Høgskulen
på Vestlandet

MASTEROPPGÅVE

«Vi teikna for å vere sikre vi»: Teikning i matematisk resonnering

"We drew to be sure": Drawing in mathematical reasoning

Tina Kjøde Honningsvåg

Master i matematikk i Grunnskulelærarutdanninga 1-7

Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett

Institutt for språk, litteratur, matematikk og tolking

Rettleiar: Kirsti Rø

Innleveringsdato: 15.mai 2023

Forord

Denne masteroppgåva markerar slutten på mine fem år som lærarstudent, derav tre år på Høgskulen i Volda og to år på Høgskulen på Vestlandet avdeling Bergen. Dette har vore fem fine år, med gode minner og gode venar, der eg har fullført ei utdanning eg er stolt av.

Prosessen med å skrive denne masteroppgåva har vore både krevjande, spennande og lærerik. Val av tema i denne oppgåva vart born sin bruk av teikning i deira resonnering. Dette er eit tema eg sjølv synast var interessant, samstundes som det er eit viktig og aktuelt tema innan matematikkdidaktikk.

Eg ynskjer å rette ei stor takk til alle som har vore med å gjere denne oppgåva til ein realitet, og hjelpt meg gjennom masteroppgåva. Fyrst vil eg takke min rettleiar, Kirsti Rø, for god rettleiing, godt samarbeid og konstruktive tilbakemeldingar på oppgåva. Eg ynskjer å overrekke ei stor takk til skulane, lærarane og elevane som deltok i studien min, og for at eg fekk innblikk i dykkar resonnering i matematikk. Utan dykk hadde det ikkje vorte nokon studie. Eg vil takke familie, sambuar og venar for støtta de har vist. Takk til min sambuar, mi mor og mitt søskenbarn for korrekturlesing av oppgåva. Sist men ikkje minst vil eg takke mine med-studentar for motivasjon, støtte, og hjelpsemd. De har vore utruleg viktige i denne prosessen!

Bergen, mai 2023

Tina Kjøde Honningsvåg

Samandrag

Studien fokuserer på korleis born nytta teikning som eit verkty i matematikk. Nærare bestemt var føremålet med studien undersøkje korleis elevar på 4.trinn nytta teikning i si resonnering i matematikk. Dette resulterte i følgjande problemstilling: *Korleis nyttar elevar på 4.trinn teikning i arbeid med matematisk resonnering?*

Den metodologiske tilnærminga til studien er kvalitativ. Studien består av observasjon, intervju og innsamling av elevarbeid. I studien gjennomførte eg i forkant eit pilotprosjekt som hadde som føremål å forberede meg på datainnsamlinga. Deltakarane i studien var 24 elevar frå to ulike klassar. Elevane arbeidde i par, og kvart par løyste tre til fire oppgåver, og totalt vart det samla inn 43 elevarbeid. Det vart gjennomført video-opptak av seks elevpar, samt to fokusgruppeintervju med oppfølgingsspørsmål frå observasjonen. Dette for å få elevane til å utdjupe uklare element og høyre meir om elevane si resonnering og elevane sine teikningar.

Med utgangspunkt i datamaterialet vart det forma passande kategoriar, ut i frå eksisterande teoriar om born sin bruk av teikning. Kategoriar for teikning vart henta frå mellom anna Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020). For å knytte bruk av teikningane opp mot elevane sine matematiske resonneringsprosessar nytta eg rammeverket til Jeannotte og Kieran (2017). Det vart med dette gjennomført ei abduktiv analyse.

Resultata mine viser at elevane i 19 av 21 tilfelle nytta teikning som eit verkty, der flest nytta teikning som konkretiseringsmateriale. Andre nytta teikninga som informasjonshaldar for å halde oversikt over dei ulike elementa i oppgåva. Teikning som ein representasjon av ei løysing vart òg nytta. Dette både for å kommunisere løysinga med andre, og for å grunngje eller bevise ei hypotese. Berre to teikningar hadde ikkje funksjon for resonneringa til elevane. Generelt har eg funne at teikning verkar å vere eit nyttig verkty i matematikk. Teikning kan ha stort potensiale dersom elevane har erfaring og kunnskap om korleis dei kan nytte teikning i oppgåver i matematikk. Teikninga vart nytta for å forme hypotese, revidere hypotese, støtte grunngjeving eller støtte bevis, anten det var som informasjonshaldar, for å presentere ei løysing, eller som konkretiseringsmateriale.

Nøkkelord: teikning, resonnering, barneskulen

Abstract

The study focuses on how children use drawing as a tool in mathematics. More specifically, the goal of this study was to investigate how students in 4th grade use drawing in their mathematical reasoning. This resulted in the following research question: *How do students in 4th grade use drawing in their work with mathematical reasoning?*

The methodological approach is qualitative. The study is based on observation, interview, and collection of students´ written work and their drawings. A pilot project was undertaken to prepare and try out the data collection. The participants of the study were 24 students from two different classes. The students worked in pairs, and each pair solved three to four tasks. In total, 43 written works were collected from these students. Video recordings of six student pairs and two focus-group interviews with follow-up questions from the observation were executed. This gave the students the opportunity to elaborate on unclear elements, and I got to hear more about the students' reasoning and their drawings.

Based on the data material, suitable categories were formed with support from existing theories about children's use of drawings. The categories were inspired by the framework of Saundry and Nicol (2006), and Dahl (2020). To link the use of the drawings to the students' mathematical reasoning processes, I used the framework of Jeannotte and Kieran (2017). Thus, the analysis process can be described as abductive.

My results show that, in 19 out of 21 cases, the students used drawing as a tool, where the most students used drawing as manipulative. Others used their drawings as an information holder to keep track of the different elements in the task. Drawing as a representation of a solution was also used. The reason for this was to communicate the solution with others, and to justify or prove a hypothesis. Only two drawings had no function for the students' reasoning. In general, my findings point to the fact that drawing seems to be a useful tool in mathematics. Drawing may have a great potential if the students have the experience and knowledge of how to use drawing in mathematical tasks. The drawing was used to form a hypothesis, revise the hypothesis, support the justification or to support a proof, either if it was as an information holder, to present a solution, or as manipulative.

Keywords: drawing, reasoning, primary school

Innhaldsliste

Figuroversikt

Tabelloversikt

1. Innleiing

I mi masteroppgåve undersøkjer eg korleis born nyttar teikning som verkty i matematikk, nærare bestemt korleis fjerdeklassingar nyttar teikning i matematiske resonneringsprosessar. Teikning i matematikk har vorte eit meir aktuelt forskingsområde dei siste åra, noko som også har ført til at nye problemstillingar har oppstått. I dei følgjande kapittel presenterer eg bakgrunn for oppgåva, kva føremålet med studien er, samt mi problemstilling. Avslutningsvis i kapittelet gjev eg ei oversikt over den vidare strukturen til oppgåva.

1.1 Bakgrunn for val av tema

Teikning er ein populær aktivitet hjå fleire born, spesielt i tidleg barndom. Teikningane til born har ulike føremål, både heime, i leik og på skulen (Papandreou, 2014). På skulen kan teikning verte nytta som ein representasjon i matematikk, men skiljet mellom å teikne fordi det er kjekt, og teikne for å kommunisere med andre eller for å løyse ei matematisk oppgåve er stor (Woleck, 2001; Crespo & Kyriakides, 2007). Når born kjem til skulen har dei med seg erfaringar med matematiske omgrep, der omgrepa som oftast er uttrykt anten ved å nytte konkretar eller munnleg språk. Elevar har sjeldan med seg mange erfaringar med skriftlege matematiske uttrykk (Alseth & Røsseland, 2014).

Fleire forskarar peikar på at det er eit positivt forhold mellom teikning, og å løyse matematikkoppgåver (Edens og Potter, 2001; Bakar et al., 2016; Saundry & Nicol, 2006). Born nyttar også teikning for å bringe ideane sine fram, slik at dei enklare kan kommunisere tankane sine med andre (Woleck, 2001). Til trass for at det er anerkjent at teikning hjelp born med deira matematiske tenking, fann Bakar et al. (2016) at teikning ikkje vart nytta i like stor grad som ein skulle tru. Saundry og Nicol (2006) skriv at forsking på korleis små born skapar meining gjennom teikning er i utvikling.

Sjølv om det finst forsking på korleis elevar nyttar teikning som eit verkty i matematikk, meiner samstundes fleire forskarar det trengs meir forsking innan tema. Både Woleck (2001), Saundry & Nicol (2006), Bakar et al. (2016) og Kleven (2022) nemner at forskinga av born sine teikningar i matematikk er avgrensa, og dei etterlyser meir forsking rundt temaet. Woleck (2001) hevdar at sjølv om det finst eit breitt syn på representasjonar, har få studiar fokusert på eit verkty som kan vere nyttig for representasjon og kommunikasjon i matematikk, nemleg teikning. Saundry og Nicol (2006) etterspør meir forsking rundt prosessen til teikningane, og kva rolle teikningane har i elevane si matematiske resonnering. Med andre ord hevdar Saundry og Nicol (2006) at det ikkje er tilstrekkeleg å studere teikning som eit ferdig produkt. Også Bakar et al. (2016) argumenterer for at ein ikkje burde sjå berre på den ferdige teikninga, men også studere teikneprosessen. Kleven (2022) legg til at det er manglande forsking innan temaet i norsk skulekontekst, noko som gjer det interessant å undersøkje korleis teikning vert nytta i matematikk i den norske skulekonteksten.

I læreplanverket for kunnskapsløftet 2020, som eg frå no omtalar som LK20, vart det innført fleire kjerneelement i matematikkfaget. Kjerneelement er det mest tydingsfulle faglege innhaldet elevane skal arbeide med i opplæringa (Utdanningsdirektoratet, 2019). Eit av kjerneelementa som vart innført i LK20 var *resonnering og argumentasjon* (Kunnskapsdepartementet, 2019). Utvikling av elevar si matematiske resonnering er ei målsetjing i LK20, og ein vesentleg del av matematikk både i skule- og forskingsmiljø. Både Ball og Bass (2003) og Jeannotte og Kieran (2017) peikar på at resonnering er ei grunnleggjande ferdigheit i matematikk. Dei nemnde faktorane er med på å gjer det svært interessant å forske på elevar si resonnering i matematikk i deira teikneprosess.

Til trass for at resonnering er «limet» i matematikk, er det ikkje alltid heilt klart kva eit matematisk resonnement består av. Då det ofte er antatt at alle har ein følelse eller ei meining om kva resonnering er, og at omgrepet kan vere tvitydig ynskja Jeannotte og Kieran (2017) å klargjere element innan matematisk resonnering. I denne studien nyttar eg Jeannotte og Kieran (2017, s.7) sin definisjon for matematisk resonnering som er at er matematisk resonnering «ein prosess der ein ved å kommunisere med andre eller seg sjølv, gjer det mogleg å slutte matematiske påstandar frå andre matematiske påstandar». Jeannotte og Kieran (2017) hevdar at om lærarar skal bidra til å utvikle matematiske resonnement hjå elevane, må lærarane vere i stand til å kjenne att strukturar og prosessar i matematisk resonnering.

Temaa i studien er relevante for lærarar i barneskulen å kunne noko om, og er såleis også nyttig for meg i min framtidige lærarprofesjon. I tillegg til faktorane nemnt ovanfor er temaa for meg er veldig interessante, og eg har eit stort ynskje å lære meir om teikning og resonnering i matematikk.

1.2 Studien sitt føremål og problemstilling

Føremålet med studien er å få innsikt i korleis elevar på 4.trinn nyttar teikning i den matematisk resonneringa si når dei løyser oppgåver i matematikk. Ut i frå dette føremålet vart følgjande problemstilling komponert:

Korleis nyttar elevar på 4.trinn teikning i arbeid med matematisk resonnering?

I denne problemstillinga inngår det å belyse korleis teikneprosessane til elevane i studien har innverknad på deira matematiske resonneringsprosessar. Ved å sjå nærare på resonneringsprosessane som skjer hjå elevane, samstundes som å sjå på teikningane sin funksjon gjennom denne prosessen, vonar eg å finne ut på kva måte teikning kan vere eit nyttig verkty i matematisk resonnering.

Både Ball (2003) og Jeannotte og Kieran (2017) ser på resonnering som grunnleggjande i matematikk. Samstundes er resonnering og argumentasjon som sagt vektlagt i LK20 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Det er naudsynt at lærarar har kompetanse om korleis ein identifiserer matematiske resonneringsprosessar for å kunne støtte elevane til å utvikle deira resonnering, noko eg vonar denne studien kan bidra til (Jeannotte & Kieran, 2017).

Eg har òg eit ynskje om at min studie kan vere eit bidrag til å kjenne att potensiale som ligg i teikneprosessane til elevane når det gjeld resonnering i matematikk. Det å kunne kjenne att dette potensialet er i følgje Bobis og Way (2018) ei ferdigheit lærarar burde tileigne seg. Elevar teiknar gjerne ikkje spontant, og har ofte ikkje erfaringar med å teikne for eit matematisk føremål (Woleck, 2001; Bakar et al., 2016). Sjølv om teikning ofte er nytta hjå born, peikar Woleck (2001) på skiljet mellom å teikne fordi det er kjekt og for å teikne i matematikk. I følgje Bakar et al. (2016, s.92) trengst det ei bevisst pedagogisk rettleiing frå ein lærar når born teiknar i matematikk, noko vi har for lite kunnskap om.

Fleire forskarar, mellom anna Bakar et al. (2016), hevdar at teikning ikkje har høg status i klasserommet i matematikk, til trass for fleire forskarar sitt funn om viktigheita av teikninga som matematisk representasjon. Lærarar kan ved kunnskap om elevar si resonnering og elevar sine teikneprosessar i større grad får innsikt i elevane si tenking, som sitatet til Woleck (2001, s.215) seier: «Drawing can be a window into the mind of a child.»

1.3 Oppgåva sin struktur

Eg presenterer no ei oversikt over oppgåva sin vidare struktur, der eg fortel kort kva dei komande kapitla inneheld. Neste kapittel, teori og tidlegare forsking, byrjar med ein presentasjon av tidlegare forsking om teikning som verkty i matematikk, samt tidlegare forsking om matematisk resonnering og bevis på barnetrinnet. Vidare tek eg føre meg teikning som visuell representasjon i matematikk, ulike resonneringsprosessar, og ulike typar bevisoppgåver. Eg vil presentere rammeverket til Saundry og Nicol (2006) og til Dahl (2020) om bruk av teikning i matematikk, og Jeannotte og Kieran (2017) sin modell av matematiske resonneringsprosessar.

I kapittel tre gjer eg greie for mi forskingsmetode og utval av informantar. Her er den metodiske tilnærminga kvalitativ, då eg ser på den som mest føremålstenleg med omsyn til oppgåva si problemstilling. Dernest seier eg noko om korleis datainnsamlingsprosessen gjekk føre seg, med pilotprosjekt, intervju og observasjon. Oppgåvene som er nytta i studien er presentert og gjort greie for i kapittelet. Eg grunngjev val av oppgåver, ser på moglege løysingar, samt drøftar potensialet som ligg i oppgåvene. Analysemetode er presentert, der eg går nærare inn på transkripsjon, open koding og analysereiskap. Avslutningsvis drøftar eg studien sin kvalitet og etiske omsyn hjå studien.

Analysen av datamaterialet er presentert i kapittel fire. Analysekapittelet byrjar med ei oversikt over teikningane og episodane i datamaterialet. Vidare er analysen delt opp i fire delar, der eg tar for meg teikning utan funksjon, teikning som informasjonshaldar, teikning som presentasjon av ei løysing og teikning som konkretiseringsmateriale. Under kvar kategori presenterer eg episodar frå datamateriale der eg ser på korleis elevane nyttar teikning i si resonneringa. I slutten av kapittelet kjem ei oppsummering av analysen. I kapittel fem vil eg diskutere resultata frå analysen, og sjå mi forsking opp mot tidlegare forsking. Dernest vert pedagogiske implikasjonar, og studiane sine avgrensingar drøfta. I kapittel 6 gjer eg avsluttande refleksjonar, og kjem med forslag til vidare forsking.

2. Teori og tidlegare forsking

Studien min omhandlar elevar sin bruk av teikning i matematisk resonnering. I denne delen av oppgåva vil eg fyrst presentere tidlegare forsking som er gjort innan teikning i matematikkfaget, samt innan resonnering og bevis på barnetrinnet. Dernest vil eg ta føre meg representasjonar i matematikk, då med vekt på teikning som visuell representasjon. Her presenterer eg rammeverket til Saundry og Nicol (2006), samt Dahl (2020) sine kategoriar for teikning, då nokre av kategoriane vil vere ein del av mitt rammeverk. Vidare presenterer eg Jeannotte og Kieran (2017) sine prosessar for matematisk resonnering. Eg skriv om ulike oppgåver i matematikk, der eg presenterer A. J. Stylianides (2016) sine tre hovudkategoriar for oppgåver innan bevis. Dette fordi eg i datainnsamlinga gav elevane oppgåver som fell innan alle kategoriane. Avslutningsvis i kapittelet vil eg kome med ei oppsummering av rammeverk for analyse.

2.1 Tidlegare forsking

I kapittelet vil eg presentere teikninga sin funksjon i matematikk i tidlegare forsking, samt presentere tidlegare forsking om bevis og resonnering på barnetrinnet.

2.1.1 Teikninga sin funksjon i matematikk i tidlegare forsking

Innan temaet finn vi fleire sentrale forskarar, som mellom anna Saundry og Nicol (2006), Dahl (2020), Bakar et al (2016), Edens og Potter (2007), Papandreou (2014) og Woleck (2001). Fyrst vil eg kommentere kva forsking som er gjort, korleis den vart gjennomført, og kva funn som vert presentert. Dernest vil eg kommentere skilnadar og likskapar ved dei ulike funna.

Saundry og Nicol (2006) er sentrale innan forsking på unge born si resonnering gjennom teikning i matematikk. Forskarane tok føre seg korleis andreklassingar responderte når dei fekk eit matematisk problem, kva type teikningar dei produserte, samt korleis elevane resonnerte samstundes som dei teikna. Dei såg òg på korleis lærarar kan støtte born i arbeid med å nytte teikning som verkty for å verte betre problemløysarar i matematikk. Gjennom forskinga si fann dei at teikninga hadde ulike funksjonar i problemløysinga. På bakgrunn av resultata vart det utarbeidd eit rammeverk der teikningane vart organisert inn i kategoriane 1) teikning som konkretiseringsmateriale, 2) teikning som støtte for system, 3) grad av sofistikertheit i teikninga og 4) visualisering (Saundry & Nicol, 2006). Kategoriane vert nærare presentert i delkapittel 2.2.2.

Dahl (2020) forska på born sine teikningar i multiplikative situasjonar. Ho kom fram til at teikning kan spele ei viktig rolle i prosessen med å løyse ei oppgåve, og at born hadde behov for å nytte teikninga som eit verkty undervegs i løysingsprosessen. I si forsking identifiserte ho fire kategoriar for funksjonen teikninga hadde: 1) teikning som utforskingsverkty, 2) teikning som informasjonshaldar og teljeverkty, 3) teikning som støtte for å utvikle reknestrategi og 4) teikning som representasjon av svaret. I likskap med Saundry og Nicol (2006) sitt rammeverk, vil også dette rammeverket verte presentert i delkapittel 2.2.2.

Bakar et al. (2016) sin studie såg på fyrsteklassingar sin bruk av matematiske representasjonar. I likskap med Saundry og Nicol (2006) tok studien føre seg elevane sine teikningar i problemløysing, nærare bestemt typar teikningar elevane produserte og korleis dei vart nytta. I studien fann Bakar et al. (2016) to typar teikningar; piktografisk og ikonisk. Tydinga av piktografisk og ikonisk teikning vert gjort greie for i delkapittel 2.2.1. Bakar et al. (2016) fann òg at elevane i studien nytta teikning på ulike måtar, der nokre elevar nytta teikning i etterkant av problemløysinga og nokre undervegs. Når elevane nytta teikninga undervegs, var teikninga nyttig i alle fasane då teikninga gjor det mogleg for elevane å modellere problemet. For elevane som teikna i etterkant av problemløysinga var teikninga med på å kommunisere løysinga på oppgåva til andre (Bakar et al., 2016, s. 92). Teikningane til elevane vart altså nytta i ulike fasar og for ulike føremål hjå borna. Forskarane kom fram til at det var ein klar fordel ved bruk av teikning i problemløysing, men at elevane ikkje teikna spontant. Dette funnet såg Bakar et at. (2016, s. 91) i samanheng med at elevane hadde manglande erfaring med å teikne for eit matematisk føremål, samt at teikning i matematikk ikkje hadde høg status hjå korkje elevar og lærarar.

Edens og Potter (2007) si forsking tok føre seg elevar frå sju til ni år, og deira forståing for proporsjonar og matematisk problemløysing. Funna i studien syner at proporsjonalitet og bruk av skjematiske teikningar har ein samanheng med ytinga til elevane i problemløysing. Såleis hevda Edens og Potter (2007) at det er meiningsfullt å integrere matematiske teikneoppgåver i undervisinga, og at det ut i frå funna i studien er eit positivt forhold mellom teikning og matematisk forståing. I ein tidlegare studie fann forskarane at elevane nyttar mindre teikning dess eldre ein vert (Edens & Potter, 2001). Edens og Potter (2001) fann òg i si forsking at teikning ikkje vart sett på som eit gyldig verkty i matematikk, men heller ein gøy kontekst der inga læring finn stad.

Papandreou (2014) fokuserte i si forsking på teikning som støtte for kommunikasjon i matematikk. Born nytta teikning for å kommunisere med andre, og Papandreou (2014, s.97) såg i sin studie at teikning kunne betre kommunikasjonen. Dette fordi teikningane kunne hjelpe born med å konstruere tydingar og symbol. Teikninga vart ofte kombinert med andre måtar å skape meining på, som til dømes bokstavar eller verbalt språk. Ein annan eigenskap dei fann ved teikning er at borna hugsa tidlegare kunnskap og erfaringar, utvikla nye idear, og sist men ikkje minst produserte strategiar og løyste problem (Papandreou, 2014, s.97). Med bakgrunn i sine funn argumenterte Papandreou (2014) for at teikning var ei kjent, populær og komfortabel aktivitet hjå elevane, då særleg når det var borna sine val å produsere ei teikning. Til trass for desse funn, påpeikte Papandreou (2014, s.85) at mange vaksne og lærarar ikkje såg på å nytte teikning i matematikk som like viktig som å nytte lesing og skriving.

Woleck (2001) undersøkte, i likskap med Papandreou (2014), korleis fyrsteklassingar nytta teikning når dei kommuniserte deira matematiske forståing ved å studere teikningane saman med munnlege utsegn. Woleck (2001) fann at teikning var ein måte elevane nytta for å få ned sine tankar. Vidare fann ho at sjølv om teikninga var nyttig i mange føremål, var det dialogen rundt teikningane som var med på å gje læraren innsikt i elevane sin matematiske forståing og tenking. Elevane i studien til Woleck (2001) nytta teikning på ulike måtar for deira matematiske læring og kommunikasjon. Teikningane hadde ein funksjon som forløparen til symbolbruk i matematikk. Woleck (2001) gav eit døme frå ei oppgåve der 20 hekser skulle reise på ei konferanse, men at dei berre hadde 8 sopelimar. Eit elevpar i studien byrja å teikne detaljrike hekser, men gjekk etter kvart over til å teikne heksene som strekar. Dette grunngav elevane med at det var enklare å teikne strekar, og at det var for tidkrevjande med detaljerte hekser. Med andre ord forstod elevane at heksene kan representerast på ein enklare måte ved å nytte strekar.

Summert kan ein seie at teikning vert framstilt i forskinga som eit nyttig verkty i matematikk, både i problemløysingssituasjonar og i kommunikasjon, men at teikning ikkje alltid vert sett på som ein gyldig representasjon i matematikk. Fleire forskarar har påpeikar at det finst ein positiv kopling mellom teikning og ferdigheit i matematikk (Bakar et al., 2016; Edens & Potter, 2007). I følgje Saundry og Nicol (2006, s.58) antyder fleire forskarar at det er ein samanheng mellom born sine ferdigheitar til å lage seg eit mentalt bilete og ferdigheita deira til å løyse problem i matematikk. Når born lagar seg mentale bilete, kan det føre til at dei tenkjer meir fleksibelt. Dette vil såleis vere til nytte når ein skal løyse eit problem i matematikk, og kan forbindast med Edens og Potter (2007) sine funn som seier at romleg forståing og skjematiske teikningar heng tett saman.

