Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGAVE

En kvalitativ studie om geometrisk tenkning i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler

A qualitative study of geometric thinking in a physical active investigation of rectangles

Kristoffer Falkeid Sydnes

Master i undervisningsvitenskap med fordypning i matematikk

Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett (FLKI)

Veileder: Shengtian Zhou

Innleveringsdato: 15.05.2023

FORORD

Innleveringen av denne mastergradsoppgaven markerer slutten på fem fine år som student i Bergen og på Høgskulen på Vestlandet. At studietiden min nå er over, er både spennende og trist. Det er med stor glede jeg ser frem mot en ny og variert hverdag i det jeg ser på som verdens mest givende yrke. Veien til å bli lærer har både vært lærerik og utfordrende, noe jeg spesielt har fått føle på det siste året. Arbeidet med denne masteroppgaven har til tider vært både frustrerende og krevende. Jeg er derfor veldig takknemlig for alle støttespillere og bidragsytere som har gjort det mulig at jeg nå leverer.

Først ønsker jeg å takke læreren som tok oss godt imot og lot oss låne elevgruppen sin. Det er også på sin plass å rette en stor takk til elevene for deres supre innsats disse dagene. Jeg håper dere sitter igjen med en god og lærerik opplevelse. Videre vil jeg takke min veileder Shengtian Zhou. Jeg setter pris på alle tilbakemeldingene og diskusjonene jeg har hatt med deg i løpet av hele denne prosessen. Mye av årsaken til at det blir trist å forlate Bergen er alle de fantastiske medstudentene jeg har vært så heldig å bli kjent med i løpet av studietiden. Jeg har stor tro på at dere blir gode lærere og ønsker dere masse lykke til. Oskar Roti og Elias Eide fortjener en ekstra stor takk. Både for samarbeidet med å planlegge og samle inn datamaterialet, men også for frirommet dere har vært de siste månedene. Alle pausene med dere har betydd mye. Jeg vil også takke foreldrene mine. Å kunne ringe hjem til dere både i glede og frustrasjon har vært til stor hjelp. Det gjelder for hele studietiden. En særlig stor takk til min mor som har engasjert seg i oppgaven og bidratt med å korrekturlese. Til slutt vil jeg også takke kjæresten min som har vært helt fantastisk. Dine motiverende ord og gode klemmer har vært helt nødvendig etter lange skrivedager. Takk for tålmodigheten og forståelsen du har vist.

Bergen, 15.mai 2023

Kristoffer Falkeid Sydnes

SAMMENDRAG

Ifølge Lerum et.al (2021) har fysisk aktivitet fått stadig større plass i den norske skolen det siste tiåret. En av årsakene er at norske barn og unge er i for lite fysisk aktivitet. Det viser tallene fra kartleggingsundersøkelsene UngKAN (Steene-Johannessen et.al, 2019) som har kartlagt norsk barn og unge sin fysiske aktivitet, sittestillende tid og fysiske form over tre perioder fra 2005, 2011 og senest i 2018. Ifølge Gerhardsen et.al (2021) ønsker så mange som 70% av alle lærere i grunnskolen mer fysisk aktivitet i skolehverdagen, men at de da vil ha behov for mer faglig kompetanse. Ettersom fysisk aktivitet har fått en større plass i skolen og skoledebatten har det også blitt mer prioritert som forskningsfelt. Mandelid et.al (2022) har sett på forskningslitteratur der det blir benyttet fysisk aktivitet i matematikkundervisningen og analysert resultatene i lys av den nye læreplanen (LK20). De oppdaget at elever hadde like bra eller bedre innlæring, memorering, tallforståelse og motivasjon når fysisk aktivitet var en del av undervisningen. I geometri er det en rekke studier (Fyhn 2008; Hraste et.al, 2018; Fyhn & Hansen, 2019; Geršak, 2020) som tyder på at en fysisk aktiv tilnærming kan være en effektiv måte å lære geometri på. Det er mindre forskning som undersøker hvordan elevene tenker geometrisk i et fysisk aktivt læringsmiljø. Lehrer & Romberg (1998) fremmer i sitt arbeid viktigheten av å ha en modell for elevtenkning for å kunne forstå hvordan de tenker. Med bakgrunn i dette ble det utviklet en problemstilling for studien: *Hvordan kommer geometrisk tenkning til uttrykk hos et utvalg elever på 5.trinn i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler?* For å kunne bidra med innsikt i dette spørsmålet ble det gjennomført en kvalitativ enkelcasestudie i en 5. klasse. Det var totalt 14 elever fra denne klassen som deltok i en fysisk aktiv undersøkelse av basseng. Deres deltagelse ble observert med bruk av både lyd- og videoopptak. Teori og tidligere forskning blir presentert og benyttet som et utgangspunkt for å kunne gi mening til elevenes deltagelse. Blant den tidligere forskningen ble rammeverket Geometric habits of mind (Driscoll et.al, 2007) spesielt anvendt. De presenterer fire geometriske tenkevaner som blir sett på som produktive måter å tenke på for å løse geometriske problem. Analysen viser at alle disse tenkevanene kommer til uttrykk i elevenes deltagelse. Lærerspørsmål og bruk av representasjon blir også drøftet i henhold til tidligere forskning etter analysen belyste disse som to forhold spesielt viktig i å bistå elevene med å uttrykke sin geometriske tenkning.

ABSTRACT

According to Lerum et al. (2021), physical activity has gained increasing importance in Norwegian schools over the past decade. One of the reasons is that Norwegian children and youth engage in insufficient physical activity. This is evident from the data collected in the surveys UngKAN (Steene-Johannessen et al., 2019), which have assessed the physical activity, sedentary behavior, and physical fitness of Norwegian children and youth in three periods: 2005, 2011, and most recently in 2018. According to Gerhardsen et al. (2021), as many as 70% of all primary school teachers in Norway desire more physical activity in school, but they would need additional professional competence for that purpose. As physical activity has gained more prominence in schools and educational debates, it has also been prioritized as a research field. Mandelid et al. (2022) have examined the research literature that utilizes physical activity in mathematics education and analyzed the results in the context of the new curriculum (LK20). They discovered that students had equal or better learning, memorization, numerical understanding, and motivation when physical activity was integrated into the teaching. In geometry, several studies (Fyhn 2008; Hraste et al., 2018; Fyhn & Hansen, 2019; Geršak, 2020) suggest that a physically active approach can be an effective way to learn geometry. There is less research investigating how students think geometrically in a physically active learning environment. Lehrer & Romberg (1998) emphasize the importance of having a model of student thinking to understand their thought processes. Based on this, a research question was developed: *How does geometric thinking manifest among a selected group of 5th-grade students in a physically active investigation of rectangles?* To contribute insights into this question, a qualitative single-case study was conducted in a 5th-grade class. A total of 14 students from this class participated in a physically active investigation of rectangles in a swimming pool. Their participation was observed using both audio and video recordings. Theory and previous research are presented and used as a base for making sense of the students' participation. Among the previous research, the framework Geometric Habits of Mind (Driscoll et al., 2007) was specifically applied. They present four geometric habits of mind that are considered productive ways of thinking to solve geometric problems. The analysis shows that all of these thinking habits are manifested in the students' participation. Teacher questioning and the use of representations are also discussed in relation to previous research, as the analysis highlighted these as two factors particularly important in assisting students in expressing their geometric thinking.

INNHOLDSFORTEGNELSE

LISTE OVER FIGURER

LISTE OVER TABELLER

1.0 INNLEDNING

I dette innledende kapittelet begrunner jeg bakgrunnen for ønsket om å undersøke elevers deltagelse i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler. Jeg presenterer også studiens fokus, formål, problemstilling og forskningsspørsmål. Før jeg til slutt beskriver studiens seks kapitler i en disposisjon.

1.1 BAKGRUNN FOR VALG AV TEMATIKK

I oppstartfasen av arbeidet med denne studien satt jeg med to ønsker. Jeg ønsket å aktivisere matematikkundervisningen og skrive om et tema som ville berike min egen undervisningspraksis, samtidig som det var relevant for andre lærere og lærerstudenter. Jeg startet derfor å lese meg opp på dagens situasjon i matematikkundervisning og så at den var i en overgangsfase mellom to læreplaner. Skolen som helhet var og er i en prosess hvor de etter beste evne skal implementere og tolke nye og oppdaterte kompetansemål og kjerneelementer i de ulike fagene. Kjerneelementene i matematikk vektlegger at elevene skal bli gode problemløsere og kunne oppdage sammenhenger og mønstre (Kunnskapsdepartementet, 2019). Undervisningen skal legge til rette for at elevene får utforske og kommunisere matematikk. Elevene skal få mulighet til å utforske, undre og være nysgjerrige gjennom lek, variasjon i oppgaver og læringsarenaer. Med mitt ønske om å aktivisere matematikkundervisningen, så jeg en mulighet for å variere oppgaver og læringsarenaer gjennom å la elevene bruke kroppene sine, sammen med hodet, for å utforske og løse matematiske problemer. Dette ble bakgrunnen for dette studiet. I dette delkapittelet vil jeg gjøre rede for rollen til fysisk aktivitet i skolen og presentere geometri som studiens matematiske tema.

1.1.1 Fysisk aktivitet i skolen og matematikkundervisning

Ifølge Lerum et.al (2021) har fysisk aktivitet fått stadig større plass i den norske skolen det siste tiåret. En av årsakene er at norske barn og unge er i for lite fysisk aktivitet. Det viser tallene fra undersøkelsene UngKAN (Steene-Johannessen et.al, 2019) som har kartlagt norsk barn og unge sin fysiske aktivitet, sittestillende tid og fysiske form over tre perioder fra 2005, 2011 og senest i 2018. Barna vurderes som inaktive om de ikke innfrir Folkehelseinstituttet og World Health Organization sine anbefalinger om at barn i skolealder bør være i moderat til hard fysisk aktivitet i minimum 60 minutter per dag. Resultatene viser at verken 6-, 9- eller 15- åringene har blitt mer aktive i periode fra 2005 til 2018, og at trenden for sittestillende tid er økende mot ungdomsårene. Skolen er et sted hvor barn og unge tilbringer store deler av dagene sine og er et naturlig sted å se etter løsninger da det er den eneste plassen hvor vi treffer alle barn og unge uavhengig av sosiale forskjeller.

Samme år som LK20 offisielt ble tatt i bruk, fjernet regjeringen vedtaket fra 2017 om en times fysisk aktivitet i skolen, og kom i stedet med en handlingsplan for fysisk aktivitet. Handlingsplanen «Sammen for aktive liv» gjelder for perioden 2020 til 2029 og har som hensikt å øke aktivitetsnivået og bedre livskvaliteten til det norske folk (Helse- og omsorgsdepartamentet, 2020). Regjeringen så på handlingsplanen som et tiltak som ivaretok målet om en mer fysisk aktiv skole. Gjennom handlingsplanen mente regjeringen at de tilrettela for at kommuner, fylkeskommuner og andre skoleeiere skulle kunne styrke den fysiske aktiviteten gjennom å utnytte fleksibiliteten i fag- og timefordelingen. Kritikk til handlingsplanen kom fra «Alliansen for fysisk aktivitet i skolen», som mente dette ville øke forskjellene mellom kommunene, og at nasjonale tiltak som ordner en times fysisk aktivitet for alle elever er nødvendig. Deres undersøkelser (Gerhardsen et.al, 2021) viser også at 70% av lærere støtter tiltaket om en time daglig fysisk aktivitet. I et intervju påstår fastlege og hjerneforsker Ole Petter Hjelle at «vedtaket om en times daglig fysisk aktivitet kan være det viktigste folkehelsetiltaket siden innføringen av røykeloven» (Baugstø, 2019). Til tross for dette er det fremdeles handlingsplanen til regjeringen som gjelder og fysisk aktivitet skal inn i de ulike fagene.

Matematikk er det nest største faget i skolen med nesten 900 timer i løpet av barneskolen. Klarer vi å aktivisere elevene i deler av disse timene vil det på lang vei kunne bedre utfordringene vi ser med inaktivitet blant barn og unge. Mandelid et.al (2022) gjennomførte en litteraturstudie hvor de analyserte syv oversiktsstudier og tolv enkeltstudier som omhandler fysisk aktivitet i matematikkfaget, i lys av den nye læreplanen. Bruk av fysisk aktivitet i matematikken er et relativet nytt forskningsfelt og alle studiene som ble analysert) er fra 2015 eller nyere. Funnene deres viser at elever har like bra eller bedre innlæring, memorering, tallforståelse og motivasjon med bruk av fysisk aktivitet. Mens Bartholomew & Jowers (2011) oppdaget i sin studie at elever som var fysisk aktive i arbeidet med oppgaver hadde bedre konsentrasjonstid enn elever som jobbet sittestillende. Daly-Smith et.al (2018) oppdaget også at elever hadde bedre konsentrasjonstid, men da med fysisk aktive pauser. Mandelid et.al (2022) understreker at bruken av fysisk aktivitet ikke er en motsetning til mer tradisjonell undervisningen med tavle og regnebok eller gruppearbeid, men som en ressurs for å variere undervisningen og støtte elevenes lærelyst og utvikling. Dette vil også være synet mitt når jeg undersøker hvordan bruken av fysisk aktivitet kan brukes i geometriundervisningen.

1.1.2 Geometri som matematisk tema

Geometri er en viktig del av matematikken i skolen og er det matematikkfaglige fokuset i denne studien. Ifølge Karstein et.al (2019) viser TIMSS undersøkelsen fra 2019 gode resultater i matematikk hos norske elever på barnetrinnet, men det var en negativ utvikling i temaet geometri. Det kan være en indikator på at vi må bedre geometriundervisningen. En rekke studier (Fyhn 2008; Hraste et.al, 2018; Fyhn & Hansen, 2019; Geršak, 2020) tyder på at en fysisk aktiv tilnærming kan være en effektiv måte å lære geometri på. For å undervise med en slik tilnærming trenger lærere kunnskap om hvordan elever tenker, mens de er fysisk aktiv i arbeidet med geometri. Hofmann & Kaufmann (2014) trekker frem en utvikling i den norske skolen hvor geometrien har beveget seg fra en systematisk deduktiv euklidsk geometri til å være mer eksperimenterende og undersøkende. Denne undersøkende tilnærmingen har hatt en stor rolle i forsøket om å reformere utdanning og utdanningspraksiser det siste århundret. (Skovsmose & Saljø, 2008). Denne utviklingen i geometriundervisningen er det mulig er se i fagets kompetansemålene. Etter fullført 6.trinn skal elevene blant annet kunne «utforske mål for areal og volum i praktiske situasjoner og representere dem på ulike måter» og «bruke ulike strategier for å regne ut areal og omkrets og utforske sammenhenger mellom disse (Kunnskapsdepartementet, 2019). En sentral del av geometrien på mellomtrinnet er målenhetene areal og omkrets. Ifølge Driscoll et.al (2007) er det ikke uvanlig at elever på mellomtrinnet har en oppfattning av at det er en direkte sammenheng mellom arealet og omkretsen til en figur. De argumenterer derfor for at elevene må få oppleve at omkretsen til en figur ikke øker eller synker proposjonalt med arealet. Jeg synes derfor det ville vært interessant å observere elever som gjør en undersøkelse av forholdet mellom areal og omkrets.

Undersøkende undervisning vil være en naturlig undervisningsform å praktisere for å aktivisere elevene, da undervisningsmetode (eng: inquiry-based learning) har sine røtter fra læringssynet til den amerikanske pragmatisten og pedagogikk filosofen John Dewey (1859-1952). Dewey assosieres ofte med det pedagogiske slagordet «Learning by doing» og var opptatt av at elevenes erfaringer skulle være grunnlaget for læring og at de skulle få muligheten til å lære med hele seg, også kroppen (Artigue & Blomhøj, 2013; Lerum, et.al, 2021). Et annet argument for å praktisere undersøkende geometriundervisning er Berthelot & Salin (1998) sin studie om læring av geometri i tre ulike rom. De stiller seg kritisk til den tradisjonelle geometriundervisningen etter de oppdaget at læringen som skjer i læreboken (mikrorommet) ikke nødvendigvis er dirkete overførbart til det virkelige liv (meso- og makrorommet). Elevene vil da kunne få utfordringer med å overføre den geometriske kunnskapen de har opparbeidet seg innenfor bøkenes rammer når den skal anvendes og orienteres i den virkelige verden. Det er i mesorommet elevene har erfart geometri tidligere, enten bevist eller ubevist, og burde være der elevene lærer mye av geometrien på skolen. Dette er i tråd med Dewey sitt syn på at læring blir til gjennom kroppslige erfaringer, sammen med refleksjon (Lerum et.al, 2021; Artigue & Blomhøj, 2013; Vingdal, 2014).

1.2 STUDIENS FORMÅL, FOKUS OG PROBLEMSTILLING

For å kunne snu den negative trenden i geometri ser jeg på det som vesentlig at lærere har kunnskap om geometrisk tenkning og hvordan elever tenker geometrisk. Denne studien er av den grunn rettet mot lærere og lærerstudenter som ønsker mer innsikt i geometrisk tenkning hos elever på mellomtrinnet. Med mitt ønske om å aktivisere matematikkundervisningen og utfordringene Berthelot & Salin (1998) oppdaget rundt å anvende kunnskap fra lærebøker i møte med det virkelige liv, har jeg utviklet et undervisningsopplegg hvor et utvalg elever på 5.trinn undersøker og er fysisk aktiv i løsningen av et matematisk problem. Studien kan derfor også bidra med innsikt i det å drive undersøkende og fysisk aktiv geometriundervisning. I et forsøk på å aktualisere studien er det geometriske temaet for undervisningsopplegget sammenhengen mellom omkrets og areal. I følge Driscoll et.al (2007) er det en vanlig misoppfatning hos elever på mellomtrinnet at det er en direkte sammenheng mellom omkrets og areal, og at omkretsen derfor øker og synker proporsjonelt med arealet. Elevene ble plassert i en virkelighetsnær kontekst hvor de skulle undersøke omkrets og arealet til fysiske representasjoner av rektangulære basseng. Denne undersøkelsen foregikk i skolens gymsal.

For å kunne bidra med innsikt i geometrisk tenkning hos elever i en slik undervisningssituasjon stiller jeg et overordnede spørsmål for studien.

Hvordan kommer geometrisk tenkning til uttrykk hos et utvalg elever på 5.trinn i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler?

Geometrisk tenkning er et omfattende begrep, som det er gjort mye forskning på. For å avgrense problemstillingen etter studiens formål har jeg også stilt meg to underspørsmål.

1. *Hvilke geometriske tenkevaner kommer til uttrykk i elevenes undersøkelse?*

2. *Hvilke forhold bistår elevene i å uttrykke geometrisk tenkning?*

En av avgrensningene var å fokusere på geometrisk tenkning med utgangspunkt i rammeverket *Geometric habits of mind*. Driscoll et.al (2007) forklarer at et viktig formål med utviklingen av rammeverket var å hjelpe lærere med å fremme geometrisk tenkning hos elever. Rammeverket inneholder fire tenkevaner som anses som produktive måter å tenke geometrisk på i møte med et problem. Det andre spørsmålet ble til under analyseprosessen slik at jeg kunne belyse forhold som bidrar til den geometriske tenkningen elevene uttrykker.

1.3 STUDIENS DISPOSISJON

Denne studien består ut av seks kapitler. Disse vil jeg gi en kort presentasjon av i dette delkapittelet. I det første kapittelet har jeg introdusert bakgrunnen for valg av tematikk og studiens formål, fokus og forskningsspørsmål.

K*apitel 2 – Teori og tidligere forskning*
I dette kapittelet gjør jeg rede for teori og tidligere forskning som jeg benytter meg av for å forstå datamaterialet og besvare forskningsspørsmålene. Kapittelet er delt inn i tre deler. Først tar jeg for meg ulike aspekter innenfor undersøkende matematikkundervisning. Videre gjør jeg rede for hva matematiske representasjoner og til slutt gir jeg en beskrivelse av ulike perspektiv innenfor geometrisk tenkning.

Kapitel 3 – Metode

Dette kapittelet tar for seg metodiske valg som er blitt gjort. Først gjør jeg rede for studiets forskningsdesign og datainnsamlingsprosess. Videre beskriver jeg hvordan datamaterialet ble behandlet og hvordan datamaterialet ble analysert. Til slutt gjør jeg rede for kvaliteter med forskningen og en rekke etiske vurderinger og hensyn som er blitt gjort.

Kapitel 4 – Analyse og resultat

I dette kapittelet presenteres deler av deltagelsen til to av gruppene som deltok i studien. Disse delene presenteres i kronologisk rekkefølge og analyseres med utgangspunkt i teori og tidligere forskning som presenteres i kapittel 2. Kapittelet avsluttes med en oppsummering av resultatene fra analysen.

Kapitel 5 – Drøfting

I dette kapittelet drøftes resultatene fra analysen i henhold til tidligere forskning. Det blir også drøftet rundt studiens validitet og relabilitet.

Kapitel 6 – Avslutning

Kapittel seks har som formål å oppsummere hva som er blitt gjort i studien, svare på studiens problemstilling med utgangspunkt i underspørsmålene og drøfte en vei videre for ytterligere forskning.

2.0 TEORI OG TIDLIGERE FORSKNING

Hensikten med teorikapittelet er å skape et utgangspunkt for hvordan studiens fokus og datamaterialet kan forstås. I denne studien har jeg undersøkt hvordan geometriske tenkning. kommer til uttrykk gjennom elevers deltagelse i en fysisk aktiv undersøkning av rektangler. Første del av kapittelet er en redegjørelse av sentrale begreper. Dette gjør jeg for å etablere forståelse for hvordan begrepene tolkes i senere beskrivelser. Videre presenterer jeg ulike teoretiske perspektiver, som skal bidra med å skape en teoretisk forståelse av studien. Først gjør jeg rede for ulike aspekter innenfor undersøkende matematikkundervisning. Etterfulgt av en beskrivelse av matematiske representasjoner. Avslutningsvis presenterer jeg ulike perspektiver innenfor geometriske tenkning.

2.1 AVKLARING AV SENTRALE BEGREPER

I dette delkapittelet gjør jeg rede for hvordan sentrale begreper forstås og brukes videre i studien.

2.1.1 Fysisk aktivitet i skolen

Ifølge Borgen et.al (2017) er det mange tolkninger og former for fysisk aktivitet i skolen. Derfor er det viktig å definere hva jeg legger i begrepet fysisk aktivitet for denne studien. Mitt fokus er fysisk aktivitet i matematikkundervisningen. Lerum, et.al (2021) presenterer tre ulike tilnærminger for fysisk aktivitet i skolen. Den første er fysisk aktivitet integrert i faget, den andre tilnærmingen er fysisk aktivitet kombinert med fag, og den siste er fysisk aktivitet adskilt fra fag. For denne studien er det den første tilnærmingen som er aktuelle. Et eksempel på en slik tilnærming er arbeidet til Ma (2013, 2016, 2017). Hun undersøkte hvordan helkroppslige interaksjoner hvor elevenes kropper selv var en aktiv del av rektanglene de konstruerte. Elevene som deltok i denne studien undersøkte rektangler på en lignende måte i oppgave tre (delkapittel 3.4.1.3). Jeg tolker det som at tilnærmingene inngår som en del av begrepet fysisk aktiv læring (FAL), slik som Daly-Smith et.al (2020), Vingdal (2014) og Watson et.al (2017) definerer det. Daly-Smith og hans kollegaer ser på begrepet som fysisk aktivitet i andre fag enn kroppsøving. Vingdal har et syn hvor læring skjer i bevegelse, mens Watson og hennes kollegaer ser på begrepet som fysisk aktivitet for et faglig formål. Lerum, et.al (2021) poengterer også at fysisk aktivitet kan sees på i ulike dimensjoner. Blant annet gjennom hvor lenge elevene er aktive (varighet), hvor ofte elevene er aktive (frekvens) og hvor hardt elevene jobber i aktiviteten (intensitet).

2.1.2 Matematiske representasjoner

Tripathi (2008) forklarer matematiske representasjoner som en mental eller fysisk konstruksjon som blir brukt for å gi mening til matematiske konsept, de innbyrdes forholdene i konseptet eller forhold mellom konseptet og andre ideer. Representasjoner i matematikken blir brukt for å forstå, kommunisere og diskutere disse ideene. Hana (2014) trekker frem at forskningslitteraturen ofte skiller mellom mentale og fysiske representasjoner. Mentale representasjoner blir også referert til som interne representasjoner og består av bestemte kognitive strukturer. Fysiske representasjoner blir ofte referert til som eksterne eller semiotiske representasjoner og omhandler representasjonsformer som kan uttrykkes fysisk. Det er disse representasjonene som blir brukt i kommunikasjon mellom mennesker. I denne studien er fokuset rettet mot hvordan eksterne representasjoner kan bistå elever i å uttrykke sin geometriske tenkning. Begrepet representasjon omhandler derfor kun eksterne representasjoner i denne studien.

2.1.3 Geometrisk tenkning

Resonnering blir ofte brukt i forskningslitteratur innenfor matematikk uten at det nødvendigvis blir definert, på grunn av en implisitt antagelse om en global enighet for hva som legges i begrepet (Lithner, 2008; Jeannotte & Kieran, 2017). Om det blir definert er definisjonene ofte vage og usystematiske. For denne studien adopterer jeg Lithner sitt syn på resonnering som et produkt av elevens tankeprosesser i oppgaveløsning. Resonnering blir sett på som elevenes måte å uttrykke sine matematiske tanker gjennom muntlig språk. Begrepene resonnering og tenkning brukes derfor om hverandre i denne studien. Battista (2007) forklarer geometrisk resonnering som oppdagelsen og bruken av formelle konseptuelle systemer for å undersøke geometriske former og rom. Videre forklarer han hvordan matematikere bruker et egenskapsbasert system for å analysere og definere ulike typer figurer. Blant annet gjennom konsepter som måling av vinkler og lengde. Det samme systemet som er i skolegeometrien.

2.2 UNDERSØKENDE MATEMATIKK

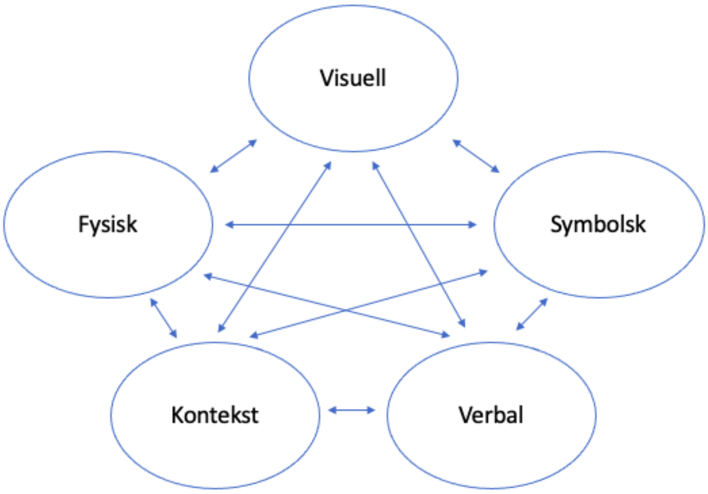
Artigue og Blomhøj (2013) ser på undersøkende matematikkundervisning som en pedagogisk strategi hvor elevene jobber på lik måte som profesjonelle forskere. Dewey (1966, gjengitt i Skovsmose & Saljø, 2008) mente en slik vitenskapelig metode var en verdifull tilnærming får å tilegne seg kunnskap, også innenfor emner utenfor vitenskapen. Han var opptatt av at elevenes erfaringer skulle være grunnlaget for læring. Ifølge Skovsmose & Saljø (2008) så Dewey på begrepet undesøkelse som et prinsipp for utdanning, som stammet fra menneskers opplevelser av å leve i en kompleks verden. Ifølge Hana (2012) handler det å undersøke om å «gå under overflaten». Det han mener med det er å se på noe i større grad enn det er blitt gjort tidligere. Alrø & Skovsmose (2004) mener undersøkende matematikkundervisning på mange måter kan sees på som en kontrast til det tradisjonelle oppgave paradigme. Det tradisjonelle oppgave paradigme er en tilnærming til undervisning hvor lærer først presenterer matematiske ideer og teknikker før elevene får jobbe med oppgaver som kun krever disse teknikkene. Å løse slike oppgaver ser de på som mer begrensende for elevene enn å løse oppgaver gjennom undersøkelse. «Undersøkende virksomhet baserer seg på at en søker svar på spørsmål og problemstillinger» (Hana, 2014, s.41). Da må elevene stille seg spørrende og stille spørsmål. Han forklarer potensialet til muntlig ytringer som et samspill hvor meninger og ideer deles og tar form. Er ytringene i samspill med andre kan det føre til at ytringen blir utvidet eller utfordret i form av at den blir stilt spørsmål ved eller forkastet. For den som kommer med ytringen er det en mulighet til å reflektere over tankene bak ytringen. Alrø & Skovsmose (2004) trekker frem lærer som en fasilitator for å hjelpe elevene med å presentere perspektiver og matematiske ideer. En vanlig struktur for en undersøkende matematikktime er gjennom en tredeling (Goos, 2004; Blomhøj, 2016). Læreren starter med å presentere et kognitivt krevende problem eller aktivitet for elevene. Så skal elevene arbeide med denne aktiviteten, mens læreren observerer og oppmuntrer dem. Til slutt reflekterer lærer sammen med elevgruppen om ulike strategier og resultat. Branchi og Bell (2008) mener mange barneskolelærere finner det utfordrende å designe undersøkende aktiviteter som legger til rette for god undersøkelse, og iverksette disse i sitt klasserom.

