonsformer. Slike oppgaver fant jeg ikke i Multi 1A og Multi 2B. Fem oppgaver, som utgjør 16 prosent av utvalget i Multi 3A, har denne formen. Alle de fem oppgavene med denne formen ble kategorisert som passende for elever på det niende utviklingsnivået i lengdemåling.

Som nevnt i innledningen, kapittel 1.2, er det naturlig at en trykt lærebok inneholder mye bruk av statiske representasjonsformer, som skriftlig språk og ikoniske fremstillinger. Det gjør også Multi. For Multi 1A fastslo jeg at 89 prosent av utvalget tok utgangspunkt i en ikonisk fremstilling. For Multi 2B er tallet 68 prosent. For Multi 3A var det 61 prosent som tok utgangspunkt i en ikonisk fremstilling. Dette viser at det er liten prosentvis nedgang i andelen av oppgaver som tar utgangspunkt i ikoniske fremstillinger gjennom de tre første klassetrinnene.

I Multi 3A er det en økning i antall oppgaver som tar utgangspunkt i skriftlig språk, sammenlignet med Multi 1A og Multi 2B. Alle oppgavene har en skriftlig oppgavetekst, men her er det snakk om skriftlig språk som matematisk representasjon, altså tekstoppgaver eller symbolspråk. Utvalget i Multi 1A har ingen oppgaver som tar utgangspunkt i skriftlig språk som matematisk representasjon, mens Multi 2B har fire oppgaver, 13 prosent som tar utgangspunkt i skriftlig språk som matematisk representasjon. I Multi 3A tok 36 prosent av utvalget utgangspunkt i skriftlig språk som representasjonsform. Dette betyr at det skriftlige språket er det som brukes for å løse oppgaven. Alle oppgavene i utvalget inneholder en skriftlig oppgavetekst, men her er det kun snakk om oppgaver som bruker skriftlig språk som det matematiske utgangspunktet.

Tabell 7: Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 3A

	Skriftlig språk	Muntlig språk	Ikoniske fremstillinger	Manipulerbare modeller	Erfaringsbaserte situasjoner
Skriftlig språk	5		6		
Muntlig språk					
Ikoniske fremstillinger	7	5	3	4	
Manipulerbare modeller	4		1		
Erfaringsbaserte situasjoner				1	

I Multi 3A er det også en nedgang i oppgaver som involverer erfaringsbaserte situasjoner. Kun én av 31 oppgaver, altså 3 prosent. Denne oppgaven ses i tabell 7 i krysningspunktet mellom erfaringsbaserte situasjoner vertikalt og manipulerbare modeller horisontalt. Videre har denne oppgaven en transformasjon til, som finnes i krysningspunktet mellom manipulerbare modeller vertikalt og ikoniske fremstillinger horisontalt.

I lærerveiledningen til Multi 3A (Alseth et al., 2020f) nevnes linjal, eventuelt centikuber, eventuelt binderser, eventuelt selvlagde målebånd, tråd, saks, noteringsark, tavlelinjal, 100 centikuber og målebånd. Gjenstandene er listet opp i den rekkefølgen de nevnes gjennom kapittelet. Dette viser at linjal er i bruk gjennom hele boken, da det er det første redskapet som blir brukt, og blir nevnt flere ganger. Det er større bruk av standardiserte måleenheter i Multi 3A enn i Multi 2B, som vises i tabell 11 i kapittel 5.3.

5.2.4 Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 4B

Prosentvis er det en liten oppgang i antall oppgaver som tar utgangspunkt i skriftlig språk som representasjon i Multi 4B sammenlignet med Multi 3A. Oppgaver som tar utgangspunkt i skriftlig språk utgjorde 36 prosent av utvalget i Multi 3A og 38 prosent i Multi 4B.

Tabell 8: Transformasjoner mellom representasjoner i Multi 4B

	Skriftlig språk	Muntlig språk	Ikoniske fremstillinger	Manipulerbare modeller	Erfaringsbaserte situasjoner
Skriftlig språk	1	1	6	1	
Muntlig språk					
Ikoniske fremstillinger	8	2	2	1	1
Manipulerbare modeller		1			
Erfaringsbaserte situasjoner				1 1	

Som jeg påpekte for Multi 3A var det en nedgang fra Multi 2A i antall oppgaver som involverte erfaringsbaserte situasjoner. I Multi 4B er det to oppgaver som involverer erfaringsbaserte situasjoner, som utgjør 8 prosent av de undersøkte oppgavene i Multi 4B. Den ene av disse har videre en transformasjon til manipulerbare modeller, som er markert i rødt. I Multi 4B er det altså én oppgave mer enn i Multi 3A, som involverer bruk av erfaringsbaserte situasjoner som representasjonsform. Likevel er det en nedgang sammenlignet med Multi 1A og Multi 2B, som hadde henholdsvis 15 og 32 prosent av oppgavene som involverte erfaringsbaserte situasjoner. Denne tendensen ser ut til å fortsette i Multi 6A, som jeg skriver mer om i neste delkapittel.

I lærerveiledningen til Multi 4B (Alseth et al., 2021b) nevnes tau, meterstokk, saks, ulike ting å måle, geobrett, strikk, prikkark, linjal, kortstokk og koordinatsystem. Gjenstandene er listet opp i den rekkefølgen de nevnes gjennom kapittelet. Utstyret reflekterer utvalgets eneste spill, der kortstokk og koordinatsystem brukes. Geobrett, strikk og prikkark viser redskaper som brukes for arbeid med omkrets. Dette foregår med ikke-standardiserte måleenheter, ved at elevene teller antall prikker langs sidekantene, i stedet for å måle.

5.2.5 Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 6A

I Multi 6A fant jeg en stor andel oppgaver som kun bruker skriftlig språk som representasjonsform, slik som figur 18. Dette utgjør 43 prosent av alle de analyserte oppgavene i Multi 6A. Disse oppgavene har ingen transformasjon mellom ulike representasjonsformer, de holder seg til skriftlig språk gjennom hele prosessen. Det er to oppgaver til som heller ikke endrer representasjonsform. Disse holder seg til ikoniske fremstillinger gjennom hele prosessen. Til sammen er det 49 prosent av utvalget i Multi 6A som ikke har transformasjoner mellom ulike representasjonsformer.