Samtidig viser studiar at det ikkje finst ein høg førekomst av bruk av teikning i matematikklasserom (Bakar et al., 2016). Bakar et al. (2016) nemner at borna i studien deira ikkje spontant teikna som ein del av den matematiske aktiviteten. Bakar et al. (2016) lagg vekt på at det ikkje var det å teikne som var utfordrande, men mangel på erfaring rundt teikning som verkty og representasjon i matematikk, samt at teikningar ikkje spontant vert kopla mot matematikk. Vidare hevder både Papandreou (2014) og Edens og Potter (2001) at teikning ikkje vert sett på som eit gyldig verkty i matematikk. Jamt over nemner dei fleste forskarane at lærarar i større grad bør vere med på å støtte bruk av teikning i matematikk.

Forskinga eg presenterer viser at teikningar elevar produserer i oppgåveløysing i matematikk kan verte kategorisert i ulike kategoriar for korleis teikninga vert nytta (Saundry & Nicol, 2006; Dahl, 2020). I tillegg til dette, skiljast det gjerne mellom detaljrike bilete og enkle teikningar. Saundry og Nicol (2006) nemner at somme born teiknar veldig detaljrike bilete for å representere enkle problem. Eit døme Saundry og Nicol (2006) kjem med er å teikne augevipper på personar som deler sete på bussen. Dei påpeikar at elevane kan gå glipp av det matematiske poenget med problemet, då fokuset fell på detaljane i staden. På ei anna side seier Woleck (2001) at elevane etterkvar forsto når det var føremålstenleg å nytte detaljar, og når dei burde la vere.

Både Dahl (2020) og Saundry og Nicol (2006) nemner i si forsking at teikning har ulike funksjonar i problemløysing. Dahl (2020, s.203) presenterer eit skilje mellom teikningar med problemløysande funksjon og utan. Saundry og Nicol (2006) ser også eit skilje mellom teikningar som er nytta undervegs i problemløysingar, og teikning som er nytta i etterkant av problemløysinga. Felles for forskarane er at teikning kan ha ein problemløysande funksjon på ulike måtar, og at forskarane utarbeida kategoriar for dette. Kategoriane vert nærare forklart i delkapittel 2.2.3, då nokre av dei vil vere ein del av mitt rammeverk.

2.1.2 Tidlegare forsking om matematiske resonnering og bevis på barnetrinnet

Eg vil presentere noko av den tidlegare forskinga om matematisk resonnering og bevis, avgrensa til barnetrinnet, då det er 4.trinn min studie omhandlar. Fleire forskarar har peika på at resonnering, argumentasjon og bevis er sentrale delar av matematikkfaget og dermed burde vere sentralt i matematikkundervisinga i skulen, også på barnetrinnet.

I følgje Jeannotte og Kieran (2017) er utvikling av elevar sitt matematiske resonnement ein vesentleg del av matematikken på alle nivå. Ved å skape seg ei oversikt over tidlegare forsking på matematisk resonnering, fann dei at omgrepet resonnering kan ha motstridande tydingar, samt at omgrepet i fleire dokument kan vere vage. Ein kan difor seie at omgrepet kan verke tvitydig, og at det ikkje finst ein eksplisitt definisjon (Jeannotte & Kieran, 2017). Med utgangspunkt i denne problemstillinga samla Jeannotte og Kieran (2017) inn bøker, artiklar og forsking med ynskje om å finne ut korleis forskarar nytta omgrepet, samt klargjere element innan den matematiske resonneringa. På bakgrunn av funna utvikla dei ein modell som består av to hovudaspekt for matematisk resonnering: eit strukturelt aspekt og eit prosessaspekt. Det strukturelle aspektet er statisk, og gjev ei skildring av korleis eit matematisk resonnement er bygd opp. Dette aspektet er ikkje like relevant for min studie, og vert dermed ikkje utdjupa ytterlegare. I kapittel 2.3 presenterer eg prosessaspektet, og utdjupar dette då det vil vere ein del av mitt analysereiskap. Jeannotte og Kieran (2017, s.7) definerer som nemnt matematisk resonnering som kommunikasjon med seg sjølv eller andre, som gjer det mogleg å slutte matematiske påstandar frå andre matematiske påstandar.

Studien til Ball og Bass (2003) vart bygd på data som vart samla inn frå tredje- og femte-klasse i løpet av eit skuleår. Ball og Bass (2003) fann, i likskap med Jeannotte og Kieran (2017), av si forsking at resonnering er heilt essensielt for å utvikle matematisk forståing, samt for å betre matematisk kunnskap. Dei delte resonnering inn i to prosessar som dei kalla «reasoning of inquiry» og «reasoning of justification». Den fyrste prosessen gjekk ut på at resonnering kunne nyttast for å oppdage og utforske nye idear, medan den andre kategorien omhandla funksjonen til resonnering for å bevise eller grunngje matematiske påstandar (Ball & Bass, 2003, s.30). «Mine elevar klarar ikkje dette» og «Elevane må vere evnerike for å kunne matematisk resonnering» er påstandar Ball og Bass (2003, s.40) høyrde frå lærarar, noko dei sa seg ueinige i. Dei hevda at elevar på barnetrinnet kan resonnere, berre dei lærar seg korleis dei kan gjere det. For å lære elevar i barneskule matematisk resonnering, sa Ball og Bass (2003) at ein kan velje og tilpasse oppgåver som gjev moglegheit for matematisk resonnering. Eit anna grep lærarar kan nytte for å lære elevar å resonnere, er å be dei grunngi svara sine ved å stille følgjande spørsmål: "Korleis veit du at du har funne alle løysingane?" og "Dersom nokon undrar på løysinga di, korleis kan du bevise at svaret er korrekt?" (Ball & Bass, 2003, s.41).

Matematisk resonnering vert ofte sett i samanheng med omgrep som argumentasjon og bevis (A. J. Stylianides, 2007; Stylianides & Ball, 2008; G. J. Stylianides, 2008). Bevis har ei avgjerande rolle i matematikk (A. J. Stylianides, 2016, s. 7). Dette kan refererast til Schoenfeld (2009, s. viiii) sitt kjende sitat: «If problem solving is the heart of mathematics, then proof is its soul». Bevis er altså, i følgje Schoenfeld (2009), sjela til all matematikk. Det er ein debatt rundt beviset sin plass innan matematikken, men grunnlaget er at bevis er fundamentalt for å fordjupe matematisk forståing (A. J. Stylianides, 2016). A. J. Stylianides (2016) skilde mellom å bevise (eng; proving,) og eit bevis (eng; proof). Å bevise er i følgje A. J. Stylianides (2016, s.11) den matematiske aktiviteten som skjer i leitinga etter eit bevis. Med dette tolkar eg proving til å vere prosessen frå ein prøvar å forme eit bevis, til beviset er forma. Vidare definerte A. J. Stylianides (2016; 2007) eit bevis som eit matematisk argument med påstandar for eller imot ein matematisk påstand.

G. J. Stylianides (2008) omtalar ulike typar argument og bevis, med ulik grad av gyldigheit. Ved argumentasjonsformer som er knytt til konkrete døme vert det presentert empirisk argument og generisk argument. Empirisk argument (eng: empirical argument) kan sjåast i samanheng med Balacheff (1988) og naiv empirisme, som vil seie at ein viser til nokre døme når ein skal argumentere for sin matematiske påstand. A. J. Stylianides (2016, s.18) definerer også empiriske argument som argument som gjev seg ut for å vise gyldigheita til ein påstand basert på bekreftande resultat i nokre døme (A. J. Stylianides, 2016, s.18). Om ein skal bevise noko ved bruk av slike argument må ein ta ein "leap of faith", altså å ta ein sjanse på at dette er korrekt då det manglar grunngjeving for kvifor påstanden alltid vil vere korrekt. Difor vert empiriske argument sett på som eit ugyldig bevis, sjølv om elevar har ein oppfatning av at slike argument er gyldige (Balacheff, 1988: A. J. Stylianides, 2016; G. J. Stylianides, 2008). Dette kan føre til at elevane ikkje ser behovet for å resonnere vidare (G. J. Stylianides, 2008).

Generiske argument (eng: generic argument) tek utgangspunkt i eit konkret døme, som er sett på som representativt for dei generaliseringar som er knytt til hypotesen (G. J. Stylianides, 2008; Balacheff, 1988). Med andre ord viser generiske argument gyldigheita til ei hypotesen ved å vise til eit spesifikt døme, der dette dømet nyttast for å forklare kva eigenskapar som ligg i døme slik at dømet kan nyttast for andre døme i same hypotese.

Rammeverket til G. J. Stylianides (2008) om arbeid med resonnering og bevis inneheld også argumentasjonsformer som ikkje tek utgangspunkt i eit eller fleire døme. Her vert det presentert utgreiing og generell logisk slutning, der det berre er generell logisk slutning som vert sett på som eit gyldig bevis. Generell logisk slutning (eng: demonstration) er ikkje avhengig av eit konkret døme for å vise til generaliseringane som er knytt til hypotesen (G. J. Stylianides, 2008). Den viser, ved aksepterte sanningar, at hypotesen er gyldig eller ugyldig for alle døme knytt til hypotesen. Utgreiing (eng: rationales) er nært knytt til ei generell logisk slutning, men dette argumentet vert ikkje sett på som gyldig. Dette fordi argumentet manglar eksplisitte referansar til aksepterte sanningar som er nytta. Utgreiing liknar på empiriske argument då ein i begge nyttar fleire døme for å finne ein samanheng. I ei utgreiing visast det til nokre samanhengar, men manglar eit bevis for kvifor samanhengane vil gjelde alle døme (G. J. Stylianides, 2008).

A. J. Stylianides (2007) la i si forsking vekt på gyldige bevis i matematikklasserom. For at eit argument skal sjåast på som eit bevis, må det oppfylle tre kriterier (Stylianides, 2007, s.291). For det fyrste må ein nytte utsegn og definisjonar som er akseptert av klasseromfellesskapet der ein ikkje treng å kome med ytterlegare grunngjevingar. Elevane må vidare nytte resonnementsformer som er gyldige og kjende for andre i klasseromfellesskapet. Den tredje kriteriet er at elevane må kommunisere beviset med representasjonar som er kjende og passande for klasseromfellesskapet. Det er fyrst når dei nemnde krava er tilfredsstilt at eit argument vert rekna som eit bevis.

Trass i viktigheita av bevis i klasserom i barneskulen fann A. J. Stylianides (2016) at bevisføring hadde liten plass i matematikk i skulen. Gjennom ein TIMMS-studie vart det funne at det var ein svært låg prosentdel av matematikkundervisinga som inneheldt bevis. Eit unntak var i Japan, der gjennomsnittleg 39% av matematikktimane inneheldt bevis (A. J. Stylianides, 2016, s.20). A. J. Stylianides (2016) reflekterte rundt dei ulike faktorane som påverka bevis sin manglande plass i grunnskulen, og kom fram til fire faktorar:

1. Teachers´ knowledge
2. Teachers´ beliefs
3. Pedagogical demands
4. Instructional support

Den fyrste faktoren A. J. Stylianides (2016) presenterte var låg kunnskap hjå fleire grunnskulelærarar rundt bevis. Det vart påpeika at lærarar ikkje skil mellom gyldige og ugyldige argumentasjonsmetodar. Døme på dette er at empiriske argument vart sett på som gyldige bevis innan generalisering. Den neste faktoren rundt mangel på bevis i grunnskulen er at bevis ofte vart sett på som eit tema for vidarekomne, og at det var for avansert for grunnskuleelevar. Den tredje faktoren gjekk inn på pedagogiske utfordringar lærarane hadde for å motivere elevane til å nytte bevis. Den siste faktoren A. J. Stylianides (2016) tok føre seg er mangel på undervisingsstøtte lærarar hadde tilgjengeleg for korleis dei skulle nå dette målet i klasserommet.

2.2 Representasjonar i matematikk

I klasserom vert elevar introdusert for fleire ulike representasjonar i matematikk, og representasjonane har ein nøkkelfunksjon for å lære matematikk (Bakar et al., 2016). Representasjonar har denne nøkkelfunksjonen fordi det er gjennom desse at matematikken er tilgjengeleg for oss. I motsetning til mellom anna kjemi, biologi og astronomi, kan vi ikkje på same måte sjå, lukte, eller ta på matematikk (Duval, 2006). Ein representasjon er ikkje eit statisk produkt, for tvert i mot er representasjonane med på å fange prosessen av å skape eit matematisk omgrep eller forhold (Woleck, 2001). Dei vert verkty for matematikarar å gje uttrykk, avklare, rettferdiggjere og kommunisere deira resonnering til andre (Bakar et al., 2016; Woleck, 2001).

Ein representasjon er noko som står for noko anna (Duval, 2006, s.103). Det er måtane vi representerer dei matematiske ideane på som vil vere avgjerande for om vi får tilgang til matematikken som ligg bak representasjonen eller ikkje. For det matematiske objektet som vi ser på som «ti» kan ein nytte ti strekar, ti klossar eller talsymbolet 10 (Duval, 2006). Å kunne beherske å byte frå ein representasjon til ein annan er ein viktig faktor for å fremje ferdigheitene sine i matematikk, då dette gjev tilgang til ulike aspekt ved dei matematiske objekta (Duval, 2006; Dahl, 2020).

Forsking indikerer at bruk av varierte representasjonar kan ha positiv effekt i læring og undervising, fordi det kan vere med på å støtte kommunikasjonen av matematiske idear, forståing av omgrep og løysing av problem (Bakar et al., 2016). Lærarar kan nytte ulike representasjonar for å engasjere elevane i matematisk resonnering, som igjen kan oppmuntre elevane til å grunngje sine val av representasjonar (Bakar et al., 2016, s.86). Det er viktig for lærarar å lage eksplisitte sambindingar mellom representasjonar når elevane møter meir formelle og konvensjonelle symbolske representasjonar (Bobis & Way, 2018, s. 56).

Bobis & Way (2018, s. 55) hevdar at representasjonar i matematikk er ein vesentleg del av små born sin kognitive, sosiale og emosjonelle utvikling. Bobis og Way (2018) trekkjer fram teikningar, leik, skriving, gestikulering og digitale produksjonar som måtar elevar kan uttrykkje seg på. Dette gjerast med støtte i fysiske objekt, teikningar, mentale bilete, symbol, eller verbale utsegn (Bobis & Way, 2018). Også i følgje Bakar et al. (2016, s.86) kan representasjonane i matematikk vere både fysiske og virtuelle konkretar, talliner, bilete, skriftlege og munnlege symbol. Representasjonar i matematikk kan altså vere mange ting, og dei er nødvendige for å gjere matematikken tilgjengeleg og mogleg å kommunisere om.

Gjennom elevar sin visualiserande representasjonar kan ein som lærar få eit betre innsyn i elevane si matematiske tenking, forståing og læring. Woleck (2001) uttrykkjer at elevar si teikning kan vere viktig får å oppdage og uttrykkje forståing. Innan matematiske representasjonar, har born sin bruk av teikning som verkty for å forstå og kommunisere matematikk, likevel fått lite merksemd (Woleck, 2001). Saundry og Nicol (2006, s.62) peikar på at lærarar ynskjer å støtte elevane sine, spesielt med val og bruk av strategiar i problemløysing. Dette kan dei gjere ved å tilby ei rekkje moglege metode, som ofte inkluderer teikning.

2.2.1 Teikning som visuell representasjon

" When we open our eyes to the drawings of children, we open our ears to the richness of their mathematical voices." (Woleck, 2001, s.215). Med dette sitatet hevder Woleck (2001) lærarane kan få større innsikt i elevane sine tankar og i deira resonnering om lærarane studerer teikningane til elevane. Også andre forskarar påpeikar at menneske ofte forklarar ved å visualisere si tenking gjennom bruk av visuelle representasjonar (Boaler, 2016).

Born lærer å teikne lenge før dei lærer å skrive (Crespo & Kyriakides, 2007, s.118). I tillegg kjem born som nemnt til skulen med matematisk innsikt som i mindre grad er basert på matematiske symbol, og skulen si oppgåve vert difor å utvikle elevane sine uttrykksmåtar og elevane si forståing av matematiske omgrep med utgangspunkt i deira erfaringar (Alseth & Røsseland, 2014). Alseth og Røsseland (2014, s.120) skriv at det er avgjerande at tal vert uttrykt på måtar som born er kjende, og at born må få høve til å nytte konkretar eller teikningar. Det vert altså lagt vekt på at visuelle representasjonar, som til dømes teikning, kan vere avgjerande for elevane si matematiske forståing. Ein treng å byggje ei bru frå særeigne representasjonar til matematiske representasjonar for å kommunisere og forstå matematikk. Borna bør dele og diskutere sine løysingane sine for å byggje denne brua (Saundry & Nicol, 2006).

Born nyttar ofte både språk, teikning og andre uttrykksformar for å betre kommunikasjonsprosessen. Om eit barn innser at teikninga deira ikkje er god nok, eller tilstrekkeleg, vil dei spontant leggje til skriftlege eller munnlege forklaringar for at dei skal vere sikre på at bodskapen kjem fram (Papandreou, 2014). Teikningar saman med verbal kommunikasjon gjer det enklare for born å kommunisere si tenking (Edens & Potter, 2001).

I teikning i matematikk skil forskarar gjerne mellom piktografisk og ikonisk teikning (Bakar et al., 2016; Saundry & Nicol, 2006; Dahl, 2020; Woleck, 2001; Crespo & Kyriakides, 2007). Det som skil desse typar teikning er kor realistiske objekta i teikninga er i forhold til objekta som presenterast. Om ei teikning er kategorisert som piktografisk, vil det seie at teikninga inneheld realistiske avbildingar av objekta som er presentert i oppgåva, medan ei ikonisk teikning inneheld enkle figurer og strekar for å skissere objekta (Bakar et al., 2016; Crespo & Kyriakides, 2007). Ved at elevar vert bedne om å teikne det same objektet fleire gongar, hevdar Woleck (2001) at elevane etterkvart vil forenkle teikningane sine. Elevane vil då i større grad skilje dei detaljar som er relevante for oppgåva, og kva detaljar dei kan la vere å teikne. Dette kan refererast til grad av sofistikertheit, som er ein av Saundry og Nicol (2006) sine kategoriar. Eg vil vidare presentere dei ulike kategoriane til Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020), som ulike kategoriar for teikning.

2.2.2 Ulike kategoriar for teikning

Som nemnt har Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020) kome fram til kvar sine rammeverk for å kategorisere elevar sine teikningar. For å enklare forklare kategoriane til Saundry og Nicol (2006), vil eg ta utgangspunkt i ei oppgåve av Woleck (2001), som omhandlar tjue hekser som skal dele åtte sopelimar. Heksene må foldelast på sopelimen etter visse reglar:

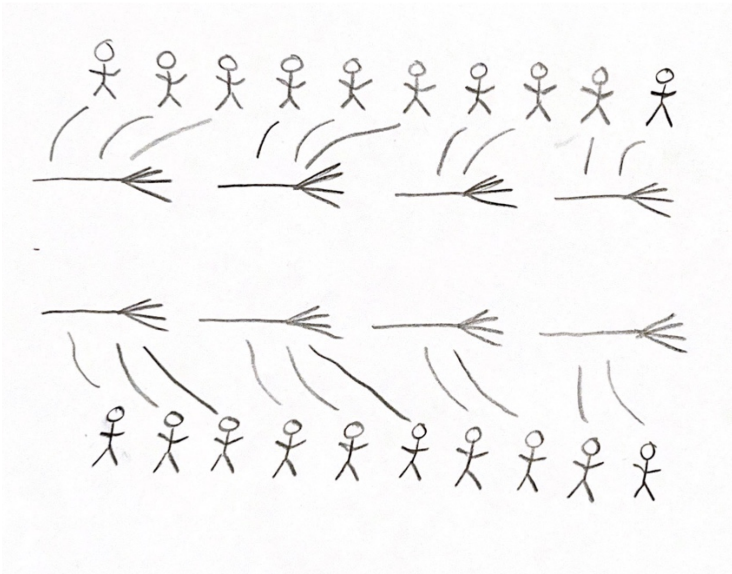
> *Twenty witches must travel on 8 brooms to a convention in California. They will have to «broom pool». No broom may carry more than 4 witches. No broom may carry fewer than 2 witches. How can they do it?* (Woleck, 2001, s. 219)

Det finst 3 moglege løysingar på oppgåva. Eg vil i mine døme ta utgangspunkt i løysing nummer tre.
1. 6 sopelimar med 2 hekser + 2 sopelimar med 4 hekser
2. 5 sopelimar med 2 hekser + 2 sopelimar med 3 hekser + 1 sopelim med 4 hekser
3. 4 sopelimar med 2 hekser + 4 sopelimar med 3 hekser

Saundry og Nicol (2006) sitt rammeverk består av fire kategoriar:

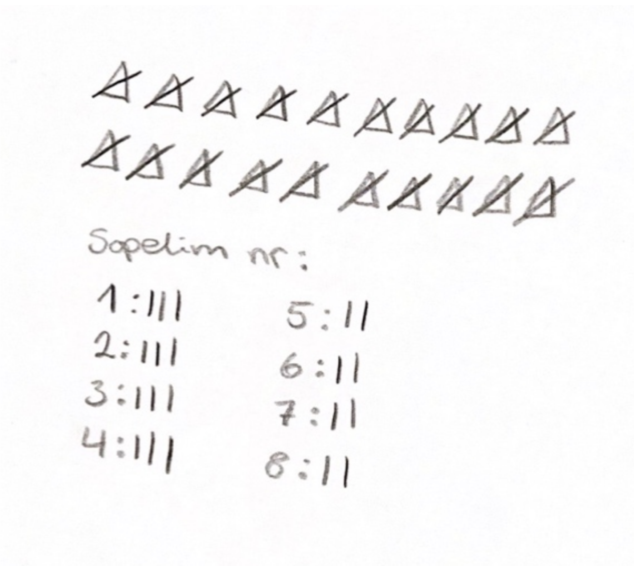
1. *Teikning som konkretiseringsmateriale*
2. *Teikning som støtte for system*
3. *Grad av sofistikerthet i teikninga*
4. *Visualisering (å sjå føre seg)*

Den fyrste kategorien, *teikning som konkretiseringsmateriale,* går ut på at nokre elevar nyttar teikninga si på same måte som dei ville nytta fysiske konkretiseringsmateriale. Dei representerer handlingar ved å til dømes gruppere objekt ved hjelp av linjer, strekar eller rundingar. I kategorien inngår òg å viske ut og teikne på nytt, eller å eliminere og leggje til objekt. Prinsippet er at elevane kan «flytte på objekt» og telje slik dei ville gjort med fysiske konkretar (Saundry & Nicol, 2006). Woleck (2001) hevdar på si side at born nytta teikning på same måte som dei nytta konkretiseringsmateriale, ved aktive handlingar hjå teikninga. Eit døme frå Woleck si oppgåve er å vise handlinga der ein fordelar heksene på sopelimane. Dette kan gjerast ved å nytte strekar, eller å teikne heksene på kvar sopelim etterkvart. Under (Figur 1) er ei teikning som fell under denne kategorien, der eg nyttar teikning som konkretiseringsmateriale. Dette gjer eg ved å teikne heksene og sopelimane, og setje strek frå dei ulike heksene for å fordele dei utover. Her nyttast teikninga aktivt for å løyse oppgåva.



Figur 1 – Døme på teikning som konkretiseringsmateriale (mi teikning)

Teikning som støtte for system er teikning for å halde oversikt over detaljane og elementa i ei oppgåve. Teikning som støtte for system kan vere til hjelp for å teste ut moglege løysingar på oppgåva på ein systematisk måte. Eit døme er å krysse ut element som er delt ut i ei delingsoppgåve. Elevar som nyttar teikningane på denne måten, vil ofte telje over fleire gongar og sjekke om svaret er korrekt (Saundry & Nicol, 2006). For delingsproblemet til Woleck (2001), kan det tenkjast at elevane teiknar dei 20 heksene, for så å krysse ut heksene etterkvart dei vert fordelt på sopelimane. Her nyttar ein teikninga for å halde styr på elementa i oppgåva slik som eg viser i figur 2.