Alrø & Skovsmose (2004) og Skovsmose & Saljø (2008) presenterer begrepet undersøkelseslandskap i sitt arbeid (eng: landscape of investigation). Elevers deltagelse i disse undersøkelseslandskapene sees på som kjernen i selve konseptet undersøkelse. Når elevene arbeider i slike læringsmiljø er de en aktiv del av undersøkelsesprosessen, de får formulere spørsmål og velger selv fremgangsmåter for sine undersøkelser. I sitt arbeid deler Alrø & Skovsmose mulige læringsmiljø inn etter; referanser utelukkende fra matematikken, referanser fra en semi-virkelighet og referanser fra virkeligheten. Å bruke referanser for å påvirke læringsmiljøet er med på å sette en scene for oppgaveløsningen og gir elevene mulighet til å få et perspektiv som kan gi mening til aktiviteten. Derfor er det viktig at læreren tar hensyn til hva som kan være innbydende for sin elevgruppe. Eksempler fra oppgave paradigme hvor referansen er utelukkende matematiske kan være oppgaver med formuleringer som *«konstruer figuren basert på disse egenskapene»*. Eksempler på samme referanse i et undersøkelseslandskap kan være dataprogram hvor elevene får utforske figurer dynamisk. Alrø & Skovsmose argumenterer for å la elever arbeide i undersøkelseslandskap da de ser at det oppstår nye muligheter for elevinvolvering, ulike typer samtalemønstre og som følge av dette nye kvaliteter i læring.

Branchi & Bell (2008) poengterer at det ikke kan forventes at elever på barneskolen skal klare å designe og gjennomføre egne undersøkelser. For de fleste vil det kreve omfattende trening for å utvikle ferdigheter og forståelse av prosessen som behøves for å gjennomføre en undersøkelsesprosess fra start til slutt. I sitt arbeid har de identifisert fire nivåer av elevaktivitet for undersøkning, som vil bidra til å utvikle elevens vitenskapelige tenkning. De to første nivåene regnes som undersøkelse på lavt nivå, men er nødvendig trening for mer åpne undersøkelser. Det første nivået er bekreftende undersøkelse (eng: confirmation inquiry). På dette nivået får elevene tildelt forskningsspørsmålet og fremgangsmåten, samt at resultatet er vist på forhånd. Dette er et nivå av undersøkelse læreren kan bruke for å forsterke tidligere presenterte ideer, la elevene erfare å drive undersøkelser eller å trene på deler av undersøkelsessprossen. Det neste nivået Branchi & Bell presenterer er strukturert undersøkelse (eng: structured inquiry). Også her blir forskningsspørsmålet og fremgangsmåten forklart av lærer, men elevene må selv komme opp med en forklaring (resultat) basert på undersøkelser de har gjort. Det tredje nivået kaller de for veiledet undersøkelse (eng: guided inquiry). På dette nivået får elevene kun presentert forskningsspørsmålet. De skal selv velge hvordan de vil gå frem og utforme en forklaring basert på deres fremgangsmåte. Det siste og fjerde nivået er åpen undersøkelse. På dette nivået får elevene selv muligheten til å utforme forskningsspørsmål, undersøke og forklare resultatene de kom frem til. Branchi & Bell mener at elever på fjerde og femte trinn vil kunne utføre åpne undersøkelser, om de har bevist på tidligere nivå at de mestrer de ulike delene av en undersøkelsesprosess. Med et mål om å inkludere elevene i matematikken og få dem til å verdsette den, sees læring på som en handling og ikke en tvungen aktivitet (Alrø & Skovsmose, 2004; Skovsmose & Saljø, 2008). Elevene må bli invitert til å delta i en undersøkelsesprosess for å ha eierskap og være aktive deltagere i prosessen. Hana (2014) poengterer at det ligger i menneskets natur å være nysgjerrig og undersøkende. Det er likevel ikke en selvfølge at elevene er det. Alrø & Skovsmose (2004) presiserer at elevene må føle at de har gode grunner til å delta, for å godta invitasjonen. Da må læreren være oppmerksom på ulike grunner elevene kan ha for å delta. Det kan handle om at eleven har en interesse eller at kan kjenne seg igjen i det matematiske temaet eller situasjonen som blir presentert. Andre grunner kan være mer personlige. Elever kan velge å delta på grunn av forholdet til lærer eller medelever. De trekker også frem at elever deltar fordi de ønsker eller føler seg forpliktet til å gjøre det bra i faget. Om eleven ikke føler på gode grunner til å delta vil eleven ende som tilskuer og ikke være investert i prosessen.

2.3 MATEMATISKE REPRESENTASJONER

I innledningen av dette teorikapittelet gjør jeg rede for hvordan jeg forstår begrepet representasjon i denne studien (delkapittel 2.1.3). Enkelt forklart er en representasjon «noe som står for noe annet» (Hana, 2014, s.131). I matematikken er det «noe» som blir representert et matematisk konsept eller en ide. Den abstrakte naturen av matematiske konsepter og ideer gjør det nødvendig å bruke representasjoner for å forstå, uttrykke og diskutere disse. Duval (2006, s.107) forklarer at «ingen form for matematisk handling kan utføres uten å ta i bruk et semiotisk system av representasjoner, da matematisk handling alltid innebærer å erstatte en eller annen semiotisk representasjon med en annen». Han refererer til denne erstatningen som en transformasjon mellom representasjonssystemer. I denne studien sees representasjoner i lys av hvordan de bistår elevene i å uttrykke sin geometriske tenkning. Fokuset for dette delkapittelet vil derfor være å gjør rede for hvordan transformasjoner mellom representasjoner kan forekomme. For å kunne gjøre det, gir jeg først en kort presentasjon av de ulike representasjonssystemene. Leinwand et.al (2014) presenterer de slik som i figur 1.



Figur 1: Viktige sammenkoblinger mellom matematisk representasjon (Leinwand et.al, 2014, oversatt for studien).

Figur 1 viser fem ulike representasjonssystem: visuelle, symbolske, verbale, kontekstuelle og fysiske representasjoner. Ifølge Svingen (2018) er dette en vanlig måte å presentere ulike representasjonssystemer på. Alle disse representasjonssystemene skal på ulikt vis kunne representere et matematisk konsept eller en ide. Eksempelvis kan brøken $^2/_4$ representeres: Verbalt med utsagnet «to firedeler», symbolsk med $\frac{2}{4}$, visuelt med å plassere brøkforholdet på en tallinje, kontekstuelt med å sette det i en kjent kontekst «Til lunsj spiser baker Hansen to av de fire bollene han bakte på morgenen» og fysisk med hjelp av konkreter. I Lesh et.al (1987, gjengitt i Leinwand et.al, 2014) sin modell kategoriserer de alle nedskrevne uttrykk som et representasjonssystem de kaller for skriftlig språk. I motsetning til representasjonssystemet «symbolsk» i figur 1 vil også nedskrevne uttrykk uten matematiske symboler være en del av dette systemet. En annen forskjell mellom modellene er at Lesh et.al (1987, gjengitt i Leinwand et.al, 2014) benytter seg av begrepene «manipulerbare modeller» fremfor fysisk representasjon og «bilder og andre statiske ikoniske fremstillinger» for visuell representasjon. Deres ordbruk forteller noe mer om hvilke transformasjoner det er mulig å gjøre. Er det mulig å gjøre en transformasjon mellom representasjonssystem eller innad i systemene kaller Duval (2006) dette for matematiske registre. Skjer transformasjonen innad i representasjonssystemet bearbeides representasjonen. En slik bearbeiding kan for eksempel være at brøken $^2/_4$ representeres som $^4/_8$. I figur 1 viser pilene til transformasjon mellom representasjonssystemene. Overgangen mellom ulike representasjonssystemer kalles for en konvertering av representasjonen (Duval, 2006). Det er en slik konvertering som forekommer i brøk eksempelet over. Tripathi (2008) sammenligner konverteringen av representasjoner som å se det matematiske konseptet eller ideen gjennom ulike linser.

Ifølge Hana (2014) avhenger bruken av representasjoner av situasjonen. I noen tilfeller vil en form for representasjon være tilstrekkelig for å løse et matematisk problem eller forklare deler av et matematisk konsept. I andre situasjoner er det gjerne nødvendig at flere representasjoner forekommer simulant, da de kan belyse ulike aspekter i det matematiske problemet eller konseptet. Et eksempel på multiple representasjoner vil være en visuell representasjon av en geometrisk figur i form av en tegning. For å kunne gi matematisk mening til tegningen kreves det diskursive representasjoner. Det vil si representasjoner hvor det er mulig å uttrykke et matematisk utsagn. Tegningen er avhengig av støtte i matematiske symboler eller muntlige utsagn for å gi mening. Hana mener det å kunne beherske og benytte seg av flere typer representasjonssystemer og konverteringer mellom disse er en viktig matematisk kompetanse. Han trekker også frem bruker av kroppslige gester som et hjelpemiddel i å støtte utviklingen av vitenskapelige uttrykksformer. I matematikken kan bruken av kroppslige gester være spesielt nyttig når en skal beskrive romlige egenskaper. Han presenterer et eksempel hvor en elev forklarer begrepet «flate» gjennom å legge håndflaten på toppen av en kube. Kroppslige gester kan da fungere som et hjelpemiddel i å utvikle et språk og forståelse for geometriske begreper, noe som vil være et argument for å la elevene også uttrykke seg kroppslig i geometriundervisningen. Det er også en rekke studier som tyder på at bruk av kroppen som en aktiv del av fysiske representasjoner kan ha positiv effekt på utvikling av geometrisk tenkning og forståelse. Ma (2013, 2016, 2017) har undersøkt elevers deltagelse i det hun kaller for «walking scale geometry». Elevene i hennes studie undersøkte geometriske figurer i «stor» skale ved hjelp av tau og kroppslig bevegelse for å konstruere fysiske representasjoner de selv var den del av. Hennes funn peker på at bruken av kropp og materialer som tau kan være viktige resurser for læring i geometri. I studien til Geršak et.al (2020) undersøker de elever som bruker kroppene sine for å blant annet lage geometriske figurer. Funnene deres viser at elevene i gruppen som jobbet på denne måten beholdt et høyere nivå av geometrisk kunnskap enn gruppen som satt i ro på pulten og jobbet med visuelle representasjoner på ark. Med et lignende oppgavedesign viser også Hraste et.al (2018) sine resultater på at det er en mer effektiv måte å lære geometri på.

2.3 GEOMETRI

Dette delkapittelet tar for seg det matematiske temaet for studien, nemlig geometri. I et forsøk på å forklare hva geometri er, beskriver Batista (2007) det som et «komplekst sammenkoblet nettverk av romlige konsepter, måter å resonnere på og representasjonssystemer, som blir brukt til å konseptualisere og analysere fysiske og imaginære romlige omgivelser». Lehrer & Romberg (1998) argumenterer for å bruke elevenes hverdagslige aktiviteter som et springbrett inn i geometrien. Eksempler på disse hverdagslige aktivitetene kan være å observere, gå, manipulere objekter og tegne. Denne uformelle forståelsen av rommet vi alle lever i gir oss en mulighet til å matematisere og rekonstruere forståelsen basert på elevenes erfaringer. I Norge har Anne Fyhn gjennomført flere studier hvor hun bruker fysisk aktivitet og virkelighetsnære kontekster i arbeid med geometriske begreper. Blant annet en studie hvor hun beskriver elevers arbeid med vinkler i en klatrekontekst (Fyhn, 2008) og en studie hvor elever undersøker mønstre på ski (Fyhn & Hansen, 2019). I klatrestudien erfarte elevene vinkler ved hjelp av bevegelse av kroppslige led og bruk av tau. De oppdaget også vinkler i flatene inne i klatrehallen. Når elevene skulle uttrykke seg gjennom skrift og tegning viser resultatene hennes at studentene tar utgangspunkt i disse erfaringene når de kommer med matematiske påstander. I studien hvor elevene undersøker mønstre de laget i snøen ble det oppdaget at en slik erfaring gav elevene en mulighet til å utvikle konseptet for *hearva*, som er et samisk broderi fylt av mønster. Å bruke referanser fra virkelighetsnære kontekster i læring og undervisning av geometri har, i følge Bussi & Boero (1998) vært utbredt blant matematikklærere det siste århundret. Dette blir gjort blant annet for å gi elevene et språk for å beskrive og bli oppmerksomme på geometriens evne til å strukturere virkeligheten. Virkelighetsnære kontekster har også vist seg å motivere elever til å ville lære geometri. Lehrer & Romberg (1998) fremmer viktigheten av å ha en modell for elevtenkning for å kunne forstå hvordan de tenker. Dette kapittel vil derfor være en redegjørelse av tidligere forskning og teoretiske perspektiver innen geometrisk tenkning, som blir brukt for å analysere og drøfte elevenes deltagelse i studiet.

2.3.1 Areal og omkrets

I innledningen av denne studien henviste jeg til Driscoll et.al (2007) som trekker frem at en utfordring i elevers arbeid med areal er forrviring rundt forholdet mellom areal og omkrets. De mener at det ikke er uvanlig at elever på mellomtrinnet har en oppfattning av at det er en direkte sammenheng mellom arealet og omkretsen til en figur. Elever må derfor få erfare at omkretsen til en figur ikke øker eller synker proposjonalt med arealet. Ifølge Hansen et.al (2016) og Solem et.al (2017) har elever større vanskeligheter med å forstå seg på areal og arealmåling, enn for eksempel måling av lengde og volum. Dette forklarer Hansen og hans kollegaer med at elever ofte har flere erfaringer med å måle lengder og rom. For eksempel gjennom måling av hvem som er kjappest og høyest eller å fylle en bøtte med vann. Dette er et argument for å lære elevene om areal i den fysiske verden, slik at de kan knytte begreper og definisjoner til erfaringer. Hansen et.al (2016) poengterer også at arealbegrepet på mange måter et mer variert og komplekst begrep enn for eksempel lengde. Grunnen til dette er at en todimensjonal figur med et gitt areal kan ha mange ulike former, mens et linjestykke med et gitt antall lengde kun vil ha en form. Driscoll et.al (2007) presenterer mental strukturering av rom og bruk av kvadratmål som to fremtredende ideer i utviklingen av arealforståelse. For å kunne forstå areal som lengdemål av et objekt krever det at elevene kan strukturere rommet til objektet. Eleven må klare å se en sammenheng mellom arealet og måling av rommet. I hvor stor grad elevene klarer å forholde seg til rommet er avhengig av romforståelsen. Battista (2007) mener at denne forståelsen er underbyggende for mesteparten av geometrisk tenkning. Føsker (2012) deler romforståelse inn i to hovedområder; romlig orientering og romlig visualisering. Han forklarer romlig orientering som forståelsen av ulike deler av rommet og hvordan vi forholder oss til dem, mens romlig visualisering handler om evnen til å lage og manipulere bilder av to- og tredimensjonale figurer. En måte å strukturere rommet på er gjennom å fylle det med en målenhet. Med rektangulære objekt, som er den aktuelle formen for denne studien, trekker Hansen et.al (2016) frem kvadrater som den mest vesentlige måleenheten å bruke siden formene korresponderer. Slik som jeg har nevnt tidligere trekker Driscoll et.al (2007) frem at mange elever på mellomtrinnet har en en oppfattning av at det er en direkte sammenheng mellom arealet og omkretsen til en figur. Elever må derfor få erfare at omkretsen til en figur ikke øker eller synker propisjonelt med arealet.

2.3.2 Van Hiele modellen

Van Hieles modell for utvikling av geometrisk tenkning er bredt anvendt innenfor forskning i dette fagfeltet. Modellen er resultatet av forskningen gjort av det hollandske lærer ekteparet Dina van Hiele-Geldof og Pierre van Hiele etter at de oppdaget at det var et sprik i elevenes forståelse og det som ble forventet at de lærte seg. I følge Fuys et.al (1988) hadde de oppfatningen av at læring er en diskontinuerlig prosess, der eleven beveger seg mellom nivåer. Van Hiele (Hansen et.al, 2016) mente at hvert av nivåene var en nødvendighet for videre utvikling, og at det ikke er mulig å hoppe over nivåer. Gjennom sitt arbeid oppdaget de fem slike nivåer for geometrisk tenkning: et visuelt nivå, et analytisk nivå, et nivå av uformell deduksjon, et nivå av deduksjon og til slutt et nivå av stringens. Van Hiele (Fuys et.al, 1988) mener at utviklingen skjer gjennom erfaringer fra undervisning og ikke av aldring og modning. Smestad (2008) og Gustavsen et.al (2022) poengterer at elever ikke vil oppnå tenkning på de to siste nivåene i norsk barneskole, og av den grunn inkluderes de ikke i beskrivelsen av nivåene under.

På geometriens grunnleggende nivå (0) blir figurer vurdert etter utseende. Av denne grunn blir nivået ofte referert til som det visuelle nivået. I sin beskrivelse av visualiseringsnivået, skriver Fuys et.al (1988) at elevene klarer å identifisere, navngi, sammenligne og behandle geometriske figurer. Van Hiele (1959, gjengitt i Fuys et.al, 1988) mente at nivåene kan kategoriseres basert på fokuset av tenkningen. For dette nivået er fokuset figuren i sin helhet, da de enda ikke har et bevist forhold til figurens egenskaper. Ifølge Gustavsen et.al (2022) vil eleven danne seg et mentalt bilde av geometriske figurer, som kalles for prototyper. I et forsøk på å sortere figurer vil de gruppere dem fordi de «ser like ut», som deres prototype for figuren, og ikke fordi de deler egenskaper. Eksempelvis (Hansen et.al, 2016) vil ikke en elev på dette nivået gjenkjenne en rombe som et parallellogram, men som en helt annen figur. Hvis eleven i det hele tatt har et forhold til begrepene rombe og parallellogram. Et annet eksempel er at elevene vil kunne avvise trekanter som skiller seg fra deres prototype for trekanter, ofte en likesidet trekant (Gustavsen et.al, 2022).

På neste nivå (1) blir egenskapene til figurene viktig. Eleven vil nå starte å analysere figurene basert på deres egenskaper og forholdene mellom dem. Ifølge Hansen et.al (2016) er et rektangel nå et rektangel fordi det er fire rette vinkler, diagonalene er like store, og motstående sider er like lange. På dette nivået oppstår det en kobling mellom det språklige og det visuelle. Elevene vil nå basert på egenskapene dele figurene inn i grupper og se på egenskapene som kjennetegn for disse gruppene. Smestad (2008) mener elever på dette nivået vil klare å liste opp egenskaper hos figuren, men ikke skille mellom hvilke egenskaper som er nødvendige og hvilke som er tilstrekkelige hos figuren. Det vil også være unaturlig å godta at det kan forekomme overlapping mellom de ulike gruppene geometriske figurer.

Neste nivå i utviklingen er logisk ordning eller uformell deduksjon (2). På dette nivået vil eleven kunne se sammenhenger mellom de forskjellige egenskapene hos figuren og mellom ulike figurer (Smestad, 2008; Fuys et.al, 1988). Nå er fokuset på egenskapene de oppdaget på forrige nivå, men kan nå resonnere logisk om disse. Eksempelvis vil eleven kunne fastslå gjennom oppbygningen av et logisk resonnement at alle kvadrater også er et rektangel, siden et kvadrat deler alle sine egenskaper med et rektangel (Hansen, et.al, 2016; Smestad, 2008). Elevene vil nå kunne formulere egne definisjoner og jobbe med nødvendige og tilstrekkelige egenskaper hos figurene (Gustavsen et.al, 2022).

2.3.3 Elevers utvikling fra ett nivå til et annet i van Hieles modell

Van Hiele (Fuys et.al, 1988) presenterer også fem faser for læring som skal bistå elver i å bevege seg fra et nivå til et høyere nivå: (1) Informasjon, (2) Veiledet orientering, (3) Forklaring, (4) Fri orientering og (5) Oppsummering. I tabellen under gjengir jeg hva som legges i hver av fasene.

Faser		**Beskrivelse**
1	Informasjon	Diskusjoner og samtaler holdes hvor læreren kartlegger elevenes nåværende kunnskap og erfaringer innenfor det aktuelle temaet.
2	Veiledet orientering	Lærer gir oppgaver/aktiviteter som lar elevene blir bedre kjent med stoffet som læres.
3	Forklaring	En overgangsfase fra avhengighet til lærer mot elevenes selvstendighet.
4	Fri orientering	Læreren er oppmerksom på elevenes oppfinnsomhet/kreativitet. Elevene blir presentert oppgaver hvor de kan velge ulike fremgangsmåter.
5	Oppsummering	Elevene oppsummerer hva de har lært.

Tabell 1: Faser for utvikling, Hiele-Geldof (Fuys et.al, 1988, s.7, oversatt for studien).

I følge Fuys et.al (1988) gir læringsfasene formidlet av van Hiles elevene mulighet til å lære geometri gjennom «hands on» aktiviteter. Elevene vil da kunne bruke problemløsningsstrategier, i kombinasjon med konkrete erfaringer, som vil føre til et høyere ferdighetsnivå av tenkning.

2.3.4 Geometriske tenkevaner

I arbeid med geometrisk tenkning opplevde Driscoll et.al (2007) stor variasjon i hvordan en gruppe matematikere tenkte i møte med en åpen og relativt enkel geometrioppgave. De oppdaget at arbeid med visualisering, konstruering og resonering i en-, to- og tre dimensjoner inviterte til ulike måter å tenke på. Dette ble bakgrunnen for forskningsprosjektet *Fostering Geometric Thinking* og rammeverket *Geometric Habits of Mind* (GHoM). Formålet med prosjektet var å studere og beskrive produktive måter å tenke på i geometri og hjelpe lærere med å forstå elevers utvikling og fremme deres geometriske tenkning. Før jeg presenterer rammeverket ser jeg på det som nødvendig å formidle hva Driscoll et.al (2007) legger i begrepet *mathematical habits of mind*. De forklarer det som produktive måter å tenke på som underbygger læring og bruk av formell matematikk. Lim og Sheldon (2009) forklarer opphavet til begrepet som et behov for å bistå elever i å tenke matematikk på samme måte som matematikere gjør. Den samme tankegangen undersøkende matematikkundervisning bygger på. I denne sammenhengen er det tenkevaner innenfor geometrisk tenkning. For denne studien vil jeg referer til *geometric habits of mind* som geometriske tenkevaner. I utviklingen av rammeverket tok Driscoll et.al (2007) utgangspunkt i fire kriterier. De to første kriteriene var at hver av de geometriske tenkevanene skulle representere viktig matematisk tenkning og skulle kunne kobles til tidligere funn innenfor forskningsfeltet. Et ekstra fokus for utviklingen av rammeverk var å identifisere tenkevaner som kunne bidra til suksessfull problemløsning i geometri. Det tredje kriteriet var at de utvalgte geometriske tenkevanene skulle være relevante for geometriundervisningen for 5-10.trinn. Det fjerde og siste kriteriet for de geometriske tenkevanene var at de skulle kunne brukes som støtte for gode læringsstrategier. Formålet med denne studien var å bidra med innsikt i geometrisk tenkning hos elever som fysisk aktivt undersøkte rektangler. På bakgrunn av kriteriene for de ulike geometriske tenkevanene ser jeg på dette rammeverket som egnet til å identifisere de ulike geometriske tenkevanene, som kommer til utrykk i resonneringen til elevene.

Basert på kriteriene utviklet Driscoll et.al (2007) fire geometriske tenkevaner *reasoning with relationships*; *generalizing geometric ideas*, *investigating invariants* og *balancing exploration and reflection.* For denne studien oversetter jeg tenkevanene til *å resonnere rundt geometriske forhold*, *generalisere geometriske ideer*, *undersøke permanentere* og *veksle mellom undersøkelse og refleksjon.* De poengterer i sine refleksjoner over rammeverket at disse fire tenkevanene ikke er de eneste tenkevanene for produktiv tenkning i geometri. Tenkevanene sees heller ikke på som adskilte i en problemløsningsprosess. For å komme frem til en løsning på et problem er det godt mulig at flere tenkevaner vil forekomme i elevenes tenkning. Driscoll et.al (2007) oppdaget og identifiserte indikatorer for hver av tenkevanene, som vises i tabell 2. Jeg vil komme nærmere inn på hver av tenkevanene og hva som kjennetegner dem videre i delkapittelet.

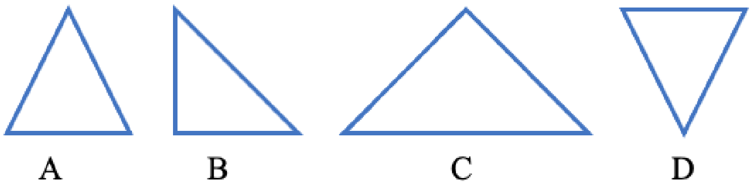
Tabell 2: GHoM mønstre (Driscoll et.al, 2008, oversatt og tilpasset for studien).

Geometriske tenkevaner	**Indikatorer for tenkevanen**	**Elev indikator**
Resonnere rundt geometriske forhold	Fokus på deler av flere figurer	Bemerker forholdet mellom egenskaper til en geometrisk figur
	Fokus på deler av en figur	Identifiserer/klassifiserer egenskaper hos en geometrisk figur
	Bruk av spesielle resonneringsferdigheter for å fokusere på egenskaper	Forbinder geometriske figurer med proporsjonel resonnering
Generalisere geometriske ideer	Søker løsninger fra kjente tilfeller eller løsninger	Generaliserer med støtte i et spesielt tilfelle for å forklare et problem
	Søker en rekke løsninger med hjelp av antatte forenklinger av forholdene	Tilpasser en generell situasjon i et problem for et spesielt tilfelle
	Søker komplette løsninger eller generelle regler	Kan tenke på alle mulige løsninger basert på dataene i problemet
Undersøke parametere	Benytter seg av geometrisk tenkning	Løser et problem med å avgjøre hva som forblir likt eller hva som forandrer seg etter det har skjedd en transformasjon
	Sjekker effekten av forandringer	Kan forestille seg den geometriske figuren som mobil uten å forandre den og forklare effekten av en forandringene
Veksle mellom undersøkelse og refleksjon	Fokus på selve undersøkelsen	Benytter seg av tegninger for å løse problemet/Kan utvikle flere fremgangsmåter for å løse problemet
	Fokus på det store bilde	Stiller seg spørrende til problemløsningsprosessen/Kan bruke et matematisk språk for å forklare hvorfor en løsning er riktig

Resonnere rundt geometriske forhold

Å resonnere rundt geometriske forhold vil si at du aktivt ser etter forhold med og mellom geometriske figurer og tenker over hvordan disse forholdene kan bidra til din geometriske forståelse eller problemløsning (Driscoll et.al, 2007). Basert på undersøkelser, hvor det geometriske problemet var ment å fremme tenkning rundt geometriske forhold, trekker Driscoll et.al (2007) frem ulike indikatorer på tenkevanen. De deler disse indikatorene i to, basert på om fokuset ligger på deler av en enkelt figur eller på deler av flere figurer. De fant også bruk av særegne resonneringsferdigheter som indikatorer for denne tenkevanen. Med fokuset på deler av flere figurer, så Driscoll et.al (2007) at elevene klarte å sammenligne to geometriske figurer ved å identifisere egenskaper de har til felles (kan være både relevant og irrelevant til problemet); sammenligne to geometriske figurer ved å identifisere alle egenskapene (som er relevant for problemet) og hvorfor; separere to geometriske figurer med å identifisere egenskaper de ikke har til felles; og sammenligne geometriske figurerer basert på egenskaper i de ulike dimensjonene. Når fokuset var på deler av en enkel figur klarte elevene å bemerke og setter strukturer i sammenheng innenfor en geometrisk figur; konstruere strukturer innenfor en geometrisk figur; og knytte to geometriske figurer sammen med å bemerke at de kan sees på som deler av en figur. De så også at elevene klarte å resonnere forholdsmessig om en eller flere geometriske figurer og/eller bruke symmetri for å relatere sammenhengen mellom geometriske figurer.

I følge Driscoll et.al (2007) har elever på mellomtrinnet ofte en begrenset forståelse av geometriske figurer og deres egenskaper. Når de beskrive de like utviklingsstadiene innen tenkevanen henter de inspirasjon fra van Hiele modellen. Elevenes forståelse på det første utviklingsstadiet baserer seg på utseende til en prototype (Fuys et.al, 1988; Driscoll et.al, 2007; Gustavsen et.al 2022). Prototypen blir oppfattet som det perfekte eksemplet på figuren, og den visuelle likheten er grunnlaget for sammenligning av andre figurer. I min beskrivelse av visualiseringsnivået til van Hiele (delkapittel 2.3.2) refererte jeg til Gustavsen et.al (2022), som skrev at elever på dette nivået ofte har en likesidet trekant som sin prototype for trekanter og ville derfor kunne avvise trekanter som ikke ligner. I figuren 2 har jeg skissert et eksempel hvor en elev på dette nivået vil kunne identifisere A som en trekant, mens B og D kan bli avvist. Det er også mulig eleven ville identifisert C som en trekant, men da er det basert på likheten til trekant A, ikke på grunn av nødvendige egenskaper hos trekanter. Driscoll et.al (2007) hevder at lærebøker også på mange måter bruker prototyper for figurer, og at en manglende variasjon i hvordan figurene blir presentert kan være med å bidra til fokuset på prototyper i elevens tenkning.



Figur 2: Identifisere trekanter på visualiseringsnivået.