Tabell 9: Transformasjoner mellom representasjonsformer i Multi 6A

	Skriftlig språk	Muntlig språk	Ikoniske fremstillinger	Manipulerbare modeller	Erfaringsbaserte situasjoner
Skriftlig språk	15		3		
Muntlig språk					
Ikoniske fremstillinger	7	2	2	5	
Manipulerbare modeller	4				
Erfaringsbaserte situasjoner				1	

Det er kun én oppgave som involverer bruk av erfaringsbaserte situasjoner. Den skal besvares ved bruk av skriftlig språk som representasjonsform, men før dette må eleven foreta en overgang til manipulerbare modeller. Oppgaven finnes altså med grønn markering i krysningspunktet mellom erfaringsbaserte situasjoner vertikalt og manipulerbare modeller horisontalt. Markeringen av den andre transformasjonen står i rødt i krysningspunktet mellom manipulerbare modeller og skriftlig språk. Selv om dette er den eneste oppgaven i Multi 6A som involverer erfaringsbaserte situasjoner, er det ikke den eneste oppgaven som involverer en transformasjon fra manipulerbare modeller til skriftlig språk. I denne ruten finnes tre andre oppgaver. Dette er den eneste oppgaven i Multi 6A som ikke tar utgangspunkt i skriftlig språk eller ikoniske fremstillinger.

Lærerveiledningen til Multi 6A (Alseth et al., 2021d) nevner linjal, målebånd, meterstokk, prikkark, eventuelt geobrett og eventuelt strikker. Utstyret reflekterer at Multi 6A har mye fokus på standardiserte måleenheter. Det nevnes at geobrett og strikker eventuelt kan brukes for elever som trenger forenklinger. Utstyret skal brukes til å finne omkrets. Disse oppgavene ble kategorisert som niende utviklingsnivå. Som vist i tabell 9 er det ingen oppgaver som kun går ut på å måle med standardiserte måleenheter. Derfor blir utviklingsnivået i lengdemåling det samme, uansett om geobrett brukes som forenkling eller ikke.

5.2.6 Sammenfatning av transformasjoner mellom representasjonsformer

De samlede resultatene inneholder 148 oppgaver som var utvalgt etter de gitte kriteriene beskrevet i kapittel 4.5. Av det totale utvalget er det 34 oppgaver som involverer bruk av tre representasjonsformer. Dette innebærer to transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. Den første transformasjonen er markert med grønt. For oppgaver med to transformasjoner er den andre transformasjonen markert med rødt. Én oppgave involverer bruk av fire representasjonsformer, som nevnt ovenfor i kapittel 5.2.2. Her er den tredje transformasjonen markert med blått. Til sammen blir dette 183 transformasjoner, fordelt på 148 oppgaver. Oppgaver som ikke inneholder transformasjoner mellom ulike representasjonsformer, er også markert med grønt. Dette er gjort for å kunne se totalt antall oppgaver opp mot totalt antall transformasjoner. Oppgavene som ikke inneholder transformasjoner vil uansett kunne skilles ut, ved å se på krysningspunktet mellom skriftlig språk vertikalt og skriftlig språk horisontalt. Ut fra denne ruten og diagonalt nedover mot høyre står alle oppgaver som ikke inneholder transformasjoner mellom ulike representasjonsformer.

Tabell 10: Sammenfatning av transformasjoner mellom representasjonsformer

	Skriftlig språk	Muntlig språk	Ikoniske fremstillinger	Manipulerbare modeller	Erfaringsbaserte situasjoner
Skriftlig språk	21	1	18	2	
Muntlig språk					
Ikoniske fremstillinger	30	17	17	22	8
Manipulerbare modeller	2 21 1	1	4		
Erfaringsbaserte situasjoner				10 8	

Av de 148 oppgavene er det 38 oppgaver som ikke innebærer en transformasjon til en annen representasjonsform. Dette utgjør 26 prosent av utvalget. Hvordan slike oppgaver kan påvirke elevenes læring kommer jeg tilbake til i kapittel 6.

Hver rute i tabell 10 representerer en unik kombinasjon av ulike representasjonsformer. Som man kan se av tabellen er det noen ruter som er helt tomme. Det betyr at det var ingen oppgaver i utvalget som la opp til disse kombinasjonene av representasjonsformer. Alle rutene i raden som går ut fra muntlig språk er tomme. Dette betyr at det var ingen av oppgavene i utvalget som tok utgangspunkt i muntlig språk. Det er ganske naturlig med tanke på at jeg har undersøkt en trykt lærebok og lærerveiledning. Likevel er det bruk av muntlig språk i oppgaven, men disse oppgavene tar utgangspunkt i en annen representasjonsform. Totalt er det 19 av 148 oppgaver som legger opp til bruk av muntlig språk som en representasjonsform i arbeid med å løse oppgavene.

5.3 Resultater av utviklingsnivå i lengdemåling

I dette avsnittet presenteres de samlede resultatene etter analyse av utviklingsnivå i lengdemåling for alle de utvalgte bøkene i læreverket Multi. Av totalt 14 elevbøker i Multi er det fem som inneholder kapitler eller delkapitler om lengdemåling. Resultatene for utviklingsnivå i lengdemåling presenteres samlet, da dette er mest hensiktsmessig for å se utviklingen i løpet av de ulike alderstrinnene. Dette lar seg lettere fremstille samlet, enn resultatene for representasjonsformer. I venstre kolonne står et nummer for hvert utviklingsnivå, for eksempel for tredje utviklingsnivå står tallet 3, på fjerde rad i venstre kolonne. Hver bok for de ulike alderstrinnene har sin kolonne, der antall forekomster av oppgaver for hvert utviklingsnivå er notert. Dette gjør at man kan lese av resultatene for hver enkelt bok. I høyre kolonne kan man lese av totalt antall oppgaver for de ulike utviklingsnivåene, uavhengig av klassetrinn.

Tabell 11: Resultater for utviklingsnivå i lengdemåling

Utviklingsnivå	Multi 1A	Multi 2B	Multi 3A	Multi 4B	Multi 6A	Sum
0						0
1	3	1				4
2	3			1		4
3	8					8
4	2	4				6
5	1					1
6	8	12	3	2		25
7	2	4	2	2	1	11
8		10	15	7	7	39
9			11	12	27	50
Sum	27	31	31	24	35	148

Resultatene viser at en stor andel av oppgavene som ble kategorisert som passende for elever på de fire høyeste utviklingsnivåene. Mulige feilkilder som kan være årsak til dette gjør jeg rede for i kapittel 6.6. Det er kun én oppgave som ble kategorisert på det femte utviklingsnivået. Fra det første til det femte utviklingsnivået er det totalt 23 oppgaver, altså 16 prosent av alle oppgavene. Denne skjevfordelingen diskuterer jeg videre i kapittel 6.1.