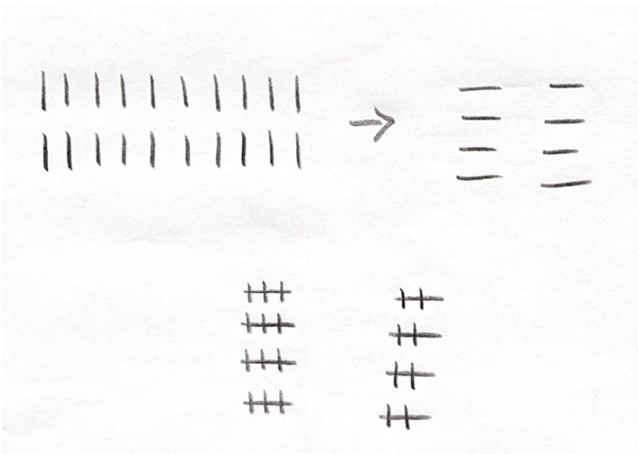


Figur 2 – Døme på teikning som støtte for system (mi teikning)

I figuren har eg teikna trekantar, lik tal hekser i oppgåva, for å halde styr på elementa. Dernest har eg nummerert dei ulike sopelimane frå 1 til 8. Etterkvart som eg, ved hjelp av teljestrekar, fordelte heksene utover, kryssa eg ut ein trekant slik eg ser kor mange eg har att.

Grad av sofistikertheit i teikningane til elevar varierer mykje. Nokre av elevane i Saundry og Nicol (2006) sin studie produserte detaljrike teikningar, medan andre elevar nytta enkle ikoniske representasjonar. Nokre elevar mista det matematiske aspektet då dei fokuserte for mykje på detaljerte framstillingar av elementa i oppgåva. Andre elevar arbeidde med oppgåva ved å teikne «historia» eller problemsituasjonen, der dei fekk fram forståinga (Saundry & Nicol, 2006). Ved Woleck si oppgåve kan ein teikne detaljrike hekser slik som i figur 3, eller ein kan teikne heksene som sirklar og sopelimane som ein strek for å få fram historia som i figur 4.

Figur 3 – Grad av sofistikertheit, døme 1 (mi teikning)



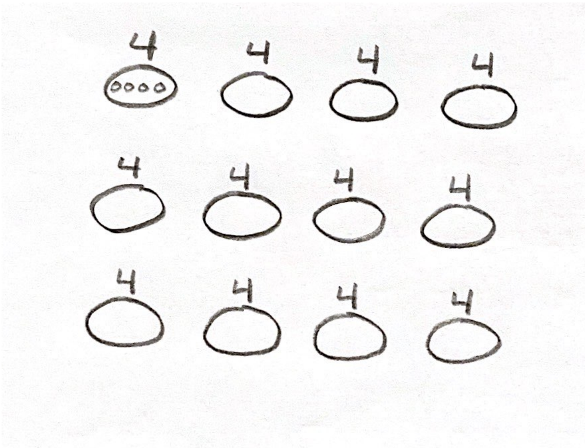
Figur 4 – Grad av sofistikertheit, døme 2 (mi teikning)

Visualisering handlar om at elevane nytta ein strategi der dei prosesserer informasjonen i oppgåva på ein visuell måte. Elevane i studien til Saundry og Nicol (2006) uttalte at «det berre kom inn i hovudet mitt», og dei hadde då sett føre seg bilete i hovudet i staden for å skrive eller teikne på papiret. I denne kategorien var det elevar som ikkje teikna med ein gong, samt elevar som ikkje teikna i det heile teke (Saundry & Nicol, 2006). Elevane skreiv, i følgje Saundry og Nicol (2006), eit numerisk svar på problemet. Ved Woleck si hekse-oppgåve kan ein elev visualisere seg sopelimane og heksene. Eleven kan sjå føre seg dei åtte sopelimane, med to hekser på kvar. Då ser eleven at ein har fire hekser igjen, som må sitje på dei resterande sopelimane. Eleven kan her skrive eit numerisk svar på oppgåva, eller nytte verbalt språk. Då det ikkje vert teikna under denne kategorien, har eg heller ikkje lagt ved eit døme her.

Det finst både skilnadar og likskapar med rammeverket til Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020). Dahl (2020) hevdar at teikningane i alle kategoriane ho presenterer har ein problemløysande funksjon.

1. *Teikning som utforskingsverkty*
2. *Teikning som informasjonshaldar og teljeverkty*
3. *Teikning som støtte for å utvikle reknestrategi*
4. *Teikning som representasjon av svaret*

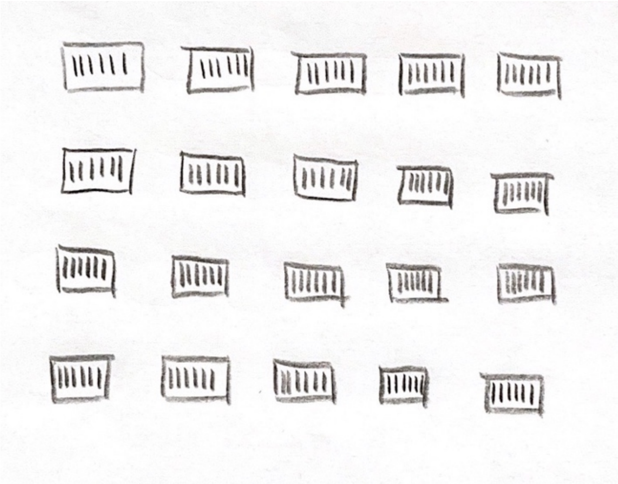
Teikning som utforskingsverkty er den fyrste av dei fire kategoriane Dahl (2020, s.207) presenterer. I arbeid med å løyse problem i matematikk vert teikningar forkasta og revidert i ein utforskande prosess. Elevane prøver seg fram med visuelle framstillingar, der dei på førehand ikkje har noko plan. Teikninga vert då nytta som eit verkty for å forstå strukturen i oppgåva, samt at den tek føre seg rollene til storleikane til tal (Dahl, 2020). Eit døme Dahl (2020, s.207) presenterer, omhandlar elevar som har fått i oppgåve å finne ut kor mange egg som trengs for å lage tolv porsjonar med muffins, der kvar porsjon inneheld fire egg. Elevane har i utgangspunktet ikkje klart føre seg at dette er ei multiplikativ oppgåve. Ved hjelp av teikning kan dei likevel oppdage ein struktur. I figuren under (Figur 5) har eg attskapt ei liknande teikning som den Dahl (2020) refererer til, for å understreke dette dømet. I figuren har elevane teikna tolv fat, som skal representere tal porsjonar. Deretter har dei skrive talet 4 over fata som skal representere tal egg i kvar porsjon. Oppgåva vert løyst av elevane ved gjentatt addisjon av firarar, noko dei oppdagar gjennom teikning og diskusjon rundt denne.



Figur 5 – Døme på teikning som utforskingsverkty

Som Saundry og Nicol (2006) sin kategori, teikning som støtte for system, vil også teikning som utforskingsverkty vere med på å forstå og halde orden på strukturen til oppgåva. Teikning kan, i kategoriane, nyttast når elevar ikkje har ein plan for korleis ein skal løyse ei oppgåve, då det ved begge kategoriane vert det testa moglege løysingar og strategiar. Ved teikning som utforskingsverkty, kan teikninga verte nytta som eit konkretiseringsmateriale når elevane utforskar element ved oppgåva på same måte som dei ville utforska ved hjelp av fysiske konkretar.

Teikning som informasjonshaldar og teljeverkty skildrar at elevane nyttar teikninga for å danne seg eit visuelt bilete av oppgåveteksten (Dahl, 2020, s.208). Elevane utarbeidar her ein struktur for å få overblikk over dei ulike elementa oppgåva består av. Når dette er gjort kan ein nytte teikninga for å telje seg fram til ei løysing. Eit av døma Dahl (2020, s.208) viser til, er ei oppgåve der elevane skal finne ut kor mange fargeblyantar det er i 20 boksar, om kvar av boksane inneheld seks fargeblyantar.



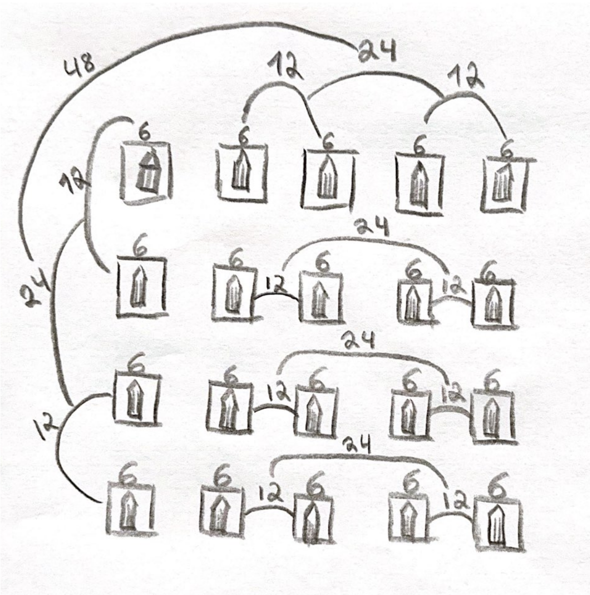
Figur 6 – Døme på teikning som informasjonshaldar og teljeverkty

I løysinga av denne oppgåva, som eg har attskapt i figur 6, teikna eit elevpar raskt 20 boksar. Deretter teikna dei seks strekar inn i kvar boks. På denne måten nytta dei teikning som ein informasjonshaldar. Då elevane var ferdig med å teikne byrja dei å telje ein og ein strek. Dette enda opp med ein teljefeil der dei fekk 121 fargeblyantar i staden for 120, men dei har ved dette tatt i bruk teikninga som eit teljeverkty. Om ein ser teikning som informasjonshaldar og teikning som teljeverkty kvar for seg, vil det seie at ein elev nyttar teikning som informasjonshaldar når eleven teiknar for å få ei oversikt over informasjonen som vert presentert i oppgåva. Teikninga vert så nytta som teljeverkty er når elevane tel på teikninga for å finne svaret på oppgåva.

Om ein ser tilbake på Saundry og Nicol (2006) sin kategori, teikning som støtte for system, kan ein trekkje forbindingar her sidan elevane i begge kategoriane nyttar teikninga for å halde oversikt over element i oppgåva. Skilnader er at ein ved teikning som informasjonshaldar på førehand har ein plan over korleis ein vil løyse oppgåva. Teikning som informasjonshaldar er også stillbilete, noko som teikning som støtte for system naudsynlegvis ikkje er. Ei teikning vil alltid innehalde informasjon når den er eit konkretiseringsmateriale, men det vil ikkje seie at alle teikningar som er informasjonshaldar vert nytta som konkretiseringsmateriale. Elevar kan telje seg fram til svaret ved bruk av teikning som teljeverkty, slik som ein og gjer ved bruk av konkretiseringsmateriale.

Teikning som støtte for å utvikle reknestrategi vert kjenneteikna ved at elevane stoppar opp undervegs i teiknearbeidet der dei diskuterer rundt korleis dei skal nytte teikninga for å løyse oppgåva. Dette skjer sjølv om at elevane har forstått den matematiske strukturen i oppgåva.

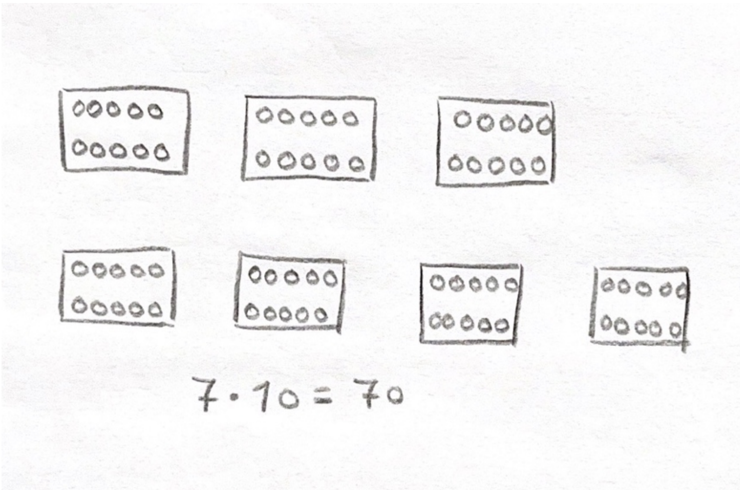
Elevane i døma til Dahl (2020, s.210) diskuterer korleis dei skal organisere talmengda i oppgåva. Det eine elevparet diskuterer om dei skal fordele fargeblyantane i delmengder eller om dei skal telje tiarar og einarar kvar for seg. Dei nyttar såleis teikninga for å organisere oppgåveinformasjonen, men utrekningane føregår i hovudet. I figur 7 har eg attskapt teikninga frå dømet til Dahl (2020). I figuren ser vi at elevparet har delt fargeblyantane inn i delmengder, og dei har valt å gå for ein reknestrategi der dei doblar fargeblyantane, altså ein doblingsstrategi. Dei byrjar med seks fargeblyantar i kvar boks, som dei doblar til 12, så til 24, og deretter til 48. Dei nyttar teikninga for å halde oversikt over elementa, samstundes som dei reknar ut i hovudet.



Figur 7 – Døme på teikning som støtte for å utvikle reknestrategi

Ved å sjå tilbake på kategoriane til Saundry og Nicol (2006), kan ein sjå forbindingar med kategorien teikning som støtte for system. Likskapen ved kategoriane er at ein i begge kategoriane nyttar teikninga for å teste ut og diskutere moglege løysingar og strategiar, altså utviklike ein reknestrategi. I likskap ved teikning som konkretiseringsmateriale skjer det aktive handlingar i teikninga.

Teikning som representasjon av svaret er den siste kategorien til Dahl (2020), og går ut på at elevane teiknar sjølv om dei allereie har funne svaret. Det er uvisst kva funksjon slike teikningar har, men Dahl (2020, s.215) kjem med fleire hypotesar. Ei hypotese er at teikningane vert nytta som eit valideringsverkty for å kontrollere svaret. Ei anna hypotese er at teikninga vert nytta som eit overtydingsverkty for å ha eit truverdig argument ved framstilling av svaret for medelevar eller lærarar. Den siste hypotesen Dahl (2020) nemner, er at teikningane vert nytta fordi det er ei forventing til at det vert teikna, og at dette er naudsynt for å fullføre oppgåva. I figuren under (Figur 8) har eg tatt føre med det eine dømet Dahl (2020, s.214) presenterer. Oppgåva gjekk her ut på å finne ut kor mange muffins det er på sju fat når det er ti muffins på kvart fat. Elevparet i dømet sa at svaret var 70 før dei byrja å teikne, men dei valde å teikne uansett.



Figur 8 – Døme på teikning som representasjon av svaret

Ved å sjå på Saundry og Nicol (2006), er denne kategorien meir ulik enn dei andre kategoriane som er presentert. Dette fordi denne teikninga vert produsert etter at elevane er kome fram til eit svar. Grad av sofistikertheit kan i alle kategoriar variere, men i denne kategorien er det viktig å få fram elementa som ein representasjon av svaret dersom teikninga skal vere til nytte.

Totalt presenterer Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020) åtte kategoriar, med likskapar og skilnadar. I kapittel 2.5 vil eg presentere kva kategoriar eg vil ta med meg vidare, samt korleis kategoriane eg har valt er nytta i min studie. Kategoriane er nytta i samband med Jeannotte og Kieran (2017) sine prosessar for matematisk resonnering.

2.3 Prosessar i matematisk resonnering

Jeannotte og Kieran (2017) presenterer ni prosessar innan matematisk resonnering. Eg har i tabellen under (Tabell 2.1) omsett omgrepa til norsk. Dei åtte fyrste prosessane delast inn i to ulike grupper som Jeannotte og Kieran (2017) kalla; prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar og prosessar knytt til validering. Den siste prosessen, eksemplifisering er presentert som ei støtte for begge dei to andre prosesskategoriane.

Prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar	**Prosessar knytt til validering**
Generalisering	Grunngjeving
Forme ei hypotese	Formulere eit bevis
Identifisere eit mønster	Formulere eit formelt bevis
Samanlikning	
Klassifisering	
Eksemplifisering (som støtte for alle kategoriar)	

Tabell 2.1 – Matematiske resonneringsprosessar

Når det gjeld **prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar** (til venstre i tabell 2.1) finst følgjande fem prosessar; generalisering, forme ei hypotese, identifisere eit mønster, samanlikning og klassifisering.

For å gjere det tydlegare kva som meinast med dei ulike prosessane, vil eg kome med eit døme frå ein fiktiv situasjon med eit spel som er henta frå Matematikksenteret. Spelet vert kalla «Fire kort», og føremålet med oppgåva er å finne alle kombinasjonar når ein adderer to tal under ti etter gitte reglar. Elevane må vurdere sjansen for om summen vert eit oddetal eller eit partal. Elevane spelar eit spelet to og to, men følgjande reglar:

- Elevane får spelekort med verdi frå 1-4
- Ein spelar er A, og ein spelar er B
- A blandar korta, og B trekk to kort
- A vinn om summen vert eit partal
- B vinn om summen er eit oddetal
- Spel 10 gongar før de byter rolle som A og B
- Noter resultata for kvar gong

Etter ti runde, grunngjev elevane om dei synast spelet er rettferdig eller ikkje, og kvifor dei synast det. Vidare kan elevane få velje fire andre kort mellom 1-9, og diskutere kva tal dei ynskjer og kvifor. Her er føremålet at dei skal lage spelet rettferdig, uavhengig av kva rolle dei har (NTNU, u.å.).

Generalisering (eng; generalizing) er ein prosess som leiar til ein påstand om ei mengd matematiske objekt eller ein relasjon mellom dei, i mengda frå ei undergruppe av denne mengda (Jeannotte & Kieran, 2017, s.9). Generalisering handlar altså om å formulere ein påstand som gjeld for ei større mengd objekt enn det som dannar grunnlaget for generaliseringa. Ein kan seie at generalisering dreier seg om å slutte ein påstand som gjeld utover dei døma som elevane har undersøkt, til dømes når elevane i spelet generaliserer at spelet, ved likt tal partal og oddetal vert urettferdig, uansett tal kort.

Forme ei hypotese (eng; conjecturing) er ein prosess, som ved leiting etter likskapar og skilnadar, leiar til ein påstand om ein regularitet med ein epistemisk verdi som er sannsynleg eller truleg, samt at den har potensiale for å matematisk teoretiserast (Jeannotte & Kieran, 2017, s.10). Potensiale for å matematisk teoretisere, forstår eg som at påstanden ein kjem med, seinare kan i resonneringa vurderast til å vere sann eller usann. Ein kan ved oppgåva «Fire kort» forme fleire ulike hypotese. Døme frå den fiktive situasjonen vil vere når elevane kjem med ei hypotese om at spelet ikkje kan vere rettferdig ved tala dei har fått. Ei hypotese ved dette spelet kan òg vere at ein treng tre partal og eit oddetal, eller tre oddetal og eit partal, for at spelarane skal ha like stor sjanse for å vinne.

Identifisere eit mønster (eng; identifying a pattern*)* er ein prosess som, ved leiting etter likskap og skilnadar, leiar til ein påstand om ein rekursiv relasjon mellom matematiske objekt eller relasjonar (Jeannotte & Kieran, 2017, s.10). Med ein rekursiv relasjon, forstår eg det som eit forhold som vert gjentatt. Det som skil å identifisere eit mønster frå generalisering og forme hypotese, er at mønsteret ein identifiserer ikkje nødvendigvis kan overførast frå eit spesifikt tilfelle til ei større mengd tilfelle. Å identifisere eit mønster kan vere eit steg på vegen til å generalisere og forme ei hypotese. Eit døme på mønsteridentifisering kan vere om elevane oppdagar at kvar gong dei adderer eit partal og eit oddetal får dei eit oddetal. Dei ser eit mønster for det ved korta dei har testa, og på kan på bakgrunn av dette etterkvart generalisere at det gjeld alle tilfelle der det er partal og oddetal som vert summert.

Samanlikning (eng; comparing) er ein prosess som, ved leiting etter likskapar og skilnadar, leiar til ein påstand om matematiske objekt eller relasjonar (Jeannotte & Kieran, 2017, s. 11).

I følgje Jeannotte og Kieran (2017, s. 11) kan samanlikning finne stad med andre matematiske resonneringsprosessar som generalisering, identifisere eit mønster og validering. Det vert sett på som naudsynt å samanlikne matematiske objekt eller relasjonar for å kunne identifisere eit mønster, og vidare forme ei hypotese. Ved oppgåva om fire kort, kan denne prosessen skje ved at elevane samanliknar ulike reknestykke med til dømes to oddetal, og der at summen då vert eit partal i tilfella dei samanliknar. Vidare kan dei då generalisere at det vil gjelde for alle reknestykke med oddetal + oddetal, og formar då ei hypotese.

Klassifisering (eng; classifying) er ein prosess som, ved leiting etter likskapar og skilnadar mellom matematiske objekt, leiar til påstandar om ei gruppe objekt med utgangspunkt i matematiske eigenskapar og definisjonar (Jeannotte & Kieran, 2017, s.11). Ein kan altså nytte dei matematiske eigenskapane og definisjonane til å klassifisere objekt. Dette kan elevane i den fiktive situasjonen gjere når dei undersøkjer kva summane må vere, då partal + partal, partal + oddetal, oddetal + oddetal. Det er òg verdt å nemne at klassifisering kan følgje prosessane; samanlikning, forme ei hypotese og generalisering (Jeannotte & Kieran, 2017, s.11).

Neste gruppe er **prosessar knytt til validering**. I følgje Jeannotte og Kieran (2017) er validering ein prosess som har som mål å endre den epistemiske verdien til ein matematisk påstand. Epistemisk verdi vert nytta for å skildre om ein påstand er sannsynleg, sann eller usann, og er avhengig av dei aksepterte sannheitene og dei metadiskursive reglane i det gitte samfunnet (Jeannotte & Kieran, 2017). Prosessar knytt til validering inneheld følgjande kategoriar; grunngjeving, formulere eit bevis og formulere eit formelt bevis (Jeannotte & Kieran, 2017).

Grunngjeving (eng; justifying) er ein prosess som ved å leite etter data, stadfesting og støtte, mogleggjer ei endring av den epistemiske verdien av ein påstand (Jeannotte & Kieran, 2017, s.12). Denne endringa kan skje på to måtar; frå sannsynleg til meir sannsynleg og frå sannsynleg til sann eller usann. Når det gjeld å endre den epistemiske verdien frå sannsynleg til sann eller usann, er dette ei validering som skjer utan å forme eit bevis. Endringa frå sannsynleg til sann eller usann må vere basert på ein deduktiv struktur, til dømes når elevane kjem med argument for at det er større sjans for å få oddetal i spelet med to partal og to oddetal, fordi dei har systematisk har testa fleire tilfelle.

Formulere eit bevis (eng; proving) er ein prosess som ved å leite etter data, stadfesting og støtte, endrar den epistemiske verdien til ein påstand frå sannsynleg til sann. I motsetnad til førre kategori, grunngjeving, må det ved denne prosessen finst potensiale for å matematisk teoretisere ved aksepterte påstandar og deduktive strukturar. Å formulere eit bevis styrast, i følgje Jeannotte og Kieran (2017, s.12), av fleire faktorar:

i) påstandar som er aksepterte av klasserom-fellesskapet som er sanne og tilgjengelege utan nærare grunngjeving
ii) ein endeleg deduktiv struktur
iii) realiseringar som er tilgjengelege og aksepterte innan klasseromfellesskapet

Elevane kan forme ei hypotese om at dei treng ulikt tal partal og oddetal blant korta for at spelarane skal ha like stor sjanse for å vinne når dei summerer to tal. For å bevise dette legg dei til grunn at klasseromfellesskapet veit eigenskapane til partal og oddetal, slik dei ikkje treng å grunngje dette nærare. Dei kan bevise hypotesen slik:
«Vi har funne ut at partal + partal = partal, oddetal + oddetal = partal og partal + oddetal = oddetal, ut i frå tala sine eigenskapar. Då vert det ved fire kort, med likt tal partal og oddetal i korta, større tal summar som vert oddetal. Dette fordi ein av dei seks moglege kombinasjonane får 2 kombinasjonar med partal som sum (P+P og O+O) og 4 kombinasjonar med oddetal som sum (4 gongar P+O). Vi treng ulik sum partal og oddetal i korta. Anten kan vi ha tre oddetal og eit partal eller eit oddetal og tre partal i korta våre. Då vil spelet verte rettferdig ved at ein får like mange kombinasjonar som får partal og oddetal som sum.»