Når elevene får mulighet til å undersøke ulike geometriske figurer vil fokuset gradvis gå over til figurenes egenskaper. På det andre utviklingsstadiet vil elevene nå starte å analysere egenskaper hos figuren, og muligens klare å identifisere alle figurene presentert i figur 2 som trekanter med å telle hjørner. Driscoll et.al (2007) mener at elever som er i startfasen med å analysere egenskaper hos figurene fremdeles bruker prototyper som referanse i sine resonnement. I en studie hvor Monaghan (2000) undersøker elever på mellomtrinnet sin geometriske forståelse, gjennom hvordan de ordlegger seg i oppgaver hvor de skal differensiere nærliggende geometriske konsepter, oppdaget han at mange elever var fokusert på den horisontale lengden når de beskrev forskjellene mellom et kvadrat og et rektangel. Eksempelvis svarte en elev at «et rektangel er en firkant, bare lenger». Et slikt utsagn kan tyde på at denne eleven har et kvadrat som sin prototype for konseptet firkant. Eleven overgeneraliserer dermed egenskapene til rektanglet og er overbevist om at forskjellen mellom figurene er den horisontale lengden. Det er disse to utviklingsnivåene som er vanligst på barneskolen, (Driscoll et.al, 2007; Smestad, 2008; Gustavsen et.al, 2022). Når elevene fortsetter å undersøke geometriske figurer og deres egenskaper vil de få flere og flere eksempler på de ulike geometriske konseptene og blir mer bevist på hvilke egenskaper som er nødvendig for å definere ulike figurer. Da beveger eleven seg mot det tredje utviklingsstadiet til Driscoll et.al (2007) og nivået for uformell deduksjon i van Hiele modellen.

Generalisere geometriske ideer

Driscoll et.al (2007) presenterer *generalisere geometriske ideer* som en tenkevane hvor det er ønskelig å forstå og forklare allmenne sannheter relatert til geometriske fenomen. De fremhever generalisering som en viktig ferdighet for unge problemløsere. Eksempler på generalisering kan være refleksjon rundt om alle mulige løsninger er oppdaget eller om en hendelse vil være gjeldende for alle tilfeller. I geometri er det generalisering av fremgangsmåter, resultater og forståelse av egenskaper hos geometriske figurer som er interessant. Under forskningsprosjektet identifiserte flere indikatorer for tenkevanen, som de delte i tre nivåer basert på utvikling. Disse presenteres i tabellen under.

Lite utviklet	**Overgang**	**Mer utviklet**
Tenker på relevante spesielle tilfeller (f.eks. rettvinkla trekant, likesida trekant) Ser utover de spesielle tilfellene til andre eksempler som passer Prøver å lage nye tilfeller ved å endre egenskaper i allerede identifiserte tilfeller Oppfatter at det er andre løsninger, men vet ikke hvordan å komme fram til dem	Er klar over at betingelsene gjelder for uendelig mange løsninger, betrakter bare et tilfelle. Ser et uendelig, sammenhengende varierende sett av tilfeller som fungerer, men begrenser mengden.	Ser et helt sett av løsninger og kan forklare hvorfor det ikke er flere. Bemerker en regel som er universell for en klasse av geometriske figurer. Setter problemer eller regler i en større kontekst.

Tabell 3: Utvikling av tenkevanen generalisere geometriske ideer (Driscoll et.al, 2007, s.16, oversatt for studien).

Undersøke parametere

Å *undersøke permanentere* er den tredje geometriske tenkevanen som blir presentert i rammeverket. Driscoll et.al (2007) forklarer at denne geometriske tenkevanen innebærer analyse av egenskapene til en geometrisk figur når den forandres. Elevene kan stille seg spørsmål som «Hva forandrer seg?» og «Hva forblir likt?». Eksempler på slike forandringer kan være rotasjon og speiling. Et annet eksempel på denne tenkevanen, som blir presentert av Driscoll og hans kollegaer er å analysere diagonalene, omkretsen og areal av en firkant som forandres fra et kvadrat til en flatere og flatere rombe. Under en slik transformasjon vil diagonalene forbli vinkelrette, omkretsen vil forbli den samme, men figuren vil få ulike arealmål. De oppdaget, basert på eksempeloppgaver, at indikatorene for denne geometriske tenkevanen kan deles i dynamisk tenkning og verifisering av effekt av transformasjonen. Ferdigheter elevene kan vise gjennom dynamisk tenkning er å kunne tenke dynamisk om et statisk tilfelle; undre over hvilke egenskaper som forandres og hvilke som forblir like når en figur forandres; gjennomfører flere forandringer for å se hva som forblir likt, underes seg over hva som skjer om et punkt eller hele figuren i sin helhet flyttes og klarer å forutse hva som vil skje; og undrer seg over enkelt og ekstreme tilfeller med en forandring. Andre indikatorer som kommer til syne etter en forandring kan være at eleven klarer å oppfatte at ikke alt forandrer seg; legger merke til samme forandring hver gang en bestemt type forandring forekommer og bemerker seg dette; og legger merke til hva som er permanent med en forandring og klarer å forklare hvorfor det er slik. Gürbüz et.al (2018) trekker frem papirbretting som et effektivt verktøy for å utvikle geometrisk tenkning. De oppdaget at tenkevanene *resonnere rundt geometriske forhold* og *undersøke parametere* var spesielt fremtredende i elevenes resonnering i arbeid med å brette papir.

Veksle mellom undersøkning og refleksjon

I følge Driscoll et.al (2007) handler *veksle mellom undersøkning og refleksjon* om å prøve ut flere ulike tilnærminger til et problem for å regelmessig dra tilbake i prosessen for å vurdere. Viktigheten av denne tenkevanen oppsto etter oppdagelsen av at den sjeldent ble benyttet. I deres undersøkelser var det få av elevene som tok seg tid til å stoppe opp og reflektere rundt effektiviteten av sine fremgangsmåter eller handlinger. Basert på disse erfaringene fremmer de viktigheten av balansen mellom undersøkning og refleksjon rundt undersøkningen. Indikatorene for denne tenkevanen deles inn i to, fokus på undersøkning og fokus på sluttproduktet. Tegning, lek og undersøkning gjennom intuisjon, gjetting eller å se tilbake for å vurdere; undersøke kjente strategier og fremgangsmåter; og forandre eller vurdere å endre deler av situasjonen, forholdene eller den geometriske figuren er indikatorer på tenkevanen gjennom et fokus på selve undersøkningen. Indikatorer for at fokuset er på sluttprodukter er om elevene regelmessig ser tilbake på det store bilde for å vurdere effektiviteten av strategier og fremgangsmåter; identifiserer delsteg som kan bidra til et godt sluttprodukt; beskriver hvordan en mulig løsning vil kunne se ut; eller lager formodninger om mulige løsninger, for å kunne teste ut disse.

2.3.5 Lærerspørsmål i utviklingen av geometrisk tenkning

Driscoll et.al (2007) forklarer at lærespørsmål kan være et kraftfullt verktøy for å gjøre elevene i stand til å forstå geometri, tenke geometrisk, og løse geometriske problemer. I samme forskningsprosjekt som GHoM presenterer de tre typer spørsmål som ansees som viktig i arbeidet med å fremme geometrisk tenkning. Disse spørsmålstypene er presentert i tabell 4.

Spørsmålstyper	**Hensikt**	**Eksempler**
Orientering	Hjelpe elevene til å rette fokuset mot problemet eller måter å møte problemet.	Hva spør problemet om? Tror du det ville hjulpet å sammenligne disse to sidene? Hvilke trekanter spør de deg om å sammenligne?
Vurdere	For å kunne vurdere elevenes forståelse av utsagnene og handlingene deres i møte med et problem.	Hvordan kom du frem til dette svaret? Hvordan vet du at dette er et rektangel?
Utvikle	Hjelpe elevene med å utvikle tenkning mot dypere forståelse av et problem	Hvordan kan du overbevise en skeptiker at figuren du har laget er et parallellogram? Hva om du ikke viste lengden på denne vinkelen? Hvilke typer trekanter vil dette fungere for, og hvorfor?

Tabell 4: Spørsmålstyper for å fremme geometrisk tenkning (Driscoll et.al, 2007, oversatt og tilpasset for studien)

De trekker frem tidspunktet for når spørsmål stilles og hensikt med spørsmålene som to viktige faktorer. Tidspunktet for når spørsmålet stilles kan tenkes er enda viktigere når elevene jobber i undersøkelseslandskap. Alrø & Skovsmose (2004) forklarer at elevene selv skal få mulighet til å formulere spørsmål og velge fremgangsmåter som en aktiv del av undersøkelsesprosessen. Det er derfor viktig at lærer er bevist og varsom for når spørsmålene stilles slik de ikke frarøver elevene ansvar og eierskap i undersøkelsen. Et eksempel på et spørsmål som kan virke frarøvende er spørsmålet «har dere prøvd å sammenligne de to figurene?». Det vil da være naturlig at mange elever tar det som et hint til å gjøre nettopp det, uten å ha forståelse for hvorfor det gjøres. Spørsmålet blir da et løsningsforslag fremfor å utvikle elevenes tenkning. Det er derfor viktig for lærer å vurdere hva som er hensikten med spørsmålene de stiller. Driscoll et.al (2007) mener at effekten av spørsmålstypene blir større om det er en balanse mellom bruken av dem. Van Heiles (Fuys et.al, 1988) mente at mange av utfordringene i geometriundervisningen var et resultat av språkbarrierer. Utfordringen var ofte at lærer snakket til elevene med et språk som var over deres nivå av forståelse. Det er derfor også viktig at lærer er klar over og tar hensyn til elevens faglige nivå når spørsmål stilles.

3.0 METODE

I dette kapitelet gjør jeg rede for metodiske valg og refleksjon som er blitt gjort i planleggingen og gjennomføringen av studien. Først presenterer jeg studiens forskningsdesign, etterfulgt av utvalget elever som har bidratt og i hvilken kontekst datainnsamlingen er blitt gjort. Videre gir jeg en beskrivelse av undervisningsopplegget og gjennomføringen av dette. Så gis det en beskrivelse av hvordan datamaterialet er bearbeidet, gjennom en tolkning- og analyseprosess, før jeg avslutningsvis reflekterer rundt studiens kvaliteter og hvilke etiske hensyn som er blitt gjort. Planlegging, innhenting og transkribering av datamaterialet ble gjort i samarbeid med to medstudenter. Jeg vil derfor tidvis i dette kapitelet referer til et «vi», som i dette tilfellet innebærer meg og disse to medstudentene.

3.1 VALG AV FORSKNINGSDESIGN

Hensikten med denne studien er å få innsikt i hvordan geometrisk tenkning kommer til uttrykk hos et utvalg elever på 5.trinn i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler. Jeg har derfor benyttet meg av en kvalitativ metodisk tilnærming, som Postholm & Jacobsen (2018) forklarer som metoder hvor virkeligheten beskrives gjennom språk og ord. Virkeligheten fremstilles deretter gjennom nedskrivning av hva som sies eller hva som observeres av forskeren. Fokuset er rettet mot hvordan dette utvalget med femteklassinger tenker i en kontekst hvor de undersøker ved hjelp av å være i fysisk aktiv bevegelse. Det vil si at studiet er avgrenset til en bestemt tid, sted og utvalg, noe som gjør dette til en enkelcasestudie. Postholm & Jacobsen poengterer at utgangspunktet for et slikt forskningsdesign er «lokal kunnskap», noe som vil si kunnskap som omhandler akkurat dette utvalget i denne konteksten. De fremhever derfor viktigheten av å reflektere rundt studiens validitet. Jeg presenterer slike refleksjoner mot slutten av kapitelet. Som en del av casen ble det utviklet et undervisningopplegg hvor det ble lagt til rette for at elevene fikk undersøke ulike rektangler i en kontekst der de var i fysisk aktiv bevegelse. For å dokumentere elevenes deltagelse ble det brukt video- og lydopptak. I tillegg ble det gjort umiddelbare feltnotater ettersom vi opplevde noe i deltagelsen som spesielt interessant.

3.2 OBSERVASJON

Adler & Adler (1994, gjengitt i Postholm & Jacobsen, 2018) ser på observasjon som den mest fundamentale måten å innhente data på innenfor kvalitativ forskning og er datainnsamlingsmetoden vi benyttet oss av i dette studiet. I følge Postholm & Jacobsen (2018) handler observasjon om mer enn bare å se, og forklarer at alle sansene våre vil kunne være delaktige i å oppfatte og forstå virkeligheten det forskes på. Næss & Sjøvoll (2018) inkluderer også «supplerende verktøy», som sammen med sansene våre kan bidra med å ordne informasjonen som innhentes gjennom å observere. For oss innebærer bruken av sansene våre at vi var fysisk til stede og noterte ettersom vi observerte noe spesielt interessant for våre to studier. Vi benyttet oss også av videokamera og lydopptak, som ble brukt til å dokumentere elevenes deltagelse.

3.2.1 Video- og lydopptak

Etter tillatelse fra foresatte, deltagende elever, elevenes kontaktlærer, skolens rektor og norsk senter for forskning (NSD) brukte vi video- og lydopptak for å dokumentere elevenes deltagelse. Vi benyttet oss av video- og lydopptak for å kunne fange opp både verbale og nonverbale uttrykk hos elevene. Det gjorde det også mulig å observere samme situasjon flere ganger for en mer detaljert observasjon. Når lydopptak ble benyttet fikk alle deltagende elever utdelt hver sin trådløse myggmikrofon, som vi festet ved hjelp av en klype i elevens krage eller ende av hetten. Myggmikrofonene var tilkoblet en mottaker. Det ble brukt individuelle mikrofoner for å få så klar og detaljert lyd som mulig, samt for å lettere skille elevenes ytringer i transkripsjonsprosessen. De trådløse mikrofonene var heller ikke i veien for elevenes kroppslige deltagelse. I tillegg til de individuelle mikrofonene var det innbygd en mikrofon i videokamera som tok opp elevens verbale ytringer.

Videokamera gav oss mulighet til å observere elevenes kroppslige deltagelse og om handlingene deres stemte overens med den verbale ytringen. Eksempelvis hvor instruksjoner for posisjonering ble gitt blant elevene. Bruken av opptaksutstyr vil kunne ha en påvirkning på elevens atferd og med det ha innvirkning på studiets funn. Vi gjorde derfor tiltak for at utstyret skulle ha minst mulig påvirkning på elevene, blant annet gjennom plasseringen av videokameraene. Videokamera ble plassert etter det Roschelle (2000) ser på som foretrukket posisjon for videokamera brukt i forskningssammenheng. Kamera ble plassert stasjonært med en høyde som gav et «ned på» bilde og en avstand der bilde var vidt nok til å fange opp alle aktuelle elever mens de samhandlet i sin undersøkelse. Samtidig som det var nært nok til å fange opp viktige detaljer. Vi benyttet oss av kamerastativ for å gjøre kamera stasjonært slik vi kunne tilegne oss tydelige og oversiktlige videoer, frata oss ansvar som deltagende observatører og ikke forstyrre deltagende elever. Det ville ikke vært mulig å besvare studiens problemstilling uten videokamera, da elevens deltagelse også innebærer nonverbale uttrykk.

3.2.2 Vår rolle som observatører

Hvordan observasjonen blir utført har påvirkning på deltagerne og resultatene av forskningen. Det er derfor viktig at forskerne reflekterer rundt deres rolle som observatører (Næss & Sjøvoll, 2018). En populær måte å fordele observatørroller inn på er i et kontinuum fra «fullstendig observatør» til «fullstendig deltaker» (Næss & Sjøvoll, 2018; Postholm & Jacobsen, 2018). Som fullstendig observatør har du ingen tilknytning til situasjonen eller samhandling med deltagerne. En fullstendig deltaker er en del av det som observeres. Våre refleksjoner rundt observatørrollen var å være deltagende i form av å dele ut oppgavene til elevene og besvare spørsmål rundt disse, men deretter holde oss i bakgrunnen. Vi oppdaget tidlig i undervisningsopplegget at elevene hadde et større behov for veiledning enn først antatt. Dette gjorde at vi måtte vurdere vår observatørsrolle på ny. Vi bestemte oss for at jeg fortsatte som en observatør som holdt seg i bakgrunnen, mens de to andre ble fullstendige deltakere og var med det en del av situasjonen som ble observert. Grunnen til denne fordelingen var på grunn av forskjellige fokuset i studiene våre. Medstudentene i studien hadde fokus på samtalekvaliteter, og som fullstendige deltagere fikk de observere og delta i disse samtale på nært hold. Mens jeg som ønsket et mer oversiktlig blikk på hele elevdeltagelsen fikk det. Deres deltagelse vurdertes også til mer autentisk som en «vanlig» lærer, da de ikke hadde satt seg inn i denne studiens rammeverk og de ulike måtene å stille spørsmål på for å fremme ulike typer av geometriske tenkning. I transpirasjonen blir de to masterstudentene referert til som lærer. De deltok med innstillingen av å la elevene undersøke og diskutere uten involvering fra lærer, men at de veiledet elevene ved å stille spørsmål etter behov. Enten om det var for å hjelpe elevene med å uttrykke seg, eller rent praktiske veiledning rundt bruk av utstyr og fremgangsmåte.

3.3 UTVALG OG KONTEKST

Prosessen rundt å tilegne seg informanter til studiet startet med å forhøre oss blant vårt egent nettverk. Det gjorde vi ved å sende ut et informasjonsskriv til aktuelle lærere (vedlegg 5). Vår preferanse for utvalget var elever på mellomtrinnet. Grunnen til dette var at vi ønsket elever med rikere erfaringer med geometri og matematiske samtaler, enn hva de har på småtrinnet. Etter et par henvendelser fikk vi svar fra en kontaktlærer på 5.trinn, som var interessert i å la oss gjennomføre vårt undervisningsopplegg i sin klasse. Hun viste seg også å være svært villig til å tilpasse skolehverdagen den aktuelle uken vi samlet inn data og var overbevist om at store deler av klassen ønsket å delta. Dette gjorde at vi valgte å samle inn data i denne klassen. Vi informerte også skolens rektor om studiene. Samtale med lærer, tidligere erfaringer fra skolen, elevgruppen og tidligere forskning utgjorde grunnlaget for utviklingen av undervisningsopplegget. Vi fikk både klasserom, skolegård og gymsal til disposisjon. Det var totalt 14 av 19 elever som meldte interesse for å delta i studien, gjennom muntlig godkjenning fra elevene og skriftlig fra elevenes foresatte. Det er disse 14 som utgjør utvalget for studien. Årsaken til at fem av klassens elever ikke er en del av utvalget, var rett og slett fordi samtykkeskjema ikke ble levert i tide eller at de selv ikke ønsket å delta. Kontaktlærer mente at disse elevene ikke utgjorde store avvik i denne sammenhengen og beskrev utvalget som pliktoppfyllende og sammensveiset. Utvalget består av både jenter og gutter og representerer klassen som helhet på en god måte. Utvalget er også representativt for elever med ulike forutsetninger både faglig og sosialt. I transkripsjonen og analysen blir elevene referert til med fiktive navn for å ivareta anonymiteten deres. Ifølge kontaktlærer hadde elevene få erfaringer med å være fysisk aktive i matematikkundervisningen, men var vant til å jobbe sammen i grupper.

3.3.1 Gruppeinndeling

Vi ønsket en gruppesammensetning hvor forholdene lå til rett for selvstendig matematisk undersøkelse. Det ble derfor tatt både faglige og sosiale hensyn da vi delte inn elevene i grupper. Undervisningsopplegget er basert på at elevene skal være fysisk aktive og utfolde seg på et større område enn hva du finner i en klasseromskontekst. Dette medførte at også andre hensyn blir tatt. I dialog med elevens kontaktlærer reflekterte vi rundt Høigaard & Johansen (2006) sine to krav for læring i idrettsgrupper. Vingdal (2014) ser på disse kravene som overførbare til gruppearbeid med fysisk aktiv læring. Så langt det lar seg gjøre så bør gruppesammensetningen oppfylle to krav, (1) tilstrekkelig med ferdigheter for å utføre oppgaven og (2) tilstrekkelig med sosiale ferdigheter for å bevare gruppen gjennom arbeidet. Et annet hensyn som diskuteres er gruppestørrelse. Høigaard & Johansen mener gruppene bør være minst mulig for å unngå «sosial loffing». Basert på vurderinger og refleksjon rundt disse kravene delte lærer utvalget inn i fire grupper hun mente oppfylte kravene over. To grupper på tre elever og to grupper på fire. Gruppene ble nummerert fra 1 til 4.

3.4 DATAINNSAMLINGSPROSESSEN

I dette delkapittelet presenterer jeg de ulike prosessene innenfor datainnsamlingen. Først gjør jeg rede for hvilke av læreplanens kjerneelementer og kompetansemål det er tatt utgangspunkt i når vi planla undervisningsopplegget. Etterfulgt av en beskrivelse av undervisningsoppleggets tre økter og formålet med disse. Til slutt gir jeg en beskrivelse av hvordan den praktiske gjennomføringen av datainnsamlingen foregikk.

3.4.1 Utforming og beskrivelse av undervisningsopplegg

Datainnsamlingsprosessen fant sted høsten 2022. Dette var en periode hvor skolen og lærere fremdeles jobber med å sette den nye læreplanen fra 2020 ut i livet. Med ønsket om å gjennomføre en studie som er relevant for andre lærerstudenter og lærere på mellomtrinnet tok vi utgangspunkt i læreplanen LK20 når undervisningsopplegget ble utformet. I innledning henviste jeg til kjerneelementene i matematikk, som vektlegger at elevene får Utforske, undre og være nysgjerrige gjennom lek, variasjon i oppgaver og læringsarenaer» (Kunnskapsdepartementet, 2019). De skal også få muligheten til å kommunisere matematikk. Målet ble derfor å la elevene arbeide variert i form av oppgavevalg og læringsarenaer i samhandling med hverandre og oss. Vi utformet tre undervisningsøkter. En økt bestående av introduksjon og kartlegging, en av repetisjon og kartlegging og til slutt en økt hvor elevene drev med fysisk aktiv undersøkelse av rektangler (vist i tabell 5). I løpet av disse tre øktene ønsket vi å gi elevene mulighet til å uttrykke seg både skriftlig og muntlig. I form av variasjon jobbet de i par, større grupper og som hel klasse i læringsarenaer som klasserom, skolegård og gymsal. Geometri er ikke representert i kompetansemålene på 5.trinn. Vi har derfor tatt utgangspunkt i kompetansemålene fra 6.trinn: «Utforske mål for areal og volum i praktiske situasjoner og representere dem på ulike måter» og «Bruke ulike strategier for å regne ut areal og omkrets og utforske sammenhenger mellom disse». Ifølge kontaktlærer var også dette grunnen til at elevene ikke hadde hatt et bevist fokus på geometri så langt på 5.trinn. Hun argumenterte derfor for at elevene vil trenge repetisjon fra geometri lært på 4.trinn, noe økt en og to bærer preg av.

Økt	Tid	Hva ble gjort?	Kommentar
Økt 1	30 min	Introduksjon og kartlegging	Vi introduserte oss for elevene, forklarte hvorfor vi var der, hvilke rolle vi hadde og hvilket utstyr som ville bli brukt. Økten ble også brukt til å kartlegge elevenes faglige nivå.
Økt 2	60 min	Repetisjon	Elevene jobbet med begrepene rektangel, omkrets og areal. Hensikten med økten var å utforme en felles definisjon av begrepene.
Økt 3	90 min	Fysisk aktiv undersøkelse av rektangler	Elevene drev fysisk aktiv undersøkning av rektangler i gymsal.

Tabell 5: Oversikt over undervisningsopplegget for studien.

3.4.1.1 Første økt: Introduksjon

Første økt hadde en varighet på 30 minutter og hadde som formål å informere elevene om studiet. Det var også en mulighet for oss å få et inntrykk av elevenes faglige nivå innenfor temaet, og til å skape nysgjerrighet og engasjement rundt resten av undervisningsopplegget. Økten ble lagt opp som en dialog mellom oss forskere og elevene. I første del av økten ønsket vi å presentere oss. Vi snakket om hvem vi var og hvorfor vi var på besøk hos dem. Dette var i tillegg til informasjonen som sto på samtykkeskjemaet elevens foresatte alt hadde godkjent og signert. Etterpå snakket vi om forskningsprosjektet. Her gav vi en kort beskrivelse av de to kommende øktene og utstyret. Dette ble gjort for å ufarliggjøre deltagelsen. Vi informerte også elevene om deres rettigheter som deltakere i studiet, blant annet at de til enhver tid kunne trekke samtykket om å delta. Elevene fikk gjennom hele økten mulighet til å stille spørsmål om det var noe som var uklart eller noe de lurte på. Til slutt hadde vi en samtale om det geometriske temaet. Her fikk vi et inntrykk av hva elevene husket fra tidligere geometriundervisning og hva det var behov for å repetere. Elevene fikk også en gjennomgang av læringsmålene for undervisningsopplegget. Denne delen av samtalen ble grunnlaget for neste økt.

3.4.1.2 Andre økt: Repetisjon

Andre økt hadde en varighet på 60 minutter og et formål om å gi elevene en felles forståelse av begreper som ville være relevante for undersøkningen i tredje økt. Eksempler på begreper som ble gjennomgått var rektangel, omkrets og areal. Elevene skulle så parvis diskutere og notere på et oppgaveark hva de la i begrepene. Eksempler på spørsmål som ble stilt var «Hva er areal?» og «Hvordan kan vi finne arealet til et rektangel?». Videre var det planlagt en felles klassediskusjon hvor vi sammen definerte begrepene. Etter å ha kartlagt elevens faglige nivå, beveget vi oss til neste fase i utviklingsfasemodellen til van Hiele, som er «veiledet orientering». I denne fasen jobber elevene med aktiviteter som skal gjøre dem bedre kjent med teamet som læres. Vi ønsket at aktiviteten skulle være en «smakebit» på hva som ventet i den siste økten. Det var derfor viktig at aktiviteten inkluderte samarbeid, fysisk aktivitet og utforskning av rektangler med et ekstra fokus på omkrets og areal. Basert på disse kravene planla vi for at elevene fikk utforske firkanter gjennom en aktivitet vi kalte for «firkantjakt». Aktiviteten skulle gjennomføres i grupper på tre til fire elever. Hver av disse gruppene fikk utdelt en tabell og et målebånd. De skulle så lete etter og identifisere firkanter i skolebygget og skolegården. Etter at de hadde identifisert en firkant var målet at de skulle beskrive den ved hjelp av de geometriske egenskapene, omkrets og areal. Oppgavearket med spørsmålene og tabellen ligger som vedlegg 1. Avslutningsvis var det planlagt en klassediskusjon om hva elevene hadde funnet ut på sin «firkantjakt».

3.4.1.3 Tredje økt: Fysisk aktiv undersøkelse av rektangler

Denne økten hadde en varighet på 90 minutter, og er hovedtyngden av datamaterialet vårt. Undervisningsøkten er utformet etter hvordan tredelingen presentert i Goos (2004) og Blomhøj (2016). Vi delte inn økten i en introduksjons del, en undersøkelses del og en diskusjonsdel. På grunn av begrenset tid ble refleksjonen så kort at den ikke er en del av datamaterialet og utdypes heller ikke her. Første del besto av introduksjon og demonstrasjon for å skape interesse og invitere elevene til å delta i undersøkelsen. Alrø og Skovsmose (2004) trekker frem at elevene må ha grunner til å delta i en undersøkelsesprosess. De trekker frem interesse eller kjennskap til situasjonen som en grunn til å delta. For å gi elevene eierskap til problemet valgte vi derfor å sette problemet som skulle undersøkes i en kjent kontekst med bassenger. I et forsøk på å gjøre problemet enda mer personlig presenterte vi det som at kontaktlærer sammen med ektemann skulle lage nytt basseng ved leiligheten deres i Spania. Personlige årsaker som forholdet til lærer er en grunn Alrø og Skovsmose (2004) trekker frem for å delta. Elevene skal også jobbe i grupper og vil da kunne føle på en følelse av forpliktelse ovenfor gruppen til å delta. Denne fasen inkluderte også en demonstrasjon av oppvarmingsoppgaven og opptaksutstyr som skulle bli benyttet under økten. Dette gjorde vi for å bevisstgjøre og skape en trygghetsfølelse hos elevene, samtidig som vi fikk testet at myggmikrofonene fungerte som ønsket.

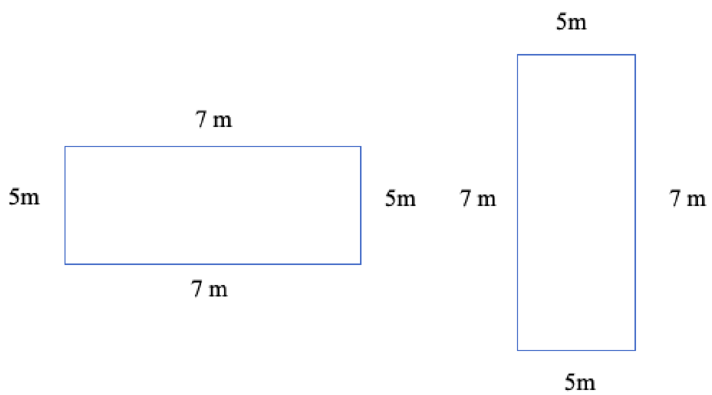
Neste del av økten besto av elevenes underkølser av rektangler. Vi utviklet totalt syv knyttet til problemet rundt konstruksjonen av bassenget til kontaktlæreren. En oppvarmingsoppgave og seks oppgaver som omhandler omkrets og eller areal. Oppgavene befinner seg et sted mellom strukturert og veiledet undersøkelse (Branchi og Bell, 2008). Elevene fikk presentert et problem (oppgave) av oss, men skulle som gruppe selv velge fremgangsmåte, med forutsetning om at deler av oppgaveløsningen ble gjort i mesorommet. Fra vår side var det ønskelig å både observere elevens undersøkelse i mikro og mesorommet, og å se hvordan elevene løste overgangen mellom rommene. Om de ikke ble enige om fremgangsmåte eller slet med å uttrykke sine forslag involverte lærer seg med forslag og veiledning. Det skal også poengteres at det ble lagt til rette for en fremgangsmåte med bruk av avsperringsbånd i konstruksjonen av svømmebassengene.