Nivået med flest forekomster er det niende utviklingsnivået. Dette nivået rommer totalt 35 prosent av alle oppgavene. Som vist i tabellen forekommer oppgaver på niende utviklingsnivå allerede i Multi 3A. Dette kan ses i sammenheng med at Multi 3A har en høyere forekomst av skriftlig språk som representasjonsform. Typiske oppgaver på niende utviklingsnivå er oppgaver som bruker måling som et middel i arbeid med oppgaven, men selve måleoperasjonen er ikke målet i seg selv.

6. Diskusjon

I forrige kapittel viste jeg et utvalg av oppgavene som danner datamaterialet i denne undersøkelsen. Jeg viste også de samlede resultatene av analysen av utviklingsnivå i lengdemåling og representasjonsformer i Multi. Problemstillingen som var utgangspunkt for undersøkelsen var: Hvordan benytter læreverket Multi representasjonsformer i oppgaver på ulike i utviklingsnivå innen lengdemåling? For å svare på dette vil jeg nå drøfte funnene fra analysen opp mot denne problemstillingen.

Formålet med denne oppgaven var å undersøke hvordan Multi benytter de ulike representasjonsformene i overgangen fra konkret til abstrakt. Det matematiske temaet var begrenset til lengdemåling. Bakgrunnen for dette var at flere forskere trekker frem at lengdemåling i sin naturlige form involverer et bredt spekter av representasjonsformer og ulike måleredskaper. Analysen viser at læreverket Multi tar i bruk alle de nevnte representasjonsformene i rammeverket, men benytter ikke alle mulige kombinasjoner, altså ikke alle mulige transformasjoner mellom representasjoner.

Multi inneholder mange transformasjoner fra ikoniske fremstillinger til andre representasjonsformer, for eksempel skriftlig språk eller manipulerbare modeller. Totalt er det 94 av 148 oppgaver som tar utgangspunkt i en ikonisk representasjonsform, altså 64 prosent. Som Smith III et al. (2013) påpeker er det ikke overraskende at en trykt lærebok benytter mange statiske representasjoner, da det er vanskelig å uttrykke bevegelse langs en gjenstand i en trykt lærebok. Lærerveiledningen kan derimot inneholde beskrivelser av slike aktiviteter. I denne undersøkelsen har jeg derfor undersøkt lærerveiledningen, parallelt med elevbøkene. Dette valget tok jeg for å unngå å eventuelt fremstille læreverket som statisk, uten å ha sjekket om lærerveiledningen supplerer med aktiviteter og oppgaver av en annen karakter. Etter å ha undersøkt lærerveiledningen i analysen kan jeg påstå at dette ikke er tilfellet. Til noen av oppgavene supplerer lærerveiledningen med informasjon som ikke er tilgjengelig i elevboken, som vist i figur 12. I dette tilfellet viser elevboken kun en tegneserie, mens lærerveiledningen legger opp til en samtale med utgangspunkt i tegneserien. Samtalen skal være utgangspunkt for en diskusjon om måleenheter, og er derfor en viktig representasjonsform i denne oppgaven. Dette er informasjon som ville gått tapt i analysen dersom jeg ikke hadde inkludert lærerveiledningen. Fordi lærerveiledningen ble undersøkt i sammenheng med elevboken er slike tilfeller regnet med i resultatene. Dersom jeg hadde utelatt lærerveiledningen kunne dette gitt feilaktige resultater, som ikke tok hensyn til lærerveiledningens innspill til oppgavene. Da kunne resultatene for eksempel fått en høyere andel oppgaver som kun bestod av ikoniske fremstillinger og skriftlig språk, og mindre muntlig språk.

Som nevnt ovenfor inneholder ikke lærerveiledningen i stor grad oppgaver med bruk av andre representasjonsformer enn det som vises i elevboken. Lærerveiledningen kunne for eksempel ha inneholdt oppgaver med bruk av erfaringsbaserte situasjoner, som kunne vært vanskelige å implementere i elevboken. Som nevnt er ikke dette tilfellet. Forfatterne i Multi oppgir i et intervju, publisert av forlaget Gyldendal, at lærerveiledningen og elevbøkene skilte seg mer fra hverandre i bøkene til den forrige læreplanen, LK06. «Tidligere var mange spill, aktiviteter og varierte oppgaver plassert i Lærerens bok, mens elevbøkene inneholdt mer de tradisjonelle oppgavene» (Gyldendal, 2021). Selv som disse oppgavene er inkludert i elevboken er representasjonsbruken i lengdemåling i Multi likevel relativt statisk. Sett i lys av det van de Walle (2013) og Hurrell (2015) skriver om lengdemåling som et aktivt tema tilbyr Multi lite muligheter for dette, da mye av målingen foregår på tegnede gjenstander i boken, i stedet for å måle virkelige gjenstander. Hvordan dette kan påvirke elevenes forståelse av lengdemåling kommer jeg tilbake til i kapittel 6.2.2.

6.1 Drøfting av utviklingsnivå i lengdemåling i Multi

Tabell 11 viser at utviklingsnivå i lengdemåling stiger gjennom årene i læreverket Multi. Multi 1A har tre oppgaver på første utviklingsnivå. Multi 2B har én oppgave på dette utviklingsnivået. Disse fire oppgavene er de eneste i læreverket Multi som ble kategorisert som passende for elever på første utviklingsnivå i lengdemåling. Det at utviklingsnivået stiger er naturlig ettersom elevene blir eldre. Et mer overraskende funn er at det totalt er 23 oppgaver på de fem første utviklingsnivåene. Dette står i stor kontrast til de 125 oppgavene som ble kategorisert som passende for de fire siste utviklingsnivåene. Multi legger altså opp til en relativt rask progresjon av ferdighetene som skal elevene skal lære i de første utviklingsnivåene. Videre vier Multi mange oppgaver som er passende for elever på høyere utviklingsnivåer. Dette kan føre til at elever går glipp av viktige innsikter fra de lavere utviklingsnivåene, som kan gjøre det mer utfordrende å mestre de høyere utviklingsnivåene. En mulig årsak til at så mange av oppgavene ble kategorisert som passende for elever på de fire høyeste utviklingsnivåene kan være at slike oppgaver ofte la opp til bruk av statiske representasjoner. Det kan være en forventing om at en lærebok skal inneholde slike representasjoner, da Smith III et al. (2013) påpekte at oppgaver med statiske representasjoner er det enkleste å fremstille i en trykt lærebok.