Formulere eit formelt bevis (eng; formal proving) er ein prosess som ved å leite etter data, stadfesting og støtte, endrar den epistemiske verdien til ein påstand frå sannsynleg til sann (Jeannotte & Kieran, 2017, s.13). For Balacheff (1988) er formelle bevis avgrensa av en streng struktur og metareglar. Den største skilnaden mellom å forme eit bevis, og å forme eit formelt bevis er kor strengt og formelt beviset er. Å formulere eit formelt bevis styrast, ifølgje Jeannotte og Kieran (2017, s.13) av fleire faktorar:

i) Påstandar som er akseptert av klasseromfellesskapet som er sanne og systematisert i ein matematisk teori
ii) Ein endeleg deduktiv struktur
iii) Realiseringar som er formalisert og akseptert både av klasseromfellesskapet og matematiske miljø.

Denne prosessen vil ikkje angå analysen, då den er relevant for matematikk på høgare nivå då påstandane som er aksepterte av klasseromfellesskapet skal vere systematisert i ein matematisk teori. Eg vel likevel å presentere denne prosessen for å kunne presentere heile rammeverket til Jeannotte og Kieran (2017, s.13), og gje ei total forståing for rammeverket deira.

Neste, og siste prosess som er presentert er **eksemplifisering.** *Eksemplifisering* (eng; exemplifying) er ein prosess som støttar dei andre prosessane som er nemnde. Dette gjerast ved å kome med døme som kan nyttast som støtte for prosessane innan leiting etter likskap og skilnadar, og prosessane innan leiting etter validering (Jeannotte & Kieran, 2017, s.14). Til dømes om elevane i den fiktive situasjonen viser døme med andre tal enn det som har vorte presentert for å validere. Elevane kan systematisk undersøkje summane av to og to tal 1+2=3, 1+3=4, 1+4=5 og så bortetter.

Modellen til Jeannotte og Kieran (2017) er med på å gjere det tydeleg kva matematisk resonnering er, samt kva prosessar den matematiske resonneringa består av. Modellen kan difor verte nytta som verkty for å identifisere matematisk resonnering i undervisinga.

2.4 Bevisoppgåver i matematikk

I matematikk er *oppgåver* eit vidt omgrep, då det finst mange ulike typar oppgåver som til dømes problemløysingsoppgåver og rutine- og standardoppgåver. Rutine- og standardoppgåver er oppgåver der elevane veit korleis dei skal løyse dei, og vert i hovudsak gjeve for å få ferdigheitstrening (Grevholm et al., 2013, s. 209). I min studie undersøkjer eg korleis elevar resonnerer og argumenterer i teikneprosessen, og eg presenterer difor typar bevisoppgåver som er relevante for arbeid med dei ulike resonneringsprosessane i Jeannotte og Kieran (2017) sin modell. Bevisoppgåver gjev med andre ord moglegheit for arbeid både med prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar og prosessar knytt til validering.

2.4.1 Ulike typar oppgåver

A. J. Stylianides (2016) definerer tre ulike typar kategoriar når det gjeld bevisoppgåver i matematikk: enkelttilfelle, endeleg tal tilfelle og uendeleg tal tilfelle. Kategoriane er basert på to matematiske kriterium, der det fyrste kriteriet er tal tilfelle som er involvert i oppgåva. Det andre kriteriet er føremålet med oppgåva, anten det er å bevise eller motbevise ein påstand (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Eg gjev i tabellen under (Tabell 2.2) kome på døme på kva dei ulike bevisoppgåvene kan vere i bevis og motbevis, inspirert av A. J. Stylianides (2016) og Stylianides og Ball (2008).

	Bevis	**Motbevis**
Enkelttilfelle	Bevis at 13 er eit primtal.	Motbevis at 12 er eit primtal.
Endeleg tal tilfelle	Bevis at alle tal i 9-gongen i den vesle multiplikasjonstabellen har tverrsum 9.	Motbevis at sju kan skrivast av to partal.
Uendeleg tal tilfelle	Bevis at summen av eit partal og eit oddetal alltid vert oddetal.	Motbevis at summen eit partal og eit oddetal vert eit partal.

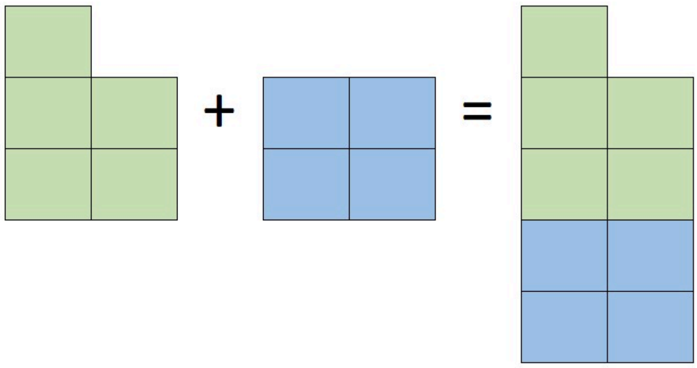
Tabell 2.2 – Seks ulike bevissituasjonar (mine døme)

Enkelttilfelle (eng: a single case) er når elevane vert presentert for eit tilfelle dei skal argumentere for. Elevane må her bevise eller motbevise dette eine tilfellet. Ved dømet i tabellen over (Tabell 2.2), skal elevane skal til dømes bevise at 13 er eit primtal, eller motbevise at 12 er eit primtal. Elevane avgjer om det gitte talet er eit primtal eller ikkje, ved å ta utgangspunkt i ein definisjon for primtal.

Endeleg tal tilfelle (eng: multiple but finitely many cases) er oppgåver som involverer fleire tilfelle, der elevane skal argumentere for at det ikkje finst fleire tal løysingar. I tabell 2.2 har eg kome med døme om kva ei oppgåve med endeleg tal tilfelle kan vere i bevis og i motbevis. Elevane skal bevise at alle tal i 9-gongen i den vesle multiplikasjonstabellen har tverrsum 9. For å bevise ein påstand i ei oppgåve med endeleg tal tilfelle, kan ein anten nytte systematisk opplisting av løysingane eller utarbeide eit argument som dekkjer alle løysingane i den gitte oppgåva (A. J. Stylianides & Ball, 2008). Elevane kan for tverrsum av tal i 9-gongen liste opp alle gongestykkje opp til 90, og teste alle løysingane. Påstanden om tverrsum gjeld då ikkje for tal i 9-gongen ut over den vesle multiplikasjonstabellen. Eit døme på motbevis kan vere å forkaste påstanden om at sju kan skrivast som sum av to partal. Elevane kan systematisk liste opp alle moglegheiter av summar som gjer sju: 1+6, 2+5, 3+4. Eit anna mogleg motbevis er å byggje på ein tidlegare bevist påstand om sum av partal: partal pluss partal kan aldri verte oddetal, altså kan ikkje 7 skrivast som sum av to partal.

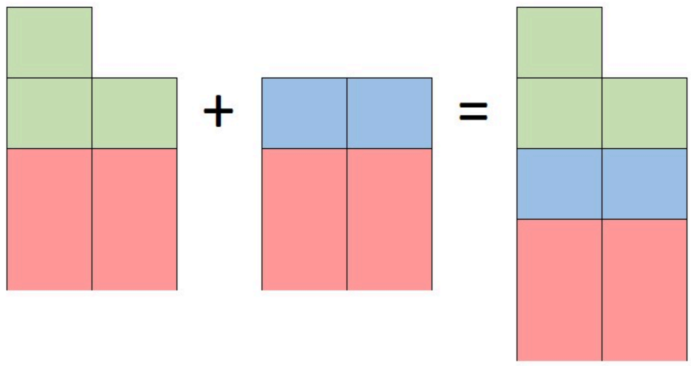
For *uendeleg tal tilfelle (eng: infinitely many cases)* må elevane finne argument som kan stadfeste eller avkrefte alle døme knytt til gyldigheita av påstanden, og ikkje berre eit endeleg tal tilfelle. I tabell 2.2 skal elevane bevise at summen av eit partal og eit oddetal alltid vert eit oddetal, eller motbevise at det alltid vert eit partal. Det er no uendeleg tal løysingar, då det ikkje er gitte tal ein opererer med.

Ved bevis og motbevis av ein påstand i ei oppgåve med uendeleg tal løysingar kan ein i motsetning til førre oppgåvetype, ikkje nytte oppramsing eller sjekke enkelte døme. Påstanden kan bevisast ved å finne døme som kan avkrefte påstanden, eller utvikle argument som kvalifiserer seg til å vere eit generisk døme (Figur 9). I figuren er summen 5 + 4 vist som eit generisk argument ved hjelp av ein figur. Ved å addere oddetalet 5 (grøn), og partalet 4 (blå) ser vi at summen (grøn og blå) vert eit oddetal. Oddetalet 9, har i figuren same eigenskap som oddetalet 5, at dei ikkje kan delast på to.



Figur 9 – Generisk argument (min figur)

Ein kan og nytte ei generell logisk slutning som dekkjer alle tilfelle. Ved figur 10 er det ikkje eit døme ved spesifikke tal, men eit døme som dekkjer alle tilfelle av partal + oddetal. Figuren syner (ved raudt felt) at dømet kan fortsette uendeleg, og er dermed eit bevis for at oddetal pluss partal vert oddetal.



Figur 10 – Generell logisk slutning (min figur)

2.5 Oppsummering av rammeverk for analyse

Sidan min studie tek føre seg korleis elevar nyttar teikning i si matematiske resonnering, trong eg kategoriar som kunne skildre bruk av teikning, samt at eg trong kategoriar for å skildre korleis elevane resonnerte. I teorien presenterte eg tre rammeverk: Jeannotte og Kieran (2017), Saundry og Nicol (2006), og Dahl (2020).

Saundry og Nicol (2006), og Dahl (2020), forma to ulike rammeverk for bruk av teikning, der eg i 2.2.2 presenterte kvar av dei. Sidan nokre av kategoriane er like, samt at eg fann at nokre kategoriar ikkje var relevante for min studie vil eg i tabell 2.3 presentere kategoriane eg tok med meg vidare til analysereiskapen. Teikning som informasjonshaldar er henta frå Dahl (2020) sin kategori; teikning som informasjonshaldar og teljeverkty. Teikning som presentasjon av ei løysing er og henta frå Dahl (2020), ved namnet teikning som representasjon av svaret. Den tredje kategorien, teikning som konkretiseringsmateriale, er henta frå Saundry og Nicol (2006). For at teikningane skulle kunne plasserast under ein spesifikk kategori, har eg valt å spisse kategoriane.

Kategoriar	**Skildring**
Teikning som informasjonshaldar	Teikning som informasjonshaldar vil seie at elevane nyttar teikninga for å halde orden på den matematiske strukturen, samt elementa i oppgåva. Eg har valt å ikkje ha med del to av kategorien til Dahl (2020), teikning som teljeverkty, for å lettare skilje denne kategorien med teikning som konkretiseringsmateriale. Det som skil dei to kategoriane er at ved teikning som konkretiseringsmateriale skjer det ei aktiv handling. Om teikninga vert nytta som konkretiseringsmaterialet, vil den og vere ein informasjonshaldar. Dette gjeld ikkje omvendt. Om ei teikning skal verte kategorisert som ein informasjonshaldar viser teikninga berre informasjonen og objekta i oppgåva. Den inneheld altså ikkje ei aktiv handling, som til dømes å eliminere objekt, eller å dele ut.
Teikning som presentasjon av ei løysing	Elevane nyttar teikninga til å presentere løysinga dei har kome fram til. Dette føreset at dei ikkje har nytta teikninga i prosessen knytt til leiting etter likskapar og skilnadar. Teikninga kan verte nytta innan valideringsprosessane grunngjeving og forme eit bevis. Teikninga kan òg vere til nytte for å kommunisere si løysing med andre.
Teikning som konkretiseringsmateriale	Elevane nyttar teikninga aktivt, på ein slik måte dei ville gjort med fysiske konkretar. Eit døme kan vere å slik som å eliminere, flytte og dele ut element, på same måte som med klossar, brikker eller liknande. Handlinga der ein grupperer eller deler kan representerast ved hjelp av liner, piler, sirklar. Elevane tel også elementa på bileta slik dei ville gjort med dei fysiske konkretane.

Tabell 2.3 – Ulike kategoriar for teikning

For å kunne studere korleis elevane resonnerte ved hjelp av teikninga var det naudsynt å nytte eit rammeverk som kunne skildre deira resonneringsprosessar. Eg vil i analysen støtte meg til Jeannotte og Kieran (2017) sine prosessar for matematiske resonneringsprosessar, presentert i kapittel 2.3. Innan prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar finn vi generalisering, forme ei hypotese, identifisere eit mønster, samanlikning og klassifisering. Ved prosessar knytt til validering presenterer Jeannotte og Kieran (2017) grunngjeving, formulere eit bevis og formulere eit formelt bevis. Eg valde å nytte alle omgrepa i rammeverket med unntak av å formulere eit formelt bevis i valideringsprosessen, Grunna at å formulere eit formelt bevis ikkje førekjem ofte i så tidleg i barneskulen, har eg valt å sløyfe denne kategorien. Eg har no summert opp kva omgrep og kategoriar eg inkluderer vidare i mitt analysereiskap, og ei ytterlegare utdjuping over korleis eg ser omgrepa i samanheng kjem i 3.4.4. Der vil eg sjå kategoriane i samanheng med resultat frå open koding.

3. Metodologi

I dei kapitla som følgjer vil eg gjere greie for val av forskingsmetode, utval av informantar og presentere endringar av pilotprosjektet eg gjennomførte. Oppgåvene som vart nytta i studien er presentert, og gjort greie for. Eg vil så greie ut om analysemetoden som vart nytta, der mitt analysereiskap vert presentert. Avslutningsvis i kapittelet drøftar eg forskinga si reliabilitet og validitet, samt etiske omsyn ved forskinga.

3.1 Val av kvalitativ forskingsmetode

Føremålet med studien er å undersøkje korleis elevar nyttar teikning som verkty i matematisk resonnering. Med tanke på forskingsområde og problemstilling var det føremålstenleg for meg at den metodologiske tilnærminga til oppgåva var kvalitativ. Den kvalitative metoden har som føremål å hente informasjon frå verkelegheita som framstillast i form av ord eller språk (Postholm & Jacobsen, 2018, s.89). Sidan matematisk resonnering er eit sentralt omgrep i min studie, var det føremålstenleg å nytte ei metode der eg kunne oppleve samtalar mellom elevane, eller mellom lærar og elev.

Med ei kvalitativ tilnærming hadde eg moglegheit til å studere elevane si resonnering og sin argumentasjon, ved å mellom anna observere og filme elevpar som arbeidde med oppgåver som var meint til å leggje til rette for matematisk resonnering. Her fekk eg høve til å studere elevane sitt arbeid med teikningane, og ikkje berre det ferdige produktet. Med andre ord fekk eg studere teikneprosessane til elevane. I tillegg til observasjon var det nyttig for meg å gjennomføre gruppeintervju med elevane i etterkant av timane som støtte for å underbyggje mine observasjonar. Eg samla òg inn elevarbeida til alle elevane som var deltakarar i prosjektet.

3.1.1 Utval informantar

Valet på informantar fall på 4.trinn, då fleire forskarar nemner i si forsking at elevar teiknar mykje når dei er i denne aldersgruppa. Eg ynskja ikkje eit utval som var nivåbasert, men det vart lagt vekt på samansetjinga av elevpar for å skape gode matematiske samtalar og godt samarbeid. I tillegg til å velje ut kva informantar eg ville ha, måtte eg tenkje over kor stort utval eg trong. I kvalitative metode forsøkjer ein å skaffe mykje datamateriale frå eit avgrensa tal informantar (Christoffersen & Johannessen, 2012). Deltakarane i studien var totalt 50 fjerdeklassingar frå to ulike skular i to mellomstore kommunar. Av dei 50 deltakarane var 26 elevar deltakarar i eit pilotprosjekt eg gjennomførte før den gjeldande datainnsamlinga. Dette pilotprosjektet vert presentert nærare i delkapittel 3.1.4. I den gjeldande datainnsamlinga deltok 24 elevar frå to ulike klassar på same skule. Det var tilnærma likt tal med jenter og gutar som deltok i studien.

3.1.2 Observasjon

I følgje Adler og Adler (1994) er observasjon den mest fundamentale måten å gjere ei datainnsamling på, sidan observasjonen gjennomførast i ein situasjon i ein naturleg kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018). Under datainnsamlinga observerte eg, og tok notatar av dei 24 elevane (som utgjor 12 elevpar) som deltok. Det var i tillegg nytta video-opptak av seks av dei 12 elevpara. Eg valde å ta video-opptak ovanfrå slik at eg hadde moglegheit til å sjå kva elevane skreiv eller teikna på arket, og samstundes høyre resonnementet og argumentasjonen til elevane. Eg meiner at eg, utan video-opptak, ikkje hadde klart å notere meg alle handlingar og utsegn undervegs på ein slik måte at eg kunne gjentatt kva elevane sa og gjorde i ei truverdig analyse.

Datainnsamlinga hadde ei tidsramme på ein klokketime i kvar av dei to klassene. Elevane løyste oppgåver i elevpar, fordi ein ved samarbeid kan meir naturleg få fram resonnementet og argumentasjonen til elevane utan å spørje kva elevane tenkjer til ei kvar tid. Det var heller ikkje for mange om ein arbeider to og to, slik at nokre fell ut eller vert ekskluderte. Elevane fekk utdelt ei og ei oppgåve på ark, saman med ein blyant og eit blankt ark til å notere på. Konkretiseringsmateriale vart ikkje lagt fram til elevane i denne sekvensen, men det vart heller ikkje sagt at dei ikkje fekk høve til å nytte dette.

Kva mi rolle skulle vere i klasserommet var noko eg reflekterte over på førehand. Aase og Fossåskaret (2014, s. 101) hevda at deltakande observasjon er den metoden som er best eigna til å kome nærme informantane. Ein deltakande-observatør får moglegheita til å både delta og observere i datainnsamlinga, slik eg valde å gjere i min studie (Postholm & Jacobsen, 2018). Med andre ord fekk eg moglegheit til å observere og notere, samstundes som eg kunne samtale med elevane for å få betre innsikt i deira resonnering.

3.1.3 Intervju

Sjølv om observasjon var mi primære datakjelde, valde eg å intervjue elevane etter observasjonen var gjennomført. Elevpara som vart filma i sekvensen vart samla til eit fokusgruppeintervju etter observasjonen. I eit fokusgruppeintervju er føremålet å utvikle kunnskap om ein bestemt tematikk, som i mitt tilfelle var matematisk resonnering og teikning (Postholm & Jacobsen, 2018). Eg valde å nytte intervju slik at eg kunne få svar på spørsmål som dukka opp i observasjonen, samt for å få kjennskap til deltakarane sine meiningar om det som vart observert. Postholm og Jacobsen (2018, s. 129), nemner at dette kan vere med på å auke forståinga for heilskapen av temaet. Eg nytta intervju som støtte i dei tilfella det var uklart korleis teikningane vart nytta, korleis elevane hadde tenkt, og eventuelt andre uklare element. Meiningane til elevane er relevante i min studie, då elevane sitt resonnement og deira meining ved teikninga er vesentleg i studien.

Intervjuguiden i eit fokusgruppeintervju er ofte lik intervjuguiden ein hadde utforma for eit semi-strukturert intervju, og denne intervjuguiden skal vere ei hjelp for forskaren til å kunne svare på problemstillinga (Postholm & Jacobsen, 2018). På førehand laga eg ein intervjuguide, med spørsmål som kunne hjelpe å svare på problemstillinga. I tabell 3.1 er min intervjuguide presentert.

Spørsmål i fokusgruppeintervju
Kan de vise meg ein gong til kva de har gjort/tenkt her?
Kva har de teikna her?
Kvifor har de teikna her?
Korleis hjelpte teikninga dykk i oppgåva?

Tabell 3.1 – Intervjuguide

Som vi kan sjå av tabell 3.1 var føremålet med spørsmåla å få ei utdjuping om meiningane bak teikningane til elevane, der eg fokuserte på korleis dei hadde tenkt på oppgåva, samt kvifor dei hadde teikna. Eg stilte spørsmål om korleis teikninga hjelpte elevane i prosessen med å løyse oppgåva. Ved elevane sine svar dukka det ofte opp oppfølgingsspørsmål retta til elevane sine svar, som hadde som føremål å oppnå ei djupare forståing og meir nyanserte svar med detaljar (Postholm & Jacobsen, 2018).

Eg var ikkje opptatt av at spørsmåla måtte stillast i rekkefølgje, eller at alle spørsmål måtte stillast. Dette førte til at eg i tillegg stilte andre spørsmål enn intervjuguiden inneheldt, noko som eg såg på som føremålstenleg for mi oppgåve. Dette fordi eg kunne justere spørsmåla etter kva som var uklart. Eg la opp til at elevane hadde høve til å fortelje fritt om teikninga si, for å ikkje påverke dei med ledande spørsmål. Sjølv om forskaren leia intervjuet skal intensjonen, i følgje Postholm og Jacobsen (2018, s.127), vere at deltakarane pratar mest.

3.1.4 Pilotprosjekt

Grunna usikkerheit om korleis datainnsamlinga gjekk føre seg, valde eg å gjennomføre eit pilotprosjekt før eg gjennomførte den gjeldande datainnsamlinga. Det var også vanskeleg å på førehand vite om informantane kom til å nytte teikning som verkty, så difor såg eg det som nyttig å gjennomføre eit slikt pilotprosjekt for å få innblikk i dette. I pilotprosjektet deltok totalt 26 elevar, som då danna 13 elevpar. Av dei elevpara vart tre elevpar filma og intervjua. Eg samla totalt inn 44 elevarbeid i pilotprosjektet. Datamaterialet som vart samla inn gjennom dette pilotprosjektet vil ikkje vere ein del av analysen.

Etter gjennomføringa av pilotprosjektet gjorde eg nokre endringar. Eg fekk i pilotprosjektet høve til å prøve ut mi rolle. Etter erfaringar frå pilotprosjektet la eg større vekt på korleis eg introduserte sekvensen, samt at eg endra måten eg stilte spørsmål på når eg samtala med elevane under den gjeldande datainnsamlinga. I gjennomføringa av sekvensen i pilotprosjektet gav eg ein kort introduksjon til oppgåvene, før elevane fekk byrje med oppgåvene. Eg erfarte at denne introduksjonen ikkje innehaldt den informasjonen eg synast var viktigast. I den gjeldande datainnsamlinga la eg dermed større vekt på ein introduksjon som skulle vere med på å fremje samarbeid, argumentasjon og resonnering. Eg la vekt på at det er viktig å dele sine strategiar med sin med-elev, og at elevane skulle løyse oppgåva saman. Det vart ikkje sagt noko om korleis elevane skulle løyse oppgåvene, og ordet «teikning» vart ikkje nemnt i introduksjonen. Dette for at elevane sjølv skulle ha moglegheita til å velje framgangsmåte. Når eg samtala med elevane forsøkte eg å rettleie elevane på ein slik måte at eg ikkje gav elevane løysinga. Eg la meir vekt på at elevane skulle forsøke, i større grad enn i pilotprosjektet, å grunngje svaret sitt.

I pilotprosjektet prøvde eg ut oppgåvene eg hadde valt. Eg erfarte at dei fleste av oppgåvene fungerte godt, men i etterkant gjorde eg nokre endringar på oppgåvene. I oppgåvetekstane la eg til at elevane måtte grunngje eller bevise si løysing. I oppgåve 3, som vert presentert i neste kapittel, endra eg tal personar som skulle dele pizza. Ei utdjuping om dette vert presentert i delkapittel 3.3.3, der oppgåva vert lagt fram.