Oppvarmingsoppgave

I oppvarmingsoppgaven skulle elevene gjøre en dynamisk undersøkning av rektangler ved hjelp av et avsperringsbånd som var knyttet fast i endene. Avsperringsbåndet hadde en omkrets på 24 meter, samme som omkretskravet til bassengene i de neste oppgavene. Elevene utgjorde hvert sitt hjørne eller vinkel i figuren. Gruppene med tre elever hadde en lærer som representerte den fjerde vinkelen. Elevene ble stilt spørsmålene «Hvordan kan dere lage et rektangel med dette tauet?» og «Hva er det som gjør at dere har laget et rektangel?». Formålet med oppgaven var at elevene skulle gjøre seg erfaringer rundt at et sammenknyttet tau med en bestemt omkrets kunne transformeres til flere rektangler, gjennom samhandling og kroppslig undersøkning.

Oppgave 1

I oppgave en ble elevene igjen påminnet kravene for bassenget og stilt spørsmålet «Kan dere hjelpe oss med å måle opp tre mulige svømmebasseng vi kan lage?». Elevene fikk utdelt avsperringsbånd, målebånd, saks og teip. Med hjelp av utstyret skulle elevene konstruere tre bassenger de hadde blitt enige om hadde omkrets på 24 meter. Formålet med denne oppgaven var at elevene skulle få undersøke hvilke mulige sidelengder rektangler med samme omkrets kan ha. Med naturlige tall vil det være seks ulike løsninger. Ansees en rotasjon av rektanglet, vist i figur 3, som et nytt rektangel vil det være ytterligere fem løsninger.



Figur 3: To rektangler eller et rektangel med en rotasjon?

Oppgave 2

I oppgave to ble elevene spurt om å hjelpe med å finne ut hvilket av bassengene med en omkrets på 24 meter som hadde størst areal. Vi ønsket med dette spørsmålet at elevene skulle starte å undersøke forholdet mellom omkrets og areal. Oppgaven stiller krav til at elevene er nødt til å fortsette undersøkelsene utover rektanglene de konstruerte i oppgave 1. Svømmebassenget med størst areal er kvadratisk med sidelengder på seks meter. Vi valgte bevist å utelukke å poengtere at et kvadrat etter matematisk definisjon også regnes som et rektangel. Vi ønsket at elevene selv skulle ha muligheten til å oppdage dette gjennom undersøkelsen.

Oppgave 3

Neste spørsmål er en videreføring av spørsmålet i oppgave to «Hvordan vet dere at svømmebassenget har det størst mulige arealet?». Vi ønsket med dette spørsmålet at elevene skulle argumentere for hvorfor nettopp dette rektangelet ble det største

Oppgave 4

I oppgave fire ble elevene stilt spørsmålet «Kan dere prøve å forklar hva som skjer når dere endrer størrelse på svømmebassenget?». De ble om å først diskuter i gruppen, før de skulle skrive det ned. Med denne oppgaven ønsker vi at elevene skal fortsette å uttrykke sin geometriske tenkning rundt dynamisk transformasjon av rektangler. Formålet med spørsmålet er at elevene skal resonnere ytterligere rundt geometrisk konsepter og komme med mer formelle resonnement enn de empiriske resonnementene vi forventer vil forekomme i oppvarmingsoppgaven.

Oppgave 5

I oppgave fem ble de stilt spørsmålet «Velg dere en annen omkrets og undersøk hva som skjer med arealet til bassenget?». Vi ønsket med dette spørsmålet at elevene skulle starte å generalisere oppdagelsene de har gjort i sine tidligere undersøkelser.

Oppgave 6

Til slutt ble elevene stilt spørsmålet «Kan dere finne ut hva som er likt hos de største bassengene med ulik omkrets?». Dette spørsmålet har samme formål som spørsmål 5. Spørsmålet blir stilt for at elevene skal resonnere rundt hvorfor kvadratet har størst areal og uttrykke en generaliserende regel.

3.4.2 Gjennomføring av undervisningsopplegg

Dette delkapittelet består av en redegjørelse av praktiske hensyn og tilpasninger, samt utfordringer vi møtte på under den praktiske gjennomføringen av datainnsamlingen. Jeg har valgt å inkludere dette delkapittelet for å synliggjøre forskningsprosessen ytterligere. Hensikten med delkapittelet er at leser skal få en enda mer detaljert beskrivelse av forhold som kan ha spilt en rolle for studiets resultater. Beskrivelsene vil da forhåpentligvis gi leseren mulighet til å selv gjøre opp sine egne refleksjoner rundt den praktiske gjennomførelsen og resultatene som blir presentert i neste kapittel.

Gjennomføring av økt en:

Til tross for at jeg hadde et forhold til den aktuelle klassen fra tidligere deltidsjobb, var denne økten den første gang jeg var der i rollen som forsker. Det var også første møte mellom elevene og de to andre masterstudentene. Økten fant sted i klassens samlingsområde foran en digital tavle, hvor vi med hjelp av PowerPoint presenterte oss som personer og forskere.
For denne økten var hele klassen til stedet ettersom kontaktlærer vurderte vår tilstedeværelse som spennende og faglig nyttig, også for elevene som ikke utgjorde utvalget. Det var også av etiske hensyn vi ikke ønsket å ekskludere elever før det var nødvendig i forhold til NSD godkjennelse. Vi gav også en presentasjon av studiet, det matematiske fokuset og kompetansemålene for de to kommende øktene. Her forklarte vi hvorfor vi ønsket å filme og ta opp samtalene under deltagelsen i økt tre. Vi forklarte også hvordan utstyret fungerte og hvordan vi ønsket at de skulle forholde seg til det. Når det kom til det matematiske temaet ønsket vi å forhøre oss om hva elevene husket fra tidligere geometriundervisning, slik vi kunne kartlegge det faglige nivået sammen med kontaktlærer og tilpasse utformingen av de to neste øktene. Elevene som ikke var en del av utvalget, var heller ikke en del av kartleggingen. Etter økten reflekterte vi sammen med kontaktlærer, rundt utformingen av de to neste øktene. Refleksjonen endte i noen forandringer for fokuset i økt to og for hvordan vi presenterte oppgavene i økt tre. Jeg vil komme nærmere inn på det i de to kommende delkapitlene.

Gjennomføring av økt to:

Utgangspunktet for denne økten var at vi ønsket å utsette elevene for en lignende situasjon som den de skulle gjennomføre i økt tre. Etter samtale med elevene i forrige økt og refleksjoner med kontaktlærer i etterkant vurderte vi det slik at elevene ville ha nytte av et større fokus på å definere de aktuelle begrepene enn hva vi hadde planlagt for på forhånd. Vi inkluderte derfor en innledende del hvor elevene fikk mulighet til å skrive ned hva de la i begrepene (vedlegg 1). Etterpå ble elevene delt inn i par for å fortelle sine syn på begrepene og sammen utvikle en definisjon. Til slutt fikk de som ønsket muligheten til å presentere sine definisjoner for klassen. Basert på elevenes forslag utviklet vi definisjoner felles for klassen. De skriftlige definisjonene gav oss muligheten til å kartlegge hver enkelt elev sin oppfatning av begrepene, mens de muntlige gav oss muligheten til å stille oppfølgingsspørsmål slik at vi kunne få et enda bedre bilde på hvordan elevene tenkte. Hele klassen var også delaktig i denne økten, av de samme årsaker som i forrige økt. Under firkantjakten så vi at flere elever hadde utfordringer med å holde fokuset matematisk når de fikk utforske geometrien i mesorommet. Det var også en del grupper som hadde utfordringer med å delegere oppgaver innad i gruppen og bli enige om hvordan de ønsket å løse oppgaven. Branchi og Bell (2008) trekker frem at det vil kreve omfattende trening for å utvikle ferdigheter og forståelse for undersøkelsesprosesser. Utfordringene elevene møtte på kan derfor ha en sammenheng med at elevene ikke har mye erfaring med å jobbe med matematikk på denne måten. Dette var noe vi var bevisst på før økten, og noe vi hadde fokus på under elevenes undersøkelser i økt tre. Blant annet gjennom å veilede elevene i å dele på ulike ansvar i undersøkelsesprosessen. I siste del av økten samlet hele klassen seg igjen i klasserommet og vi gjennomgikk resultatene fra elevenes undersøkelser.

Gjennomføring av økt tre:

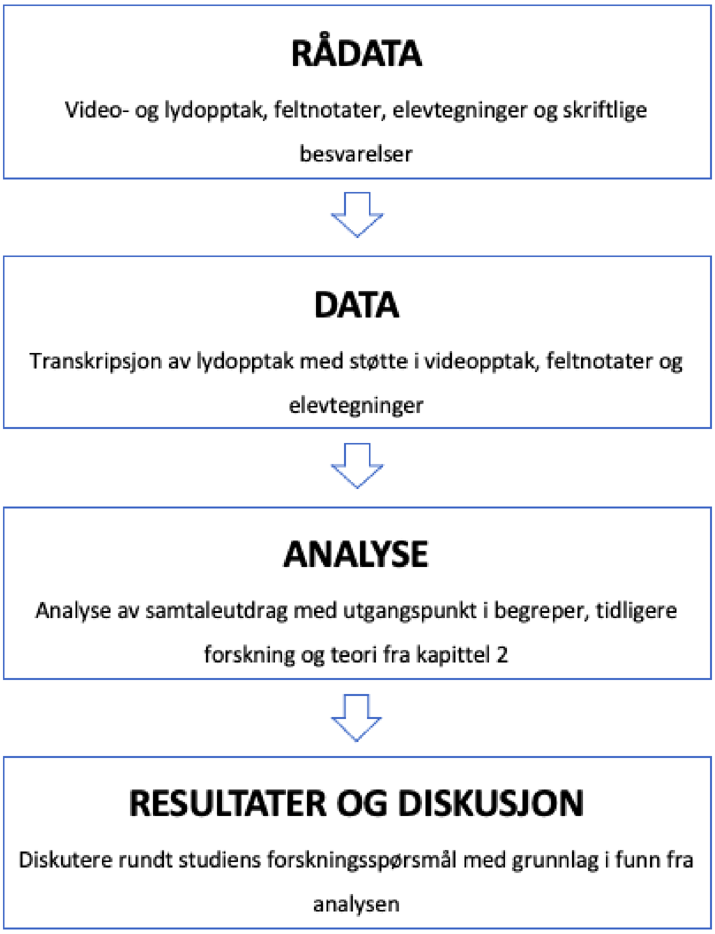
Økt tre ble gjennomført i en av skolens gymsaler. Det er også mulig å gjennomføre økten ute på åpen skolegård eller idrettsbane, men vi valgte å være inne med hensyn til videokameraene og myggmikrofonene da det var meldt regn. Vi måtte også tilpasse elevenes deltagelse på grunn av praktiske begrensninger med videokamera og myggmikrofoner. Vi hadde kun åtte myggmikrofoner og to videokamera, som gjorde at vi var nødt til å dele utvalget i to, fordelt på to dager. Første dag deltok gruppe 1 og 2, mens gruppe 3 og 4 deltok dagen etter. Vi kunne da bruke erfaringer fra dag en til å reflektere og justere opplegget for de to gruppene på dag to. Vi fikk også mulighet til å ha større fokus på hver av gruppene. Når elever fra utvalget ikke deltok i vår undervisning økt, var de i klasserommet med kontaktlærer og resten av klassen. Der arbeidet de med et opplegg innenfor geometri, som vi utviklet sammen med kontaktlærer.

Før utvalget ble fulgt fra klasserommet til gymsalen satt vi frem og testet videokameraene og myggmikrofonene. Videokameraene ble plassert etter hvordan Roschelle (2000, s.8) beskriver sitt syn på foretrukket posisjon til videokamerabruk i forskning (beskrevet i kapitel 3.2.1 Video- og lydopptak). Myggmikrofonene ble tilkoblet til mottaker og lydkvaliteten ble testet rundt i gymsalen. Utstyret som var tilgjengelig for oppgaveløsningen ble fordelt og lagt ut i gymsalen. Elevene ble fulgt bort til og inn i gymsalen der de ble plassert på en benk. I det elevene kom inn i gymsalen ble videokameraene skrudd på. Alle elevene fikk tildelt hver sin myggmikrofon. Mikrofonene ble fordelt slik at elevene som var på samme gruppe hadde mikrofoner tilkoblet samme mottaker. Etter tur fikk elevene teste sin mikrofon ved å lage en kort lyd. Dette var for å forsikre oss at mikrofonene hadde samme lydkvalitet, også etter at de ble festet på elevenes krage eller hette. Før vi startet undervisningsøkten gjentok vi hvordan vi ønsket at elevene skulle forholde seg til utstyret og la til rette for spørsmål fra elevene rundt utstyret.

Vi presenterte deretter problemet for elevene. For å hjelpe elevene i gang gjorde vi en demonstrasjon av hvordan avsperringsbåndet i oppvarmingsoppgaven kunne transformeres til ulike firkanter ved hjelp av kroppslig posisjonering. Elevene fikk da i fellesskap på tvers av gruppene uttrykke hva de oppdaget under transformasjonene. Etter et par minutter var det elevens tur til å utforske. Kontaktlærer mente det ville være fordelaktig å dele ut oppgavene separat (vedlegg 2). Dette var en tilpasning hun mente vil motivere elevene og la dem fokusere på hver enkelt oppgave, fremfor å bli demotivert av arbeidsmengden opplegget krevde i en relativt ukjent situasjon. Elevene brukt lengre tid på de første fire oppgavene (oppvarmingsoppgave inkludert) enn hva vi hadde planlagt for. I istedenfor å avbryte elevenes utforskning valgte vi å la elevene arbeide i tempoet de behøvde.
Vi vurderte situasjonen slik at vi heller ønsket et datamateriale der elevene fikk mulighet til å fullføre utforskning av færre oppgaver enn å kjappe seg gjennom flere oppgaver. Dette resulterte i at ingen av gruppene fikk fullført undervisningsøkten i sin helhet. Som jeg beskrev i delkapittelet om observasjonsroller var målet at elevene skulle undersøke og diskutere uten involvering fra lærer, men at det var en tilgjengelig om det skulle være et behov. Det var flere tilfeller hvor lærer deltok i elevenes undersøkelsesprosess, både av praktiske, organisatoriske og faglige årsaker. For eksempel om samtalen stoppet opp. Lærer gikk også inn for å bistå elevene i å utrykke eller utdype sin geometriske tenkning. Dette så vi flere tilfeller av når vi analyserte datamaterialet, og det ble en sentral del i å besvare det andre forskningsspørsmålet om hvilke forhold som bisto elevene i å uttrykke sin geometriske tenkning. På grunn av tidsbegrensninger ble den avsluttende refleksjonsdelen noe kort, og er derfor blitt bortprioritert i analysen. Dewey (Lerum et.al, 2021; Artigue & Blomhøj, 2013; Vingdal, 2014) trekker frem viktigheten av å reflektere i henholdsvis undersøkende matematikkundervisning og kroppslig læring. Det kunne derfor med fordel ha blitt planlagt en egen økt hvor elevene fikk mulighet til å reflektere rundt den fysiske deltagelsen.

3.5 BEHANDLING OG ANALYSE AV DATAMATERIALET

I følge Postholm & Jacobsen (2018) starter datainnsamlingsprosessen umiddelbart når forsker opererer i feltet hvor datainnsamlinger skjer. For denne studien vil det si fra øyeblikket vi møtte utvalget den første økten. Vårt datamateriale består i stor grad av observasjoner gjort enten av oss forskere eller gjennom video- og lydopptak. Vi har også samlet inn elevtegninger og skiftelige besvarelser. Alt dette utgjorde studiets rådata. Observasjoner som ble gjort i de to første øktene hadde kun som formål å kartlegge elevenes faglige ståsted og tilpasse undervisningsopplegget. Det ble derfor ikke benyttet video- og lydopptak for i disse øktene. Var det situasjoner eller uttalelser som ble vurdert som interessant for studiet eller studiets fortsettelse ble disse skisserte eller skrevet ned og ble inkludert i datamaterialet som feltnotater. Observasjonene, feltnotatene og elevenes skriftlige besvarelser var utgangspunktet for refleksjon sammen med kontaktlærer etter øktene. Det er observasjonene gjort i økt tre som ligger til grunn for analysen i neste kapittel. Det er derfor dette datamaterialet som vil være fokuset videre. I figur 4 har jeg forsøkt å visualisere bearbeidingsprosessen fra rådata frem til funn som blir diskutert for å besvare studiens forskningsspørsmål. Til tross for at figuren skisserer en lineær prosess var virkeligheten mer omfattende. I bearbeiding av datamaterialet beveget jeg meg frem og tilbake mellom de ulike prosessene som blir skissert. Eksempelvis gikk jeg frem og tilbake mellom rådataen og analysen gjentatte ganger for å forsikre meg om at jeg fortsatt hadde lik forståelse av en situasjon eller om den hadde forandret seg i løpet av bearbeidingsprosessen.



Figur 4: Bearbeidingsprosessen av datamaterialet.

Rådataen fra videokameraene og mikrofonmyggene ble umiddelbart overført til en ekstern harddisk etter endt økt. For å få oversikt over samtaleforløpet fra lydopptakene ble de ulike myggmikrofonene «lagt over hverandre» og synkronisert ved hjelp av dataprogrammet Audacity. Programmet ble lastet ned på datamaskinen, som under hele denne prosessen var frakoblet internett. Vi forsøkte også å synkronisere video- og lydopptaket ved å klappe under testingen av utstyret med elevene. Vi opplevde det som utfordrende å følge både lyd fra mikrofonene og videokameraet samtidig. Derfor transkriberte vi lydopptaket separat og brukte videoopptaket som støtte for å gi mening og kontekst til uttalelsene. Videoopptaket gav oss også mulighet til å tolke elevenes kroppslige uttrykk. Vi fordelte lydopptakene slik at alle tre transkriberte hver sin gruppe. Lydopptaket fra den siste gruppen ble fordelt på meg og en av de to andre medstudentene. Vi satt sammen under hele transkripsjonsprosessen slik vi kunne forhøre oss med hverandre om vi følte det som nødvendig. Eksempler på hva som ble diskutert er hvordan ulike situasjoner tolkes eller usikkerhet rundt hva som ble sagt. Avslutningsvis lyttet vi vi gjennom alle lydopptakene, mens vi fulgte transkripsjonen for å så kunne diskutere hverandres tolkninger. Transkripsjonen ble gjort med elevenes dialekt for å gjøre den så autentisk som mulig, men på grunn av hensyn til elevens rett på anonymitet omgjorde vi elevutsagnene til bokmål i den skriftlige fremstillingen av analysen.

I følge Postholm & Jacobsen (2018) handler en kvalitativ analyseprosess ofte om å få oversikt over datamaterialet gjennom å lete etter mønstre, slik at materialet kan kategoriseres og presenteres for andre i en skriftlig tekst. Etter vi var ferdig å transkribere skilte jeg lag med mine to medstudenter og startet prosessen med å lete etter relevante mønstre. Videre forklarer Postholm & Jacobsen at mønstre eller kategorier kan være kjent på forhånd eller vokse frem i løpet av analyseprosessen. I dette tilfellet benyttet jeg meg av allerede kjente kategorier for å identifisere hvordan geometriske tenkevaner kommer til uttrykk gjennom elevens undersøkelse, mens det vokste frem kategorier når jeg så etter hvilke forhold som bisto elevene i å uttrykke sin geometriske tenkning. Utgangspunktet mitt var Driscoll et.al (2007) sin fremstilling av de fire geometriske tenkevanene presentert i kapittel 2 *teori og tidligere forskning* og min forståelse av disse. Jeg startet derfor med å se etter indikatorer for de ulike tenkevanene og markerte disse på høyre side av de digitale transkripsjonene. Eksempler kunne være: «Eleven resonnerer rundt egenskaper hos en figur» eller «Elevene sammenligner to figurer for å avgjøre hvilke som har størst areal». Samtaleutdragene eller enkelt utsagn ble så plassert inn i kategorier med de samme navnene som tenkevanene. Eksemplene over ville da bli plassert i kategorien «Resonnere rundt geometriske forhold». Kategoriseringen silte ut sekvenser som da ble vurdert som irrelevant for studiens fokus. Eksempler på dette var hverdagslig samtale hvor det ikke var et matematisk fokus. Disse sekvensen ble gjennomgått på ny senere i prosessen for å forsikre meg at jeg ikke hadde oversett uttalelser som kunne bidra til studien.

Neste steg ble å analysere sekvensene hvor jeg hadde identifisert geometrisk tenkning for å identifisere mønstre som gikk igjen i hvilke forhold som bisto elevene i å uttrykke seg enten verbalt eller kroppslig. Forhold som gikk igjen i disse samtaleutdragene var lærerspørsmål og bruk av representasjoner. Det vokste derfor frem kategorier for å sortere de ulike forholdene. Fortsetter jeg på det ene eksemplet ovenfor kunne den høyre margen i transkripsjonene se slik ut: «Elevene sammenligner to figurer for å avgjøre hvilke som har størst areal, med støtte i en konvertering mellom fysisk og verbal representasjoner». Identifiseringen av de ulike faktorene la til rette for ytterligere diskusjon. På grunn av studiens omfang ble det gjort en vurdering av hvilke sekvenser som skulle presenteres i neste kapittel. Jeg ønsket at alle tenkevanene som ble identifisert i datamaterialet skulle være presentert i analysen. Etter dette la jeg tre kriterier til grunn for utvelgelsen: (1) Representativ for utvalget, (2) rik på data og (3) synliggjør elevenes arbeid med enten et kompetansemål eller en utbredt misoppfatning. Dette resulterte i syv ulike sekvenser.

3.6 FORSKNINGENS KVALITET

I dette delkapittelet gjør jeg rede for studiets kvaliteter. Hensikten med delkapittelet er å fremme troverdighet. Dette gjør jeg gjennom å reflektere rundt studiets gyldighet og pålitelighet. I følge Postholm & Jacobsen (2018) blir begrepene validitet og relabilitet benyttet i en rekke forskningstradisjoner, også innenfor pedagogikk og didaktikk, for å beskrive forskningens gyldighet og pålitelighet. Jeg vil også benytte meg av disse begrepene i min beskrivelse.

3.6.1 Validitet

I følge Postholm & Jacobsen (2018) handler forskningens validitet om hva slags konklusjoner forskeren har dekning for å trekke basert på datamaterialet som er innsamlet. Det vil si i hvilke grad det er samsvar mellom den påståtte virkeligheten datamaterialet blir innsamlet i og begrepene og teoriene som blir benyttet for å beskrive denne virkeligheten. Tjora (2021) vurderer forskningens gyldighet etter om det er samsvar mellom forskningsspørsmålene som blir stilt, metodene som blir brukt og det teoretiske grunnlaget som er lagt til grunn. Postholm & Jacobsen (2018) trekker også frem studiets kausalitet, og i hvilken grad forsker har grunnlag for å uttale seg om denne. Hensikten med studien var å få innsikt i hvordan geometrisk tenkning kommer til uttrykk hos et utvalg elever på 5.trinn sin deltagelse i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler. Min oppgave var derfor å legge til rette for at dette var mulig. En forutsetning var å utforme et undervisningsopplegg som tillot elevene å være fysisk aktiv og undersøkende, mens de arbeidet med rektangler. Dette gjorde vi gjennom å la elevene dra på «firkantjakt» og konstruere fysiske representasjoner av rektangulære svømmebasseng (delkapittel 3.4.1.2 og 3.4.1.3). Undersøkningsprosessen til elevene i undervisningsøkt tre ble grundig dokumentert gjennom bruk av video- og lydopptak. Dette er et metodisk valg som vil kunne både styrke og svekke studiens validitet. Jeg så på det som en nødvendighet å benytte både video- og lydopptak for å kunne besvare studiens problemstilling på en strukturert og detaljert måte. Lydopptak ble benyttet for å kunne gjøre et grundig analysearbeid av elevens muntlige uttrykk, mens videoopptak ble brukt for å dokumentere elevenes kroppslige uttrykk og deltagelse. I kapitel 3.2.1 gjorde jeg rede for hensyn vi tok for å minimere påvirkningen utstyret ville ha på studiens funn. For å styrke validiteten i forhold til bruk av begreper og kategorier har jeg benyttet meg av anerkjent forskning spesifisert mot studiens hensikt.

3.6.2 Reliabilitet

Postholm & Jacobsen (2018) forklarer at forskningens reliabilitet handler om hvordan forskere reflekterer rundt hvordan deres involvering eller gjennomføringen av forskningen har påvirket de endelige resultatene. Tjora (2021) referer til dette som påvirkningen av interne sammenhenger. Han poengterer at det er krevende å etterprøve kvalitative studier, da betingelsene aldri vil være identiske. Det er derfor viktig at forskeren synliggjør forskningsprosessen slik at det er mulig for andre å reflektere rundt den. Hvordan en leser oppfatter denne prosessen vil være avgjørende for studiens troverdighet. Postholm & Jacobsen (2018) trekker frem relasjon mellom forsker og forskningsdeltaker, forholdet mellom problemstilling og forskningsdeltaker, forskningens kontekst, hvem utvalget er og om alle viktige situasjoner er blitt registrert, som sammenhenger som vil ha påvirkning på forskningens pålitelighet. For å styrke studiens reliabilitet har jeg fokusert på å gi detaljerte beskrivelser av disse sammenhengene i metodekapittelet, i håp om at leser selv skal kunne gjøre opp sin egen vurdering. Jeg vil allikevel benytte meg av dette delkapittelet til å oppsummere forholdene.

Det vil være naturlig at elevene tilpasser seg avhengig av relasjoner og konteksten de blir satt i. Slik som beskrevet i kapitel 3.4.2 hadde jeg kjennskap til denne klassen fra tidligere deltidsjobb. De to andre studentene var ikke kjent med elevene eller elevene kjent med dem. Jeg ser på det som positivt at jeg har vært i en undervisningssituasjon med dem tidligere, i form av at det kan være en betryggende faktor, men vurderer det slik at mitt kjennskap overskygges av de to ukjente forskerne og en ukjent kontekst. Vi brukte derfor god tid på relasjonsbygging med elevene for å kunne utforme trygge rammer rundt deltagelsen. Dette ble sett på som nødvendig da vi var alene med elevene i siste økt og var deltagende observatører. Elevenes relasjon til hverandre og gruppesammensetning vil også spille en rolle. Vi brukte derfor kontaktlæreren sin kunnskap rundt dette hyppig i utformingen av gruppene. Elevene ble fortalt at vi ønsket å observere hvordan de undersøke, tenkte og snakket om rektangler, omkrets og areal. Dette var noe de fikk «trene» på og begrepene ble jobbet med før datainnsamlingen i økt tre. Tenkevanene til Driscoll et.al (2007) og utviklingsnivåene til van Hiele (Fuys et.al, 1988) ble ikke presentert. Dette valgte vi å gjøre for at elevene skulle fremtre så naturlig som mulig, og ikke fokusere på disse. For å kunne forsikre oss om å dokumentere hele deltagelsen til elevene (i økt tre) ble det benyttet video- og lydopptak. Dette gav oss muligheten til å observere situasjonene om igjen og får med det et bedre utgangspunkt for å kunne gi en detaljert beskrivelse.

Resultater i kvalitative studier avhenger i stor grad av hvilke deltakere som deltar. Slik er det også for dette studiet. Til tross for at kontaktlærer beskriver utvalget som representativt for et elevmangfold med ulike faglige og sosiale forutsetninger vil utvalget i en potensiell etterprøvning ikke være identisk, noe som vil ha påvirkning på resultatene. Leseren må derfor ta beskrivelsene av studiet i betrakting og vurdere hvilke aspekter eller deler som kan være overførbart til sin elevgruppe.

3.7 ETISKE HENSYN

Å gjennomføre en forskningsstudiet medfører et etisk ansvar. De nasjonale forskningsetiske komiteene (2019) trekker frem at forskere skal behandle og fremstille deltakere med respekt, etterstrebe gode konsekvenser med forskningen, utforme og utføre forskningsstudiet med respekt og fremtre med integritet. For å ivareta mitt etiske ansvar har jeg tatt en rekke etiske hensyn, som jeg presenterer i dette delkapittelet. I forkant av datainnsamlingen søkte vi og fikk godkjent forskningsstudiet av Norsk Senter for Forskningsdata (NSD). Søknaden ligger som vedlegg (vedlegg 3). Dette var en nødvendighet ettersom vi behandler personopplysninger som er identifiserende. Bruken av video- og lydopptak gjorde at vi måtte orientere oss rundt regel- og lovverk for bruk av opptaksutstyr i forskning. Bjørndal (2017) trekker frem viktigheten av å oppbevare opptaksmaterialet på en sikker måte. Opptakene ble derfor overført til en ekstern harddisk, som kun var tilgjengelig for personene godkjent av NSD. Det vil si meg, mine to medstudenter og to veiledere. Dette informerte vi elevene om ved flere anledninger. De ble også informert om at opptakene ville bli slettet etter endt studie. Når vi behandlet opptaksmaterialet var datamaskinen frakoblet internett under hele prosessen. Andre tiltak som ble gjort for å ivareta elevens rett til anonymitet var tildeling av fiktive navn og oversettelse av elevsamtaler fra dialekt til bokmål i analysen. Skolens navn og lokasjon er heller ikke inkludert i studiet.