Det er bare én oppgave av totalt 148 som ble kategorisert på femte utviklingsnivå i lengdemåling. Dette nivået krever at elevene har forståelse for at lengden til en gjenstand ikke endres selv om gjenstanden flyttes på. Fordi det bare er én oppgave som krever denne forståelse kan det føre til at elevene får en manglende forståelse for dette aspektet ved lengdemåling. Dette kan gjøre at elevene ikke får øving i å avsløre noe som et synsbedrag. I den aktuelle oppgaven, figur 10, kan det se ut som den korteste sjiraffen er den høyeste, da den står oppå en kurv. Denne oppgaven gir mulighet for at elevene lærer hvordan synet kan bedra oss innenfor temaet lengdemåling.

Det er også få oppgaver som handler om transitivitet. Som vist i tabell 11 er det kun seks oppgaver som ble kategorisert som passende for elever på det fjerde utviklingsnivået. Som nevnt i kapittel 3.2 hevder Kamii (2006) at transitivitet er en forutsetning for å forstå konseptet med måling som gjentakelse av en bestemt enhet. Dette er et konsept man kan risikere at elevene går glipp av siden det er såpass få oppgaver som handler om transitivitet.

I Multi møter elevene ikke-standardiserte måleenheter før standardiserte måleenheter. Multi 1A inneholder ikke oppgaver som involverer standardiserte måleenheter. Dette kommer først i Multi 2B. I Multi 6A brukes bare standardiserte måleenheter, i oppgaver på sjuende, åttende og niende utviklingsnivå. Hurrell (2015) erfarer at arbeid med ikke-standardiserte måleenheter utvikler en forståelse som blir viktig når elevene skal begynne med standardiserte måleenheter. Aspenes (2022) fant også at erfaringer med ikke-standardiserte måleenheter var viktig for å videreføre forståelsen til standardiserte måleenheter. Multi innfører altså de ulike elementene i lengdemåling i en rekkefølge som er anbefalt av forskere, og i samsvar med rekkefølgen i rammeverket for lengdemåling.

6.2 Drøfting av representasjonsformer i Multi

Som nevnt viser tabell 10 at 26 prosent av de 148 oppgavene ikke involverer en transformasjon mellom ulike representasjonsformer. Dette betyr at 74 prosent at oppgavene involverer en transformasjon mellom ulike representasjoner. Dette er et høyt antall som gir indikasjoner på at læreverket Multi gir muligheter for utvikling av konseptfokusert kunnskap. Dette påstår jeg på bakgrunn av Smith III et al. (2013) og Skemp (1976) sine beskrivelser av denne type forståelse. Det innebærer forståelse for hvordan og hvorfor en oppgave kan løses på en bestemt måte, samt en forståelse av hvordan ulike representasjonsformer kan benyttes i den samme oppgaven. Jeg vil si at Multi tilrettelegger for dette gjennom å tilby oppgaver som i stor grad inneholder transformasjoner mellom ulike representasjonsformer, som trener en konseptfokusert kunnskap hos elevene.

Læreverket Multi er bygget på kompetansemålene i matematikk i LK20. Som nevnt er representasjon et av kjerneelementene i matematikkfaget i denne læreplanen. Derfor er det naturlig at læreverket har fokusert på å benytte et bredt spekter av representasjonsformer og oppgaver som involverer transformasjoner mellom representasjonsformer.

6.2.1 Konseptfokusert kunnskap

Av de totalt 148 oppgavene i utvalget er det 110 oppgaver som inneholder transformasjoner til andre representasjonsformer. Som Smith III et al. (2013) påpeker er det å kunne bruke flere representasjonsformer innenfor samme problem en forutsetning og et grunnlag for konseptfokusert kunnskap. Det er altså 74 prosent av oppgavene som kan være et godt grunnlag for en konseptfokusert kunnskap, gjennom fokus på transformasjoner mellom representasjonsformer.

I analysen, kapittel 5.1.8 nevnte jeg hvordan oppgaven i figur 16 kan bidra til elevenes konseptfokuserte kunnskap. Selv om oppgaven i figur 16 inneholder tre ulike representasjonsformer så inneholder den ikke de representasjonsformene som Smith III et al. (2013) peker på som viktige i måling. De nevner for eksempel meterstokk og målebånd til å måle virkelige gjenstander. Denne oppgaven tar ikke utgangspunkt i virkelige gjenstander, men en forminsket ikonisk fremstilling av skilpadder og frukt. De ikoniske fremstillingene skal riktignok måles ved bruk av linjal, men alt er forminsket i forhold til en virkelige verden. Dette er et trekk som går igjen i flere av oppgavene i Multi. Mange av oppgavene som legger til rette for konseptfokusert kunnskap ved bruk av flere representasjonsformer tar i bruk forminskete og illustrerte bilder av gjenstander, i stedet for reelle gjenstander. Dette kan være en hindring for den konseptfokuserte kunnskapen, da den ikke bygger på realistiske representasjonsformer.

Måleoperasjoner som gjennomføres på tegninger, fremfor virkelige gjenstander, er et gjennomgående trekk i læreverket Multi. Hvordan dette kan påvirke elevenes læring diskuterer jeg nedenfor, under kapittel 6.2.2 om prosedyrefokusert kunnskap.

6.2.2 Prosedyrefokusert kunnskap

Av det totale utvalget på 148 oppgaver er det 38 oppgaver som ikke inneholder en transformasjon til en annen representasjonsform. Disse oppgaven finnes diagonalt nedover fra øverste venstre hjørne i tabell 10. På bakgrunn av det jeg har beskrevet i kapittel 2.2 om Smith III et al. (2013) kan slike oppgaver fremme en mer prosedyrefokusert kunnskap. Det vil si at elevene kan gjennomføre en matematisk prosedyre, men uten å vite hvorfor denne prosedyren er passende for det gjeldende problemet. De kan ha lært seg denne prosedyren som en regel, uten å tenke over hva som er hensikten med denne regelen. Som jeg gjorde rede for i kapittel 2.2 er det likheter mellom prosedyrefokusert kunnskap og det Mellin-Olsen (1984) beskriver som regeloppfatning og instrumentell læring. En slik forståelse kan knyttes til problemene som Smith III et al. påpeker at mange voksne har, som jeg forklarte i kapittel 1.1.

Av de 38 oppgavene som ikke la opp til transformasjoner mellom ulike representasjonsformer, er alle disse oppgavene knyttet til enten skriftlig språk eller ikoniske fremstillinger. Oppgavene i utvalget som la opp til bruk av erfaringsbaserte situasjoner, muntlig språk eller manipulerbare modeller la alltid opp til bruk av minst en annen representasjonsform. Det kan derfor se ut til at oppgavene som la opp til bruk av kun skriftlig språk eller ikoniske fremstillinger var spesielt utsatt for å fremme en prosedyrefokusert kunnskap blant elevene.