3.2 Oppgåvene

I dette kapittelet presenterer eg oppgåvene som vart nytta i denne studien, og eg greier ut om kvifor valet fall på den enkelte oppgåve. Før datainnsamlinga hadde eg nokre forventingar om korleis elevane kom til å svare på oppgåvene. Eg har difor, for kvar av oppgåvene, forma eit løysingsforslag på korleis eg på førehand tenkte at elevane kunne kome til å nytte teikning i oppgåva.

Då eg skulle velje oppgåver var det viktig for meg at eg valde oppgåver som «inviterte til» teikning. Samstundes skulle oppgåvene kunne fremje matematisk resonnering, ved prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar, og prosessar knytt til validering. I alle oppgåvene står det at elevane skal grunngje eller bevise svaret sitt, som er to av prosessane knytt til validering i Jeannotte og Kieran (2017) sitt rammeverk.

Eg valde oppgåver som anten hadde vore nytta i tidlegare studiar, eller testa av med-studentar eller meg sjølv. Dette slik at eg kunne ha ei formeining om at den enkelte oppgåve kunne vere føremålstenleg for min studie. Oppgåvene er inspirert av mellom anna A. J. Stylianides (2016), Dahl (2020) og Saundry og Nicol (2006). Under sekvensen fekk elevane utdelt ei og ei oppgåve, der elevpara svarte på ulik mengd oppgåver. Det vart ikkje delt ut ei ny oppgåve før elevparet hadde gjort eit tilstrekkeleg forsøk på å løyse den førre oppgåva. Oppgåvene vart gjeve på hovudmålet til elevane, og vert her presentert på nynorsk.

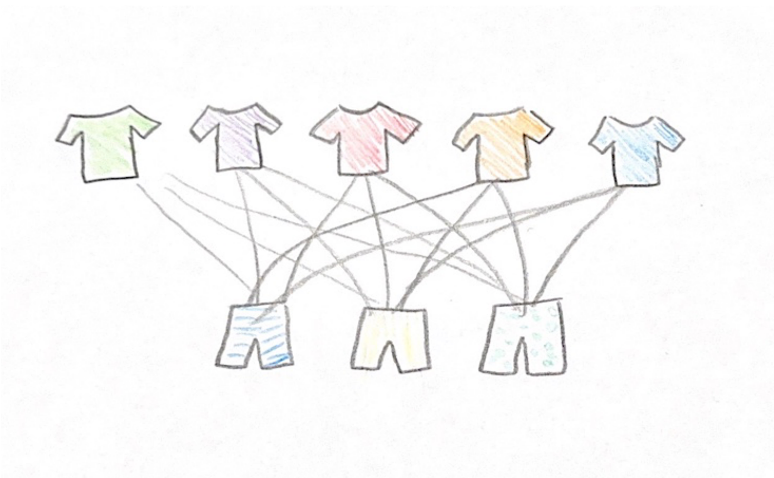
3.2.1 Oppgåve 1 – Pia sine antrekk

Oppgåve 1 lyder som følgjer: *«Til sommarleiren pakka Pia med seg 3 bukser og 5 genserar i kofferten sin. Kor mange ulike antrekk har Pia med seg? Vis korleis de tenkjer, og grunngje svaret dykkar.»*

Oppgåva er av typen endeleg tal tilfelle, og er ei kombinatorikkoppgåve. Oppgåva er henta frå Dahl (2020, s.145), men skrive om av meg. A. J. Stylianides (2016, s.97) presenterer òg ei liknande oppgåve i si bok. Her vert den framstilt som ei oppgåve som inviterer både til teikning og matematisk resonnering. Oppgåva legg til rette for at elevane må *grunngje* for at dei har funne alle antrekka, og at det ikkje er mogleg at det finst fleire kombinasjonar enn 15. Dette kan dei til dømes gjere ved å nytte ei systematisk opplisting.

På førehand tenkte eg at det ikkje er eit sjølvfølgje for elevar på 4.trinn at dette er eit kombinatorikkproblem som kan løysast ved multiplikasjon, då produktet av alle tal valmoglegheiter er lik tal moglege kombinasjonar. Her er truleg naudsynt at elevane må tenkje annleis, og at dei må sjå føre seg eller teikne antrekka for å løyse oppgåva. Oppgåva kan sjå enkel ut, då ein kan gjette seg fram til reknearten og nytte dei to tala som er presentert. Difor presiserte eg, og oppgåveteksten, for elevane at dei ikkje berre skulle finne eit svar, men òg grunngje svaret og framgangsmåten.

Eit løysingsforslag kan vere å byrje med og teikne alle plagga. Dernest kan ein setje strek mellom genserane og buksene for å lage ulike antrekk. Dette gjer ein til det er strek mellom alle genserane og buksene. Dermed har ein kombinert alle plagga, og funne tal moglege antrekk, slik som i figuren under (Figur 11).



Figur 11 – Løysingsforslag oppgåve 1

Eg tenkte òg at fleire kunne teikna genserane og buksene på ein slik måte at det var vanskelig og uoversiktleg å nytte teikninga som eit konkretiseringsmateriale og systematisk vise alle moglege kombinasjonar. Dette fordi teikninga kunne vore produsert på ein slik måte at det var vanskeleg å telje alle strekane.

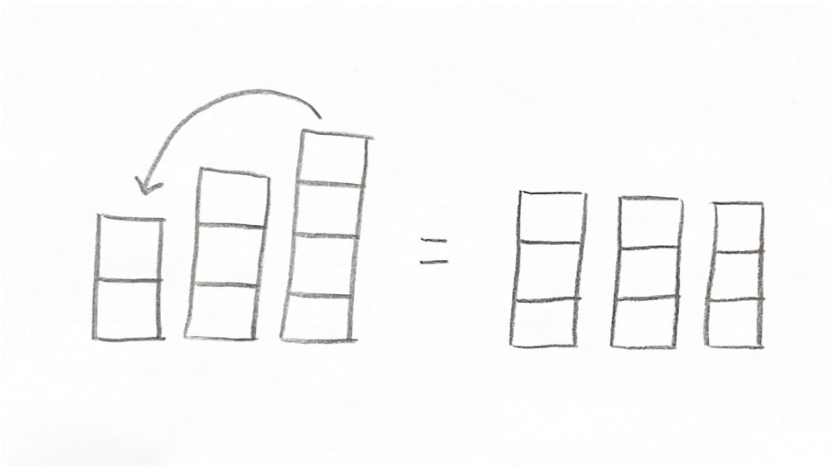
3.3.2 Oppgåve 2 – Tre påfølgjande tal

Oppgåve 2 lyder som følgjer:

«Veslebroren til Pia, Simon, byggjer tre tårn ved sidan av kvarandre med klossar. Tårna aukar alltid med ein kloss for kvart tårn. Det fyrste tårnet har éin kloss, det andre har to, og det tredje har tre. Han byggjer ein gong til, men byrjar då med 2 klossar på fyrste tårnet. Det andre tårnet har 3 klossar og det tredje har 4 klossar.
Han tel klossane han nyttar for å byggje tre slike tårn, og finn ut at summen av klossane er eit tal i 3-gongen. Vil det alltid vere slik, uansett kva tre tårn ein byggjer, når tårna aukar med éin kloss bortover? Bevis for den du arbeider med at hypotesen er sann/usann.»

Oppgåva er av typen uendeleg tal tilfelle og er henta frå A. J. Stylianides (2016), men er gjort om av meg for å tilpasse trinnet, samt for å invitere til teikning. Eg la også opp til at elevane måtte grunngje svaret sitt og argumentere for dette, då svaret anten er «sant» eller «usant». Føremålet med oppgåva er å bevise at summen av tre påfølgande tal alltid kan delast på tre. Eg har i oppgåva kome med døme på tårn Simon bygde, og at han fann ut at summen alltid kan delast på tre. Elevane si oppgåve var å finne ut om det alltid vil vere slik.

I mitt løysingsforslag kan ein sjå tårna 2+3+4. Teikninga viser at om ein flyttar ein kloss frå tårnet til høgre, bort til tårnet til venstre, vil det vere likt tal klossar i alle dei tre tårna i dette tilfellet. Tre like tårn, kan då delast på tre, som igjen vil seie at summen inngår i 3-gongen (Figur 12).



Figur 12 - Løysingsforslag oppgåve 2

For å argumentere for at det alltid stemmer, treng ein ei *grunngjeving* ved at ein legg til 3 klossar kvar gong, og at 3 alltid kan delast på 3. Det vil dermed stemme uansett kor mange klossar tårna består av, så lenge dei tre tårna har tre påfølgjande tal.

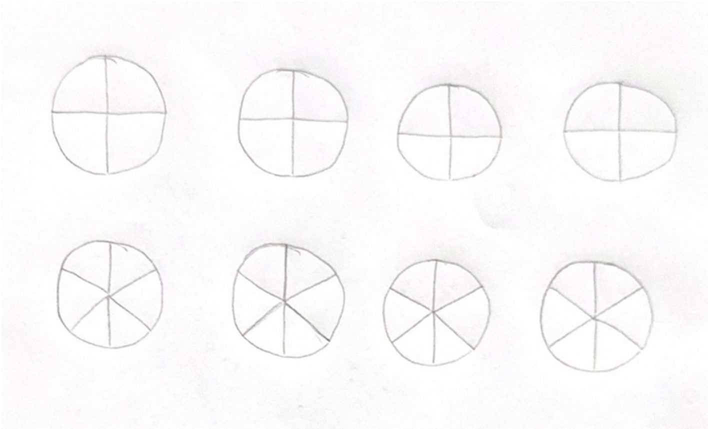
3.3.3 Oppgåve 3 – Dele Pizza

Oppgåve 3 lyder som følgjer: *«Pia feirar bursdag, og mor til Pia har laga fire pizza. Heile klassa kjem i bursdagen, så mor til Pia skal skjære opp pizzaane slik at det vert eitt stykke til kvar. Dei er 22 personar som skal dele pizza. Kor mange stykke må ho dele pizzaane opp i for at kvar person skal få eitt pizzastykke? Pizzastykka må vere like store.»*

Oppgåva er av typen enkelttilfelle. Oppgåva er laga av meg, men er òg inspirert av Saundry og Nicol (2006) sitt «deleproblem» der 12 born skal dele 18 kjeks likt.

Opphavleg var det i oppgåva 24 personar som skulle dele fire pizza. Gjennom pilotprosjektet erfarte eg at elevane var betre kjend med divisjon og multiplikasjon enn eg på førehand trudde. Elevane nytta då «den vesle multiplikasjonstabellen» som hang i klasserommet, for å finne svaret på oppgåva ved å nytte divisjon der dei fordelte 24 personar på fire pizza. Dermed valde eg å endre tal personar frå 24 til 22, då 22 ikkje er eit tal som inngår i 4-gongen. Såleis tenkte eg det kunne kome meir spennande matematiske samtalar, og at elevane kunne ha større nytte av å teikne for å løyse denne oppgåva.

Ei mogleg løysing på oppgåva kan vere å teikne dei fire pizzaane, for å teste ut kor mange bitar det vert ved ulike måtar å dele dei opp på. Eit døme på dette er presentert under (Figur 13), der eg fyrst har teste ved å dele pizzaen i 4. Deretter har eg delt pizzaane opp i 6 bitar, for å telje om det kunne vere korrekt løysing. Ei moglegheit var at enkelte elevar ville argumentere for at oppgåva ikkje let seg løyse då det vert to pizzastykke til overs.



Figur 13 – Løysingsforslag oppgåve 3

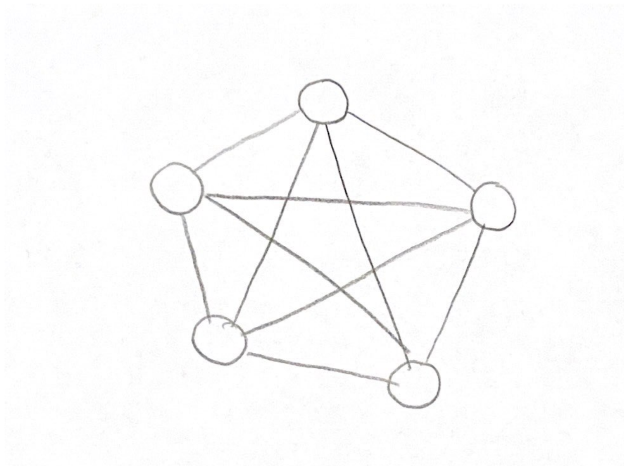
3.3.4 Oppgåve 4 – «The handshake problem»

Oppgåve 4 lyder som følgjer: *«Pia skal på sommarleir, og møter fire andre jenter. Ingen av jentene kjenner kvarandre frå før, så dei handhelsar. Kor mange handtrykk må til før alle fem jentene har fått helse på kvarandre? Vis korleis de tenkjer, og grunngje svaret dykkar.»*

Oppgåva er av typen endeleg tal tilfelle, slik som oppgåve 1. Denne oppgåva er basert på det kjente «The handshake problem», men er reformulert av meg. Eg testa ut oppgåva på medstudentar og familie, der fleire nytta teikning for å halde oversikt over alle handtrykka. Ein annan grunn til val av oppgåve var at eg tenkte at framgangsmåten ikkje er sjølvsagt for elevar på 4.trinn, noko som igjen kunne bidra til å skape interessante matematiske samtalar.

Føremålet med oppgåva er å finne tal handtrykk jentene må ha før alle har helst på kvarandre. For å rekne seg fram til riktig svar må ein finne ut at den fyrste personen helsar på fire, den neste på tre, og så bortetter. Om n er tal personar som helsar får vi $(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)$. Vi kan også skrive det slik: Tal helsingar totalt for n personar, når alle helsar på alle ein gong, er $n*(n-1)/2$. Dette fordi alle n personane, i dette tilfellet 5, kan helse på ein mindre person enn det som er i gruppa då ein ikkje helsar på seg sjølv. Deretter dividerer ein svaret på to fordi ei handhelsing mellom to personar ikkje trengst å teljast to gongar.

Løysingsforslaget under (Figur 14) er ei mogleg løysing på oppgåva, der teikning effektivt vert nytta. Her byrja eg med å teikne sirklane, som då er dei fem personane. Strekane mellom personane indikerer at dei helsar på kvarandre. Sidan alle sirklane har strek mellom kvarandre, vil det seie at alle jentene har helsa. Ved å telje strekane finn ein tal handtrykk, som er 10.



Figur 14 – Løysingsforslag 4

Eg har her teikna ei ikonisk teikning då ei piktografisk teikning ikkje gjev meg nokon fordel i løysinga av oppgåva. Angåande elevane sine svar, tenkte eg at det ville vere nokre elevar som kom til å teikne slik som meg, at personane er ein sirkel eller ein strek. Andre kunne kome til å teikne menneske, med ulik grad av detaljar.

3.4 Analysemetode

I dette kapittelet vil eg greie ut om korleis etterarbeidet gjekk føre seg, med transkripsjon og open koding. Eg vil presentere resultatet av dette, som enda opp i eit analysereiskap.

3.4.1 Abduktiv tilnærming

Den induktive tilnærminga går frå empiri til teori, medan den deduktive tilnærminga er motsett. Ved ei abduktiv tilnærming føregår det ei pendling mellom den induktive og deduktive tilnærminga, slik som eg har gjort (Postholm & Jacobsen, 2018). I min studie er føremålet å undersøkje prosessen teikningane vart produsert, og ikkje berre teikningane som produkt. For å kunne seie noko om teikneprosessen kombinerte eg dei førehandsdefinerte kategoriane med kategoriar utvikla frå ei open koding i datamaterialet mitt. Eg veksla altså mellom å gå frå empiri til teori, og frå teori til empiri, og utførte dermed ei abduktiv analyse. I ei abduktiv analyse seier Postholm og Jacobsen (2018, s. 103) at målet er å leite etter sannsynlege skildringar og forklaringar.

3.4.2 Transkripsjon

Etter datainnsamlinga var gjennomført byrja eg med å transkribere utsegn og handlingar i video-opptaka. Eg nytta transkripsjonsnøkkelen i tabellen under (Tabell 3.2).

Teikn	Tyding
.	Kort opphald, overgang
...	Opphald < 1 sekund
(9s)	Lengre opphald < 3 sekund
Ab-	Abrutt tale
abc!	Ekstra trykk
abc?	Spørjande
((abc))	Kommentarar, skildringar

Tabell 3.2 – Transkripsjonsnøkkel

Transkripsjonane er ikkje skrive på dialekt, men på nynorsk, slik som skriftspråket i denne oppgåva. Grunnen til dette er at det ikkje er relevant for oppgåva å innehalde dialektord, samt at å sjå vekk i frå dialektord kan bidra til å halde informantane anonyme. Eg fokuserte på å skildre kva handlingar som føregår, som mellom anna når elevane peikar på teikninga eller gestikulerte.

Eg nyttar omgrepet «episode», og refererer med dette til eit elevpar sitt arbeid med ei oppgåve. Det er seks grupper som vart filma og transkribert, og deltakarane på gruppene har fått fiktive namn. Gruppene består av følgjande medlemmar:

Gruppe 1 – Johanne og Maren
Gruppe 2 – Theodor og Mikkel
Gruppe 3 – Sandra og Lucas
Gruppe 4 – Eveline og Daniel
Gruppe 5 – Anna og Petter
Gruppe 6 – Leon og Alma

3.4.3 Open koding

For å kode datamateriale byrja eg med ei open koding, og ved den opne kodinga vart datamateriale studert, samanlikna og kategorisert (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 146).

Datamaterialet vart koda opent fleire gongar, der eg nytta tabell og programmet NVivo. Tabellen innehaldt spørsmåla «Kva matematikk skjer her?» og «Kva funksjon har teikninga her?». Her førte eg notatar for kvar episode, noko Postholm og Jacobsen (2018, s. 146) nemner kan bidra til å gjere datamateriale meir handterbart. Vidare valde eg ut nokre episodar eg ville sjå endå nærare på, og la då inn transkripsjonane frå dei episodane i NVivo. Der nytta eg foreløpige kategoriar, som til dømes spørsmål, hypotese, forkaste hypotese, grunngjeving, bevis. Eg markerte når teikningane vart nytta, ved å markere når teikninga vart peika på eller samtala om. Gjennom kodinga gjekk eg tilbake til råmaterialet for å sjekke om transkripsjonane stemde dersom eg var usikker på enkelte element.

Får å sjå på teikneprosessen saman med resonneringsprosessane, var det naudsynt for meg å utvikle nokre eigne kategoriar. Resultatet av den opne kodinga resulterte i følgjande kategoriar: *forme hypotese, revidere hypotese, underbyggje hypotese, støtte grunngjeving* og *støtte bevis.* Kategoriane vart identifisert frå empiri, samt ut i frå Jeannotte og Kieran (2017) sitt rammeverk. I tabell 3.3 har eg gjort greie for kategoriane.

Kategori	Skildring
Forme hypotese	Elevane nytta teikninga for å kome fram til ei foreløpig hypotese. Enten ved å nytte teikninga i prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar.
Revidere hypotese	Elevane nytta teikninga i prosessen ved leiting etter likskapar og skilnader, på ein slik måte at hypotesen vert revidert. Teikninga gjev altså innsikt som kan gjer slik at elevane forkastar den førre hypotesen.
Underbyggje hypotese	Ved å underbyggje hypotese vert teikninga nytta for å gje elevane støtte angåande hypotesen, men dette vil vere steget før elevane eventuelt kjem med ei grunngjeving for hypotesen.
Støtte grunngjeving	I kategorien å støtte grunngjeving nyttar elevane teikninga i argumentasjonen for å grunngje løysinga. Teikning nytta som støtte for grunngjeving skjer også for grunngjevingar som ikkje er matematisk gyldige.
Støtte bevis	Når elevane teiknar ei teikning som skal vere med på å forme eit bevis, vert teikninga nytta som ei støtte for dette beviset. Dette kan til dømes skje ved figurar som støttar deira munnlege eller skriftlege utsegn ved at elevane viser til teikninga.

Tabell 3.3 – Ulike kategoriar for funksjonen til teikning i resonnering

3.4.4 Analysereiskap for elevar si bruk av teikning i matematisk resonnering

Kategoriane i mitt analysereiskap skildrar den matematiske resonneringsprosessen til elevane, samstundes som eg har kategoriar for korleis teikninga vert nytta. Eg vil i dette kapittel summere opp omgrep og kategoriar frå teoriramma mi, og gjer greie for korleis dei vert nytta i min studie.

Før eg går innpå dei ulike kategoriane som vart nytta i mi analyse vil eg klargjere kva som avgjorde om elevarbeidet vart kategorisert som ei teikning eller ikkje. Eg såg på eit elevsvar som teikning når elevane i ulik grad hadde produsert eit elevsvar som inneheldt noko anna enn bokstavar, tal og matematiske symbol. På den andre sida har elevane ikkje nytta teikning om elevane berre nytta bokstavar, tal eller matematiske symbol. Det kunne òg vere at elevane nytta arket i det heile teke, og anten visualiserte eller nytta andre strategiar som å telje på fingrane eller nytta konkretar. Av elevarbeida som inneheld teikning studerte eg om teikninga var piktografisk eller ikonisk (forklart i delkapittel 2.2.1). Ei teikning vart kategorisert som piktografisk når teikninga inneheldt element som var realistiske i forhold til dei element som vart presentert i oppgåveteksten. Ikoniske teikningar er derimot forenkla teikningar, og teljestrekar. Eit døme kan vere å teikne eit jordbær som ein sirkel eller ei brusflaske som ein strek.

Teikning utan funksjon er ein kategori eg la til sjølv, då ingen av dei eksisterande rammeverka inneheldt denne kategorien. Eg erfarte i den opne kodinga at teikninga ved to tilfelle ikkje hamna under noko av dei allereie eksisterande kategoriane, samt at teikninga ikkje vart nytta i den matematiske resonneringa. I denne kategorien har elevane teikna, men ikkje nytta teikninga i nokon av prosessane i matematisk resonnering. Teikninga vert korkje nytta som informasjonshaldar for å halde orden på element i oppgåva, som ein presentasjon av ei løysing eller som konkretiseringsmateriale.

Under (i tabell 3.4) presenterer eg tabellen som i analysen vert nytta for å vise funna mine i korte trekk. I venstre kolonne er kategoriane som vart henta frå teori, og desse viser på kva måte teikningane vert nytta. Kolonnen til høgre er resultat av den opne kodinga, og utgjer her ei underdeling for kvar kategori. Dette var for å syne kva funksjon dei ulike teikningstypane har i elevane si resonnering.

Teikningane sine funksjonar i resonneringa	
Teikning utan funksjon	
Teikning som informasjonshaldar	Forme hypotese
	Underbyggje hypotese
	Revidere hypotese
	Støtte grunngjeving
	Støtte bevis
Teikning som presentasjon av ei løysing	
	Støtte grunngjeving
	Støtte bevis
Teikning som konkretiseringsmateriale	Forme hypotese
	Revidere hypotese
	Underbyggje hypotese
	Støtte grunngjeving
	Støtte bevis

Tabell 3.4 – Analysereiskap for funksjonen til teikningane

Teikning utan funksjon inneheld ikkje ei underdeling slik som dei andre kategoriane gjer. Grunne til dette er fordi ei teikning som ikkje har funksjon, vil såleis heller ikkje kunne ha funksjon i nokon av kategoriane i underdelinga. I kategorien der teikninga ikkje har nokon funksjon, vil teikninga heller ikkje kunne vere med på å forme hypotese, revidere hypotese, underbyggje hypotese, støtte grunngjeving eller støtte bevis, nettopp fordi teikninga berre eksisterer.

Teikning som presentasjon av ei løysing har berre 2 av dei 5 kategoriane i underdelinga. Ved teikning som presentasjon av ei løysing, vart teikninga ikkje ein del av prosessane knytt til leiting etter likskapar og skilnadar, men var heller ein del av valideringsprosessen då teikninga vart produsert etter at hypotesen var forma, og eventuelt revidert eller underbygt.

Teikning som konkretiseringsmateriale og teikning som informasjonshaldar inneheld alle dei fem underdelingane, då eg på førehand tenkte at det er mogleg at teikninga sin funksjon kan hamne under alle desse. I analysekapittelet gjev eg døme på teikningar med ulike funksjonar. Transkripsjonen, saman med teikningane og notatar frå intervju, nyttast for å avgjere kva funksjon teikningane hadde. Tabellen over (tabell 3,4) er presentert i kapittel 4.2, der den er fylt ut.