Hos barn som ikke er av myndig alder må forsker innhente samtykke fra foresatte (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora, 2021). Det vil si at en skiftelig godkjennelse fra elevens foresatte var nødvendig for at elevene fikk delta i studiet. Vi sendte derfor ute et skriftlig informasjons og samtykkeskjema (se vedlegg 4) til elevene og foresatte før datainnsamlingen. Skjemaet inneholder informasjon om studiene og rettigheter som deltaker. Elevenes stemme var også av høyeste prioritering gjennom datainnsamlingsprosessen. Vi brukte derfor store deler av første økt i undervisningsopplegget (delkapittel 3.4.1.1) til å informere elevene om deres rettigheter og hva det ville si å delta i studiet. Vi brukte tid både i første og tredje økt til å informere elevene om at deres deltagelse var frivillig og at de til enhver tid kunne trekker seg om de ønsket det.

Vi var også opptatt av at elevene skulle ha en positiv opplevelse av å delta i forskningsstudiet og ha oss på besøk i deres skolehverdag. Det ble derfor brukte god tid på å informere om formålet med opptaksutstyret, åpenhet for elevmedvirkning og å utvikle gode rammer for deltagelsen. Et annet etisk hensyn som ble tatt var å inkludere alle elevene i de to første øktene der det ikke ble benyttet video- og lydopptak. Valget ble tatt sammen med kontaktlærer for å ikke ekskludere elever basert på samtykke. Disse elevene er da ikke en del av datamaterialet. At hele klassen deltok i tredje økt, var ikke gjennomførbart av praktiske årsaker. Elevene som ikke var en del av utvalget, deltok derfor i undervisning med kontaktlærer. Avslutningsvis er det også blitt gjort en rekke etiske hensyn i fremstillingen av elevene i analyse- og diskusjonskapitelet. I analysekapitelet har jeg etter beste evne forsøkt å gjøre det klart hva som er elevens utsagn og hva som er mine tolkninger. Dette er blitt gjort gjennom å bruke direkte sitater fra elevsamtalene for så å fortolke disse. Med en slik fremstilling vil det forhåpentligvis være lettere for deg som leser å se hvorfor jeg har tolket slik jeg gjør. Det er også rom for å gjøre sin egen tolkning av elevutsagnene. Alle tolkninger er blitt gjort med et ønske om å fremstille elevene på best mulig måte.

4.0 ANALYSE OG FUNN

Formålet med denne studien var å bidra med innsikt i geometrisk tenkning hos elever som deltar i en fysisk aktiv undersøkelse. For å gjøre dette mulig, utviklet jeg i samarbeid med to medstudenter et undervisningsopplegg som la til rette for at elevene fikk aktivt undersøke egenskaper, omkrets og areal hos rektangler. Elevenes deltagelse i økt tre av dette undervisningsopplegget er grunnlaget for datamaterialet, som i dette kapittelet analyseres i henhold til studiens to forskningsspørsmål:

Hvilke geometriske tenkevaner kommer til uttrykk i elevenes undersøkelse?

Hvilke forhold bistår elevene i å uttrykke geometrisk tenkning?

For å kunne besvare disse forskningsspørsmålene har jeg valgt ut fem samtaleutdrag. Samtaleutdragene er et resultat av analyseprosessen som ble beskrevet i kapittel 3.5 *behandling og analyse av datamaterialet.* Der beskriver jeg en analyseprosess hvor elevenes muntlige uttrykk ble omgjort til skrift, gjennom en transkripsjon av lydopptakene. For å få innsikt i elevens geometriske tenkning ble rammeverket *Geometric habits of mind* (Driscoll et.al, 2007) tatt i bruk. Tenkevanene presentert i dette rammeverket bidro til å identifisere og kategorisere geometrisk tenkning som kom til uttrykk i datamaterialet. Videre ble samtalesekvensene der geometrisk tenkning ble identifisert analysert enda en gang, men nå for å lete etter kjennetegn for hvordan elevene uttrykket geometrisk tenkning. Det resulterte i faktorene *lærerspørsmål* og *bruk av representasjoner*. Transkripsjonene støttes av film fra videokameraene som filmet elevenes deltagelse. Samtaleutsagnene er hentet fra gruppe en med Jesper, Stine og Hans og gruppe to med Odd, Siri og Eli. Slik som jeg beskrev i kapittelet om etiske hensyn er disse navnene fiktive. Den presenterte analysen tar utgangspunkt i gruppe en, da denne gruppen vurderes som mest muntlig aktiv, samtidig som representativ for de tre andre. For å skildre kontraster i gruppenes undersøkelser inkluderer jeg samtaleutdrag fra gruppe to der det ble vurdert som hensiktsmessig.

Kapitelet er bygd opp av tre underkapitler hvor samtaleutdragene presenteres. Hver situasjon starter med en beskrivelse av konteksten, før samtaleutdraget blir presentert. Deretter fortolker jeg situasjonen i henhold til tidligere forskning og teori. Det er viktig å poengtere at tolkningene baserer seg på min forståelse av situasjonen og rammeverket. Samtaleutdragene er presentert i sin helhet med støtte i beskrivelse av kontekst for å gi leser mulighet til å gjøre opp sine egne tolkninger. Etter jeg har presentert mine tolkninger gis det en oppsummering av resultater for hvert av samtaleutsagnene. Kapittelet avsluttes med et delkapittel for å oppsummere resultatene fra hele analysen.

4.1 RESONNERE RUNDT GEOMETRISKE FORHOLD

I dette delkapittelet presenterer jeg to samtaleutdrag der elevene jobber med å undersøke dynamiske transformasjoner av et rektangel. Formålet med oppgaven var at elevene skulle gjøre seg erfaringer rundt hvordan et rektangel med en bestemt omkrets kan forandres til ulike typer rektangler. Hver elev utgjorde hver sin vinkel og skulle samarbeide om å konstruere rektanglene gjennom kroppslig bevegelse. Etter at de hadde konstruert et rektangel ble elevene stilt spørsmålet «Hva er det som gjør at dere har laget et rektangel?». Dette gjorde vi for at elevene skulle resonnere rundt egenskapene til figurene. Å identifiserer egenskaper hos geometriske figurer er indikatorer for tenkevanen *resonnere rundt geometriske forhold*. Oppgaven legger til rette for at elevene kan ta utgangspunkt i hvert enkelt rektangel, men også gjennom transformasjonene sammenligne dem. Eksempelvis gjennom å resonnere rundt hva som forble likt og hva som forandret seg. Analysen tyder på at elevene på de forskjellige gruppene har ulikt fokus i sin geometriske tenkning. Første presenterer jeg gruppe en, som fokuserer på et og et rektangel. I det andre samtaleutdraget sammenligner gruppe to rektanglene de konstruerer. Under presenterer jeg analysen min av disse samtaleutdragene der jeg har fortolket hvilke geometriske tenkevaner som kommer til uttrykk i hver av gruppenes deltagelse, samt hvilke forhold som bistår elevene i å uttrykke sin geometriske tenkning.

4.1.1 Jesper, Stine og Hans fokuserer på deler av en figur

I dette samtaleutsagnet jobber elevene Jesper, Stine og Hans med oppvarmingsoppgaven. Før utsagnet har elevene sammen med en av lærerne funnet hver sin plass inni avsperringsbåndet, som lå på bakken i firkantet form. Elevene og læreren utgjør nå hver sin vinkel i figuren. Uten å snakke med hverandre begynner de å bevege seg innenfor avsperringsbåndet noe som gjør at formen forandres. Etter noen sekunder tar Jesper initiativet i form av å presentere et perspektiv hvor han gir instrukser til de andre gruppemedlemmene.

Jesper: Gå bort der.

Jesper: Sånn, der. Hans still deg rett over Stine.

Jesper: Stine gå nærmere, gå nærmere.

Stine og Hans følg på (Jesper gestikulerer linjestykket mellom Stine og Hans). Hans beveger seg, men ikke i retningen Jesper ønsker.

Jesper: Nei nei, ikke den retningen. Andre veien. Inn på denne streken her.

Lærer: Okei, hva har dere fått til nå?

Jesper: Et rektangel.

Lærer: Hvordan vet dere at dette er et rektangel?

Jesper: Fordi to og to sider er like lange (veiver med sperrebandet for å illustrere).

Stine: Og denne siden er like lang som den andre siden (peker på de to andre linjestykkene)

I første del av utdraget er det Jesper som står for de muntlige uttrykkene, mens Hans og Stine tar imot Jesper sitt perspektiv gjennom å bevege seg etter instruksjonene som blir gitt. Elevene har dermed fokus på selve undersøkelse der de er transformerer figuren basert på Jesper sin intuisjon. En slik tilnærming forklarer Driscoll et.al (2007) som en indikator på tenkevanen *balansere mellom undersøkelse og refleksjon*. Figur 5 viser elevenes posisjon når de har konstruert ferdig en fysisk og visuell representasjon av et rektangel. Jesper tar utgangspunkt i sin posisjon som en av vinklene når han starter å gi instrukser til de andre elevene på gruppen. Først ber han Hans og Stine om å stå ovenfor hverandre, slik at de lager en rett linje. Han ber så Stine bevege seg i forhold til lærer slik at også de står ovenfor hverandre. Gjennom disse instruksene har Jesper implisitt laget en 90 graders vinkel der Stine står. Videre ber han Hans følge Stine slik at den rette linjen blir ivaretatt, før han instruerer Hans til å stille seg på «streken» for å være på en rett linje med seg selv og lage en ny 90 graders vinkel. Jesper og læreren står allerede rett ovenfor hverandre. Av instruksene Jesper gir til Stine og posisjonen han har, er også vinkelen hos læreren 90 grader. Med den siste instruksen til Hans har han også laget en 90 graders vinkel hos seg selv.

Figur 5: Visualisering av elevenes posisjon - Gruppe 1.

I dette utdraget resonnerer Jesper implisitt rundt egenskapene til rektangelet og viser tegn på tenkevanen *resonnere rundt geometriske forhold*. Han instruerer elevene på gruppen slik at de motstående linjestykkene har lik lengde og alle vinklene er 90 grader. Dette blir også uttrykt muntlig etter at lærer stiller spørsmålet «Hvordan vet du at dette er et rektangel?». Spørsmålet er av typen Driscoll et.al (2007) forklarer som et vurderende spørsmål med hensikt å måle elevens forståelse. Jesper og Stine svarer med å sette ord på deres kroppslige bevegelser og henviser til den fysiske representasjonen av rektanglet de har konstruert. De har med det representert rektanglet både verbalt og fysisk. Verbalt ved å muntlig definere rektanglet og forklare hva de har gjort. De benytter seg av fysisk representasjon gjennom å konstruere et rektangel med bruk av avsperringsteip, som det er mulig å ta på, gå rundt og inn i. At rektangelet har fire vinkler, er diskutert og innforstått på forhånd av samtaleutdraget. Måten Jesper instruerer basert på egenskapene til rektanglet tyder på at han befinner seg på nivå 1 (analytisk nivå) i van Hiele modellen som Driscoll et.al (2007) referer til som det andre utviklingsnivået for tenkevanen *resonnering rundt geometriske figurer*. Under forsetter elevenes undersøkelse med et nytt spørsmål fra lærer.

Lærer: Supert! Kan dere ha forskjellige størrelser også?

Jesper: Ja. Hans gå der! Så går du ut på siden Stine.

Stine: Vi kan jo også lage det smalere (gestikulerer med hendene for å vise).
Medelevene følger etter og lager et nytt smalere rektangel.

Jesper: Stine gå heilt inntil bordet.

Jesper: Løp løp, stopp!

Lærer: Om vi skulle hatt et langt svømmebasseng, så kunne vi brukt det til svømmetrening.

Hans: Ja.

Jesper: Hei hei, gå heilt inntil bassenget Stine, nei kanten mener jeg.

Hans: Ja nå kan vi vertfall bare svømme rett fram.

Jesper: Se hvor lite vi har laget det.

I denne konteksten vurderer jeg det som et spørsmål med en utviklende hensikt. Lærer gir dermed elevene muligheten til å erfare flere typer rektangler og utvikle deres tenkning rundt hvordan et rektangel med en konstant omkrets vil kunne ha ulik utseende og areal. Dette er erfaring som vil kunne bidra til å avdekke misoppfatningen som Monaghan (2000) presenter i sitt arbeid, der elever har oppfatningen av at et rektangel er lengre i horisontal retning enn i vertikal retning. Jesper responderer igjen med å instruere medelevene sine. Stine godtar ikke perspektivet og responderer ved å presentere et nytt perspektiv. Hun bruker også hendene sin aktivt for å demonstrere og sette de andre elevene inn i perspektivet hun presenterer. Jesper og Hans velger å ta imot perspektivet. Jesper med å instruere og Hans med å bevege seg etter disse. Lærer stiller et nytt spørsmål hvor han trekker frem konteksten, som ble presentert før elevene startet undesøkelsen. Det blir dermed trukket en sammenkobling mellom matematikken (rektanglet elevene konstruerer) og et tema utenfor matematikken. Eleven tar til seg denne konteksten i den resterende delen av utdraget. Transformasjonen elevene har gjort har resultert i et rektangel hvor et av sideparene (motstående linjestykke) er blitt lengre, mens de to andre er blitt kortere. Når Hans kommer med utsagnet: «Ja nå kan vi vertfall bare svømme rett fram», viser han tegn til at å bruke bassengkonteksten for å resonnere rundt forholdet mellom de to sideparene. Dette kan tolkes som at Hans bruker tenkevanen *resonnere rundt geometriske* forhold med fokus på deler av en figur. Jesper sitt utsagn, «se hvor lite vi har laget det», kan tyde på at han sammenligner størrelsene på de to rektanglene de har konstruert og har dermed fokus på «deler av flere figurer».

Oppsummering av resultat

Som jeg skrev i innledningen til dette delkapittelet var et av ønskene våre med denne oppgaven at elevene skulle resonnere rundt egenskapene til rektanglet. Det vil da være naturlig at tenkevanen *resonnere rundt geometriske forhold* var mest fremtredende, noe analysen også støtter. Analysen viser også at elevene utrykker sin geometriske tenkning på ulikt vis. Prosessen av å utrykke tenkning rundt rektangelets egenskaper starter med at enten en av elevene eller at lærer presenterer et perspektiv. Elevenes kropper og kroppslige posisjoner er en sentral faktor i disse perspektivene. Jesper tar utgangspunkt i sin egen kroppslige posisjon når han gjennom instrukser utrykker geometrisk tenkning med å instruere medelevene sine til å flytte seg slik at avsperringsbåndet er en konkret og visuell representasjon av et rektangel. Det kroppslige aspektet ved undersøkelsene gjør at elevene må vurdere forholdet mellom sidelinjer og vinklene i figuren. Spesielt med tanke på avstand. Hvordan elevene beveger seg og instruksene som blir gitt tyder på at elevene tar hensyn til disse forholdene for å oppnå egenskapene som kreves for at en form kan kalles for et rektangel. Elevenes bruker også kroppslige bevegelser som støtte i sine forklaringer og presentasjoner av perspektiver. Blant annet gjennom å peke og gestikulere. Når lærer stiller spørsmålet «Hvordan vet dere at dette er et rektangel?» legger han til rette for det som Duval (2006) kaller for konvertering mellom representasjoner. Jesper og Stine tar utgangspunkt i representasjonen de har konstruert når rektanglet representeres verbalt med å trekke frem egenskaper hos figuren. Slik som spørsmålet blir besvart har det en vurderende effekt når elevene får tydeliggjøre sin geometriske tenkning. Lærespørsmålet fører altså til at elevene får satt ord på sin kroppslige deltagelse i konstruksjonen av rektanglet. Læreren stiller også spørsmålet «Kan dere ha forskjellige størrelser også?». Spørsmålet legger til rette for at elevene får erfare at et rektangel med en gitt omkrets kan konstrueres og visualiseres i form av forskjellige typer rektangler, som var det andre ønsket vi hadde for oppgaven. Stine sitt utsagn «Vi kan jo lage det smalere» indikerer at det blir gjort en sammenligning, da det andre rektanglet må være samlere enn noe annet. Til tross for dette fortsetter elevene å ha fokus på deler av en figur i sin undersøkelse. I denne sekvensen legger læreren enda en gang til rette for konvertering av representasjonssystemer når han trekker frem bassengkonteksten. Elevene adopterer denne representasjonsformen og fortsetter å benytte seg av denne i videre utsagn for å uttrykke sin geometriske tenkning.

4.1.2 Odd, Siri og Eli fokuserer på deler av flere figurer

I dette samtaleutdraget er det elevene Odd, Siri og Eli som jobber med oppvarmingsoppgaven. Elevenes deltagelse i konstruksjonen av det første rektangelet er nokså lik som samtaleutsagnet som ble presentert i forrige delkapittel. Av den grunn er denne sekvensen utelatt i analysen jeg presenterer her. Jeg har valgt å inkludere dette samtaleutsagnet på grunn av at mine fortolkninger tyder på at elevene skifter fokus fra deler av en enkelt figur til deler av flere figurer. Dette delkapittelet er derfor en redegjørelse av forhold som kan være årsaken til dette skiftet i fokus. Gruppen har plassert seg innenfor sperrebåndet og konstruert rektanglet vist i figur 6. De tre elevene sammen med en lærer utgjør hvert sitt hjørne. Før samtaleutdraget blir elevene spurt hvorfor figuren de har konstruert er et rektangel.

Figur 6: Visualisering av elevenes posisjon - Gruppe 2.

(...)

Eli: Rektangel?

Lærer: Et rektangel ja, hvorfor er det et rektangel da?

Odd: Fordi den har to og to sider som er like lange.

Lærer: Ja, det stemmer. Kan vi lage andre rektangler?

Alle: Ja

Elevene beveger seg og endrer formen på rektangelet

Lærer: Hva skjedde med rektangelet nå?

Odd: Når vi og de gikk nærmere hverandre (Odd og lærer og Eli og Siri) ble denne (peker på linjen mellom) og den siden (motstående linje) mindre.

Eli: Vi gikk også lenger fra hverandre (referer til elevene på andre siden av figuren). Det gjorde at disse to sidene ble lengre.

Lærer: Er det noe likt med de to rektanglene dere har laget?

Siri: Begge har like vinkler.

Lærer: Er det en annen type firkant vi kan lage da?

Odd: Kvadrat?

Lærer: Ja et kvadrat! Hvordan lager man kvadrat da?

Odd: Alle sidene er like lange.

Eli: De må være 90 grader

Elevene beveger seg og forsøker å lage et kvadrat.

På svaret «rektangel» stiller lærer spørsmålet «hvorfor er det et rektangel?». Jeg vurderer dette spørsmålet under spørsmålstypen vurderende, slik som Driscoll et.al (2007) beskriver det. Grunnen til dette er fordi han gir elevene en mulighet til å utdype sine tanker, og med det måle elevenes forståelse. Odd svarer dermed med en ufullstendig forklaring på hvorfor det er et rektangel. Læreren kunne vurdert å stille flere spørsmål av samme typen for å gi Odd eller de andre på gruppen muligheten til å gi en fullstendig definisjon. Videre stiller læreren spørsmålet «Kan vi lage andre rektangler?», som åpner opp for at elevene skal gjøre forandringer på rektangelet. Jeg tolker det slik at spørsmålet både kan ha en vurderende og utviklende hensikt. Videoen viser at når Odd og lærer og Eli og Siri går nærmere hverandre blir avsperringsbåndet slapt. For å avstive avsperringsbåndet igjen beveger Odd og Siri og Lærer og Eli seg fra hverandre. I etterkant av transformasjonen stiller lærer spørsmålet «Hva skjedde med firkanten nå?». Elevene svarer med å resonnere rundt hva som forandret seg hos rektangelet. Dette kan tyde på at elevene benytter seg av *tenkevanen undersøke geometriske forhold* med et fokus på deler av flere figurer. Rektangelet etter transformasjonen er visualisert i figur 7.

Figur 7: Visualisering av elevenes posisjon etter en transformasjon - Gruppe 2.

Elevene forklarer at når to motstående sidelengder forandres vil det også skje en forandring med de to andre motstående sidene. Grunnen til dette er at omkretsen er konstant uansett hvordan forholdet mellom sidelengdene i rektanglene forandres. Fokuset har da forandret seg fra å fokusere på et rektangel som de gjør i starten av samtaleutdraget. Driscoll et.al (2007) påpeker at mange elever har en misoppfatning om at omkretsen synker eller øker proporsjonelt med arealet til en figur. Elevene beviser indirekte at dette ikke stemmer gjennom sin transformasjon av rektangelet, men ingenting tyder på at elevene oppfatter eller er bevist på dette. Noe som i denne sekvensen ikke kan forventes av elevene når det ikke er mål på lengdene og fokus rettet mot arealet til figuren. Det kan allikevel være en nyttig erfaring elevene kan ta med seg og læreren kan bruke i videre undervisning rundt forholdet mellom målenhetene. Læreren går inn igjen i samtalen og stiller enda et spørsmål «Er det noe likt med de to rektanglene dere har laget?». Spørsmålet gir elevene mulighet til å tilføye på resonnementene sine og legger til rette for at elevene skal uttrykke seg rundt figurenes parametere. Siri trekker da frem at alle «vinklene er like». Å kunne analysere hva som forblir likt hos en figur etter det har skjedd en forandring er i følge Driscoll et.al (2007) en indikator på tenkevanen *undersøke parametere*. Avslutningsvis presenterer Odd et nytt perspektiv om å lage et kvadrat. I dette tilfellet er det lærer som tar imot perspektivet når han gir skryt og stiller et nytt spørsmål. Spørsmålet legger til rette for at elevene skal resonnere rundt de geometriske egenskapene hos kvadratet.

Oppsummering av resultater

Det er *tenkevanen resonnere rundt geometriske* forhold som er mest fremtredende i dette samtaleutdraget også. På samme måte som gruppen i 4.1.1 benytter også disse elevene seg av de fysiske og visuelle representasjonene de har konstruert for å resonnere rundt geometriske egenskaper hos et rektangel. Representasjonene og hvordan disse har blitt til spiller med andre ord en sentral rolle i hvordan elevene uttrykker sin geometriske tenkning. Den dynamiske delen av oppgaven gir elevene mulighet til å fysisk undersøke og erfare hva som forblir likt og hva som forandrer seg hos rektangelet. Elevene har med en dynamisk representasjon muligheten til å forandre deler av figuren for å så se hvordan dette påvirker figuren, for å så hurtig transformere tilbake.

Måten samtalen utvikler seg på indikerer at læreren og hans spørsmål spiller en sentral rolle i hvordan elevene uttrykker sin geometriske tenkning. I løpet av samtaleutdraget stiller han totalt fem vurderende og eller utviklende spørsmål som på mange måter blir utgangspunktet for hvilken geometrisk tenkning som kom til uttrykk verbalt. Tar vi tre av spørsmålene som eksempler er det mulig å se hvilken effekt lærerens spørsmål har på den geometriske tenkningen elevene uttrykker. Det første spørsmålet «hvorfor er det et rektangel?» resulterer i at Odd resonnerer rundt egenskapene hos rektanglet. Fokuset er da på deler av en enkelt figur. Lærerens tredje spørsmål «Hva skjedde med rektangelet?» blir stilt etter elevene har gjort en transformasjon av rektangler og resulterer i at elevene får resonnere rundt den geometriske tenkningen de viste i transformasjonen. Altså hvordan sidelengdene har forandret seg fra det første til den andre rektanglet. Fokuset gikk da fra å være på deler av en enkelt figur til å være på deler av flere figurer. Spørsmål fire «Er det noe likt med de to rektanglene dere har laget?» legger til rette for at elevene får uttrykke tenkevanen «undersøke parametere» med å identifisere hva som forble likt etter transformasjonen. Driscoll et.al (2007) forklarer at tenkning rundt effekten av å flytte punkter kontinuerlig for å forutse hendelser mellom forflyttingen er en indikator på tenkevanen «undersøke parametere» hvor elevene tenker dynamisk. I dette samtaleutdraget kommer ikke elevene med noen forutsetning på forhånd, men resonnerer rundt effekten av å flytte på seg selv (vinklene). Kort oppsummert viser analysen at lærespørsmålene blir brukt for at elevene skal tydeliggjøre sin geometriske tenkning i arbeidet med å konstruere og transformere rektangler eller utvikle elevenes forståelse av forhold innen det geometriske konseptet rektanglet er.

4.2 VEKSLE MELLOM UNDERSØKELSE OG REFLEKSJON

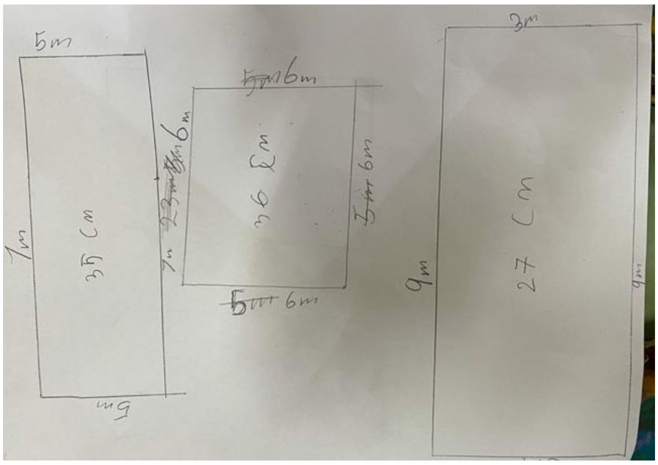
Dette delkapittelet tar for seg undersøkelsen elevene Odd, Eli, og Siri gjorde i arbeid med oppgave en. Oppgaven spør elevene om å konstruere tre fysiske representasjoner av et rektangel i mesorommet med omkrets på 24 meter. Formålet var at elevene skulle erfare hvilke sidelengder det var mulig å sette sammen for å konstruere ulike typer rektangler. Jeg har valgt å inkludere denne gruppen sin undersøkelse for å belyse hvordan de benytter seg av en konvertering mellom visuelle representasjoner på papir som støtte i konstruksjonen av de fysiske representasjonene. Dette er en overgang Berthelot & Salin (1998) presenterer som utfordrende i sitt arbeid. Denne fremgangsmåten er representativ for tre grupper. Den siste gruppen representerer lengden på sidene muntlig før de konstruerer et rektangel. Det gjentar de til tre rektangler er konstruert i mesorommet.

4.2.1 Odd, Siri og Eli stopper opp undersøkelsen

Etter Odd har lest oppgaveteksten høyt for gruppen presenterer han dette perspektivet for gruppen:

> **Odd:** Kanskje om vi tegner opp hvor langt det skal være og så skriver vi på hver? Så hvis vi tegner den firkanten på en måte. Og så tegner vi den ikke så stor, men selv om den er liten [på arket] så tenker vi at den er stor.

I dette utsagnet foreslår Odd at de kan lage en visuell representasjon av bassengene, som er vist i figur 8. Odd resonnerer her om å bruke sin kunnskap om representasjoner i mikrorommet, for å ta den i bruk i konstruksjonen av bassenget i mesorommet. Berthelot & Salin (1998) argumenter for at en slik overgang kan være problematisk da representasjoner i mikrorommet ofte blir forstått som et objekt fremfor en representasjon av et geometrisk konsept. Odd antyder i sitt resonnement at det er en forståelse av at modellene i mikrorommet kun er en representasjon av bassenget (den fysiske representasjonen) de skal konstruere, i måten størrelsesforholdene blir forklart. Odd klarer med det å ta bruk av sin geometriske kunnskap fra egne erfaringer i mesorommet og delvis blokkere inntrykkene fra kunnskapen utviklet i mikrorommet. Samtaleutdraget under tyder på at Sofia og Siri godtar Odd sitt perspektiv om å lage plantegninger før de begynner å konstruere rektanglene. Plantegninger er et tegn på at Odd ønsker å identifisere delsteg for å konstruere bassengene på en matematisk korrekt måte. Dette er i følge Driscoll et.al (2007) en indikator på tenkevanen *veksle mellom undersøkning og refleksjon*, med fokus på sluttproduktet. Før elevene starter med å utvikle de visuelle representasjonene etterspør de en linjal.



Figur 8: Visuell representasjon av bassengene i mikrorommet.

Odd: Da må vi tenke, hvor er 25? Vi må finne 25 først. Vi lager 25 centimeter.

Eli: Nei, se da!

Odd: Okei, bare tegn noe beint, bare tegn noe beint.

Eli: Det må bli 24.

Odd: Du kan bare tegn noe beint her.

Siri: Bare tegn noe beint.

Odd: Det er ingen «big deal».

(...)

Odd: Men skal det være 25 meter?

Eli: 24 meter.

Odd: 24? Omkretsen er på 24 meter.

Odd leser oppgaveteksten høyt

Odd: Da må vi lage noe som er 24 meter da.

Siri: Det betyr at det må være så og så mange der, så og så mange der og så og så mange der.

Utdraget over viser at det skjer en veksling av fokus, når Odd skal følge opp perspektivet sitt med å tenke høyt. Han kommer med forslag som jeg tolker er basert på intuisjon eller gjetting.