Selv om det er en andel oppgaver som ikke inneholder transformasjoner mellom representasjonsformer, så er denne andelen relativt liten, 26 prosent. Men det er en prosentvis stigning i andelen av oppgaver som ikke inneholder transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. I Multi 6A er der til sammen 49 prosent av utvalget i Multi 6A som ikke har transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. Denne prosentandelen er tydelig høyere i Multi 6A (49 prosent) enn for totalen av utvalget i Multi (26 prosent). Dermed kan man spørre seg om verdien av konseptfokusert kunnskap blir mindre, jo eldre elevene blir. Eller om man regner med at elevene allerede har en god nok konseptfokusert kunnskap fra småtrinnet, slik at det kan nedprioriteres på mellomtrinnet.

En annen faktor som kan påvirke læringen er at oppgavene i svært stor grad tar utgangspunkt i ikoniske fremstillinger, fremfor erfaringsbaserte situasjoner. Over halvparten av oppgavene i utvalget, 64 prosent tar utgangspunkt i en ikonisk fremstilling. Av de 94 oppgavene som tar utgangspunkt i en ikonisk situasjon er det totalt ni som har en transformasjon til en erfaringsbasert situasjon. De resterende 85 oppgavene har enten transformasjon til muntlig språk, skriftlig språk, manipulerbare modeller eller ingen transformasjon til andre representasjonsformer. Dette betyr at det er det er ni oppgaver som kombinerer en tegning i boken med en oppgave utenfor læreboken. Videre er 58 prosent av oppgavene knyttet til en tegning i boken, uten en kobling til den virkelige verdenen utenfor læreboken. Mellin-Olsen (1984) hevder at mangel på sammenheng mellom skolematematikken og hverdagen kan skape grobunn for det instrumentelle fornuftsgrunnlaget, som er grunnlaget for det han kaller regeloppfatning eller instrumentell læring.

Ved å måle tegninger i boken fremfor virkelige gjenstander risikerer man å miste koblingen mellom virkeligheten og matematikken, som kan skapes gjennom måling, ifølge Clements og Stephan (2004).

I Multi er det en større forekomst av oppgaver som er forankret i ikoniske fremstillinger, enn oppgaver uten transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. Både oppgaver som er ensformige i bruk av representasjonsformer, og oppgaver som er basert på noe uvirkelig, kan skape en prosedyrefokusert kunnskap.

6.2.3 Transformasjoner mellom representasjonsformer

I analysen viste jeg eksempler på oppgaver som la opp til bruk av de ulike representasjonsformene som Lesh (1981) beskriver. Selv om jeg viste alle de fem ulike representasjonsformene fikk jeg ikke vist alle de ulike transformasjonene, da dette ikke lot seg gjøre samtidig som jeg skulle vise bredden av utviklingsnivå i lengdemåling. Som vist i tabell 10 består datamaterialet av oppgaver som legger opp til totale elleve ulike transformasjoner mellom representasjonsformer. I analysekapittelet viste jeg eksempler på seks ulike transformasjoner; beskrive, tolke, modellere, symbolisere, generalisere og formalisere. Jeg viste også eksempler på oppgaver uten transformasjoner mellom representasjonsformer.

I tillegg til de seks transformasjonene som er vist i analysen består datamaterialet også av oppgaver som legger opp til andre transformasjoner. Dette vises i tabell 10, der alle transformasjonene er samlet. I denne tabellen er 13 av de 25 rutene fylt. Dette betyr at utvalget totalt inneholder elleve ulike transformasjoner, da to av rutene inneholder oppgaver som kun bruker én representasjonsform. Disse elleve ulike transformasjonene er å lese, illustrere, konkretisere, formalisere, beskrive, modellere, tolke, symbolisere, beskrive, avbilde, spesialere, beskrive, skjematisere og generalisere. Beskrive er nevnt flere ganger, da å beskrive forklarer flere ulike transformasjonsprosesser mellom ulike representasjonsformer, ifølge Lesh (1981). For å gjøre det oversiktlig for leseren har jeg ramset opp de ulike transformasjonene ovenfor. Nedenfor følger en forklaring på hva de ulike prosessene består av.

De ulike prosessene i utvalget er å: lese (fra skriftlig språk til muntlig språk), illustrere (fra skriftlig språk til ikoniske fremstillinger), konkretisere (fra skriftlig språk til manipulerbare modeller), formalisere (fra ikoniske fremstillinger til skriftlig språk), beskrive (fra ikoniske fremstillinger til muntlig språk), modellere (fra ikoniske fremstillinger til manipulerbare modeller), tolke (fra ikoniske fremstillinger til erfaringsbaserte situasjoner), symbolisere (fra manipulerbare modeller til skriftlig språk), beskrive (fra manipulerbare modeller til muntlig språk), avbilde (fra manipulerbare modeller til ikoniske fremstillinger), spesialisere (fra manipulerbare modeller til erfaringsbaserte situasjoner), beskrive (fra erfaringsbaserte situasjoner til skriftlig språk), skjematisere (fra erfaringsbaserte situasjoner til ikoniske fremstillinger) og generalisere (fra erfaringsbaserte situasjoner til manipulerbare modeller).

Som nevnt i teorikapittelet deler Duval (2006) transformasjonene inn i overganger og behandlinger. Måten jeg har kategorisert representasjonsformene på er ikke direkte overførbart til Duval sin teori, men har flere likheter. Derfor beskriver jeg her hvordan Duval sine beskrivelser av registre kan ses i sammenheng med mine funn.

Duval (2006) har en teori om at overganger fra monofunksjonelle registre til multifunksjonelle registre kan være spesielt utfordrende for mange elever. Selv om jeg ikke har foretatt en analyse med utgangspunkt i Duval så kan jeg si at Multi bruker oppgaver som befinner seg innenfor et multifunksjonelt register, da jeg har funnet mye bruk av ikoniske fremstillinger i utvalget. Mange av de ikoniske fremstillingene i Multi er tegninger, som er multifunksjonelle. Likevel tilhører ikke alle ikoniske fremstillinger et multifunksjonelt register. Eksempler på ikoniske fremstillinger i et monofunksjonelt register er grafer og diagrammer, som kun brukes til matematiske operasjoner.

De utvalgte oppgavene i Multi inneholdt mange tegninger, som er ikke-diskursive representasjoner, i et multifunksjonelt register. Dette betyr at fremstillingene kan brukes til andre formål enn matematikk, selv om det i denne konteksten brukes til matematikk. Multi bruker også andre multifunksjonelle registre, som det muntlige og det skriftlige språket. Det vil si at språket brukes både i situasjoner der det eneste formålet er å løse en matematisk operasjon, men også til andre mer hverdagslige formål. Multi bruker språket på begge måter.