3.5 Studien sin kvalitet

Etter gjennomført studie er det viktig å reflektere over studien sin kvalitet, og eg har i dette kapittelet drøfta studien sin reliabilitet og validitet, samt gjort greie for etiske omsyn. Det er ikkje nok å sjå på forskinga si kvalitet knytt til resultatet ein får. For å kunne seie noko om studien sin kvalitet, var det vesentleg å studere korleis kunnskapen vart konstruert (Postholm & Jacobsen, 2018). Det er også viktig at eg, i mi forskarrolle, reflekterer over kva avgrensingar eg har i forskinga mi, og på kva måte eg kan ha påverka resultata (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222).

3.5.1 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet og validitet er to viktige faktorar for studien si truverd (Postholm & Jacobsen, 2018, s.223). Reliabilitet, altså pålitsgraden til forskinga, handlar om nøyaktigheita av dataa i forskinga. Det omhandlar altså kva data som er nytta, måten data er samla inn på, og korleis data er arbeida med (Christoffersen & Johannessen, 2012). Postholm og Jacobsen (2018, s. 222) skriv at reliabilitet totalt sett handlar om i kva grad ein kan stole på funna som er presentert i eit forskingsprosjekt, noko som krevjar at ein reflekterer og gjer greie for forskingsprosessen. Eg har i min metodedel forsøkt å gjere greie for ulike val, og gjeve eit innblikk i heile forskingsprosessen, frå før datainnsamling til etter enda analyse. Mitt teoretiske standpunkt er presentert i teorikapittelet.

Ulike spørsmål ein burde stille seg er om elevane tilpassa det dei sa i intervju, til det dei trudde eg ynskja å høyre (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 225). Dette var eg merksam på, og fokuserte difor på å stille minst mogleg ledande spørsmål. Vidare skriv Postholm og Jacobsen (2018, s. 131) at ulike kontekstar kan gje ulike resultat ved Burke sitt sitat: «A way of seeing is, indeed also a way of not seeing». Ved dette sitatet vil Postholm og Jacobsen (2018) belyse at observasjon kan sjåast på ulike måtar av ulike forskarar. Angåande resultata kan ein faktor som er påverkande vere om elevane som deltok har fått presentert teikning som representasjon før, eller ikkje. Vidare er ein faktor om eg har registrert alt det viktige. Postholm og Jacobsen (2018, s.227) skriv at vi aldri vil få betre data enn dei vi klarar å registrere. I klasserom kan det vere lurt å nytte video-opptak då forskaren kan oppleve situasjonen på nytt, noko som kan vere med på å auke truverda til studiet (Postholm & Jacobsen, 2018, s.131). Det kan likevel ha negativ påverknad i forskinga å nytte videoopptak då videokamera kan vere eit forstyrrande element (Postholm & Jacobsen, 2018). Elevane kan ha vorte påverka av kamera, då denne situasjonen er ein annan situasjon enn dei er vande med. Video-opptak meiner eg likevel vil gje betre datamateriale enn om eg berre hadde observert, då eg som deltakande observatør ikkje hadde klart å få med meg alt som skjedde. I mine transkripsjonar har eg forsøkt å leggje ved detaljar om kva elevane til dømes peikte på, eller viste med hendene, for å gjer transkripsjonane lettare å forstå. Eg er klar over at mine subjektive tolkingar kan ha hatt ein påverknad, og dette er ein av grunnane til at ein kvalitativ studie er vanskeleg å replisere.

Validitet, også kalla gyldigheit, omhandlar kva konklusjonar ein har dekning for å trekkje ut i frå dei data ein har samla inn og er delt opp indre gyldigheit og ytre gyldigheit (Postholm & Jacobsen, 2018). Den indre gyldigheita dreiar seg om i kva grad forskinga svarar på det ein undersøkjer, om det vi har kome fram til, altså mine konklusjonar, er gyldige for dei eg har studert (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 229). Den indre gyldigheita kan delast i to faktorar: årsaksgyldigheit og om vi har målt det vi trur vi har målt. Den ytre gyldigheita vert referert til som overføringsevne. For å forklare dette nærare kan ein seie at det går ut på å reflektere over i kva grad ein kan overføre resultat frå ei undersøking til andre kontekster.

Et sentralt spørsmål innan gyldigheit er kor godt, eller relevant, data representerer fenomena (Christoffersen & Johannessen, 2012). I mitt tilfelle, med kvalitativ studie, ville det vore utfordrande å måle dei ulike faktorane ved gyldigheit som er nemnt over. Eg kan seie at mi forsking svarar på det eg undersøkjer, men korleis mine omgrep dannar eit bilete av verkelegheita er utfordrande å måle. Eg har studert ein skule, og må vurdere i kva grad mine resultat kan overførast til andre skular (Postholm & Jacobsen, 2018). Sidan studien min er ein kvalitativ studie med 24 elevar, kan det reknast å vere for få til generalisere. Ein kan altså ikkje seie at resultata vil gjelde alle fjerdeklassingar, samstundes som ein ved studien kan sjå eit mønster. Likevel ville ikkje val av kvantitativ metode gjeve meg svar på mi problemstilling. Grunna oppgåva si avgrensing hadde eg ikkje tid til å samle meir data.

I mitt forskingsprosjekt gjennomførte eg eit pilotprosjekt for å førebu meg til datainnsamlinga. Eg meiner det kan ha styrka den samla truverda til studien då eg var meir budd til datainnsamlinga. Ein annan faktor er at eg nytta intervju for å supplere til observasjonen, noko som kan vere med på å auke truverda til studien (Postholm & Jacobsen, 2018).

3.5.2 Etiske omsyn

Det er alltid viktig å ta omsyn til, og ivareta etiske prinsipp både før, under og etter forskinga (Postholm & Jacobsen, 2018). Den nasjonale forskingsetiske komité for samfunnsvitskap og humaniora, forkorta NESH, har vedtatt forskingsetiske retningslinjer delt opp i tre hovudkategoriar som ein må tenkje gjennom før ei forsking byrjar (Christoffersen & Johannessen, 2012, s.41).

1. Informantane sin rett til sjølvråd og autonomi

2. Forskaren si plikt til å respektere informantane sitt privatliv

3. Forskaren sitt ansvar for å unngå skade

Eg har i dette kapittelet sett nærare på dei tre punkta, og gjort greie for mine val. Når det gjeld punkt nummer ein, er det ein viktig faktor at informantane skal sjølv kunne bestemme over si deltaking (Christoffersen & Johannessen, 2012). For at ein skal kunne bestemme sjølv dreg Postholm og Jacobsen (2018, s.248) fram fire faktorar; kompetanse til å velje sjølv, friviljugskap utan press, full informasjon og forståing.

Informantane skal gje informert og frivillig samtykke til å delta, og kan når som helst, utan konsekvensar, velje å trekkje seg frå prosjektet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Eit informert samtykke handlar om at den som skal undersøkast deltek frivillig og veit kva fordelar og ulemper deltakinga kan føre til (Postholm & Jacobsen, 2018).

I eit forskingsprosjekt der ein skal intervjue eller observere nokon, er det viktig å ta omsyn til dei juridiske forholda. Når ein skal samle inn, og behandle personopplysingar må ein vurdere om dei er meldepliktige fordi forskingsprosjekt som behandlar personopplysingar skal meldast inn til Sikt. I omgrepet personopplysingar meinast det opplysingar som gjer det mogleg å identifisere enkeltpersonar (Christoffersen & Johannesen, 2012; Postholm & Jacobsen, 2018). Personopplysingslova stiller krav om samtykke, og sidan elevane eg forska på ikkje er myndige, er hovudregelen at dei føresette samtykker på vegne av borna i eit samtykkeskjema (Christoffersen & Johannessen, 2012, s.45). Samtykkeskjema er lagt ved som vedlegg (Vedlegg 1).

Sidan eg i mitt forskingsprosjekt observerte og intervjua elevar, hadde eg stort fokus på å gjere deltakarane tryggje om kva forskinga gjekk ut på, og kva som skulle skje. Sjølv om det er dei føresette som samtykka på skjemaet, var det viktig for meg at elevane som deltok ga sitt eige samtykke. Eg skreiv difor, i tillegg til samtykkeskjemaet til føresette, eit informasjonsskriv tilpassa til elevane som deltok i studien (Vedlegg 2). Skjemaet og informasjonsskrivet inneheldt informasjon om forskinga, og kva det innebar for informanten å delta (Postholm & Jacobsen, 2018, s.138). For at deltakarane skulle kunne vurdere om dei ynskja å delta på prosjektet, trong dei få tilstrekkeleg med informasjon om føremålet med prosjektet, samt korleis datamaterialet skulle nyttast. Informasjon er altså viktig, men berre den informasjonen som angår informantane slik informantane har moglegheit til å forstå informasjonen (Postholm & Jacobsen, 2018). I tillegg til informasjonsskrivet til elevane, forklarte eg om prosjektet då eg kom til skulane, for å skape ei trygg ramme for elevgruppa. Eg var open for å ta i mot og svare på spørsmål elevane skulle ha. For å bevare etiske prinsipp ynskja eg berre filme elevpar som gav samtykke der og då, sjølv om dei har samtykka tidlegare. Eg opplevde at eit elevpar eg skulle filme ikkje hadde så lyst likevel, og fann då ei anna gruppe som erstatning utan at dette innebar konsekvensar for dei som trakk seg. Dette er med på å skape friviljugskap utan press, noko Aase og Fossåskaret (2014, s.199) nemner som ein viktig faktor i etiske omsyn. Ein kan som informant trekkje seg frå deltakinga i prosjektet utan konsekvensar, noko eg var påpasseleg med i min studie.

I punkt nummer to vert det lagt vekt at informanten beheld retten til å bestemme kva opplysingar forskaren skal ha tilgang til, og vere trygg på at forskaren tek hand om personopplysingane på ein konfidensiell måte (Christoffersen & Johannessen, 2012). Aase og Fossåskaret (2014, s.213) peikar på ein av dei store etiske utfordringane i kvalitativ forsking er å halde informantane anonyme. Eg har gjort tiltak for at utanforståande ikkje skal ha moglegheit til å identifisere enkeltpersonar i datamaterialet. Informantar skal ved samtykke kunne rekne med at dei er sikra anonymitet i prosessen frå innsamling til publisering av data (Aase & Fossåskaret, 2014; Postholm & Jacobsen, 2018).

Ein måte som kan bidra til å sikre informantane anonymitet kan mellom vere å gje informantane pseudonym, altså fiktive namn (Christoffersen & Johannesen, 2012; Postholm & Jacobsen, 2018). Som nemnt i metodekapittelet har elevane i studien fått fiktive namn, men som Aase og Fossåskaret (2014, s.213) nemner så sikrar ikkje fiktive namn åleine alltid anonymitet. Difor har eg heller ikkje nemnt kva skule elevane går på, eller i kva kommunar skulane er plassert. Eg har ved oppbevaring av datamateriale hatt fokus å lagre dette trygt, ved å ha minnepenn innelåst i skap med kode, samt vere kopla av internett når eg har arbeidd med rådatamaterialet.

Punkt nummer tre er særleg retta mot medisinsk forsking, men gjeld òg for samfunnsvitskapleg forsking (Christoffersen & Johannessen, 2012). Elevane som deltok i forskinga skulle utsetjast for minst mogleg belastning, og difor valde eg at gjennomføringa av prosjektet skulle gå føre seg i klasserommet til elevane. Dette for at elevane ikkje skulle oppleve å unødig verte tatt ut av det sosiale læringsfellesskapet, noko som vert peika på som eit viktig etisk prinsipp (Christoffersen & Johannessen, 2012). Elevane som ikkje var deltakande i prosjektet fekk vere med å løyse oppgåvene utan at elevsvara vart samla inn, og utan at dei var med i mine observasjonsnotatar.

Informasjonen som vart samla inn til oppgåva nyttast berre til dette føremålet (Christoffersen & Johannessen, 2012). Eg har behandla datamaterialet med respekt og takksemd ovanfor elevane og lærarane som deltok i min studie. Eg har òg vore merksam på måten eg framstiller deltakarane på, noko Postholm og Jacobsen (2018, s. 251) nemner som ein viktig faktor innan etikk.

4. Analyse

I følgjande kapittel vert datamaterialet og resultata av analysen presentert. Datamateriale er analysert med støtte i det presenterte teoretiske rammeverket og sentrale omgrep innan resonnering og teikning i matematikk. Her forsøkjer eg å finne samanhengar mellom resonneringa elevane gjorde, og teikningane dei produserte. Målet for kapittelet er å til slutt kunne svare på problemstillinga for studien:

Korleis nyttar elevar på 4.trinn teikning i arbeid med matematisk resonnering?

Analysen er strukturert etter kva funksjon teikningane til elevane har i resonneringsprosessane som er identifisert: *teikning utan funksjon, teikning som informasjonshaldar, teikning som presentasjon av ei løysing, og teikning som konkretiseringsmateriale*. Vidare analyserer eg, innan kvar kategori, korleis teikninga er nytta ved kategoriane *forme hypotese, revidere hypotese*, *underbyggje hypotese*, *støtte grunngjeving* og *støtte bevis* (presentert i tabell 3.3). Analysen har teorigrunnlag frå Saundry og Nicol (2006), Dahl (2020) og Jeannotte og Kieran (2017) sine rammeverk.

For kvar av oppgåvene ser eg på teikninga sin funksjon i teikneprosessen, samstundes som eg ser på resonneringsprosessen hjå elevane. Teikningane saman med utdrag frå transkripsjonen og notatar frå intervju er presentert for å vise korleis elevane arbeidde med oppgåva. Fyrst vil eg, i delkapittel 4.1, presentere ei oversikt over alle 43 elevsvar som er samla inn frå dei 12 gruppene, og ikkje berre dei episodane som vart filma. Vidare i analysen tek eg utgangspunkt i dei seks elevpara som vart filma, som utgjer 21 episodar.

4.1 Oversikt over teikningane

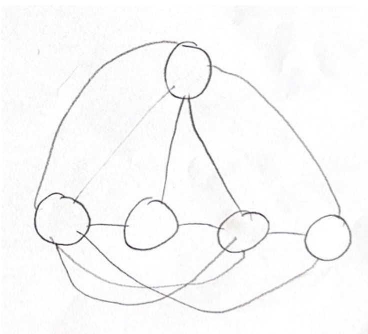
For at datamaterialet skal vere meir oversiktleg vel eg å presentere ei oversikt over alle 43 elevsvara som er innsamla. Tabellen under (Tabell 4.1) viser i kva oppgåver elevane nytta teikning og ikkje nytta teikning, samt om teikningane er piktografiske eller ikoniske.

	Oppgåve 1	Oppgåve 2	Oppgåve 3	Oppgåve 4	Totalt
Tal elevsvar	12	12	12	7	43
Inneheld ikkje teikning	2	1	0	0	3
Inneheld teikning	10	11	12	7	40
Piktografisk	8	11	12	2	33
Ikonisk	2	0	0	5	7

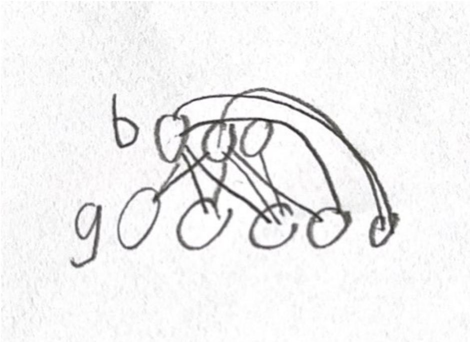
Tabell 4.1 – Oversikt over det samla tal elevsvar

40 av 43 elevsvar inneheld teikning, uavhengig av om teikninga er piktografisk eller ikonisk. I tabellen ser ein at det er få elevar som ikkje har produsert ei teikning på oppgåvene. Det er berre to elevsvar på oppgåve 1, samt eit elevsvar på oppgåve 2, som ikkje inneheld noko form for teikning. Dette til tross for at elevane ikkje har fått beskjed om å nytte teikning som representasjon. Elevane har i alle tilfelle der det er nytta teikning, også nytta anten tal, bokstavar, eller symbol for å løyse oppgåva, eller for å kommunisere si løysing med andre.

Som ein ser i tabell 4.1 er det ei stor overvekt piktografiske teikningar, der heile 33 av 40 teikningar er piktografiske. Av dei sju ikoniske teikningane er to teikningar i oppgåve 1 og fem teikningar i oppgåve 4. Oppgåve 1 og oppgåve 4 inneheld element som klede og personar, og her kan det tenkjast at elevane ikkje vil nytte tid på å teikne klede og personar, og at nokre elevpar dermed framstilte elementa ved bruk av ikoniske framstillingar som til dømes sirklar. Når eg spurte elevane i intervju kvifor dei teikna sirklar (figur 15) i staden for menneske fekk eg som svar: «Det er fordi det går mykje kjappare å gjere det».

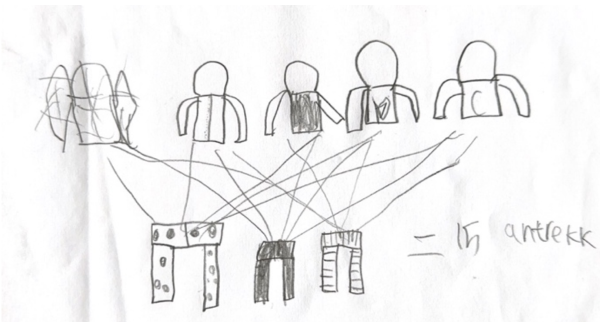


Figur 15 – Ikonisk teikning, oppgåve 4

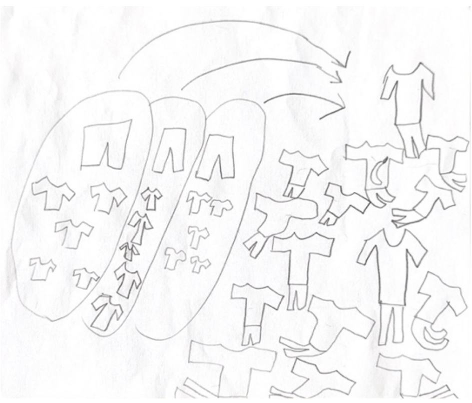


Figur 16 – Ikonisk teikning, oppgåve 1

Totalt var det ei større overvekt av piktografiske teikningar i alle oppgåvene utanom oppgåve 4. Ved oppgåve 1, vart typiske piktografisk teikningar framstilt slik som i figur 17 og 18.

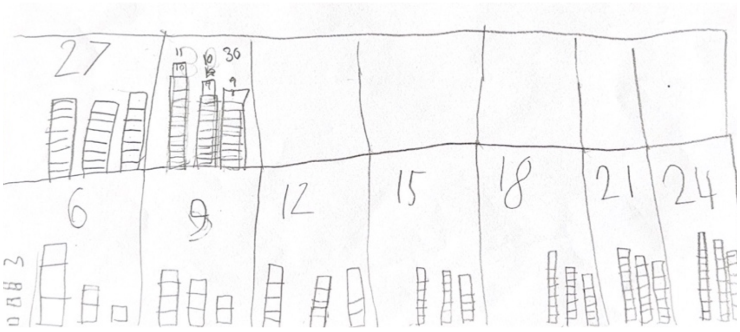


Figur 17 – Piktografisk teikning 1, oppgåve 1

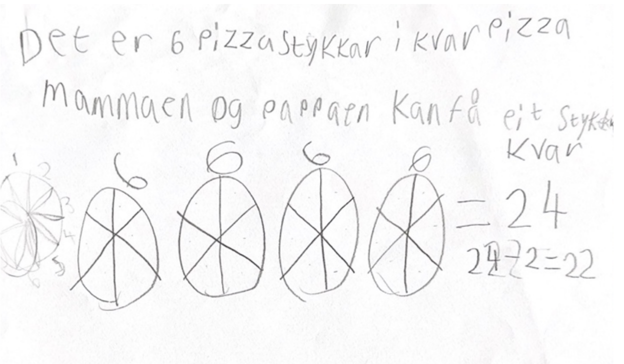


Figur 18 – Piktografisk teikning 2, oppgåve 1

I oppgåve 2 og oppgåve 3 er elementa i oppgåva enkle geometriske figurar som i dette tilfellet er klossar og pizza. Eg tenkjer årsaken til at elevane berre nytta piktografisk teikning i oppgåve 2 og oppgåve 3 er at det ikkje har noko hensikt å forenkle dei geometriske figurane som inngår her. Typiske framstillingar av oppgåvene er presentert under i figur 19 og 20. Eg vil påpeike at eg i intervju, spurde elevane kva dei hadde teikna, for å kunne plassere teikningane i rett kategori.

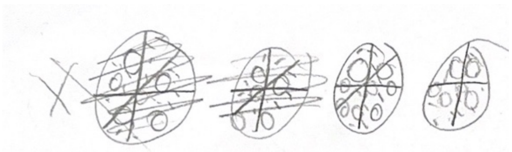


Figur 19 – Piktografisk teikning, oppgåve 2



Figur 20 – Piktografisk teikning, oppgåve 3

Nokre av dei piktografiske teikningane inneheld detaljar som ikkje vart nytta i løysinga av oppgåva. Døme på dette er når elevane teikna pepperoni på pizzaane (Figur 21) eller når dei teikna detaljrike klede på jentene som helsar på kvarandre (Figur 22). Elevane kom òg med utsegn som: «Det vert ikkje pizza utan pepperoni... og litt ost!» og «Eg elskar å teikne personar. Sjølv om eg ikkje treng då.»



Figur 21 – Detaljrikt bilete 1

Figur 22 – Detaljrikt bilete 2

Det er ikkje mange døme på teikningar som inneheld detaljar som ikkje er nyttige for resonneringa. Dei fleste teikningane som inneheld detaljar, viser seg å ha detaljar som eg tolkar som føremålstenlege. Dette fordi detaljane kan vere med på å hjelpe elevane å skilje elementa i oppgåva, slik som når ei gruppe teikna mønster på kleda til Pia, for å skilje dei ulike antrekka i oppgåve 1 (Figur 23).

Figur 23 – Detaljrikt bilete med funksjon

Vidare ser eg på korleis teikningane vart nytta i den matematiske resonneringa til elevane og vil difor, i tillegg til å studere teikningane, vise til dialogen mellom elevane frå oppgåveløysinga for å få innblikk i resonneringa til elevane. Ved å inkludere transkripsjonen får eg òg moglegheita til å sjå prosessen der teikninga vart produsert, og ikkje berre det ferdige produktet. Eg tek difor, i neste delkapittel, utgangspunkt i dei 21 episodane som vart filma.

4.2 Teikning og matematiske resonneringsprosessar

For å kunne seie noko om korleis elevane generelt nytta teikning i resonneringa, presenterer eg tabellen (Tabell 4.2) som viser resonneringsprosessane saman med kategoriane for teikning. Eg kategoriserer elevsvara i episodane inn i fire kategoriar: teikning utan funksjon, teikning som informasjonshaldar, teikning som presentasjon av ei løysing og teikning som konkretiseringsmateriale. Vidare ser eg på om teikningane i dei ulike kategoriane bidreg til å forme hypotese, revidere hypotese, underbyggje hypotese, støtte grunngjeving eller støtte bevis. Eg vil understreke at tala i kolonnen til høgre ikkje stemmer med tal teikningar som står i kolonnen til venstre, då teikningane er nytta i fleire delar av resonneringa.