Dette forklarer Driscoll et.al (2007) som en indikatorer på et fokus på selve undersøkelsen. Odd fokuserer nå på 25 centimeter, og starter å lete etter 25 på linjalen. Sofia avbryter med «Det må bli 24» og retter dermed på Odd. Odd og Siri ber Eli tegne, uten at hun får mulighet til å foreslå en fremgangsmåte. Til tross for at Driscoll et.al (2007) forklarer tegning basert på gjetting og intuisjon som en indikator for tenkevanen *veksle mellom undersøkning og refleksjon*, med fokus på selve undersøkelsen, bidrar arbeidet rundt disse tegningen til at elevene stopper opp og reflektere rundt videre undersøkelse. Elevene fokuserer på «det store bilde» når de på ny velger å lese oppgaveteksten. Etter å ha lest oppgaveteksten en gang til får de avklart misforståelser angående hvor mange meter det skulle være. Siri foreslår da en fremgangsmåte hvor de 24 meterne deles på fire sidelengder. Å identifisere delsteg for å komme frem til en løsning på et problem er også en indikator på denne tenkevanen *veksle mellom undersøkning og refleksjon*, men nå med fokus på sluttproduktet. Elevene bruker i dette utdraget en veksling mellom fokus på selve undersøkelsen og på sluttproduktet, noe som Driscoll et.al (2007) ser på som viktig. Dette resulterer i plantegningen vist i figur 9, og blir utgangspunktet for denne gruppen når de skal konstruere fysiske representasjoner av rektanglene/bassengene.

Oppsummering av resultater

I dette samtaleutdraget er det tenkevanen *veksle mellom undersøkelse og refleksjon* som er mest fremtredende. Viktigheten av denne tenkevanen oppsto etter Driscoll et.al (2007) oppdaget at få av studentene de forsket på stoppet opp under undersøkelsen og reflekterte rundt effekten av handlingene sine. Utsagn som «Okei, bare tegn noe beint, bare tegn noe beint» og «bare tegn noe beint», indikerer at Odd og Siri har fokus på selve undersøkelsen. De ønsker å tegne basert på det jeg tolker som gjetting for å så vurdere om det vil gi resulterer. Sofias gjentatte presisering av den korrekte omkretsen resulterer i at de forandrer fokus når oppgaveteksten igjen hentes frem og den leses på ny. Dette resulterer i at alle elevene er innforstått med omkretsen konstruksjonene skal ha, og Siri kommer med en fremgangsmåte hvor hun identifiserer delsteg. Samtaleutdraget oppstår etter Odd sitt forslag om å lage visuelle representasjoner i mikrorommet av de bassengene som skal konstrueres i mesorommet. Han legger dermed til rette for en konvertering av representasjonssystemer. Dette perspektivet blir en sentral faktor for at tenkevanene *veksle mellom undersøkning og refleksjon* kommer til uttrykk på måten den gjør. Bruken av den visuelle representasjonen gir elevene muligheten til å utrykke og synliggjøre matematikk for resten av gruppen og legge en plan for konstruksjonen.

4.3 GENERALISERE GEOMETRISKE IDEER

I dette delkapittelet presenterer jeg to samtaleutdrag der elevene Jesper, Stine og Hans jobber med oppgave to og tre. I disse oppgavene rettes fokuset mot arealet til rektangelet. I oppgave to blir elevene spurt om hvilket basseng som har størst areal, mens i oppgave tre skal de begrunne hvorfor. Samtaleutdragene presenteres i kronologisk rekkefølge. Det første samtaleutdraget gjør rede for hvordan gruppen undersøkte hvilke rektangler det var mulig å lage, før de systematiserte disse i en tabell. Neste del består av to samtaleutdrag. I det første bruker elevene tabellen for å besvare spørsmålet i oppgave tre, om hvilke av rektanglene som hadde størst areal. I det andre samtaleutdrag forsøker elevene seg på å utvikle en generaliserende regel for når arealet er størst hos rektangler. Dette resulterer også i at de resonnerer i forholdet mellom areal og omkrets. Jeg valgte å inkludere denne gruppen sin undersøkelsesprosess rundt målenhetene fremfor de andre gruppene, da jeg vurderte denne gruppen sine muntlige uttrykk som rikere. De får gjennom sine muntlige uttrykk både forklart strategier de bruker for å regne ut omkrets og areal og utforske sammenhengen mellom dem. Dette er i tråd med kompetansemålene for geometri på 6.trinn. Elevene viser også tegn på å generalisere, noe som ikke var hensikten med disse oppgavene, men kan være et resultat av hvor systematiske elevenes strategier er.

4.3.1 Jesper, Stine og Hans identifiserer alle mulige kombinasjoner

I løpet av økten klarte elevene på denne gruppen å identifisere alle rektanglene det var mulig å konstruere med en omkrets på 24 meter. Dette gjorde de med å prøve seg frem gjennom samtale og lage visuelle representasjoner i mikrorommet av rektanglene (plantegninger). Jesper starter med å foreslå et rektangel med sidelengder på ti og to meter. Dette rektangelet er også et av rektanglene elevene fysisk representerer i oppgave en. Elevene viser gjennom konstruksjonene at de i det tilfellet mestrer å overføre kunnskap fra mikrorommet og anvende det i mesorommet. Etter elevene er ferdig med konstruksjonen går de tilbake til plantegningen og diskuterer flere mulige rektangler. En representativ fremgangsmåte for hvordan utvalget identifiserer rektangler er når Stine tar initiativet og presenterer et perspektiv. Hun foreslår et rektangel med to motstående sidelengder på åtte meter. Hun inviterer de andre elevene til å godta perspektivet og skisserer en visuell representasjon av et rektangel som støtte for perspektivet hennes.

Stine:	Vi kan ta 8 meter sånn og 8 meter på den her sida.
	Hun tegner opp et rektangel og peker på to motstående linjestykker.
Hans:	Da blir det 16.
Jesper:	Nei, vent litt.
Lærer:	Det kan være lurt å skrive opp lengdene ved siden av, sånn det blir oversiktlig for alle.
Hans:	Den er 4 meter og den siden er 4 meter.
	Peker på linjestykkene som ikke har fått tildelt mål enda.
Stine:	Oja, så den blir 4 og den blir 4.
	Skriver opp på arket
Jesper:	8 + 8 blir 16.
Jesper:	Ja, 16 + 8 blir 24.

Hans godtar perspektivet presentert av Stine med å addere sidelengdene. Jesper sitt utsagn tyder på at han virker å være mer skeptisk. Lærer foreslår at Stine skal benytte seg av symbolsk representasjon for lengdemålene, som støtte til den visuelle representasjonen. Hans følger deretter opp sitt eget utsagn med å presentere gruppen for en mulig lengde for de to resterende linjestykkene. Stine skriver dem ned på plantegningen. Avslutningsvis vurderer Jesper utsagnene til de andre elevene ved å tenke høyt og synliggjør perspektivene presentert av de andre elevene på gruppen. Utsagnene tyder på at han tenker høyt for å vurdere om perspektivene vil kunne resultere i et rektangel med en omkrets på 24 meter. Dette bekrefter han for seg selv og for gruppen. Når elevene resonnerer rundt lengden på sidelinjene hos rektanglet har de fokus på deler av en enkelt figur, som er et av fokusene for tenkevanen *resonnere rundt geometriske forhold*. Strategier for hvordan de identifiserer rektanglene er hentet fra konstruksjonen av rektangler i oppgave en. Å prøve ut kjente strategier er en indikator på at elevene har fokus på selve undersøkelsen. En strategi hvor elevene har fokus på «det store bilde» kunne vært å tenke på rektanglet som dynamisk og ta utgangspunkt i de rektanglene som allerede var kjent fra oppgave en. Vurderer de da forholdet mellom sidelinjene ville de kunne identifisere rektangler over, under og imellom rektanglene som allerede var kjent. Da ville også tenkevanen *undersøke parametere* komme til uttrykk. Gruppen fortsetter på lignede måte som i samtaleutdraget til de har identifisert de mulige kombinasjonene av sidelengder for rektanglene. At elevene leter etter alle mulige kombinasjoner basert på informasjonen og begrensingene de har fått tildelt i oppgaveteksten er i følge Driscoll et.al (2008) en indikator på tenkevanen *generalisere geometriske ideer*. Til å begynne med tar elevene kun løsningene de har identifisert i betraktning, noe som tyder på at de befinner seg på et «lite utviklet» nivå. I arbeidet med å finne ut hvilket av rektanglene som har størst areal lager elevene en tabell for å systematisere rektanglene og de ulike sidelengdene. Elevenes tabell er gjenskapt i tabell 6.

Rektangel	Sidelengde 1	Sidelengde 2	Areal (meter)
R1	11	1	11
R2	10	2	20
R3	9	3	27
R4	8	4	32
R5	7	5	35
R6	6	6	36

Tabell 6: Gjenskapelse av tabellen til gruppe 1.

Oppsummering av resultater

I denne delen av undersøkelsesprosessen er det flere tenkevaner som kommer til uttrykk. Begge fokusene Driscoll et.al (2007) presenterer for tenkevanen *resonnere rundt geometriske forhold* er mulig å se igjen i undersøkelsen til elevene. I starten er fokuset på deler av en enkelt figur, når elevene undersøker forholdet mellom lengdene på sidelinjene. Fokuset skifter når elevene sammenligner rektanglene i utformingen av tabell 5. Måten elevene benytter seg av en allerede kjent strategi for å identifisere rektanglene er en indikator på tenkevanen *veksle mellom undersøkelse og refleksjon*. Den siste tenkevanen som kommer til uttrykk er *generalisere rundt geometriske ideer*, gjennom elevens forsøk på å identifisere alle ulike kombinasjoner. Sentralt for hvordan elevene uttrykke sin geometriske tenkning i dette samtaleutdraget er visuelle representasjoner. Elevene benytter seg først av å tegne visuelle representasjoner av rektanglet. Disse plantegningene inkluderer også symbolsk representasjon for lengden til sidelengdene. Plantegningene blir etter hvert representert som en annen form for visuell representasjon når de fremstiller rektanglene i tabell 6. Denne representasjonen skal også vise seg å være nyttig for å uttrykke geometrisk tenkning videre i undersøkelsen.

4.3.2 Jesper, Stine og Hans utformer en generaliserende regel for når arealet er størst

Etter å ha identifisert rektanglene presentert i tabell 6, påstår Jesper at kvadratet er bassenget med størst areal. Lærer svarer med å stille spørsmålet «Hvorfor er den størst da?». Jesper får da muligheten til å gjøre perspektivet sitt kjent for resten av gruppen og fortsette å undersøke dette sammen med gruppen. Et slikt spørsmål vil ha en vurderende effekt, slik Driscoll et.al (2007) forklarer det.

Lærer: Hvorfor er det den største da?

Jesper: Fordi den har størst svar.

Lærer: Fordi dere har prøvd alle basseng som er mulig å lage?

Jesper: Ja, eller nei, den ble størst til nå.

Stine: Først ble arealet 11, så ble det 20, så ble 27, 32, 35 og nå ble det 36. *Peker på tabellen*

Lærer: Ja, så det er det største bassenget da?

Stine: Ja, for vi har regnet oss frem og så at andre tall blir høyere enn 24 og det blir akkurat de samme tallene baklengs. Så har vi regna ut alle arealene.

(...)

Jesper: Hvis du tar 11 ganger 1, eller samme hvilket tall og går mindre og mindre heilt til du finner det høyeste tallet. *Peker på tabell X*. Når du får to like tall, da stopper du, for om du går videre nedover så får du bare de samme tallene.

Lærer: Okei, så når dere ganget to like tall med hverandre, da fikk dere størst areal?

Jesper: Mhm

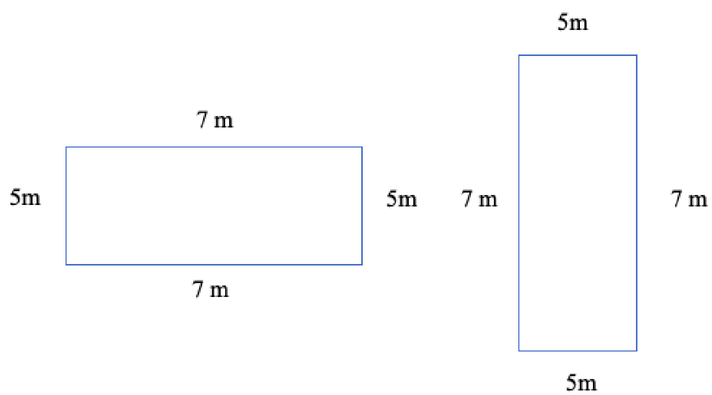
Lærer: Men når vi endrer disse lengdene til bassenget, hva er det som skjer med størrelsen til bassenget?

Jesper: Arealet blir større eller omkrets?

Lærer: Forklar gjerne begge deler du.

Jesper: Arealet blir større når du får to likere tall, eller når tallene kommer nærmere hverandre. Hvis du bestemmer hva omkretsen skal være, så flytter den seg ikke.

Jesper argumenter for at kvadratet har størst areal fordi «den har størst svar». I det som virker som et forsøk på å bistå Jesper i sin begrunnelse stiller lærer et orienterende spørsmål. Dette gjør han med si Jesper sitt svar på en annen måte og trekke frem nøkkel begrepene «alle» og «mulig», som er blitt brukt i spørsmålet elevene har undersøkt og i selve undersøkelsen. Jesper sitt svar tyder på at han ikke er sikker på at de har funnet alle mulige tilfeller, men av de rektanglene de har funnet har kvadratet størst areal. Stine reformulerer Jesper sitt argument med å henvise til tabellen de har laget. Hun sammenligner og fastslår da størrelsesforholdene mellom de seks rektanglene. Basert på Driscoll et. (2007) sine beskrivelser tolker jeg dette som at hun viser tegn til å *resonnere rundt geometriske forhold* med fokus på deler av flere figurer. Lærer fortsetter å stille det samme spørsmålet med en annen ordlyd. Stine mestrer dermed å gi en begrunnelse for hvorfor det ikke er flere mulige tilfeller. Hun påpeker at fremgangsmåten deres har identifisert mulige tilfeller, men også utelukket andre tilfeller da disse kombinasjonene gav en større omkrets enn hva oppgaven tillot. En slik begrunnelse kan sees på, i forhold til Driscoll et.al (2007) sine beskrivelser, som et utsagn på et mer utviklet nivå innenfor tenkevanen *generalisere geometriske ideer*. Når Stine snakker om «de samme tallene baklengs» tolker jeg det som at hun er bevist på at det kan være flere mulige tilfeller om rektanglene i figur 9 sees på som forskjellige. Basert på måten hun formulerer seg på forstår jeg det slik at de i en sammenheng hvor arealutregningen er fokuset, ser på figurene i figur 9 som den samme og at det kun har skjedd en rotasjon. Til tross for at elevene viser tegn på tenkevanen *generalisere geometriske ideer* mestrer ikke elevene i dette tilfellet å overføre deres undersøkelse til en annen kontekst.



Figur 9: To rektangler eller et rektangel med en rotasjon?

I samtalen sin fortsettelse henviser Jesper til rektanglet som har størst differanse mellom sidelengdeparene og minst areal. Han tar utgangspunkt i sidelengden på 11 meter og forklarer at når dette sidelengdeparet synker og øker arealet. Dette er fordi det andre sideparet da må øke og differansen blir mindre. Videre forklarer han at man må stoppe når sidelengdeparene er like. Han viser her at han har forstått at størrelsesforholdet mellom sidelengeparene påvirker arealet til figuren. Han har da presentert et perspektiv for resten av gruppen. Lærer stiller et utviklende spørsmål som gir Jesper en mulighet til å utdype og tydeliggjøre enda mer. Når han sier «Arealet blir større når du får likere tall, eller når tallene kommer nærmere hverandre» generaliserer han frem en regel for hvordan det er mulig å finne størst areal, basert på hva de har funnet ut. Å kunne generalisere fra et spesielt tilfelle for å kunne forklare et problem er en indikator på tenkevanen *generalisere geometriske ideer*. Det utsagnet sammen med «Hvis du bestemmer hva omkretsen skal være, så flytter den seg ikke» viser han forståelse for at arealet kan være ulikt selv når omkretsen er konstant og med det beviser at omkretsen ikke øker eller synker proporsjonelt med arealet.

Oppsummering av resultater

I dette samtaleutdraget er det tenkevanene *resonnere rundt geometriske forhold* og *generalisere geometriske ideer* som kommer til uttrykk. Det vil være naturlig at den første blir benyttet, ettersom oppgaven spør dem om å identifisere det største bassenget. Skal de finne det største av noe må det sammenlignes med noe annet. I dette samtaleutsagnet sammenligner elevene arealene hos rektanglene, og har dermed fokus på deler av flere figurer. Tenkevanen *generalisere geometriske ideer* kommer til uttrykk på to ulike vis i samtaleutdraget. Begge som verbale uttrykk hvor de forklarer oppdagelser og erfaringer fra undersøkelsen sin. Første indikator på tenkevanene er når Stine resonnerer rundt de mulige kombinasjonene av rektangler og hvorfor det ikke kan være flere. Hennes evne til å utelukke kombinasjoner tyder på et «et mer utviklet nivå», slik som Driscoll et.al (2007) forklarer det. Den andre indikatoren kommer til uttrykk på slutten av samtaleutsagnet når Jesper resonnerer rundt hvordan arealet er større hos et rektangel der sidelinjeparene er nære hverandre.

Læreren har en sentral rolle i dette samtaleutsagnet. I løpet av utdraget stiller han fem spørsmål som bistår elevene i å utrykke sin geometriske tenkning. De tre første er direkte tilknyttet Jesper og Stine sin resonnering rundt hvorfor kvadratet er størst og bistår dermed elevene i å uttrykke begge tenkevanene nevnt over. Noe som kan bidra til at elevene må tenke annerledes og dermed utvikle sin forståelse for geometrien de resonnerer rundt. Både Stine og Jesper bruker den visuelle representasjonen de lagde av rektanglene i form av en tabell som støtte for sine forklaringer.

4.4 OPPSUMMERING AV STUDIENS FUNN

Slik som jeg beskrev i innledning til kapittelet hadde jeg et todelt fokus når jeg analyserte samtaleutdragene. Det første var «Hvilke geometriske tenkevaner kommer til uttrykk i elevenes undersøkelse?». For å kunne besvare dette forskningsspørsmålet har jeg benyttet meg av rammeverket *Geometric habits of mind av* Driscoll et.al (2007). Hensikten med utviklingen av rammeverket deres var å presentere produktive tenkevaner for geometrisk tenkning i møte med matematiske problemer. I tabell 7 visualiserer jeg hvilke tenkevaner som kom til uttrykk i de ulike samtaleutsagnene presentert i analysen. Tabellen viser at alle tenkevanene kommer til uttrykk og alle samtaleutdragene som er presentert inneholder tegn til geometrisk tenkning hos elevene. Driscoll med hans kollegaer poengterer at flere av tenkevanene kan forekomme i løsningen av problemet, noe som også er tilfellet i dette utvalget elever sin undersøkelse. Tabellen synliggjør også indikatorene, som da forteller noe om på hvilke måter elevene benytter seg av tenkevanene.

Oppgave	Navn i analysen	Geometriske tenkevaner	Indikator
***0**	4.1.1 Jesper, Stine og hans fokuserer på deler av en figur	Resonnere rundt geometriske forhold	Fokus på deler av en figur: Konstruerer etter og uttrykker seg rundt rektanglet sine egenskaper.
***0**	4.1.2 Odd, Siri og Eli fokuserer på deler av flere figurer	Resonnere rundt geometriske forhold Undersøke parametere	Fokus på deler av en figur: Konstruerer og uttrykker seg rundt rektanglet sine egenskaper. Fokus på deler av flere figurer: Sammenligner rektanglet før og etter en transformasjon. Analyserer hva som forblir likt etter en forandring.
1	4.2.1 Odd, Siri og Eli stopper opp undersøkelsen	Veksling mellom undersøkelse og refleksjon	Fokus på selve undersøkelsen: Foreslår fremgangsmåte basert på gjetting og intuisjon. Fokus på sluttproduktet: Identifiserer delsteg, stopper opp for å lese oppgaveteksten på ny.

		Resonnere rundt geometriske forhold	Fokus på deler av en figur: Resonnerer rundt sidene til rektanglet.
2	4.3.1 Jesper, Stine og Hans identifiserer alle mulige kombinasjoner	Resonnere rundt geometriske forhold Veksling mellom undersøkelse og refleksjon Generalisere geometriske ideer	Fokus på deler av en figur: Resonnerer rundt lengdene på sidene i rektangelet. Fokus på deler av flere figurer: Sammenligner rektanglenes areal. Fokus på selve undersøkelsen: Prøver ut kjente strategier. Leter etter alle mulige kombinasjoner.
3	4.3.2 Jesper, Stine og Hans utformer en generaliserende regel for når arealet er størst	Resonnere rundt geometriske forhold Generalisere geometriske ideer	Fokus på deler av flere figurer: Sammenligner rektanglenes areal. Leter etter alle mulige kombinasjoner. Generaliserer ut ifra et spesielt tilfelle.
**Oppgave 0 er oppvarmingsoppgaven.*			

Tabell 7: Oppsummering av studiens funn.

Det andre fokuset for analysen var: «Hvilke forhold bistår elevene i å uttrykke sin geometriske tenkning?». Analysen viser at læreren var sentral i å bistå elevene med å uttrykke sin geometriske tenkning. I samtaleutsagnene stilles det totalt 12 lærerspørsmål. Disse spørsmålene bistår elevene blant annet med å ordlegge sin kroppslige deltagelse, resonnere rundt geometriske egenskaper og sammenhenger mellom dem, skifte geometrisk fokus, og presentere og forsvare perspektiver. Det andre forholdet analysen belyste var elevens bruk av representasjoner for å uttrykke geometrisk tenking. I løp av undersøkelsen benytter elevene seg av visuelle representasjoner i form av plantegninger og tabell. Som støtte for de visuelle representasjonene benytter de seg av symbolske representasjoner. Det fysiske representasjonssystemet blir benyttet i konstruksjon og transformasjon av rektangler. I konstruksjonen av disse var elevene selv en aktiv del av representasjonen. Verbale representasjoner benyttes for å ordlegge og forklare andre representasjoner og kroppslig handling. Det er også tilfeller i analysen som viser at elevene benytter seg av konteksten oppgavene befinner seg i.

5.0 DRØFTING

I forrige kapittel skildret jeg undersøkelsesprosessen til to av gruppene som deltok i studien. Med utgangspunkt i min forståelse av rammeverket til Driscoll et.al (2007) og annen forskning trakk jeg frem relevante funn i henhold til studiens forskningsspørsmål:

1. *Hvilke geometriske tenkevaner kommer til uttrykk i elevenes undersøkelse?*

2. *Hvilke forhold bistår elevene i å uttrykke geometrisk tenkning?*

Analysen viser at alle tenkevanene er representert i elevenes undersøkelse (tabell 7). I analyseprosessen hvor tenkevanene ble identifisere oppdaget jeg at lærerinvolvering i form av oppgavevalg og spørsmål og bruk av representasjoner var forhold som gikk igjen når elevene uttrykket geometriske tenkning. Formålet med dette kapittelet er å diskutere disse funnene i lys av tidligere forskning. Det er viktig å poengtere at det også kan være andre forhold som har spilt en rolle i å bistå elevene i å uttrykke geometriske tenkning. Jeg har valgt å ta utgangspunkt i de to nevnte faktorene og presenterer dem hver for seg når jeg drøfter. Dette gjør jeg for å tydeliggjøre hvordan de ulike funnen stiller seg i forhold til tidligere forskning. Avslutningsvis vil jeg kritisk drøfte metodiske valg.

5.1 LÆRERENS INVOLVERING I ELEVENS UNDERSØKELSE

Til tross for at lærerne deltok i undersøkelseslandskapet med innstilling om å la elevene undersøke og diskutere uten en stor grad av lærerinvolvering, viser analysen at læreren hadde en sentral rolle i hvordan elevene uttrykte sin geometriske tenkning. Analysen viser at læreren bistår elevene på to måter: Gjennom tilretteleggelse av kontekst og utvikling av oppgaver og muntlige spørsmål underveis i elevenes undersøkelse. I dette delkapittelet vil jeg drøfte disse måtene i lys av tidligere forskning.

5.1.1 Tilrettelegging for praktiske erfaringer i en virkelighetsnær kontekst

Formålet med denne studien var å bidra med innsikt i geometrisk tenkning hos elever som er fysisk aktiv i en undersøkelse av rektangler. En avgjørende faktor var da å utvikle et undervisningsopplegg som la til rette for at elevene fikk tenke geometrisk, være undersøkende og bruke kroppene sine aktivt for å løse geometriske problem. Driscoll et.al (2007) forklarer at fremstillingen av matematiske problem har mye å si for hvordan den som møter problemet tenker. Er problemet rettet mot rommet og romlige objekt vil det være inviterende og mer komfortabelt å tenke geometrisk. Vi valgte derfor å presentere oppgavene i en virkelighetsnær kontekst, der elevene ble spurt om å hjelpe kontaktlærer med å konstruere bassenger hun kunne velge mellom når hun skulle bygge et nytt basseng foran leiligheten sin i Spania. Siden svømmeopplæring er en obligatorisk del av norske elevers skolegang, var vi klar over at alle elevene i utvalget hadde et forhold til det å være i og rundt et basseng. Denne undervisningsøkten fant sted i skolens gymsal der avsperringsteip ble brukt for å konstruere fysiske representasjoner av rektangler. Videoopptakene brukt under datainnsamlingen viser at alle elevene virket å være ivrig med å sette i gang, og med det godtok invitasjonen om å være delaktig i undersøkelsen av basseng. At elevene selv velger å godta invitasjonen trekkes frem av Alrø og Skovsmose (2004) som avgjørende for å utvikle et undersøkelseslandskap. Analysen viser at det forekommer geometrisk tenkning i alle oppgavene elevene ble presentert for, også på ulikt vis (tabell 7). Det kan derfor tyde på at bruken av bassengkonteksten tilbyr et matematisk potensial, som kan fremme geometrisk tenkning. Det er i tråd med Lehrer & Romberg (1998) som i sin studie argumenterer for å bruke hverdagslige aktiviteter for å utvikle elevers kunnskap av rommet. I tillegg til å undersøke i en virkelighetsnær kontekst viser datamaterialet og den presenterte analysen at elevene utfører hverdagslige handlinger som blant annet å gå, måle, konstruere, tegne, samarbeide og manipulere objekter. De får da oppleve matematikken i situasjoner de allerede har erfaring fra, noe som vil kunne bidra til en følelse av nytteverdi. Tegn på følelsen av nytteverdi kom til uttrykk i datamaterialet når en elev kom med utsagnet «dette skal jeg jo gjøre når jeg blir stor» i en situasjon hvor han brukte målbånd for å måle opp lengden til en av rektanglets sidelinjer. Dette utsagnet fulgte han opp med å forklare de andre på gruppen sin at han ønsket å bli snekker og at det var mye måling i det yrket. I en lignende situasjon kom en annen elev med utsagnet «nå jobber vi som ingeniører». Bussi & Boero (1998) mener at læring av geometri innenfor erfaringsfelt fører til en rekontekstualisering av geometrisk kunnskap som et nettverk av verktøy som kan brukes også utenfor skole matematikken. Det kan da tenkes at opplegget som ble utviklet og utført i denne studien kan bidra til en slik rekontekstualisering. Funnet samsvarer også med Alrø & Skovsmose (2004) som mener at bruk av referanser kan bidra til å gi mening til aktiviteten. Oppgavedesignet og funnene i dette studiet kan også sammenlignes med arbeidet til Ma (2013, 2016, 2017), som undersøkte helkroppslige interaksjoner i en læringssituasjon utenfor klasserommets rammer. På en lignende måte som utvalget vårt benyttet elevene i disse studiene seg av redskaper som tau og teip for å konstruere og transformere geometriske figurer i møte med matematiske problemer. Funnene hennes peker på at bruken av kropp og materialer som tau kan være viktige resurser for læring i geometri. Jeg vil drøfte bruken av kropp og tua ytterligere som del av en fysisk representasjon av et rektangel senere i kapittelet.

Til tross for at konteksten var rik på matematikk viser datamaterialet at den i noen tilfeller bidro til avsporinger av det matematiske fokuset. Et fåtall elever beveget seg vekk fra den matematiske undersøkelsen. Blant annet med å spinne rundt egen akse, gå vekk, og undersøke andre objekter i gymsalen. Det kan sees på som motstridende til funn i studiene til Bartholomew & Jowers (2011) og Daly-Smith et al. (2018). De hevder at fysisk aktivitet i undervisning bidrar til økt konsentrasjonstid. Avsporingene var ikke mer problematiske enn at lærer eller en av gruppemedlemmene «hektet» eleven på det matematiske fokuset igjen. Det er selvfølgelig flere faktorer enn den fysisk aktive friheten som påvirker elevenes konsentrasjon, men datamaterialet belyser viktigheten av lærerinvolvering og omfattende trening på å drive matematiske undersøkelser. Noe som samsvarer med det Branchi og Bell (2008) trekker frem i sitt arbeid. Sees dette på fra en annen synsvinkel var elevene til stede i gymsalen i 90 minutter, noe som kan tenkes å være kognitivt utmattende for mange. Da kan det argumenteres for at denne studien indikere at en slik fysisk aktiv undervisningssituasjon bidro til god konsentrasjonstid hos elevene, til tross for et par avsporinger.