De legger blant annet opp til en mindre formell bruk av språket, ved å legge opp til åpne samtaler knyttet til de ulike samtalebildene, som vist i figur 7. Kapitlene om lengdemåling inneholder ikke mye bruk av monofunksjonelle registre. Det er mye bruk av språk til forklaringer, som finner sted i multifunksjonelle registre. Jeg har ikke foretatt en systematisk undersøkelse av dette, men det kan se ut til at kapitler om andre matematiske temaer bruker språket mer monofunksjonelt. Dette kan være i form av rent matematisk symbolspråk som utgangspunkt for oppgavene som skal løses. I utvalget har jeg ikke funnet en oppgave som går fra monofunksjonelle registre til multifunksjonelle registre, slik som Duval har utpekt som spesielt vanskelig for mange elever.

6.3 Sammenheng mellom representasjonsformer og utviklingsnivå

Etter hvert som utviklingsnivå for lengdemåling blir høyere utover i læreverket blir også representasjonsformene mer abstrakte. Som jeg gjorde rede for i kapittel 5.2, med underkapitler, blir representasjonene mindre varierte jo eldre elevene blir. Her nevnte jeg også at måling med ikke-standardiserte måleenheter, sjette utviklingsnivå, ofte resulterte i bruk av manipulerbare modeller. På samme måte så jeg at oppgaver som var passende for elever på det niende utviklingsnivået oftere hadde skriftlig språk, og kun dette, som representasjonsform. Dette gjenspeiles i Multi 6A, som både har en stor andel oppgaver som passer for elever på niende utviklingsnivå, og en stor andel oppgaver som kun bruker skriftlig språk som representasjonsform.

To av forfatterne av læreverket Multi, Alseth og Røsseland (2014), skriver i en annen sammenheng enn Multi, at bruk av de abstrakte matematiske symbolene er et mål i skolen. Disse tankene reflekteres i læreverket Multi, som går fra de konkrete representasjonene og mot de abstrakte representasjonene. Multi 6A er boken for det høyeste klassetrinnet som ble inkludert i utvalget. I Multi 6A har 43 prosent av oppgavene kun skriftlig språk som representasjonsform. Dersom vi i tillegg ser på oppgaver som benytter skriftlig språk før eller etter en transformasjon mellom en annen representasjonsform får vi 83 prosent. Multi 6A benytter altså i stor grad skriftlig språk som representasjon i oppgavene som omhandler lengdemåling.

Bøkene på de yngste klassetrinnene har større andel oppgaver med bruk av manipulerbare modeller enn bøkene på mellomtrinnet. Disse bøkene har også større forekomster av lavere utviklingsnivå. Dette kan tyde på at oppgaver for lavere utviklingsnivå ofte innebærer mer konkreter enn oppgaver på høyere utviklingsnivå. Særlig bruk av ikke-standardiserte måleenheter viste seg å invitere til bruk av manipulerbare modeller. Dette er ikke så overraskende, da det er naturlig å ta i bruk verktøy som centikuber eller binders.

Det er mer overraskende at oppgaver knyttet til direkte sammenligning og transitivitet ikke la opp til erfaringsbaserte situasjoner som representasjonsform, men mer ikoniske fremstillinger. Et eksempel på dette er figur 10, eksempelet med sjiraffene, som kunne fått frem poenget minst like godt ved å bruke reelle gjenstander, eller personer i klasserommet. For eksempel kunne man stilt en elev som tydelig er lavere enn læreren oppå en krakk som gjorde at eleven ble høyere enn læreren. Slik kunne man jobbet med denne oppgaven som en erfaringsbasert situasjon, fremfor som en ikonisk fremstilling. På denne måten kan man knytte matematikken til hverdagslige og reelle situasjoner. Dette kan, som tidligere nevnt, hjelpe elevene med å finne mening i matematikken, og jobbe for en konseptfokusert kunnskap.

Som nevnt i kapittel 5.2.4 og 5.2.5 om resultatene av representasjonsformer i Multi 4B og Multi 6A, er andelen oppgaver knyttet til erfaringsbaserte situasjoner synkende gjennom årene, samtidig som utviklingsnivå for lengdemåling er stigende. Ettersom det å kunne knytte matematikken til realistiske eksempler er viktig for å kunne utvikle konseptfokusert kunnskap kan det se ut til at mulighetene for slik kunnskap er mindre i bøkene på de høyeste klassetrinnene. Ut ifra denne oppgavens problemstilling og analysene jeg har gjort kan jeg ikke svare på hva som er bakgrunnen for dette.

6.4 Oppsummering

For å oppsummere diskusjonen av resultatene vil jeg peke på noen hovedfunn i oppgaven. Læreverket Multi inneholder mye bruk av ikoniske fremstillinger, særlig som den første representasjonsformen elevene møter i oppgavene. Et annet viktig funn er hvordan representasjonsformene utvikler seg etter hvert som oppgavene blir passende for elever på høyere utviklingsnivå.

I Multi 6A fant jeg utstrakt bruk av tegninger som pynt. Disse tegningene var ikke matematiske representasjoner, og ble ikke inkludert i resultatene. Likevel ønsker jeg å påpeke at tegningene i bøkene ikke forsvinner etter hvert som representasjonsformene blir mer abstrakte og formelle. Tegningene er fortsatt til stede, men de er ikke integrert i matematikken på samme måte.

Bruk av linjal er mye diskutert i litteraturen som jeg presenterte i kapittel 2 og 3. Linjal er et sentralt redskap innenfor lengdemåling, med bruk av standardiserte måleenheter. Rammeverket for utviklingsnivå i lengdemåling, tabell 1, viser hvordan linjalen brukes i de ulike utviklingsnivåene. Det kan altså se ut til at riktig bruk av linjal er et mål i seg selv, men likevel er det ikke nevnt i læreplanen i matematikk i LK20. Multi har laget egne delmål som handler om bruken av linjal, så det er tydelig at forfatterne har laget en progresjon for hvordan linjalen skal tas i bruk av elevene, selv om det ikke er nevnt i læreplanen. Ifølge Smith III et al. (2013) har læreboken en påvirkning på hvordan lærere og elever ser på faget. Ettersom Multi har inkludert spesifikke læringsmål for bruk av linjal kan dette hjelpe læreren med å innføre linjal på hensiktsmessig måte. Dette kan være nyttig hjelp for lærere når læreplanen ikke nevner noe om hvordan bruken av linjal bør gradvis innføres.