Teikningane sine funksjonar i resonneringa		
Teikning utan funksjon (2 teikningar)		
Teikning som informasjonshaldar (4 teikningar)	Forme hypotese	3
	Revidere hypotese	-
	Underbyggje hypotese	1
	Støtte grunngjeving	3
	Støtte bevis	1
Teikning som presentasjon av ei løysing (4 teikningar)		
	Støtte grunngjeving	3
	Støtte bevis	1
Teikning som konkretiseringsmateriale (11 teikningar)	Forme hypotese	9
	Revidere hypotese	3
	Underbyggje hypotese	4
	Støtte grunngjeving	5
	Støtte bevis	2

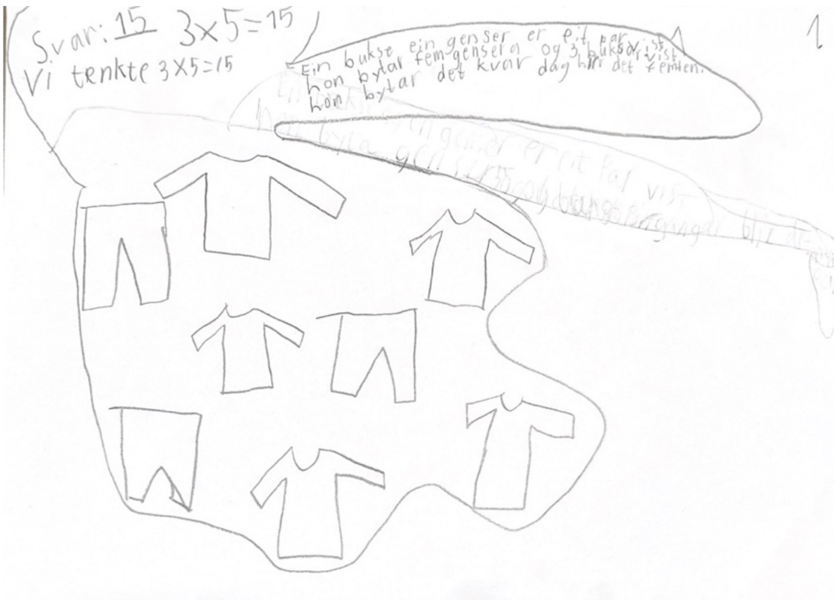
Tabell 4.2 – Funksjonane til teikningane

I analysen vil eg kome med døme på funksjonen teikninga hadde for elevane i deira resonnement.

4.2.1 Teikning utan funksjon

Som nemnt inneheld 40 av 43 elevsvar ei form for teikning. Sjølv om elevsvara inneheld ei piktografisk eller ikonisk teikning, er det ikkje eit sjølvfølgje at denne teikninga støttar nokon av elevane sine resonneringsprosessar. Innan kategorien *teikning utan funksjon*, finn eg berre to episode, noko som tilseier at dette ikkje førekom ofte. Teikningane eg kategoriserer til å ikkje ha noko funksjon for resonneringa, er korkje med på å forme hypotese, revidere hypotese, underbyggje hypotese, støtte grunngjeving eller støtte bevis.

Det fyrste dømet eg presenterer er henta frå gruppe 1, med Johanne og Maren (Figur 24). I episoden arbeider dei med oppgåve 1 (endeleg tal tilfelle), som omhandlar Pia som har 3 bukser og 5 genserar, der elevane hadde i oppgåve å finne tal antrekk Pia hadde med seg på sommarleir. Denne episoden vel eg fordi eg meiner det er eit godt døme på ei teikning som vert produsert medan elevane resonnerte, men som var *utan funksjon* for elevane si resonnering, noko eg her vil gjere greie for.



Figur 24 – Gruppe 1, oppgåve 1

Før dialogen under (frå linje 33) byrjar elevane med å *forme ulike hypotesar* for kor mange antrekk det kan verte. Så langt er det korkje produsert teikning eller skrive noko på arket. Johanne og Maren forstår at dei må nytte tala 3 og 5 for å kome fram til svaret, men dei gjettar kva rekneart dei skal nytte *utan å grunngje* valet ytterlegare. Johanne kjem med eit forslag om å byrje med å teikne bukser, men det er ingen respons hjå Maren. Maren held i linje 33 fram med å gjette kva rekneart dei skal nytte.

33 Maren: Eg trur vi må gonge.
34 Johanne: Det vert femten.
35 Maren: Skal vi berre skrive svaret også korleis vi tenkjer bak?
36 Johanne: Ja, berre skriv 3x5.
37 Maren: Eg skriv svar, også 15.
38 Johanne: Ja, berre skriv svar, også kva svaret vert.
39 Maren: Også skriv eg bak kva vi tenkte.
40 Johanne: Vi tenkte... Hm.
41 Maren: 3x5? ((Skriv «Svar: 15 3x5=15» på arket))
42 Johanne: Er ikkje vi ferdig med denne no?
43 Maren: Jo!
44 Johanne: Men skulle vi ikkje skrive tekst?
45 Maren: Jo, skriv tekst du?
46 Johanne: Eg veit! Vi tenkte 3 gonger 5. Det kan vi skrive. ((Skriv «Vi tenkte 3x5=15»» på arket.))

Johanne og Maren kjem fram til eit svar i denne dialogen, men dei har enda korkje grunngjeving eller bevis for kvifor det må vere 15 ulike antrekk. Vidare byrjar Johanne og Maren med å teikne genserar og bukser på arket (Figur 24).

48 Johanne: Eg teiknar bukse her ((Teiknar ei bukse.))
49 Maren: Vi kan teikne tre personar?
50 Johanne: Teikn ein genser... Raud.
51 ((Maren teiknar ein genser, samstundes som Johanne teiknar ei bukse til.))

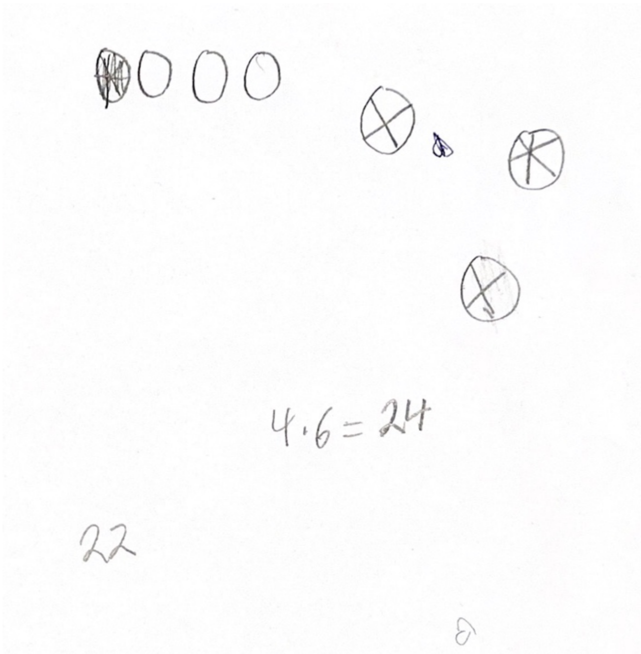
Elevane byrja å teikne elementa i oppgåva i linje 48, men i følgje Maren sitt utsegn på linje 49 og Johanne sitt utsegn på linje 50, verkar dei ikkje sikre på kva dei skal teikne. Det er ikkje sagt noko om kvifor dei ynskjer å teikne. Ein kunne i byrjinga tolke denne teikninga som ein presentasjon av svaret, der dei ynskja å *validere* svaret, men teikninga er ikkje nytta i ei grunngjeving eller i eit bevis. Eg kategoriserer ikkje teikninga som ein informasjonshaldar fordi eg meiner elevane ikkje nyttar denne for å halde orden på element, fordi teikninga berre eksisterer. Ved å lytte til resonnementa, og sjå nærare på teikninga er det vanskeleg å seie at den har ein funksjon i oppgåveløysinga, korkje i prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnadar eller prosessar knytt til validering. Vidare kjem læraren (i linje 53) for å høyre resonnementet til Johanne og Maren. Maren teiknar medan Johanne har ein dialog med læraren.

53 Lærar: Sjå der ja. Ikkje tenk på at de skal skrive, berre prøv å forklar til meg. Kvifor tok de 3x5? (12 s) Johanne, kva tenkte de når de kom fram til 3x5?
55 Johanne: Hm, for ei bukse og ein genser er eit par... Så må ho skifte til ein ny genser... Så det vert eit nytt par, så vert det nytt, og nytt... og eit til nytt ((tel på fingrane medan ho pratar))
57 Lærar: Ja, men skriv ned dei tinga som de tenkjer.
((Lærar går. Elevane diskuterer at dei har teikna for stort. Dei har no teikna 3 bukser og 5 genserar på arket.))

No har Maren og Johanne teikna alle elementa i oppgåva på arket, men nyttar ikkje teikninga endå. *Grunngjevinga* Johanne forsøkjer å gje i linje 55, inneber at ho har *identifisert eit mønster,* men dette er ikkje på grunn av teikninga sin eksistens. Mønsteret ho har identifisert er at ein har eit par med bukse og genser, og at ein då kan byte genseren og få eit nytt par. Dette kan ein gjer fleire gongar fram til alle genserane er nytta.

I etterkant av arbeidet, på gruppeintervjuet, stilte eg elevane spørsmål om denne teikninga. Ved spørsmålet; Kvifor teikna de her?, svarte Johanne og Maren at dei teikna på denne oppgåva fordi dei overhøyrde at nokon andre hadde teikna. Elevane var samde om at teikninga ikkje vart nytta for å kome fram til ei løysing på oppgåva. Maren legg derimot til at det var gøy å teikne i matematikk, og uttrykte at ho ynskja å klare å nytte det for å verte betre til å løyse oppgåver.

I min studie har eg som sagt berre to tilfelle der teikninga eksisterte, men var utan funksjon for elevane si resonnering. Eg vel å presentere mitt andre døme, som er frå gruppe 4, Eveline og Daniel. Dette døme er frå oppgåve 3 (enkelttilfelle), som omhandlar mor til Pia som skal dele fire pizza på 22 gjestar.



Figur 25 – Gruppe 4, oppgåve 3

Elevane byrjar (i linje 5) med å teikne fire rundingar (øvst i figur 25), som skal førestille dei fire pizzaane. Eg kategoriserer ikkje denne teikninga som ein informasjonshaldar då teikninga ikkje er nytta vidare. Elevane undrar korleis dei skal løyse oppgåva, og tel på fingrane.

5 Eveline: Vi teiknar fire pizza... Ein, to, tre, fire.
6 Daniel: Vi må jo tenkje gangetabellen.
7 Eveline: Kva er 7x4?
8 Daniel: Eg er ikkje god på korkje 4- eller 7-gongen.
9 Elveline: ((Ho tel stille)) 28 vert det... Men det vert ikkje riktig svar på oppgåva.
10 ((Begge elevane tel stille, og det høyrast ut som dei tel i 4-gongen og 5-gongen. Dette gjer dei i overkant av eit minutt.))
12 Daniel: Kan ikkje vi prøve 4X22 eller 22x4?
13 Eveline: Hm...Trur ikkje det. Korleis kan vi dele opp pizzaane?
14 Daniel: Med kniv?
15 Eveline: He-he.
16 Daniel: Men sjå da... Ein, to, tre, fire, fem stykkje. ((Tel på fingrane))
17 Eveline: Kva er 12+5?
18 Daniel: 13, 14, 15, 16, 17. Det vert 17. ((Tel på fingrane))

Elevane grublar, og skjønar ikkje korleis dei skal gå fram for å løyse oppgåva. Eveline og Daniel etterspør hjelp. Læraren kjem bort, og dialogen forset slik:

27 Lærar: Kva har de gjort og tenkt?
28 Eveline: Vi tenkjer vi må gonge.
29 Lærar: Om vi har fire pizza, og delar dei i to. Kor mange stykkje har vi då? (6s) Då må vi ta 2x4 sant.
31 Eveline: 8.
32 Lærar: Ja, om vi delar dei igjen då?
33 Daniel: Eg kan ikkje så godt å gange eg.
34 Lærar: Då vert det fire bitar på kvar pizza... Så til saman 16.
35 ((Medan Eveline og lærar samtalar, teiknar Daniel pizzaar som han delar opp i ulik mengd. Sjå figur 26.))
37 Eveline: Det er ikkje nok.
38 Lærar: Nei, kva må vi gjere da? (5s) Idear?
39 Daniel: Kanskje gonge igjen?
40 Eveline: Vi må dele meir opp?
41 Lærar: Ja, kor mykje då?
42 Eveline: Det... Veit eg ikkje.

Figur 26 – Utklipp frå gruppe 4, oppgåve 3

Vidare forset læraren med å forsøke og forklare kva gangestykke det vert. Dei kjem til slutt fram til at 6x4 vert 24, og at alle får eit pizzastykke kvar, samt at det er to til overs. Elevane avsluttar med å skrive eit numerisk svar på arket. Dei fire pizzaane som vart teikna er ikkje nytta for å halde orden på elementa då ein ser at elevane tel på fingrane, og ikkje ser på arket. Daniel teiknar (i linje 35) ulike pizza med vilkårleg mengd pizzastykke (Figur 26). Teikninga kunne i denne episoden vore ei støtte i fleire resonneringsprosessar, men er ikkje nytta. Dette gjer Daniel greie for i intervju. Daniel seier at han skulle ynskje dei nytta teikninga, sidan han ikkje kan å gonge. Både Eveline og Daniel er samde om at dei ikkje veit korleis dei skal nytte teikning til å finne svaret.

4.2.2 Teikning som informasjonshaldar

Innan kategorien teikning som informasjonshaldar finn eg tre episode, som alle er i løysinga av oppgåve 2. Oppgåve 2 er ei oppgåve med uendeleg tal tilfelle, og handlar om å undersøkje om summen av tre påfølgjande tal alltid kan delast på tre. Episodane under er tilfelle der teikninga berre er ein informasjonshaldar, og viser den matematiske strukturen i oppgåva. Dette ved at elevane teiknar dei element som dei meiner er relevante for å løyse oppgåva (Dahl, 2020). Slik som døma eg presenterer viser, nyttar elevane teikningane for å halde oversikt over alle elementa i oppgåva, og teikninga er ikkje nytta som konkretiseringsmateriale då det ikkje skjer ei aktiv handling ved teikningane. Eg presenterer to av dei tre episodane i kategorien, og byrjar med episoden der gruppe 5, Anna og Petter, arbeider med oppgåve 2. Elevane les oppgåva, og deretter går dialogen slik:

5 Petter: Sjå da...Ein, tre, seks. Altså når eg plussar vert det seks. Det er i 3-gongen.
6 Anna: Ja.. Alltid?
7 Petter: Det trur eg ja. (5s) Det andre tårnet... Vi må sjå.
8 Anna: Ja, sjekk.
9 Petter: Hm... ((Petter peiker på dei tala som skal leggjast i hop, og reknar)) Det vert slik...to, fem, ni... (5s) Ni er i 3-gongen.
11 ((Petter leiter etter gangetabellen i pennalhuset sitt, og studerer den))

I linje 7 seier Petter at han trur at det alltid vert slik at 3 påfølgjande tal, alltid kan delast på tre, og *formar med dette ei hypotese* utan ytterlegare grunngjeving. Denne hypotesen vert forma før teikninga er produsert. I linje 13 og 14 *eksemplifiserer* Petter og Anna, ved å teste hypotesen med tårn med tre andre påfølgjande tal.

13 Petter: Kanskje vi kan ta... Hm... Ein... To... Tre... ((Petter teiknar det fyrste tårnet med tre klossar. Sjå figur 27))
14 Anna: Ja, også 4 også 5 på dei neste.

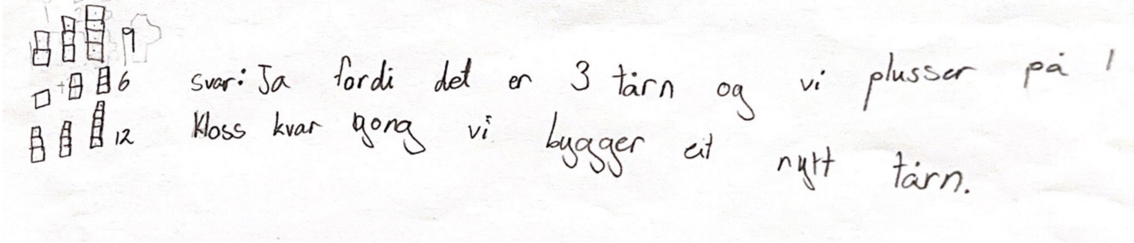
15 Petter: 12! Det er og i 3-gongen. Forresten, alt i 3-gongen kan delast på tre. Ser du det?

16 ((Petter teikna så dei to neste tårna med fire og fem klossar.))

Figur 27 – Gruppe 5, oppgåve 2

Elevane tel klossane på teikninga og finn at det er 12 klossar. Ved ei *klassifisering* (linje 15) Petter gjer, finn elevane at alle tal i 3-gongen kan delast på 3. Teikninga som er produsert i linje 13-16 er med på å *underbyggje hypotesen* dei formar i linje 7. Teikninga finn stad under *teikning som informasjonshaldar* fordi elevane vel å teikne dei element dei ser på som relevante for å løyse oppgåva, men nyttar ikkje teikninga aktivt som eit konkretiseringsmateriale. Elevane kom så med ei *grunngjeving* for at hypotesen gjaldt alle dei tilfelle dei har testa, med andre ord eit empirisk argument. Teikninga er nytta som *støtte for grunngjevinga* då elevane enklare kan kommunisere og visualisere løysinga. I intervju seier elevane at: «Teikninga hjelpte oss å tenkje».

Neste episode er henta frå gruppe 12, som består av Leon og Alma. Dei byrjar med å lese oppgåva, før dei straks finn ut at det kan vere lurt å teikne dei ulike tårna for å forstå strukturen i oppgåva.



Figur 28 – Gruppe 6, oppgåve 2

4 Leon: Vi kan jo teikne dei ulike tårna og sjå då?

5 Alma: Ja, lurt.

6 ((Alma teiknar tårnet med 1, 2 og 3 klossar, men dette er på teikninga (Figur 28) viska ut.))
7 Leon: 6... Enkelt! Det er i 3-gongen.
8 ((Alma viskar ut tårna, og teiknar tårna 2, 3, 4.))
9 Alma: Dette vert ni.. (5s) Og er vel og i 3-gongen?
10 Leon: Ja. Eg trur alt er i 3-gongen.

Teikninga vert nytta som *informasjonshaldar* då elevane nyttar teikninga for å halde oversikt over fleire tilfelle med tre påfølgjande tal. Leon og Alma *formar ei hypotese*, der dei trur at det alltid vil gå opp i 3-gongen. Teikninga er med på *forme denne hypotesen.* Elevane nyttar teikninga til å halde orden på elementa, og peikar aktivt på teikninga. Leon påpeikar at det var dumt at Alma viska ut dei førre tårna, fordi det er enklare å sjå føre seg og halde orden når dei var der. Dette fører til at Alma teiknar tårna på nytt.

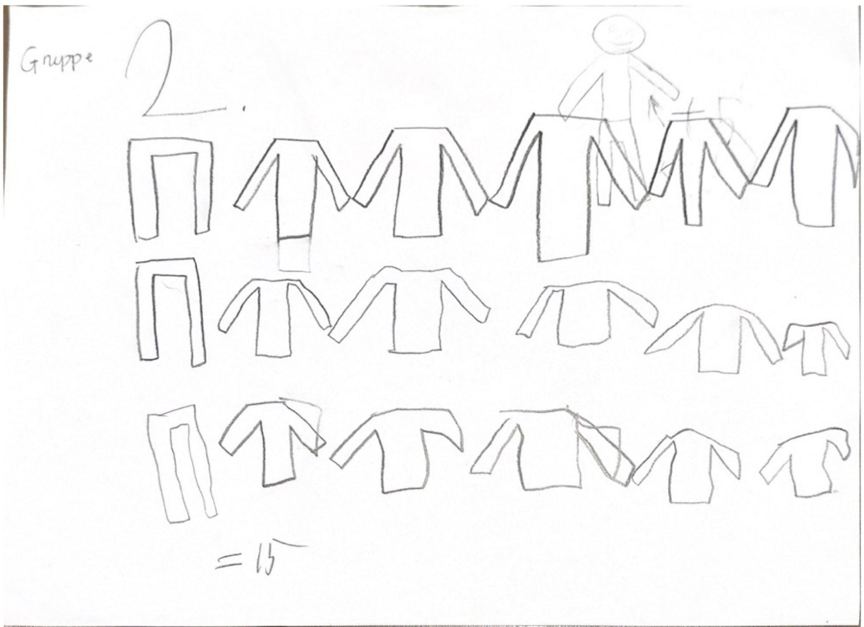
14 Alma: Men no har vi teikna tårna, og begge vert i 3-gongen. Kva gjer vi no?
15 Leon: Alltid... Vil det alltid?
16 Alma: Vi får teikne eit til å sjekke då.
17 ((Alma teiknar tårna 3,4 og 5. Og skriv at dette vert 12.))
18 Leon: 12 er også i 3-gongen.
19 Alma: Aha! Det vert jo alltid slik.
20 Leon: Alltid? (4s) Sikker?
21 Alma: Ja, sjå då... Fordi at når det fyrst er slik med desse tre fyrste tårna ((peikar på dei tre tilfella dei har testa i figur 28)), så ser du at talet vert tre meir kvar gong... Og det er det i 3-gongen også... At det er tre meir kvar gong, meiner eg.
24 Leon: Ja, det er sant. Når det aukar med tre tal i klossane, og det aukar med tre tal i 3-gongen også, vil det alltid gå å dele tårna på tre.

I argumentet til Alma i linje 21 har ho gjort ei *klassifisering*. I dialogen utrykkjer Leon og Alma ei form for induksjonsbevis, der hypotesen stemmer for fyrste tilfelle, også for neste tilfelle. Når dei fortset ved å leggje på 3 og 3 klossar må alle andre tårn også verte eit tal (klossar til saman i dei tre tårna) som er i 3-gongen. Teikninga i figur 28 er då ei *støtte for beviset*, sidan Alma refererer til denne når ho kjem med sitt argument i linje 21-23, og Leon sitt argument i linje 24-25.

4.2.3 Teikning som presentasjon av ei løysing

Nokre av elevpara teiknar etter at dei har funne ei løysing på oppgåva, og nyttar dermed teikning i valideringsprosessen ved å anten grunngje svaret eller ved å forme eit bevis ved hjelp av teikning. Det skal nemnast at fleire av teikningane som vart nytta som konkretiseringsmateriale òg vil kunne kome under denne kategorien, men eg fokuserer her på teikningane som er teikna etter at framgangsmåte og ei løysing er presentert munnleg eller skriftleg med tal eller bokstavar av elevane. Døma i denne kategorien inneber at teikninga er med på å støtte eit bevis eller støtte ei grunngjeving. For å vise korleis teikninga vert nytta som presentasjon vil eg presentere to episodar, der ei teikning støttar grunngjeving og ei teikning støttar eit bevis.

Gruppe 2, Theodor og Mikkel, sitt arbeid med oppgåve 1 er eit døme på at *teikninga støttar ei grunngjeving*. Elevane finn fyrst ei løysing på oppgåva ved hovudrekning, før dei deretter produserer ei teikning i etterkant for å *grunngje hypotesen* dei formar.



Figur 29 – Gruppe 2, oppgåve 1

Etter Theodor og Mikkel les oppgåva er Theodor rask med å *forme ei hypotese* på bakgrunn av ei *generalisering*, om tal på moglege antrekk. Dette gjer han utan støtte av teikning. I det Theodor byrjar å *grunngje* at hypotesen må stemme, vert han avbroten av ein felles beskjed frå læraren. Medan læraren pratar teiknar Mikkel ein person, og skriv +5 ved sidan av genseren og +3 ved sidan av buksa (Sjå oppe til høgre i figur 29). Denne teikninga er ikkje nytta, og er seinare viska ut. Etter den felles beskjeden går dialogen som følgjer:

5 Theodor: Om ho har tre bukser sant, så kan ho jo nytte... Altså, viss ho har... At ho har ei bukse på seg, også kan ho nytte alle genserane til den. Så ho har altså 5 genserar til kvar bukse. Då har jo ho 15 antrekk. 3 gongar 5 er 15.
8 Mikkel: Ja, veldig smart tenkt! Skjønte det faktisk.
9 Theodor: I am a genius! Eg har 100 i IQ.

I linje 5 kjem Theodor med ei *grunngjeving*, som er basert på at Theodor *identifiserte eit mønster.* Vidare kjem læraren og spør kva elevane tenkjer. Denne gangen er det Mikkel som forklarar, på same måte som resonnementet til Theodor. Læraren etterlyser ei grunngjeving for hypotesen uttrykt på arket i linje 15.