5.1.2 Lærerens spørsmål

Analysen viser at læreren var en sentral faktor i elevenes geometriske tenkning, også underveis i undersøkelsene. Både i form av hvilke av tenkevanene som kommer til uttrykk og på hvilken måter. Det er viktig å påpeke at lærerne som har vært delaktig i undersøkelsesprosessen og dermed ble en del av datamaterialet ikke har blitt spurt hvilket formål som ligger bak de ulike spørsmålene de stiller. I analysen er det derfor kun presentert en tolkning av lærerens spørsmål. Tolkningene baserer seg på min forståelse av datamaterialet og rammeverket til Driscoll et.al (2007). Det samme grunnlag gjelder også her når jeg drøfter disse spørsmålene. Lærer stiller totalt 12 spørsmål i den presenterte analysen.

Den fysiske undersøkelsen til elevene bærer preg av at en elev presenterer et perspektiv og resten av gruppen deltar med det ved å følge instruksjoner og kroppslig bevegelse. Lærer har da en passiv rolle, men griper inn når elevene stopper opp. Han stiller spørsmålene «Hvordan vet dere at dette er et rektangel?» og «Hvorfor er dette et rektangel?». Ved å stille disse spørsmålene viser analysen at han bistår elevene i å ordlegge den geometriske tenkningen som ligger til grunn for den kroppslige deltagelsen. Han gir da eleven som presenterte perspektivet en mulighet til å forklare det for de andre gruppemedlemmene. Funnet kan sees i sammenheng med Alrø & Skovsmose (2004) som mener at lærer kan ha en rolle som fasilitator for elevene når de skal uttrykke matematisk forståelse. Lærer får også et inntrykk av elevens forståelse. I dette tilfellet bistår spørsmålet elevene i å uttrykke tenkevanen *resonnere rundt geometriske forhold*, når elevene trekker frem egenskaper hos rektangelet de har konstruert. I studiet Gürbüz et.al (2018) bruker læreren lignende spørsmål for at elevene skal forklare sine kroppslige handlinger i undersøkelse av papirbretting. De analyserer ikke læreren sine spørsmål direkte, men gjennom samtaleutdrag presentert i analysen kan det trekkes paralleller mellom studiene. På en lignende måte som analysen min, kommer den geometriske tenkning til uttrykk som et svar på et spørsmål fra lærer. Når perspektivet tydeliggjøres, oppstår det også et potensial for videre undersøkelse. Analysen viser at elevene ikke mestrer å uttrykke en fullkommen definisjon av et rektangel. I et forsøk på å fremme elevene sin geometriske tenkning kunne læreren stilt utviklende spørsmål. Eksempelvis «Hvilke sider er like, og hva vi kan kalle disse?» og «Hva om det sidelinjeparet er lengre enn det andre paret?». Slike spørsmål ville kunne åpne opp for en samtale rundt en vanlig misoppfatning om at rektanglet er et langt kvadrat (Monaghan, 2000). Spesielt med tanke på at begge gruppene konstruerer og resonnerer rundt kvadratet, som er en spesiell type rektangel, senere i oppgaven. Uten videre utspørring fra lærer eller medelever får ikke elevene vist mer enn en antydning til å resonnere rundt geometriske forhold. Hadde lærer fortsatt å stille spørsmål rundt egenskapene til rektangelet kan det tenkes at effekten ville vært større enn den ble. Noe som er i tråd med hvordan Driscoll et.al (2007) forklarer bruken av de forskjellige spørsmålstypene.

Lærerens neste spørsmål «Kan dere ha forskjellige størrelser også?» og «Kan vi lage andre rektangler?» fortsetter å legge til rette for at elevene skal resonnere rundt egenskapene hos rektanglet, men nå åpnes det opp for at elevene kan sammenligne rektangler. Det er her forskjellen mellom gruppene oppstår, og påvirkningskraften lærerspørsmål kan ha på elevenes geometriske tenkning kommer tydelig til syne. Begge gruppene viser at de mestrer å forandre på figuren, mens de fortsetter å beholde egenskapene som gjør det til et rektangel. I gruppe to sin undersøkelse stopper læreren å stille spørsmål der. Undersøkelsen fortsetter og elevene viser tegn til å tenke geometrisk uten videre lærerinvolvering, men fokuset forblir på å resonnere rundt deler av en figur. Under gruppe to sin undersøkelse stiller læreren oppfølgingsspørsmål «Hva skjedde med rektanglet nå?». For å forklare forskjellen mellom de to rektanglene starter elevene å resonnere rundt forholdet med sidelengdene og hvordan sideparene påvirker hverandre. Det åpner også opp for tenkevanen *undersøke parametere*. Å kunne resonnere rundt effekten av å flytte punkter ser Driscoll et.al (2007) på som en kraftfull måte å tenke matematikk på. Lærer kunne også stilt flere utviklende spørsmål og utnytte rektanglets dynamiske utgangspunkt i større grad. Læreren stiller spørsmålet «Er det noe likt med rektanglene dere har laget?», noe som gjør at en elev uttrykker at vinklene forblir rette. Andre spørsmål som kunne blitt stilt er «Hva skjer om alle tar X antall skritt til høyre?» eller «Klarer dere å stille dere slik at alle står med lik avstand fra hverandre?». Lar læreren elevene resonnere rundt hva som vil skje før de beveger seg er dette en mulighet for å fremme dynamisk tenkning hos elevene. Til tross for at potensialet i situasjonen ikke ble fylt unyttet, viser analysen at et så enkelt spørsmål som «Hva skjedde med rektanglet nå?» kan legge til rette for at elevene får undersøke og resonnere på et annen måte.

Analysen viser også at lærerens spørsmål er avgjørende i gruppe en sitt forsøk på å *generalisere geometriske ideer*. I dette tilfellet balanserer han mellom spørsmålstypene. Jesper kommer med en påstand om at det kvadratiske bassenget har størst areal. Jesper sin påstand er korrekt, men han gir ingen begrunnelse for hvorfor han kommer med denne påstanden. Læreren responderer med å stille spørsmålet «Hvorfor er det den største?». Jesper er da nødt til å komme med begrunnelse for påstanden sin, og læreren får innblikk i forståelsen og tenkning til Jesper. I første omgang mestrer ikke Jesper å komme med en begrunnelse, noe som gjør at læreren stiller rekke spørsmål. Blant annet spørsmålet «Men når vi endrer disse lengdene til bassenget, hva er det som skjer med størrelsen til bassenget?». Et slikt spørsmål kan sees på som orienterende da det retter elevenes fokus mot lengdene og arealet til bassengene. Det resulterer i at Stine klarer å komme med en forklaring for hvorfor kvadratet er det største bassenget. I dette tilfellet «stod» lærer i spørsmålet og stilte oppfølgingsspørsmål for å legge til rette for at gruppen fikk utvidet Jesper sin forklaring.

Basert på hvordan Driscoll et.al (2007) forklarer spørsmålstypene forstår jeg det slik at læreren går inn i elevenes undersøkelse med formål om å hjelpe de med å ordlegge og reflektere rundt deres kroppslige handlinger og geometriske tenkning. Et kjennetegn med timingen til læreren er at han stiller spørsmål etter elevene har gjort en handling eller diskutert. Å vite når du som lærer skal stille spørsmål trekkes frem av Driscoll med hans kollegaer som en viktig ferdighet. Med å vente med å stille spørsmål lar han elevene undersøke først for å så bruke spørsmålene til å veilede og utfordre elevene på enten fysiske handlinger eller muntlige uttrykk. Driscoll et.al (2007, s.103-105) analyserer og presenterer et samtaleutdrag mellom en lærer og en gruppe elever på 6.trinn. Samtaleutdraget skildrer hvordan denne læreren stiller spørsmål på en lignende måte for å hjelpe sine elever i arbeidet med arealet av rektangler. Funnene i denne studien underbygger viktigheten av å være bevisst på hvilke spørsmål som blir stilt elevene og hvilke effekt det har på dem og deres geometriske tenkning. Funnene tydeliggjør også viktigheten av balansen mellom spørsmålstypene, men også å «stå i» spørsmålet. Med det mener jeg at lærer må fortsette å stille seg spørrende, da ofte utviklende spørsmål slik elevene blir utfordret og kan utvikle sin geometriske tenkning. Studien kan derfor stille seg bak Driscoll et.al (2007) som forklarer lærerspørsmål som et kraftfullt verktøy for å gjøre elever i stand til å forstå geometri, tenke geometrisk og løse geometriske problemer.

5.2 FYSISKE OG VISUELLE REPRESENTASJONER

Analysen viser at elevene benytter seg av ulike representasjoner når de resonnerer, definerer og forklarer i løpet av undervisningsøkten. Alle de fem representasjonssystemene som er i modellen som Leinwand et.al (2014) presenterer blir benyttet i løpet av elevenes undersøkelse for å uttrykke geometriske tenkning og synliggjøre geometriske konsepter eller ideer. Å kunne benytte seg av og beherske flere representasjonssystemer og konvertere mellom disse trekker Hana (2014) frem som en viktig matematisk kompetanse. Siden fokuset mitt har vært å få innsikt i geometrisk tenkning hos elever som deltar i en fysisk aktiv undersøkelse har jeg valgt å fokusere på bruken av fysiske representasjoner når jeg drøfter hvordan bruken av representasjoner har bistått elevene i å utrykke geometrisk tenkning.

En viktig del av den virkelighetsnære konteksten jeg drøftet ovenfor var at elevene fikk bruke kroppene sine for å tenke geometrisk, men også som en del av matematikken de undersøkte. I oppvarmingsoppgaven var elevene selv en del av den fysiske representasjonen de konstruerte. Analysen viser at elevene bruker kroppslige gester for å presentere perspektiv, presisere romlige posisjoner, påpeke egenskaper hos fysiske representasjoner og forholdene mellom dem. Det er i tråd med Hana (2014), Fyhn (2008) og Fyhn & Hansen (2019) som mener bruk av kroppen kan vært et hjelpemiddel i å utvikle språk og forståelse for geometriske begreper. Begge gruppene som er presentert i analysen starter med å konstruere rektangler hvor de horisontale sidelengdene er lengre enn de vertikale. Monaghan (2000) oppdaget i sin studie at mange elever, på samme alder med utvalget, hadde oppfatningen av at rektangler var avlangt i horisontal retning. Driscoll et.al (2007) trekker frem at det er vanlig for ungdomsskoleelever å ha en oppfatning av geometriske figurer som baserer seg på prototyper. De mener derfor at elevene må få muligheten til å undersøke geometriske figurer og deres egenskaper slik de får flere eksempler på de ulike geometriske figurene og kan få et mer bevist forhold til hvilke egenskaper som er nødvendig for å definere dem. Analysen viser at elevene mestrer å transformere rektanglet, mens de beholder egenskapene som kreves. Elevene representerer ulike rektangler gjennom hele undersøkelsen, også ved bruk av andre representasjonssystem. Gruppe to mestrer også å muntlig uttrykke hvordan transformasjonene påvirket rektanglet gjennom å påpeke hva som forandret seg og hva som forble det samme. Studien indikerer dermed at fysisk aktiv undersøkelse med bruk av fysiske representasjoner kan bidra til at elevene får erfare ulike typer rektangler og resonnere rundt forholdet mellom egenskapene. Det er i følge Fuys et.al (1988) viktig for å nå nivået av logisk ordning i van Hiele modellen. Som en aktiv del av representasjonen får elevene også erfare rektanglene fra et annet perspektiv enn fra «fugleperspektivet» de normalt ser rektangler fra når det blir representert i lærebøker eller på ark. Ma (2013) opplevde i sin studie at dette perspektivet åpnet opp for nye måter å vurdere egenskapene på. Denne studien kan ikke si noe om at elevene resonnerer bedre rundt rektanglets egenskaper når de tar utgangspunkt i en fysisk representasjon, som de selv er en del av, enn om utgangspunktet er en visuell representasjon av et statisk rektangel i mikrorommet. Det er derimot mulig å sammenligne elevenes undersøkelse i oppvarmingsoppgaven med aktivitetene eksperimentgruppen i Hraste et.al (2018) sin studie deltar i. Elevene i deres studie er selv en fysisk aktiv del av rektangelet når de med hjelp av kroppslig posisjonering skal konstruere rektangler basert på egenskapene deres. Funnene i deres studie viser at oppgaver hvor elevene er fysisk aktive kan være en effektiv måte å lære elevene geometri på. Geršak et.al (2020) oppdage også at elevene beholdt geometrisk kunnskap bedre over tid enn elever som jobbet med mikrorepresentasjoner av geometriske figurer på ark. Det kan derfor tenkes at en sammenlignbar aktivitet vil ha en positiv effekt også for utvalget i denne studien. I det minste tyder analysen på at den dynamiske representasjonen i makrorommet og deres fysiske deltagelse fremmer og bistår elevene i å utrykke geometrisk tenkning.

Analysen belyser hvordan gruppe to (delkapittel 4.2.1) brukte visuelle representasjoner i mikrorommet for å planlegge konstruksjonen av fysiske representasjoner av rektangler i mesorommet. Berthelot & Salin (1998) trekker frem i sin studie at kunnskap som ble utviklet i mikrorommet nødvendigvis ikke var direkte overførbart når elevene skulle anvende sin geometriske kunnskap i det virkelige liv. I arbeidet rundt å beregne en ny posisjon til et rektangulært objekt basert på egenskapene, oppdaget de at elevene kun tok utgangspunkt i lengden hos rektangelet. Dette forklarer de med at elevene var kun lært å tegne rektangler på papir for å så snakke om egenskapene. Elevene hadde ikke erfart å faktisk bruke de geometriske egenskapene til vinklene tidligere. Analysen viser at elevene på denne gruppen også kun tar utgangspunkt i lengden til sidelinjene når de resonnerer rundt den visuelle representasjonen på papiret. Dette kan tyde på at vårt utvalg har lignende erfaringer som utvalget til Berthelot & Salin. Når elevene skal konstruere i makrorommet blir de nødt å forholde seg til egenskapene hos vinklene til rektanglene. Elevene oppdager en sammenheng mellom sidelinjene og vinklene til rektangel når de måler den ene siden for kort. Det resulterer i at to av vinklene ikke er rette om sidelinjene skal møtes. Elevene får dermed erfare det Berthelot & Salin antyder mangler hos deres utvalg. Slike erfaringer kan da bistå elevene i å utvikle en rikere forståelse av egenskapene til rektangelet og forholdet mellom dem. Det kan tenkes at en aktivitet hvor elevene får oppleve å arbeide frem og tilbake mellom mikro- og mesorommet kan bidra til å avdekke en av misoppfatning Berthelot & Salin oppdaget i sin studie. Nemlig at mange elever oppfattet representasjoner i mikrorommet som et objekt fremfor en representasjon av objektet, noe som kunne skape utfordringer i samtaler rundt disse representasjonene. Analysen tyder på at elevene klarer å se på sine mikrorepresentasjoner som representasjoner av bassengene og ikke selve bassenget. Det skal påpekes at en vesentlig forskjell fra denne studien og studien til Berthelot & Salin er at deres elever skal forflytte et faktisk rektangulært objekt, mens de i min studie kun skal representere et basseng gjennom sin konstruksjon. Dette kan være en fordel når elevene skal starte med å erfare geometri i det virkelige rom og anvende kunnskap mellom rommene. Et annet aspekt med bruken av den visuelle representasjonen er at den gir elevene muligheten til å utrykke og synliggjøre matematikk for resten av gruppen og legge en plan for konstruksjonen. Det kan da tenkes at sannsynligheten for at elevene har samme forståelse for hva de skal gjøre når de konstruerer og hvorfor de gjør det er større enn om de hadde startet med å konstruere. Analysen viser at den visuelle representasjonen blir et verktøy elevene benytter seg av for å stoppe opp undersøkelsen, oppklare begrensinger og på et vis reflektere rundt veien videre.

5.3 METODISKE VALG SETT MED ET KRITISK BLIKK

I dette delkapittelet drøfter jeg metodologiske valg og implikasjoner gjort i løpet av studien. Jeg tar da utgangspunkt i begrepene validitet og relabilitet, som ble presentert i metodekapittelet om forskningskvalitet (delkapittel 3.6). Kort fortalt handler validitet om hvilken dekning jeg som forsker har for å trekke konklusjoner basert på datamaterialet som er innsamlet, om det er samsvar mellom forskningsspørsmål, teori og metode og i hvilken grad forskere kan uttale seg om studiets kasus (Postholm & Jacobsen, 2018; Tjora, 2021). Postholm & Jacobsen forklarer at studiens relabilitet handler om forskerens påvirkning på funn som er kommet frem og om studiets design er egnet til å belyse problemstillingen.

Jeg ønsket med denne studien å se nærmere på hvordan geometrisk tenkning kom til uttrykk hos et utvalg elever mens de deltok i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler. For å kunne analysere og diskutere elevenes geometriske tenkning tok jeg i stor grad utgangspunkt i tenkevanene Driscoll et.al (2007) presenterer i rammeverket GHoM. De forklarer tenkevanene som produktive måter å tenke geometri på i møte med et matematisk problem. Rammeverket deres er ikke like anerkjent og anvendt som for eksempel van Hiele (Fuys et.al, 1988) sin modell. Deres modell er nivåbasert og anvendes ofte for å kartlegge elevens geometriske forståelse. Hadde jeg tatt utgangspunkt i denne modellen eller andre teoretiske perspektiv ville det kunne belyst en annen side innenfor geometrisk tenkning og gitt andre funn. Siden målet mitt var å identifisere hvordan geometrisk tenkning kom til uttrykk i en fysisk aktiv undersøkelse, fremfor å kartlegge elevenes geometriske nivå vurderte jeg rammeverket til Driscoll et.al (2007) som mer egnet for å besvare min problemstilling. Det skal allikevel poengteres at Driscoll et.al (2007) henter inspirasjon fra modellen til van Hiele, spesielt i sin skildring av tenkevanen *resonnere rundt geometriske figurer*. Siden jeg anvender begreper som allerede er utviklet for et lignende formål, er dette en trygghet for om begrepene er dekkende til å beskrive det datamaterialet viser. Basert på disse begrepene har jeg identifisert geometrisk tenkning slik som var målet. Hvordan jeg har forstått rammeverket og elevenes deltagelse vil ha en påvirkning på studiens funn. Analysen bør derfor leses sammen med beskrivelsen av hvordan datamaterialet er blitt behandlet (delkapittel 3.5) og fremstillingen av rammeverket (delkapittel 2.3.4) for å forstå hvordan datamaterialet er blitt tolket.

Dette er en enkel casestudie, noe som vil si at den er begrenset til å fortelle noe om den geometriske tenkning til akkurat dette utvalget, i denne skisserte situasjonen. Utvalget elever, hvordan gruppene ble satt sammen, konteksten og valg av oppgaver er faktorer som har påvirket funnene i studien. Dette var en elevgruppe som hadde begrensede erfaringer med å delta i matematiske undersøkelseslandskap. Den manglende erfaringen sammen med at elevene deltok i ukjent situasjon hvor deltagelsen deres ble tatt opp kan ha spilt en rolle for hvilken grad elevene turte å utrykke seg og da også påvirke studiens funn. Det hadde derfor vært interessant å forske på dette utvalget over en lengre periode. Datamaterialet og den presenterte analysen viser at undersøkelsen bar preg av at enkeltelever tok føringen. Det kan derfor tenkes at en annen gruppesammensetning ville gitt andre funn. Tidligere i kapittelet drøftet jeg hvordan konteksten spilte en rolle for den geometriske tenkningen. Hadde elevene jobbet med andre oppgaver i en annen kontekst ville nok dette også ha påvirket funnene. Det vil derfor ikke være mulig å etterprøve studien, siden betingelsene aldri vil være like. Noe Tjora (2021) poengterer at er krevende med kvalitative studier generelt. Det har heller aldri vært hensikten at denne studien skal etterprøves i sin helhet. Formålet mitt var å bidra med innsikt i geometrisk tenkning hos elever som er fysisk aktive i en undersøkelse av rektangler, gjennom å trekke frem hvordan ulike forhold bisto deres geometriske tenkning. Jeg har derfor prioritert å gi en fyldig beskrivelse av oppgavene og undervisningsopplegget i metodekapittelet, slik at lærere selv kan vurdere hvilke deler av studien som kan være nyttig for deres matematikkundervisning og elevgruppe. Det er dermed mulig å overføre kunnskap fra denne studien i form av å vurdere hvordan elevene undersøkte og uttrykket seg geometrisk i en situasjon av fysisk aktiv undersøkelse, om lærere selv ønsker å utprøve denne undervisningsmetoden eller et lignende undervisningsopplegg. En annen begrensning var vår prioritering av tiden vi hadde med utvalget. Med bedre tid hadde det vært interessant å gjennomføre en egen økt hvor elevene reflekterte over den fysisk aktive undersøkelsen de deltok i. Det ville da vært mulig å bidra med innsikt i hvordan erfaringene elevene gjorde påvirket deres geometriske tenkning og forståelse.

6.0 AVSLUTNING

Formålet med denne studien var å bidra med innsikt i geometrisk tenkning hos elever som deltar i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler. Bakgrunnen for dette fokuset var en kombinasjon av norske elevers negative trend i geometri, læreplanen sitt fokus på å la elevene være undersøkende og mine personlig ønsker om å aktivisere matematikkundervisningen, samtidig som studiet skulle være berikende og relevant for min egen og andres undervisningspraksis. Det resulterte i problemstillingen og forskningsspørsmålene:

Hvordan kommer geometrisk tenkning til uttrykk hos et utvalg elever på 5.trinn i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler?

Hvilke geometriske tenkevaner kommer til uttrykk i elevenes undersøkelse?

Hvilke forhold bistår elevene i å uttrykke geometrisk tenkning?

I dette avsluttende kapittelet oppsummerer jeg hva som er blitt gjort i studien. Videre gjør jeg rede for hvordan funnene som ble presentert i kapittel fire og drøftet i kapittel fem kan bidra til å besvare problemstillingen. Det gjør jeg med utgangspunkt i studiets to forskningsspørsmål. Avslutningsvis skisserer en mulig vei videre for ytterligere forskning.

6.1 HVA ER BLITT GJORT?

For å kunne bidra med innsikt i elevers geometriske tenkning har jeg sammen med to medstudenter utviklet et undervisningsopplegg, som la til rette for at 14 femteklassinger fikk tenke geometrisk, mens de undersøkte egenskapene for det geometriske konseptet rektangel. Elevenes deltagelse var grunnlaget for studiens datamateriale, som er blitt behandlet, analysert og drøftet. Både i arbeid med utvikling av undervisningsopplegget og datamaterialet ble det tatt utgangspunkt i tidligere forskning, som er presentert i studiens andre kapittel *Teori og tidligere forskning*. Dette kapittelet fungerer som et bakteppe for studien, og var utslagsgivende for metodiske valg og de funnene som ble avdekket. I dette kapittelet vil jeg kort oppsummere hvordan.

6.1.1 Tidligere forskning og datainnsamling

En avgjørende faktor for å kunne besvare problemstillingen var å legge til rette og invitere elevene til å delta i en fysisk aktiv undersøkelse av rektangler. Vårt første ansvar var derfor utvikle et undervisningsopplegg hvor dette var mulig. Utviklingen av undervisningsopplegget ble påvirket av tidligere forskning innen både geometri og undersøkelse i matematikk. Studiene til Monaghan (2000) og Driscoll et.al (2007) belyser misoppfatninger elever har rundt forholdet mellom sidelengdene i et rektangel og forholdet mellom omkrets og areal. Disse studiene ble brukt i valget av det geometriske temaet. Berthelot & Salin (1998), Ma (2013, 2016, 2017), Hraste et.al (2018) og Geršak et.al (2020) undersøker elever mens de jobber fysisk og praktisk med geometriske konsepter. Oppgavene i disse studiene var til inspirasjon for hvordan vi utviklet våre oppgaver. For å gjøre undervisningsopplegget undersøkende ble det hentet inspirasjon fra arbeidet til Alrø & Skovsmose (2004), Goos (2004), Skovsmose & Saljø (2008), Branchi & Bell (2008) og Blomhøj (2016). Deres arbeid ble utslagsgivende for hvordan vi bygde opp undervisningsøktene og aktivitetene vi inkluderte i dem. Med utgangspunkt i den nevnte forskningen, utviklet vi et undervisningsopplegg bestående ut av tre økter. Hvor elevene fikk mulighet til å drive med undersøkelser på ulikt nivå, gjennom samarbeid og bruk av kroppen, for å erfare egenskapene til rektangelet og forholdet mellom dem.

6.1.2 Tidligere forskning, teoretisk rammeverk, analyse og drøfting

En annen funksjon for teorikapittelet var å skape et utgangspunkt for hvordan studiens datamateriale kan forstås, og med det danne et grunnlag for analyse og drøfting. For å identifisere geometrisk tenkning hos elevene tok jeg i hovedsak utgangspunkt i rammeverket *geometric habits of mind* (Driscoll et.al, 2007). I dette rammeverket presenteres fire geometriske tenkevaner: *resonnere rundt geometriske forhold, generalisere geometriske ideer, undersøke parametere* og *veksle mellom undersøkelse og refleksjon.* Disse trekkes frem som effektive måter å tenke geometrisk på i møte med et matematisk problem. For hver av dem presenteres det også indikatorer for når tenkevanene forekommer. Med dette rammeverket som utgangspunkt kunne jeg i større grad si noe om elevens geometriske tenkning og belyse situasjoner i elevenes deltagelse hvor det forekom geometrisk tenkning. Datamaterialet åpnet også opp for å undersøke hvilke forhold som bisto elevene med enten å verbalt eller kroppslig uttrykke sin geometriske tenkning. Etter å ha identifisert geometrisk tenkning hos elevene oppdaget jeg at forhold som lærerspørsmål og bruk av representasjon gikk igjen i utsagnene og den kroppslige deltagelsen. Lærerspørsmålene analyseres også etter et perspektiv presentert av Driscoll et.al (2007), hvor de kategoriserer lærerspørsmål etter om de har en orienterende, vurderende eller utviklende hensikt. Bruken av representasjoner forstås og analyseres etter av modellen presentert av Leinwand et.al (2014) og skildringene fra Duval (2006), Hana (2014) Tripathi (2008). Disse faktorene drøftes i kapittel fem *drøfting* og sammen med tenkevanene gir dette meg et grunnlag for å kunne bidra med innsikt i elevens geometriske tenkning mens de deltar i en fysisk aktiv undersøkelse.

6.2 BESVARELSE AV PROBLEMSTILLING

For å kunne besvare studiens problemstilling tar jeg utgangspunkt i forskningsspørsmålene «Hvilke geometriske tenkevaner kommer til uttrykk i elevenes undersøkelse?» og «Hvilke forhold bistår elevene i å uttrykke geometrisk tenkning?». For å kunne gi innsikt i elevenes geometriske tenkning tok jeg utgangspunkt i rammeverket til Driscoll et.al (2007). Analysen viser at alle tenkevanene som blir presentert der blir identifisert i løpet av elevenes undersøkelse i økt tre. Elevene benytter seg av tenkevanen *resonnere rundt geometriske forhold* når de konstruerer og resonnerer rundt egenskapene til rektangler. Dette gjør de både ved å fokus på deler av en figur, men også ved å sammenligne dem. Basert på erfaringene de gjorde klarte de også å bevise at omkretsen ikke synker eller øker sammen med arealet, som da motbeviste en misoppfatning Driscoll og hans kollegaer mener mange elever har. Gjennom arbeid med dynamisk transformasjon og sammenligning av areal får elevene oppleve flere typer rektangler og hvordan egenskapene forholder seg til hverandre. Både Fuys et.al (1988) og Driscoll et.al (2007) trekker dette frem som en viktig erfaring for å utvikle forståelsen av geometriske konsepter. Tenkevanen som er minst fremtredende er *undersøke parametere*. Den ble allikevel identifisert når gruppe to trekker frem rektanglet sine rette vinkler som parametere etter de utførte en transformasjon. Et annet funn er at tenkevanene *generalisere geometriske ideer* kommer til uttrykk når elevene tar utgangspunkt i sine egne erfaringer for å generalisere når arealet er størst hos et rektangel. *Tenkevanen veksle mellom undersøkelse og refleksjon* kommer til syne i elevens undersøkelse drevet av instinkt og intuisjon og når elevene stopper i undersøkelsen for å planlegge og få en felles oppfatning av fremgangsmåte og løsninger. At alle tenkevanene ble identifisert tyder på at elevene jobber i et læringsmiljø som krever at de tenker geometrisk på flere måter. Studien belyser også at lærerens involvering i form av å legge til rette for et slik læringsmiljø og stille spørsmål. Hvilke spørsmål og når lærer stilte spørsmål var viktig for at elevene utrykker den geometriske tenkningen nevnt over. Et av funnene var viktigheten av å balansere mellom spørsmålstypene Driscoll og hans kollegaer presenterer. Da spesielt mellom spørsmål med vurderende og utviklende hensikt. En annen faktor som bisto elevene i å uttrykke geometrisk tenkning var bruken av representasjoner. Analysen viser at alle representasjonssystemene i modellen presentert av Leinwand et.al (2014) blir benyttet. Jeg valgte å fokusere på elevenes bruk av fysiske representasjoner da fysisk aktivitet var en sentral del av undervisningssituasjonen jeg ønsket å bidra med innsikt i. Analysen viser at kroppslige gester kan være et godt hjelpemiddel i å uttrykke geometrisk tenkning og utvikle geometrisk forståelse. Som en aktiv del av representasjonene får også elevene mulighet til å erfare og resonnere rundt rektangler på en annen måte enn med visuelle representasjoner på ark. Denne studien belyser at slike fysiske situasjoner er fult av potensialet til å tenke geometrisk på flere måter. Andre studier som Hraste et.al (2018) og Geršak et.al (2020) viser til resultater som tyder på at denne måten å lære geometri på er mer effektiv enn tradisjonell innlæring med visuelle representasjoner på ark. Til slutt kan et av analysens funn indikere at fysisk aktivitet i en virkelighetsnær kontekst kan bistå elever med å overføre geometrisk kunnskap de har lært i mikrorommet til det virkelige liv i mesorommet.