6.5 Oppgavens relevans

Gjennom denne masteroppgaven har jeg, og forhåpentligvis også leseren, fått et dypere innblikk i Multi sin oppbygging av fagstoffet om lengdemåling. Dette er viktig kunnskap for meg som kommende lærer, da matematikkbøker er pekt på som et viktig redskap for læreren (Kongelf, 2015). Gjennom denne undersøkelsen har jeg sett at læreverket Multi legger opp til få erfaringsbaserte situasjoner i temaet lengdemåling, selv om dette temaet trekkes frem som et viktig praktisk tema i matematikken av blant annet Van de Walle et al. (2013) og Clements og Stephan (2004). Ved å være oppmerksom på manglende erfaringsbaserte situasjoner, som muligens er en svakhet ved læreverket Multi, kan jeg som lærer tilby dette til mine elever, utenfor læreverket. Det er heller ikke en selvfølge at min fremtidige arbeidsplass bruker dette læreverket, men ut ifra min tidligere erfaring med dette læreverket i skolen, er det ikke usannsynlig at jeg møter på dette læreverket i mitt yrkesliv.

For andre lærere kan denne oppgaven vise hvordan bruk av ulike representasjoner kan påvirke elevenes læring, og eventuelle konseptfokuserte kunnskap eller prosedyrefokuserte kunnskap. Bevissthet rundt dette og hvilke representasjonsformer forskere peker på som naturlig i lengdemåling kan være viktig kunnskap for lærere som planlegger undervisning om lengdemåling.

6.6 Oppgavens svakheter

En mulig feilkilde i mine resultater kan være analyseverktøyet, det teoretiske rammeverket for lengdemåling. Flere av kildene jeg har basert meg på uttaler seg om lengdemåling i tidlig alder. Derfor er det mulig at det teoretiske rammeverket for lengdemåling ikke er godt nok for å se på oppgaver på høyere trinn. Dette kan ha ført til den store konsentrasjonen av oppgaver i de høyeste utviklingsnivåene.

I min fremstilling av resultatene viser jeg ikke egne tabeller for hvert utviklingsnivå. Dette kunne vært gjort for å tydeliggjøre hvordan de ulike representasjonsformene forekommer på hvert enkelt utviklingsnivå. En slik fremstilling ville gjort resultatene tydeligere, enn slik de nå er fremstilt ut ifra hvilket klassetrinn oppgavene tilhørte. Tidsbegrensning har vært den avgjørende faktoren for at dette ikke ble inkludert i oppgaven. Dersom jeg hadde vært oppmerksom på dette tidligere kunne jeg ha endret måten jeg strukturerte analysen. I analysearbeidet strukturerte jeg oppgavene og resultatene etter klassetrinn, og det ville vært et omfattende arbeid å gå gjennom alle oppgaver på nytt, for å føre de opp i en annen struktur. Dette er en svakhet med oppgaven min, som ville vært endret dersom tidsperspektivet hadde vært lengre.

En annen svakhet ved oppgaven er at jeg ikke kan garantere at resultatene mine vil stemme ved bruk av læreverket Multi i klasserommet. Jeg har undersøkt antall transformasjoner mellom representasjoner i Multi. For oppgavene som inneholder en transformasjonsprosess kan jeg ikke med sikkerhet vite at disse transformasjonene ikke finner sted flere ganger. For eksempel en oppgave som inneholder transformasjon fra ikonisk fremstilling til manipulerbar modell. Ut fra min undersøkelse kan jeg ikke vite om denne oppgaven blir brukt slik. Det kan hende elevene går frem og tilbake mellom den ikoniske fremstillingen til manipulerbar modell, eller løser oppgaven ved bruk av andre representasjoner. Min undersøkelse kan ikke fastslå hvor mange transformasjoner som finner sted i arbeid med oppgavene, men et minsteantall for hvor mange transformasjoner Multi åpner for.

Jeg har heller ikke brukt rammeverket til Smith III et al. (2013) til å undersøke hvor mange oppgaver som fremmer konseptfokusert kunnskap eller prosedyrefokusert kunnskap. Dette gjør at jeg ikke kan fastsette et bestemt antall oppgaver i den ene eller den andre kategorien.

6.7 Videre forskning

Lengdemåling er et matematisk tema som det er forsket en del på internasjonalt. Det er gjort flere studier av lærebøker, med fokus på lengdemåling, som blant annet Smith III et al. (2013) og Ruwisch og Huang (2018). I Norge er det forsket mindre på dette emnet i lærebøker.

De siste årene har det blitt mer fokus på at det å kunne utføre en matematisk prosedyre, ikke nødvendigvis betyr at man har forstått den matematiske prosedyren. Det vil være interessant med mer forskning som retter seg mot begrepene som Smith III et al. (2013) presenterer. Slik forskning er det gjort lite av i Norge, innenfor temaet lengdemåling.

Min undersøkelse har kun tatt for seg den trykte elevboken og lærerveiledningen til Multi. Ut ifra denne undersøkelsen kan jeg ikke si noe om bruken av læreverket Multi i skolen. Jeg har ikke undersøkt hvordan læreverket blir brukt, eller hvordan det oppfattes av lærere eller elever. Dette kan være utgangspunkt for videre forskning. Ettersom Multi etter LK20 fremdeles er et relativt nytt læreverk kunne det være interessant å undersøke hvordan bruken av dette læreverket er i skolen, kanskje med fokus på hvordan det arbeides med representasjonsformer utenfor læreboken. Det vil også være behov for videre forskning på lengdemåling og hvordan representasjoner henger sammen med elevers konseptfokuserte kunnskap i lengdemåling. Særlig kan det være interessant å undersøke bruken verktøyet linjal i skolen, og hvordan elever i ulike aldre mestrer bruken av linjalen. Bruk av linjal er også et mye nevnt tema i litteraturen, som hadde trengt videre forskning for å undersøke hva som kan være årsaken til elevers vansker med bruk av linjal som måleredskap.

7. Konklusjon

Problemstillingen for denne undersøkelsen var: Hvordan benytter læreverket Multi representasjonsformer i oppgaver på ulike i utviklingsnivå innen lengdemåling? For å svare på problemstillingen understreker jeg at Multi benytter alle de beskrevne representasjonsformene i det teoretiske rammeverket. Læreverket benytter seg av mange tegninger, med ulike funksjoner. Noen er utgangspunkt for en måleoperasjon, mens andre er illustrasjoner av hvordan man kan gå frem for å løse en oppgave.