6.2.1 Studiens aktualitet

I innledning til denne oppgaven presenterte jeg ønsket mitt om at denne studien skulle være berikende for min, men også andre lærere og lærerstudenter sin undervisningspraksis. Jeg ønsker derfor å avslutte med å påpeke hvorfor den kan være berikende også for andre. I forrige kapittel drøftet rundt studiens begrensninger for etterprøving. Jeg påpekte der at lærere selv må avgjøre hvilke deler av studien som kan være relevant for dem og deres elevgruppe. Sees studien i sammenheng med de geometriske kompetansemålene etter 6.tinn «utforske mål for areal og volum i praktiske situasjoner og representere dem på ulike måter» og «bruke ulike strategier for å regne ut areal og omkrets og utforske sammenhenger mellom disse» (Kunnskapsdepartementet, 2019) beskriver disse mer eller mindre hva elevene gjorde i datainnsamlingen. Undervisningsopplegget inkluderer ikke volum, men det kan tenkes at bassengkonteksten også er overførbart til arbeid med denne måleenheten. Analysen viser at undervisningsopplegget legger til rette for at elevene får jobbe med en rekke av kjerneelementene i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2019). Til slutt skildrer studien en måte å aktivisere skoledagen til elevene på, samtidig som det er et effektivt hjelpemiddel i å fremme geometrisk tenkning og forståelse.

6.3 VIDERE FORSKNING

Siden vår datainnsamlingsperiode var begrenset til en uke ville det vært interessant å forske på en lignende tematikk eller oppgavedesign over lengre tid. Det ville da vært mulig å inkludere flere økter, og ha et større fokus på refleksjon i etterkant av økten. Disse øktene kunne da i større grad fokusere på å bruke de fysiske erfaringene til å utvikle et mer abstrakt geometrisk språk. Det ville også vært interessant å undersøke denne måten å undervise geometri på innen andre geometriske tema, aldersgrupper og perspektiver innenfor geometrisk tenkning. Siden studien belyste den viktige rollen lærer har for å fremme geometrisk tenkning, ville det vært interessant å ha et større fokus på lærerrollen i en slik læringssituasjon.

LITTERATURLISTE

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2004). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique* (Vol. 29). Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education* (45), s.797–810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Banchi, H., & Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. *Science and children*, *46*(2), s.26–29.

Bartholomew, J. B. & Jowers, E. M. (2011) Physically active academic lessons in elementary children. *Preventive Medicine* (52), s. 51–54. https://doi.org/10.1016/j.ypmed.2011.01.017

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, s. 843–908.

Baugstø, V. (2019). Mer fysisk aktivitet i skolen kan være det viktigste folkehelsetiltaket siden røykeloven. *Tidsskiftet - Den norske legeforening*. Hentet fra: https://tidsskriftet.no/2019/02/aktuelt-i-foreningen/mer-fysisk-aktivitet-i-skolen-kan-vaere-det-viktigste

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1998). The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry. I C. Mammana & V. Villiani (Red.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, s.71–78. Kluwer Academic Publishers.

Bjørndal, C. R. (2017). *Det vurderende øyet.* Gyldendal akademisk.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund Academic.

Borgen, J. S., Hallås, B., Løndal, K., Moen, K. M., & Gjølme, E. G. (2017). Kroppsøving blir redusert til «fysisk aktivitet» - debatten uteblir. *Bedre skole*, 9(4), s.20–27.

Bussi, M., & Boero, P. (1998). Teaching and learning geometry in contexts. I C. Mammana & V. Villiani (Red.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 52-62. Kluwer Academic Publishers.

Daly-Smith, A., Quarmby, T., Archbold, V. S., Routen, A. C., Morris, J. L., Gammon, C., ... & Dorling, H. (2020). Implementing physically active learning: Future directions for research, policy, and practice. *Journal of Sport and Health Science*, *9*(1), s.41–49. https://doi.org/10.1016/j.jshs.2019.05.007

De nasjonale forskningsetiske komiteene. (2019). *Generelle forskningsetiske retningslinjer*. Hentet fra: https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/generelle/

Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora*. Hentet fra: https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora/

Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J., & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking - A Guide for teachers, Grades 5-10.* Education Development Center.

Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J., Egan, M., Mark, J., & Kelemanik, G. (2008). *The fostering geometric thinking toolkit*. Heinemann.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), s.103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*. http://doi.org/10.2307/749957

Fyhn, A. B. (2008). A climbing class reinvention of angles. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), s.19–35. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9087-z

Fyhn, A. B., & Hansen, L. (2019). Exploration of patterns in different contexts. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 3. hal-02435305

Føsker, L. I. R. (2021). Grip rommet! Barns utvikling av romforståelse og barnehagelærerens systematiske arbeid med det. I. T. Fosse (red.), *Rom for matematikk – i barnehagen*. s.61–89. Casper Forlag.

Gerhardsen, M., Lund, G., Ross, I. S., Kjøll, B., & Rime, A.-K. (2021). *Ja til daglig fysisk aktivitet i skolen - En undersøkelse blant lærere*. Hentet fra: https://nasjonalforeningen.no/contentassets/6be76531d94d4ffc942b49f45df46489/ja-til-daglig-fysisk-aktivitet-i-skolen-august-2021_print.pdf

Geršak, V., Vitulić, H. S., Prosen, S., Starc, G., Humar, I., & Geršak, G. (2020). Use of wearable devices to study activity of children in classroom; Case study – Learning geometry using movement. *Computer communications*, 150, s.581–588. https://doi.org/10.1016/j.comcom.2019.12.019

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for research in mathematics education*, *35*(4), s.258–291.

Gürbüz, M. Ç., Agsu, M., & Güler, H. K. (2018). Investigating Geometric Habits of Mind by Using Paper Folding. *Acta Didactica Napocensia*, 11(3-4), s.157–174. 10.24193/adn.11.3-4.12

Hana, G. M. (2013). Undersøkende virksomhet, koordinering og spørsmålets forrang. I M. Johnsen-Høines, & H. Alrø (Red.), *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis Bok I*. s.65─87. Caspar Forlag AS.

Hana, G. M. (2014) *Matematiske tenkemåter – matemtikk for lærerutdanningen*. Casper forlag AS.

Hansen, H., Schou , J., Jess, K., & Skott, J. (2016). *Matematikk for lærerstuderende Geometri 1.- 6.klasse.* Samfunds litteratur.

Helse- og omsorgsdepartamentet. (2020). *Sammen om aktive liv. Handlingsplan for fysisk aktivitet 2020-2029*. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/contentassets/43934b653c924ed7816fa16cd1e8e523/handlingsplan-for-fysisk-aktivitet-2020.pdf

Hofmann, A., & Kaufmann, O. (2014). Geometri. I T. S. Gustavsen, K. R. Hinna, I. Borge, & P. Andersen (Red.), *QED 1-7 Matematikk for grunnskolelærerutdanningen*, s.159–376. Cappelen Damm Akademisk.

Hraste, M., De Giorgio, A., Jelaska, P. M., Padulo, J., & Granić, I. (2018). When mathematics meets physical activity in the school-aged child: The effect of an integrated motor and cognitive approach to learning geometry. *PLoS One*, *13*(8). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0196024

Høigaard, R., & Johansen, B.T. (2006) Læring i idrettsgrupper. I H. Sigmundsson, & J.E Ingebritsen (Red.), *Idrettspedagogikk*, s.110 –128. Universitetsforlaget.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), s.1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.C., Nilsen, T. & Bergem, O. K. (2020). TIMSS 2019. *Kortrapport. Institutt for lærerutdanning og skoleforskning*. Universitetet i Oslo.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk 1-10 (MAT01-05).* Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Lehrer, R., Romberg, T. (1998). Springboards to geometry. I C. Mammana & V. Villiani (Red.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 62-71. Kluwer Academic Publishers.

Leinwand, S., Brahier, B., & Huinker, D. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.

Lerum, Ø., Leirhaug, P. E., Resaland, G. K., & Tjomsland, H. E. (2021). "Kan vi gjere noko 'gøy'?" fysisk aktivitet, folkehelse og livsmestring. I H. E. Tjomsland, N. G. Viig, & G. K. Resaland (Red.), Folkehelse og livsmestring i skolen i fag, på tvers av fag og som en helhetlig tilnærming. Fagbokforlaget.

Lim, K. H., & Selden, A. (2009). Mathematical habits of mind. *Proceedings of the thirty-first annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, s.1576–1583.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in mathematics*, *67*(3), s.255–276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2

Ma, J. Y. (2013). Designing disruptions to classroom mathematics: Multi-Party, embodied and material resources for participating in walking scale geometry. In *Annual Meeting of the American Educational Research Association*.

Ma, J. Y. (2016). Designing disruptions for productive hybridity: The case of walking scale geometry. *Journal of the Learning Sciences*, *25*(3), s.335–371. https://doi.org/10.1080/10508406.2016.1180297

Ma, J. Y. (2017). Multi-party, whole-body interactions in mathematical activity. *Cognition and Instruction*, *35*(2), s.141–164. https.//doi.org/10.1080/07370008.2017.1282485

Mandelid, M. B., Tjomsland, H. E., Resaland, G. K., & Røsseland, M. (2022) Fysisk aktiv læring i matematikkundervisninga (T. Brøyn, Red.) *Bedre skole* (1), s.40–45.

Næss, N. G. & Sjøvoll, J. (2019). Observasjon som forskningsmetode. I M. Krogtoft & J. Sjøvoll (Red.), *Masteroppgaven i lærerutdanninga - temavalg, forskningsplan, metode* (2.utg), s.179–195, Cappelen Damm Akademisk.

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm akademisk.

Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational studies in mathematics*, *42*(2), s.179–196. https://doi.org/1023/A:1004175020394

Roschelle, J. (2000). Choosing and using video equipment for data collection. I A. Kelly & R. Lesh, (Red.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, s.709–729. Kleuwer.

Skovsmose, O., & Säljö, R. (2008). Learning mathematics through inquiry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *13*(3), s.31–50. Hentet fra: https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/13_3_031052_skovsmose.pdf

Smestad, B. (2008). Geometriaktiviteter i lys av van Hieles teorier. *Tangententidsskrift for matematikkundervisning*, *1*(19), s.2–6.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2 - matematikkundervisning på 5. til 7. trinn.* Gyldendal akademisk.

Steene-Johannessen, J., Anderssen, S., Bratteteig, M., Dalhaug, E. M., Andersen, I. D., Andersen, O. K., . . . Dalene, K. (2019). *Kartlegging av fysisk aktivitet, sedat tid og fysisk form blant barn og unge 2018 (ungKan3).* Hentet fra: https://www.fhi.no/globalassets/bilder/rapporter-og-trykksaker/2019/ungkan3_rapport_final_27.02.19.pdf.

Svingen, O. (2018). *Representasjoner i matematikk.* Matematikksenteret.

Tjora, A. (2021). Kvalitative forskningsmetoder i praksis (4. utg.). Gyldendal.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the middle school*, *13*(8), s.438–445.

Vingdal, I. (2014). Fysisk aktiv læring, et helhetlig læringssyn. I I. Vingdal (Red.), *Fysisk aktiv læring*, s.37–57. Gyldendal.

Watson, A., Timperio, A., Brown, H., Best, K., & Hesketh, K. D. (2017). Effect of classroom-based physical activity interventions on academic and physical activity outcomes: a systematic review and meta-analysis. *International Journal of Behavioral Nutrition and Physical Activity*, *14*(1), s.1–24. https://doi.org/10.1186/s12966-017-0569-9

VEDLEGG

VEDLEGG 1 – FIRKANTJAKT

NAVN:

FIRKANTJAKT

Jobb sammen i grupper å skriv deres definisjon på begrepene under

Hva er et rektangel?

Hva er omkrets?

Hvordan finner vi omkretsen til et rektangel?

Hva er areal?

Hvordan finner vi arealet til et rektangel?

Dra ut på firkantjakt og fyll ut skjemaet under

Firkantet objekt	Hvilke og hvorfor (egenskaper)	Hva er omkretsen?	Hva er arealet?
1.)			
2.)			
3.)			
4.)			
5.)			
6.)			

Velg dere ut en av firkantene dere fant og forklar arealet til figuren (Vis gjerne ved hjelp av tegning).

Firkant er______.

OPPVARMINGSOPPGAVE

«HVORDAN KAN DERE LAGE ET REKTANGEL MED DETTE TAUET?»

«HVA ER DET SOM GJØR AT DERE HAR LAGET ET REKTANGEL NÅ?»

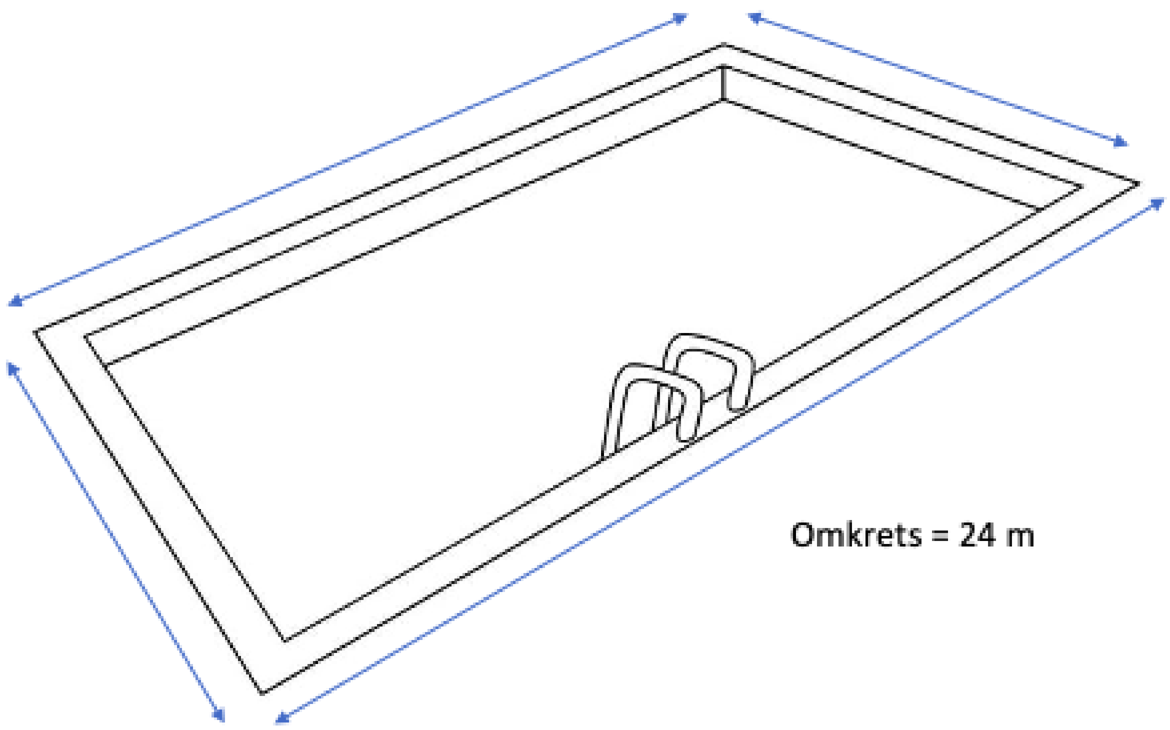
Basseng-oppgave

Vi skal lage et firkantet svømmebasseng og trenger hjelpen deres.

Alle fire vinklene skal være 90 grader.

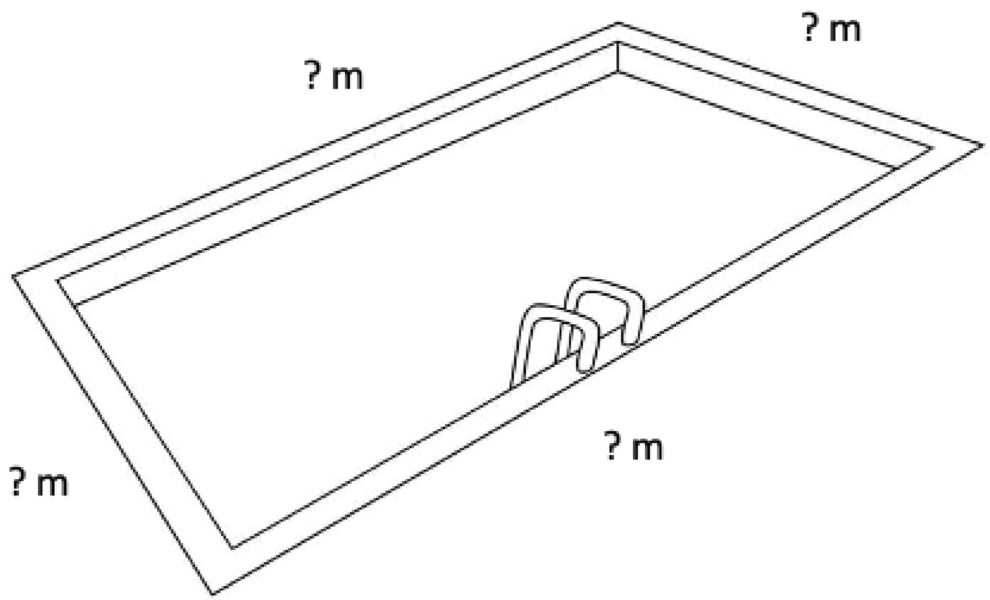
Omkretsen er på 24 meter.

Kan dere hjelpe oss med å måle opp tre mulige svømmebasseng som vi kan lage?



Oppgave 2:

Vi vil at størrelsen på svømmebassenget skal være så stort som mulig, men omkretsen kan fortsatt bare være 24 meter. Kan dere hjelpe oss med hvilket **mål** svømmebassenget bør ha?



Oppgave 3:

Hvordan vet dere at svømmebassenget har det største mulige arealet?

Oppgave 4:

Prøv å forklare hva som skjer når dere endrer størrelse på svømmebassenget, diskuter i gruppen og skriv ned.

Oppgave 5:

Velg dere en annen omkrets og undersøk hva som skjer med arealet for bassenget?

Oppgave 6:

Kan dere finne ut hva som er likt hos de største bassengene med ulik omkrets. Forklar hvorfor dere tror det er slik.

VEDLEGG 3 – NSD GODKJENNELSE

Vurdering av behandling av personopplysninger

Referansenummer

890403

Vurderingstype
Standard

Dato
30.10.2022

Prosjekttittel
Masteroppgave matematikkdidaktikk innen fysisk aktiv læring

Behandlingsansvarlig institusjon
Høgskulen på Vestlandet / Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett / Senter for fysisk aktiv læring

Prosjektansvarlig
Silke Lekaus

Student
Oskar Roti

Prosjektperiode
01.09.2022 - 15.06.2023

Kategorier personopplysninger

- Alminnelige

Lovlig grunnlag

- Samtykke (Personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a)

Behandlingen av personopplysningene er lovlig så fremt den gjennomføres som oppgitt i meldeskjemaet. Det lovlige grunnlaget gjelder til 15.06.2023.

Kommentar

OM VURDERINGEN

Personverntjenester har en avtale med institusjonen du forsker eller studerer ved. Denne avtalen innebærer at vi skal gi deg råd slik at behandlingen av personopplysninger i prosjektet ditt er lovlig etter personvernregelverket. Personverntjenester har nå vurdert den planlagte behandlingen av personopplysninger. Vår vurdering er at behandlingen er lovlig, hvis den gjennomføres slik den er beskrevet i meldeskjemaet med dialog og vedlegg.

VIKTIG INFORMASJON TIL DEG

Du må lagre, sende og sikre dataene i tråd med retningslinjene til din institusjon. Dette betyr at du må bruke leverandører for spørreskjema, skylagring, videosamtale o.l. som institusjonen din har avtale med. Vi gir generelle råd rundt dette, men det er institusjonens egne retningslinjer for informasjonssikkerhet som gjelder.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET

Prosjektet rommer tre masteroppgaver med felles tema og varighet. Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 15.06.2023, om følgende to utvalg: Utvalg 1: Lærere i grunnskolen, og Utvalg 2: Elever i alderen 8-13 år.

LOVLIG GRUNNLAG, UTVALG 1 og 2

Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger og fra de foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake. Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være registrertes/foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER

Personverntjenester vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om: lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at den registrerte/foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER

Personverntjenester vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte/foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13. Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20). Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
Personverntjenester legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32). Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring, videosamtale o.l.) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med. For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til oss ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra oss før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
Personverntjenester vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos oss:
Anne Marie Try Laundal
Lykke til med prosjektet!

VEDLEGG 4 – SAMTYKKESKJEMA

Vil du delta i forskningsprosjektet *Fysisk aktiv læring i matematikk?*

Dette forskningsprosjektet består av to masteroppgaver med to ulike formål. Vi ønsker å undersøke hvordan elever samtaler i grupper gjennom bruk av fysisk aktiv læring som undervisningsmetode i matematikk og hvordan fysisk aktiv læring kan bidra til utforskende matematikk. Omfanget på prosjektet strekkes over et par økter gjennom en uke. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Prosjektet består av tre masterstudenter som til sammen skal skrive to oppgaver med ulike fokus. De ulike oppgavene er beskrevet under:

1. **Oskar Roti og Elias Borlaug Eide – Samtalekvaliteter mellom elever ved gjennomføring av fysisk aktiv læring i matematikk**
   Vi ønsker å gå i dybden i hvordan elevene samtaler i lag under gjennomføring av FAL i matematikkundervisning. Basert på et teoretisk rammeverk vil vi gjøre en analyse for å kvalifisere samtalene som blir gjort i gruppene.

2. **Kristoffer Sydnes – Fysisk aktiv læring i arbeid med utforskende læringsaktiviteter**
   Med min studie ønsker jeg å se nærmere på hvordan fysisk aktiv læring kan være med å bidra til utforskende matematikk. Jeg skal analysere elevenes bidrag i undervisningen ut ifra ulike elementer for utforskende matematikk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Høgskulen på Vestlandet er ansvarlig for prosjektet. Våre veiledere er Beate Lode (Oskar Roti og Elias Borlaug Eide) og Shengtian Zhou (Kristoffer Sydnes).

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta siden vi har kommet i kontakt med din lærer og skole, og fått tillatelse til å forske hos dere. Vi er tre masterstudenter som skal samle inn data til masteroppgavene våre og veldig interessert i utføre vår forskning hos dere.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis dere velger å delta i prosjektet innebærer det at vi kan observere, ta lydopptak av gruppesamtaler og filme fra undervisningen. Om det kun er mulighet for deltagelse på en eller to av innsamlingsmetodene er det mulig å krysse av for dette på slutten av skjemaet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Barnet blir også informert om at deltakelsen er frivillig. Hvis dere velger å delta, kan dere når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger til barnet vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for barnet hvis dere ikke vil delta eller senere velger å trekke samtykket. Dersom dere ikke ønsker å delta får barnet et tilbud om et alternativt opplegg i de aktuelle timene.
Samtykket for deltagelsen i prosjektet kan trekkes tilbake muntlig eller skriftlig/ e-post til enten deres matematikklærer eller til meg direkte.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.
Datamaterialet vil bestå av film- og lydopptak av elevene som deltar. Mens vi behandler dette datamaterialet vil datamaskinen som blir brukt ikke være koblet til internett, slik at ingen uvedkommende får tilgang til datamaterialet. Film- og lydopptakene vil bli lagret på en minnepenn med passord, som oppbevares i et låst skap.
Underveis i prosessen vil det kun være tre masterstudenter og to veiledere som har tilgang til datamaterialet. Deres navn er Beate Lode, Oskar Roti, Elias Borlaug Eide og Shengtian Zhou og Kristoffer Sydnes.
Samtaler fra lyd- og videoopptak vil bli transkribert. Etter at datamaterialet er transkribert vil alt materiale som blir brukt være anonymisert. Deltakere vil ikke kunne bli identifisert i publikasjoner.

Hva skjer med personopplysningene dine når forskningsprosjektet avsluttes?
Datamaterialet som blir samlet inn i form av lyd- og videoopptak blir lagret på en minnepenn fra HVL frem til prosjektet avsluttes 15.06.2023. Minnepennen er sikret med passord og vil være innelåst når den ikke er under oppsyn av noen i prosjektet. Etter avsluttet prosjekt vil lyd- og videoopptak slettes og bare de anonymiserte transkripsjonene vil beholdes.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på deres samtykke.
På oppdrag fra Høgskulen på Vestlandet har Personverntjenester vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettigheter
Så lenge du/barnet ditt kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om deg som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om deg
- å sende klage til personvernombudet Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger

Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med

- Veiledere:
  - Beate Lode, på telefon: 55 58 59 30 eller e-post: Beate.Lode@hvl.no
  - Shengtian Zhou, på telefon: 55 58 55 22 eller e-post: Shengtian.Zhou@hvl.no
- Masterstudenter:
  - Oskar Roti, på telefon: 41 76 32 13 eller e-post: oskar98@live.no
  - Elias Borlaug Eide, på telefon: 94 85 78 58, eller e-post: eliaseide98@gmail.com
  - Kristoffer Sydnes, på telefon: 40 49 88 98 eller e-post: k.sydnes@hotmail.com
- HVL sitt personvernombud: Trine Anikken Larsen, på epost: Trine.Anikken.Larsen@hvl.no eller telefon: 55 58 76 82

Hvis du har spørsmål knyttet til Personverntjenester sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester på epost: personverntjenester@sikt.no (oppgi ref.nr. 890403) eller på telefon: 53 21 15 00.

Med vennlig hilsen

Beate Lode	Oskar Roti
Shengtian Zhou	Elias Borlaug Eide
(Veiledere)	Kristoffer Sydnes
	(Studenter)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Fysisk aktiv læring i matematikk*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐Å bli observert i sammenheng med undervisningstime
- ☐Å delta i gruppesamtaler hvor lyd blir tatt opp
- ☐Å delta i en undervisningstime som blir filmet
- ☐Å samle inn skriftlige elevbesvarelser

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av foresatte til prosjektdeltaker, dato)

VEDLEGG 5 – INFORMASJONSSKRIV

Invitasjon til å delta på forskningsprosjekt for masteroppgaver

Vi er tre masterstudenter ved HVL Bergen som skal levere vår masteroppgave i matematikk våren 2023. Vi ønsker å forske på fysisk aktiv læring i skolen, og vi vil derfor komme i kontakt med din skole for å forhøre om dette er noe som kan være aktuelt å delta i.

Til sammen skal vi skrive to oppgaver, da to av oss skal samarbeide om en oppgave. En kort beskrivelse av disse presenteres nedenfor. Vi skal samle data sammen gjennom observasjon, lydopptak og videoopptak. I utgangspunktet kunne vi tenkt å gjennomføre undervisningsopplegg med fokus på geometri og måling.

Beskrivelse av masterprosjekt om fysisk aktiv læring

Prosjekt 1, Oskar og Elias:

Vi skal skrive en masteroppgave i lag, der vi skal undersøke hvordan samtalene går for seg ved å bruke fysisk aktiv læring som undervisningsmetode i matematikk. Vi ønsker gjerne å gjennomføre et opplegg i geometri på skolen deres, der vi bruker videokamera og lydopptaker for å analysere samtalene som blir gjort mellom elevene i undervisningen. Vi ser for oss at stasjonsarbeid på mellomtrinnet med grupper på 2-4 elever vil være gunstig med tanke på analysearbeidet og kvaliteten på samtalene som finner sted. I etterkant av undervisning og transkribering, vil vi analysere samtalene som har blitt gjort på bakgrunn av et teoretisk rammeverk. Her ser vi for oss å forme et rammeverk med utgangspunkt i tidligere forskning - Herheim (2016), Rommetveit (1992), Drageset (2022), Alrø & Skovsmose (2002), Mercer (2004), Rangnes (2012), Todd & Barnes (1978), Bakthin (1986) og Gadamer (2004).

Prosjekt 2, Kristoffer

Jeg ønsker å se nærmere på hvordan elevene arbeider fysisk med undersøkende geometrioppgaver. Mer spesifikt hvordan det fysiske kommer til uttrykk. For meg vil det derfor være fordelaktig at elevene har erfaring med å utforske og samhandle i en slik prosess. Bakteppet for studien er Berthelot og Salin (1998) sitt arbeid rundt arbeid med geometri i ulike rom. I deres arbeid viser de til at det kan være krevende for elever å overføre og anvende kunnskap om geometri fra kladde- og lærebøker (mikrorommet) til rommet utenfor (mesorommet). Dette kan brukes som et argument for å drive geometriundervisningen aktivt i mesorommet.

Vi trenger/ser for oss:

- Informanter på mellomtrinnet
- Mulighet til å gjennomføre geometri undervisning
- 2-3 undervisningsøkter (avhenger av økt struktur)
- Diskusjonsmøte med lærer til aktuelle informanter om elevforutsetninger, rammer rundt skolen og undervisningsøktene.
- Godkjenning fra foresatt og informant om lov til å benytte oss av bruk av film og lydopptak.

NB! Vi har fått godkjent NSD og har klart informasjonsskriv til lærere og foresatte til elever dersom det blir aktuelt å samle inn data på deres skole. Vi kunne gjerne tenkt oss å komme relativt kjapt i kontakt med dere, for å klargjøre om det vil være aktuelt å gjennomføre studiene hos dere.

Mvh

Oskar, Elias og Kristoffer

Ta gjerne kontakt med oss gjennom Kristoffer på k.sydnes@hotmail.com eller 40498898.