Multi har oppgaver som kan passe for elever på ni av de ulike utviklingsnivåene i rammeverket, men antall oppgaver for hvert nivå er ikke jevnt fordelt. 85 prosent av alle de analyserte oppgavene ble kategorisert som passende for elever på enten sjette, sjuende, åttende eller niende utviklingsnivå. Som nevnt i kapittel 6.3 tyder undersøkelsens resultater på at oppgaver for lavere utviklingsnivå ofte innebærer mer konkrete representasjonsformer som manipulerbare modeller og erfaringsbaserte situasjoner. Oppgaver som ble kategorisert som passende for elever på de høyeste utviklingsnivåene var mer formelle og abstrakte.

Læreverket Multi inneholder alle de ulike representasjonsformene i det teoretiske rammeverket. Flertallet av oppgavene om lengdemåling inneholder en eller flere transformasjoner mellom ulike representasjonsformer. Dette er en indikator på at Multi legger til rette for konseptfokusert kunnskap. Gjennom å veksle mellom ulike representasjonsformer kan dette gjøre elevene mer bekvem med de ulike formene, og være i stand til å bruke disse på en måte som underbygger konseptfokusert kunnskap. Utviklingen gjennom klassetrinnene beskrives godt av forfatterne av Multi sine egne ord i informasjonssiden til alle klassetrinnene: «En gradvis abstrahering, fra arbeid med konkreter, via tegninger og diagrammer til de matematiske symbolene» (Alseth et al., 2020a, 2020b 2020c, 2020d, 2020e, 2020f, 2021a, 2021b, 2021c, 2021d).

Læreverket Multi er basert på Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. Læreplanen i matematikk har fremhevet representasjon som et av kjerneelementene, og dette kommer til uttrykk i Multi ved mye bruk av transformasjoner mellom ulike representasjoner. Et av målene i matematikk er at elevene skal kunne «oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Multi legger til rette for dette gjennom oppgaver som kan fremme en konseptfokusert kunnskap, der elever er komfortable med å veksle mellom ulike representasjoner.

Litteratur

Alseth, B., Arnås, A. C. & Røsseland, M. (2020a). *Multi 1A Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C. & Røsseland, M. (2020b). *Multi 1A Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C. & Røsseland, M. (2020c). *Multi 2B Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C. & Røsseland, M. (2020d). *Multi 2B Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C. & Røsseland, M. (2020e). *Multi 3A Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C. & Røsseland, M. (2020f). *Multi 3A Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C., Røsseland, M. & Nordberg, G. (2021a). *Multi 4B Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C., Røsseland, M. & Nordberg, G. (2021b). *Multi 4B Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C., Røsseland, M. & Nordberg, G. (2021c). *Multi 6A Elevbok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B., Arnås, A. C., Røsseland, M. & Nordberg, G. (2021d). *Multi 6A Lærerens bok* (3. utg.). Gyldendal.

Alseth, B. & Røsseland, M. (2014). Undersøkelseslandskap i matematikk. I M. E. Frislid & H. Traavik (Red.), *Lese, skrive, regne: Pedagogikk og fagdidaktikk i begynneropplæringen* (s. 109–132). Universitetsforlaget.

Angvik, M. (1982). Skolebokanalyse som tema for lærerutdanning og forskning. *Norsk pedagogisk tidsskrift*, *66*(10), 367–379.

Aspenes, A. (2022). *Praktisk måling med elever på 5. trinn*/[Masteroppgave, Universitetet i Sørøst-Norge].

Barrett, J. E., Sarama, J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Rumsey, C., & Klanderman, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(1), 28–54.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y. & Mesa, V. (2010). A Comparative Analysis of the Addition and Subtraction of Fractions in Textbooks from Three Countries. *Mathematical thinking and learning*, *12*(2), 117–151. https://doi.org/10.1080/10986060903460070

Christoffersen, L. & Johannesen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt Forlag.

Clarke, D. M., Cheeseman, J. & McDonough, A. M. (2003). Assessing and developing measurement with young children. I D. H. Clements & G. Bright (Red.). *Learning and Teaching Measurement* s. 68–80. National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H. & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*, 299–317.

Duedahl, P., & Jacobsen, M. H. (2010). *Introduktion til dokumentanalyse* (Vol. 2). Syddansk universitetsforlag.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103–131.

Emanuelsson, G. (1995). Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnaren*, *22*(2), 2–3.

Enge, O. & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten, 24*(1), 8–12.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *Zdm*, *45*(5), 633–646.

Gyldendal (2021, 17. mars). *Multi og fagfornyelsen i matematikk*. https://www.gyldendal.no/artikler/multi-og-fagfornyelsen/?tags=10065

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter*. Caspar Forlag.

Hurrell, D. (2015). Measurement: Five considerations to add even more impact to your program. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *20*(4), 14–18.

Isdahl, H. (2002). Er jorda flat eller rund? *Tangenten*, *13*(4), 2–10.

Johnsen-Høines, M & Rangnes, T. E. (2002). Å måle – er å forstå mer enn selve målingen. *Tangenten*, *13*(4), 11–16.

Kamii, C. (2006). How Can We Teach It Better? *Teaching Children Mathematics*, *13*(3), 154-158.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3–4), 83–109.

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Lee, K., & Smith III, J. P. (2011). What is different across an ocean? How Singapore and US elementary mathematics curricula introduce and develop length measurement. *ZDM*, *43*(5), 681–696.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 235–264.

Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet*: *En undervisningslære*. NKI Forlaget.

Mitchell, A., & Horne, M. (2008). Fraction number line tasks and the additivity concept of length measurement. I *Proceedings of the 31st annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (s. 353–360). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Nunes, T., Light, P. & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and Instruction*, *3*(1), 39–54.

Pind, P. (2011). *Håndbok i matematikkundervisning*. Cappelen Damm.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning.* Cappelen Damm.

Ruwisch, S., & Huang, H. M. E. (2018). Length measurement and estimation in primary school-A comparison of the curricula of Taiwan and Germany. In *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, *7-11 May 2018, Taipei, Taiwan*. Vol. 2, 269–280.

Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J. E., Cullen, C. J. Hudyma, A. & Vanegas, Y. (2022). Length measurement in the early years: teaching and learning with learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning*, *24*(4), 267–290. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1858245

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, *77*(1), 20–26.

Smith III, J. P., Males, L. M., Dietiker, L. C., Lee, K. & Mosier, A. (2013). Curricular treatments of length measurement in the United States: Do they address known learning challenges? *Cognition and Instruction*, *31*(4), 388–433.

Stephan, M., Cobb, P., Gravemeijer, K. & Estes, B. (2001). The role of tools in supporting students' development of measuring conceptions. I A. A. Cuoco (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (s. 63–76). National Council of Teachers of Mathematics.

Utdanningsdirektoratet (2019, 18. november). *Hva er kjerneelementer?* Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Van de Walle, J., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. K. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics*. Pearson.