15 Lærer: Kan de prøve å vise dette på arket?
16: Mikkel: Vi kan teikne opp buksene og genserane?
17 ((Elevane samarbeida om å teikne. Dei byrjar med å teikne 3 bukse nedover.))
18 Mikkel: Også genserar?
19: Theodor: Ja, om du teiknar fem genserar til den buksa, så kan eg teikne fem genserar til den og den buksa. Ok?
21 ((Mikkel byrjar å teikne genserar til den øvste buksa. Elevane pratar om andre ting medan dei teiknar, mellom anna at dei må viske ut personen for å få plass. Dei kommenterer òg at det tek lang tid å teikne alle genserane.))
24 Mikkel: Her er alle buksene Pia har. Og ho kan ha fem genserar til kvar bukse som du ser her. ((Peikar på teikninga medan han pratar))
26 Lærar: Kor mange ulike vert det då?
27 Mikkel: 15 antrekk!
28 Theodor: 15 ja. Og dette kan vi gjere ved å gange 3 med 5. Sjå da.
29 Lærar: Korrekt!
30 Mikkel: Ok, vi treng ikkje teikne resten då.
31 Theodor: Jo, for det kan vise kva vi tenkjer.
32 Mikkel: Sant... Det er vanskeleg å forklare med bokstavar kva vi tenkjer.
33 Theodor: Skulle ynskje vi kunne trykkje «copy + paste» då.

I linje 24 forsøkjer Mikkel å *forme eit bevis,* og viser her til teikninga. Når læraren svarar at resonnementet er korrekt, tenkjer Mikkel at dei ikkje treng å teikne resten, då dei allereie har klart å grunngje svaret. I linje 31 argumenterer Theodor for at dei skal teikne resten av genserane uansett, sidan teikninga kan vere med på å *støtte grunngjevinga dei har forma* då dette vert ei systematisk opplisting av moglege antrekk. Denne teikninga hadde ingen funksjon for å forme, underbyggje eller revidere hypotesen, men i valideringsprosessen gjorde det til at dei eventuelt kunne avdekka feil ved løysinga. Å nytte teikning på denne måten var ein måte for Theodor og Mikkel å kommunisere korleis dei tenkte. Theodor avsluttar med følgjande utsegn: «Sjå, no kan alle faktisk på ekte sjå at det vert 15 antrekk» og peikar på teikninga. Dette sitatet tolkar eg som at Theodor ynskjer at teikninga skal vere ein del av sitt bevis, samt for å kunne kommunisere det med andre. Når eg spurte Theodor og Mikkel i intervju kvifor dei valde å teikne på denne oppgåva fekk eg følgjande svar: «Vi teikna for å vere sikre vi. Ikkje sant, Mikkel?». Mikkel nikkar.

Mitt andre døme er gruppe 1, Johanne og Maren, sitt arbeid med oppgåve 2 som er oppgåva med tre påfølgjande tal. Dette er ei oppgåve med lang tekst, så elevane les oppgåveteksten fleire gongar. Vidare går dialogen slik:

7 Maren: Då kan vi byrje med å teikne tre tårn! (6s) Men korleis skal vi teikne tårna då?
8 Johanne: Men vi må sjå kor mange klossar fyrst...
9 ((Elevane les oppgåva igjen))
10 Maren: Men om vi teiknar dei tre tårna han laga fyrst, også dei tre andre tårna han laga etterpå?
12 Johanne: Men... Trur vi klarar det utan å teikne.

I linje 7 og 10 kjem Maren med forslag om at dei kan teikne tårn, for å halde orden på tårna, som ein *informasjonshaldar*. Elevane let ver å teikne eller skrive, og fortset med å prøve å finne svaret. Dei kjem til slutt fram til ei *hypotese* om at det alltid vil vere eit tal i 3-gongen. Så langt har dei ikkje skrive noko på arket, korkje teikning, bokstavar, tal eller symbol.

21 Maren: Men, ok... Tårn 1-3 vert jo 6. Og tårn 2-4 vert... Det vert 9.
22 Johanne: Ja, og begge er i 3-gangen.
23 Maren: Ja.
24 Johanne: Men vert det alltid sånn då?

25 Maren: Tippar det! Neste tårn vert då... Hm...
26 Johanne: 3, 4 og 5.
27 Maren: Og det vert? (5s) Eg klarar ikkje å tenkje.
28 Johanne: Skal vi sjå... 3+4 vert 7. Også må vi leggje til 5.
29 Maren: 12 då. 3, 6, 9, 12... I 3-gangen ja.
30 Johanne: Då vert det nok alltid slik?
31 Maren; Det kan sjå sånn ut. (6s) Hallo, dei tala aukar med tre og det gjer 3-gangen også.
32 Johanne: Ja! Eg ser føre meg at vi har desse tre tårna, også skal eg og du og læraren dele tårna. Det går vel då?
34 Maren: Hm... Tal i 3-gangen kan delast på 3.
((Elevane sit å tenkjer, utan å prate))
36 Johanne: Eg veit! Viss den som har flest klossar gjev ei kloss til den som har minst, vil alle få likt sant?
38 Maren: Ja, det trur eg.

I linje 31 *samanliknar* Maren summen av fleire dømer med tre påfølgjande tal og tala i 3-gangen. Ho *identifiserer eit mønster* om at tala i 3-gangen aukar med tre, slik som tårna gjer om ein legg til tre klossar kvar gong. Maren og Johanne *klassifiserer* ved at dei ser at alle tala ved dei tre påfølgjande tala kan delast på tre. Vidare kjem eg, og spør etter ei grunngjeving.

51 Tina (meg): Kan dykk forklare meg kva dykk har tenkt?
52 Maren: At tala er i tre-gangen.
53 Tina: Ok. Men kvifor vert det slik?
54 Johanne: Tenk deg at vi tre skulle dele tre tårn. (5s) Kanskje vi skal teikne likevel? (5s) Slik som du foreslo.
56 Maren: Ja, eg sa det var lurt å teikne. Det er lettare å forklare med teikning.

Figur 30 – Gruppe 1, oppgåve 2

Vidare byrjar Johanne og Maren å teikne tårna, for å *støtte grunngjevinga* deira. Dei teiknar tårna på figur 30.

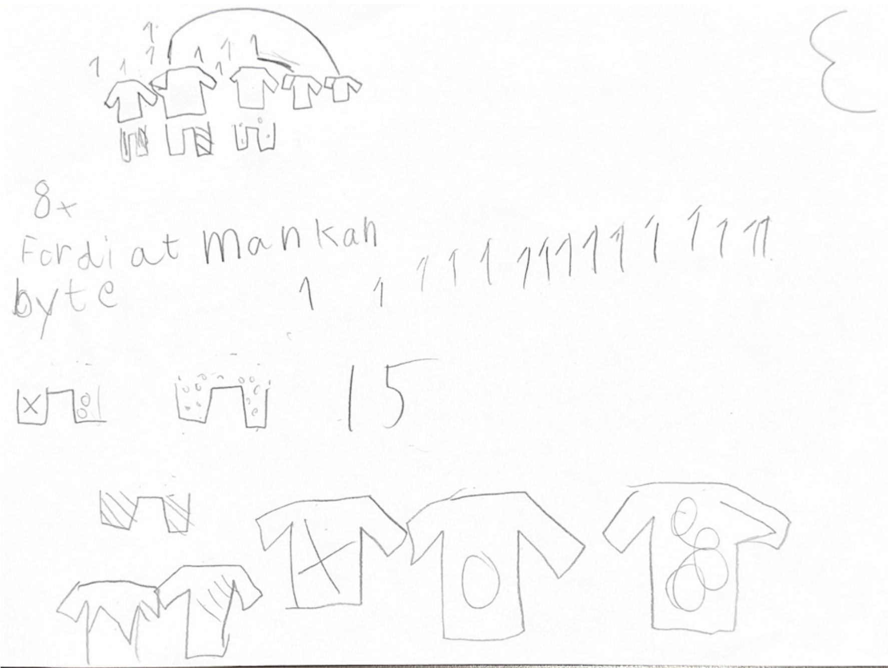
61 Maren: Sjå på teikninga... Viss eg tek den klossen ((Frå tårn 3, og gjev den til deg. Då får vi likt))
62 Johanne: Viss vi set pil frå dette tårnet til dette så vert det slik som vi forklarte.
63 Maren: Ja. Då får vi 2 klossar på kvart tårn.
64 Johanne: Og uansett om vi legg til tre klossar, så kan vi tre dele alle desse klossane likt.
65 Tina: Om eg byggjer tårna 100, 101 og 102 da?
66 Maren: Ja... Vi legg jo berre klossane til under her, sjå då ((Maren viser til teikninga))
67 Johanne: Ja, alt går.
68 Maren: Alt går ja!
69 Tina: Kva meiner de med at alt går?
70 Maren: Dei tre tårna vert alltid eit tal i 3-gongen om vi legg til 3 klossar, fordi tregangen aukar jo med 3. Difor vil det alltid gå. ((Maren skriv: Alt går, øvst på arket))
72 Johanne: Ja, og det har ikkje noko å seie kva tårn det er, så lenge det er tre tal som kjem etter kvarandre. Det største tårnet ((Peikar på teikninga)) gjev ein kloss til det minste, så vert det alltid likt.
75 Maren: Tårna kan liksom vekse under her ((Peikar nedst på dei tre tårna))

Elevane uttrykkjer ved hjelp av teikning og munnlege utsegn eit generisk argument. Argumentasjonen til elevane tek utgangspunkt i døma, for å vise strukturen til tala som adderast. Eg analyserer dette til å vere eit generisk argument fordi elevane nyttar dei konkrete døma for å forklare generelle eigenskapar knytt til hypotesen. Teikninga er i dette tilfelle viktig for deira bevis, og er i dette tilfellet kategorisert som ei *støtte for bevis.*

4.2.4 Teikning som konkretiseringsmateriale

11 av episodane i datamaterialet er nytta som konkretiseringsmateriale, og det er denne kategorien som er mest nytta hjå elevane. I denne kategorien finn eg døme i alle oppgåvetypane, og finn teikning som støtte i alle kategoriane; forme hypotese, revidere hypotese, underbyggje hypotese, støtte grunngjeving, og støtte bevis. Dette tolkar eg som at denne kategorien er allsidig. Eg vil i denne kategorien presentere fire episode, der eg kjem med eit døme frå kvar av oppgåvene eg gav elevane.

Det fyrste dømet eg ser nærare på er frå gruppe 3, Sandra og Lucas, som arbeider med oppgåve 1 (Figur 31), som er ei oppgåve med endeleg tal tilfelle. Oppgåve 1 er oppgåva som omhandlar Pia sine antrekk.



Figur 31 – Gruppe 3, oppgåve 1

Elevane les oppgåva saman, før dei byrjar dialogen under (frå linje 3).

3 Sandra: Ok. 3 bukser og 5 genserar.
4 Lucas: Ja, skal vi gange tala Tina?
5 Sandra: Eller addere eller subtrahere?
6 Tina (meg): Kva kan de gjere for å finne ut dette? Idear?
7 Sandra: Kanskje skrive det ned?
8 Lucas: Eller vi kan teikne dei ulike.
9 Sandra: Ulike kva?
10 Lucas: Buksene og genserane vell?
11 Sandra: Ok, du kan teikne du.
12 Tina: Det kan vere ein lur måte å gjere det på.
13 ((Lucas teiknar 5 genserar og 3 bukser))
14 Sandra: Ho har over 5 antrekk syns eg, for ein kan bytte ut fleire genserar? ((viser med hendene)) Og då vert det fleire antrekk, litt som... ((tar blyanten frå elev 2 og viser på teikninga)) Her er det 3 bukser og 5 genserar. Her er det tre antrekk. ((viser antrekka til venstre)) Men ein kan fortsatt bytte dei to ((refererer til genser nr 4 og 3)) og bytte dei to ((refererer til genser nr 5 og 2)). Så då er det iallfall 5 antrekk.
19 Tina: Kan det vere fleire enn 5, eller trur de at det er alle?
20 Sandra: Det kan vere fleire, for det går an å byte slik mange gangar ((Viser slik som i sta, linje 14))
22 Tina: Ja, korleis kan de finne alle moglege antrekk då?
23 Sandra: Viss eg byrjar med å lage litt ulike mønster på kvar.

Sandra og Lucas byrjar med å gjette seg fram til rekneart i linje 4 og 5. Vidare diskuterer elevane kva representasjonsform dei skal nytte. Sandra *formar ei hypotese* fyrst når dei tek i bruk teikning som eit verkty i linje 14.

29 Sandra: Då går det an å bytte alle saman her ((peiker på plagga i teikninga)) Det går an å ta desse her to. Då tar vi eit der, og eit her, og eit her. ((Skriv eit eit-tal over dei tre fyrste antrekka))
30 Lucas: Vi har tre.
31 Sandra: Ja, men viss vi bytar desse her to så har vi...
32 Lucas: Vi har ikkje fleire buske?

33 Sandra: Men viss vi bytar desse her så har vi eit antrekk til. Og viss vi bytar desse her to genserane har vi enda eit andre. Og...

Sandra og Lucas nyttar *teikninga som eit konkretiseringsmateriale* ved at det skjer ei aktiv handling i teikninga. Dialogen held på vidare, og elevane kjem fram til åtte antrekk. Sandra og Lucas er usikre, då dei ikkje finn ei grunngjeving for kvifor dei enda opp med 8 som svar. Dei bestemmer seg for å teikne på nytt, ved at Sandra peikar og lagar par på ein systematisk måte, medan Lucas skriv eit eit-tal for kvart par. Dette gjer til at *hypotesen vert revidert.* Sandra *grunngjev* svaret med at ho no har systematisk funne alle antrekka. Dei tel strekane, og får 15 som svar.

I gruppeintervjuet seier Sandra at dei teikna fordi «Oppgåva vart enklare når vi teikna». Ved oppfølgingsspørsmål om kva som vart enklare seier ho: «Då kunne vi liksom både sjå... Viss vi hadde fem genserar så kunne vi ta det med ei bukse så vart det enklare... I staden for å skulle tenkje genserar og bukser liksom.» Lucas legg til at: «Utan teikning hadde det vore vanskelegare. Teikninga hjelpte oss å løyse oppgåva faktisk.»

Vidare ser eg på Lucas og Sandra sitt arbeid med ei oppgåve med uendeleg tal tilfelle, og dette er ei oppgåve som er ei generell hypotese (oppgåve 2).

Figur 32 – Gruppe 3, oppgåve 2

Dialogen byrjar med at elevane summerer tre påfølgjande tal, og forsøkjer vidare med andre påfølgjande tal. Dei finn at den generelle hypotesen stemmer for fleire døme, og har dermed kome med eit empirisk argument. Elevane seier seg nøgde med denne *grunngjevinga*, men eg kjem og etterspør eit bevis eller ei ytterlegare grunngjeving for kvifor hypotesen alltid er sann.

23 Lucas: 4+5 er 9. Pluss 6 er 15. Det er eit tal i 3-gongen.
24 Tina (meg): Men oppgåva spør om det alltid vil vere slik?
25 ((Lucas nøler))
26 Lucas: Eg er ikkje heilt sikker... Men viss ein byggjer 3 tårn, har ein 3 her.
27 Tina: Kan du forklare litt nærare?
28 Lucas: Det vert tre her, tre her, og tre her og tre nedst. ((Peiker på dei tre tårna i figur 32))

Dette er fyrste gong teikninga er peika på. Teikninga er no nytta i resonneringa for å *underbyggje ei hypotese*, der elevane kjem fram til at mange av rekkjene bortover kan delast på 3. Nærare forklart meiner Lucas at dei nedste klossane i kvart tårn kan delast på tre. På neste rekkje (kloss nummer to) kan summen også delast på tre, og elevane ser at rekkjene bortover kan delast på 3 til eit visst punkt. Lucas *identifiserer dette mønsteret* ved å peike på teikninga.

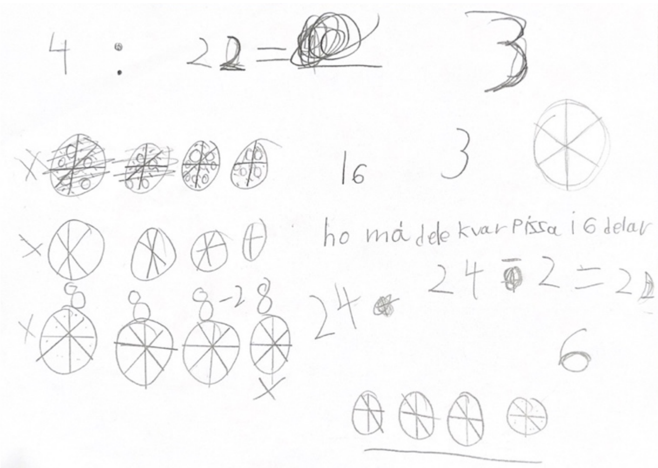
32 Tina: Eg ser du nyttar teikninga. Kan du streke dette opp på nokon måte for å sjå det lettare?
34 Lucas: Her har man 3 ((tel nedste rad)), her har man 6 ((neste rad)) og her har man 9 ((rada etter))
36 Tina: Så alle dei som er på rad, vert i 3-gongen?
37 Lucas: Ja, men eg kan ikkje resten av 3-gongen.
38 Tina: Det går bra, fordi de kan nytte teikninga
39 Sandra: Dei kan ein dele på tre, dei kan ein dele på tre, dei kan ein dele på tre. Desse kan ein ikkje dele på tre... Sjå da. ((Peikar på dei øvste klossane der det er 1 på tårnet i midten og to på tårnet til høgre)). Og det kan ein med 3-gangen òg.

Sandra skjønar at summen av rad 1 (dei nedste klossane på alle tårn) kan delast på 3. Ho *identifiserer dette mønsteret* vidare på rad 2, 3 også bortetter. Dette fordi tårna er like høge til eit visst punkt. Ho *samanliknar* både tal i 3-gangen og tre påfølgjande tal kan delast på tre, noko som vidare fører til ei *generalisering*.

Figur 33 – Utklipp frå gruppe 3, oppgåve 2

42 Tina: Kanskje vi kan setje ein strek slik? ((Set ein strek der tårna vert ulike. Sjå figur 33))
43 Lucas: Ja, alt under streken kan vi dele og få kvar vårt like tårn.
44 Sandra: Ja, men den ((refererer til den eine klossen på tårn 2)) kan ein berre dele på ein, og dei ((dei to klossane på tårn 3)) kan ein berre dele på to.
46 Lucas: Men her er jo 3 klossar over linja, sjå da. ((Peikar på alle dei tre klossane))
47 Tina: Ja, der er 3 klossar over linja.
48 Sandra: Ja, då kan vi liksom sette dei på rad slik ((Viser med blyanten at eit kan flytte kloss frå tårnet til høgre bort til tårnet til venstre))
50 Lucas: Ja, og 3 klossar kan delast på 3...Så det går.
51 Tina: Det er sant... Men om eg hadde laga tårn som var 100, 101 og 102 då?
52 Sandra: Ja! For ein kan fortsatt byte klossar. For her ((tårn med 102 klossar)) er det 2 klossar over streken, og her ((tårn med 101 klossar)) er det 1.
54 Lucas: Så vi kan ta ein kloss frå her til her ((peikar på at ein kan ta ein kloss frå tårn 102 til tårn 100)). Også er det ein kloss over streken her ((peikar på tårn 101)), så vert det like mange på dei tre tårna.
57 Sandra: Og då vil det alltid kunne delast på tre.

Frå linje 52 skjer det ei *eksemplifisering* ved at Sandra sjekkar med tre andre påfølgjande tal, 100, 101 og 102. Elevane *generaliserer* ved til dømes at Lucas seier at 3 klossar på same rekkje vil alltid kunne delast på tre, og difor må det stemme. Både Lucas og Sandra nyttar teikninga for å *grunngje sine hypotesar*. Teikninga er i byrjinga nytta som ein *informasjonshaldar*, før den etterkvart er nytta som *konkretiseringsmateriale*. Dette eg vil seie fører fram til byrjinga på *eit bevis* begge elevane var samde om. Eg har analysert grunngjevinga som eit empirisk argument, men med nokre grep kunne det vorte eit generiske argument. Sandra utrykkjer i intervju: «Eg hadde aldri skjønt dette utan teikninga!»



Figur 34 – Gruppe 4, oppgåve 3

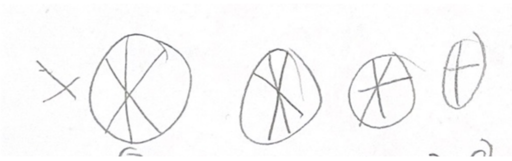
Gruppe 4, med Eveline og Daniel, nytta*r* teikning som konkretiseringsmateriale når dei arbeidar med oppgåve 3. Dialogen byrjar med at Daniel noterer 4/22, medan Eveline les oppgåva. Vidare fortset dialogen slik:
4 Eveline: Ok, skal vi teikne deling, i staden for å rekne deling kanskje?
5 Daniel: Ja! ((Teiknar fire pizza)) Vi må dele pizzaane slik at det vert 22 bitar då.
6 Eveline: Ja... Vi må «pimpe» pizzaane litt fyrst.
((Eveline byrjar å teikne pepperoni på pizzaane))
7 Daniel: Kor mange stykke må det vere på kvar pizza for at det vert 22?
8 Eveline: Vi kan teste ut?
9 Daniel: Ja, vi kan byrje med å ta ein strek på kvar av pizzaane?
10 Eveline: Eg må berre... Det vert ikkje pizza utan pepperoni... Og litt ost!
11 Daniel: Yeah, it is pizza-time!
((Eveline teiknar ferdig detaljane))

Elevane teiknar i denne episoden detaljar som ikkje er relevante for løysinga av oppgåva, men verkar på den andre sida veldig motiverte.

14 Eveline: No må vi fokusere på oppgåva!
15 Daniel: Ja det må vi no. Om vi prøver to stykkje på kvar.
16 Eveline: Då vert det to, fire, seks, åtte. For lite altså.

17 Daniel: Ja... Men vi kan dele meir opp.
18 Eveline: Vi byrjar berre å skjære opp ((Delar pizzaen i 2, deretter i 4))
19 Daniel: 4 på kvar.
20 Eveline: Då er det 8... 16.
21 Daniel: 16... Er du sikker på 8 + 8 er 16?
22 Eveline: Ja, men vi kan telje også då. ((Elevane tel pizzastykka på teikninga))
23 Daniel: Ok, det vart 16. Vi må ha 22. (6s) Då må vi vel ta ein til strek på kvar av pizzaane?
24 Eveline delar pizzaen opp ein gong til.
25 Eveline: Då vert det... 1, 2, 3, 4, 5, 6... Då vert to pizza 12.
26 Daniel: og 12 + 12, kva er det?
27 Eveline: Hm. (6s) 24.

Elevane fortset med å diskutere at 24 stykkje vert for mykje, og at dei må forsøke å dele opp ein gong. Dei finn ut at dei må ha 2 mindre stykkje, og vel difor å dele pizzaen opp ulikt. Sjå figur 35. Teikninga vert nytta som *konkretiseringsmateriale* då det skjer ei aktiv handling med teikninga der elevane delar opp pizzaane.

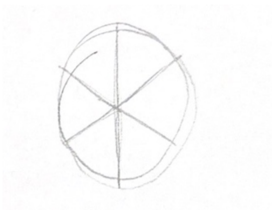


Figur 35 – Utklipp 1 frå gruppe 4, oppgåve 3

32 Eveline: Del pizzaane opp i 6, slik som i stad.
33 Daniel delar dei tre fyrste pizzaane i 6 bitar.
34 Eveline: Stopp! Den siste pizzaen må ha to mindre, altså 4.
((Daniel delar denne opp i 4 og tel tal pizzastykke))
36 Daniel: 22!
37 Eveline: Ja, då har vi funne svaret då?
38 Daniel: Tja... No er jo ikkje pizzastykka like store då.
39 Eveline: Vi forsøkjer på nytt.
40 Daniel: Ok, eg delar dei i alle fall i 4. ((Teiknar 4 pizza, som han delar opp i 4))
41 Eveline: 4 + 4 + 4 + 4 = 16. Den er grei.
42 Daniel: For om vi berre delar ein gong til vert jo ikkje stykkja like store. Slik som vi gjorde i stad liksom.
44 Eveline: Nei, del dei to gongar då. Altså så det vert 8 på kvar.

Vidare delar Daniel pizzaane i 8 bitar, og dei finn ved ein gongefeil at det vert 28 pizzastykkje. Dei kjem med *ei hypotese* om at det er dermed er nøydd til å vere 6 bitar på kvar. I denne resonneringa er teikninga både med på å *forme og revidere hypotesen.*

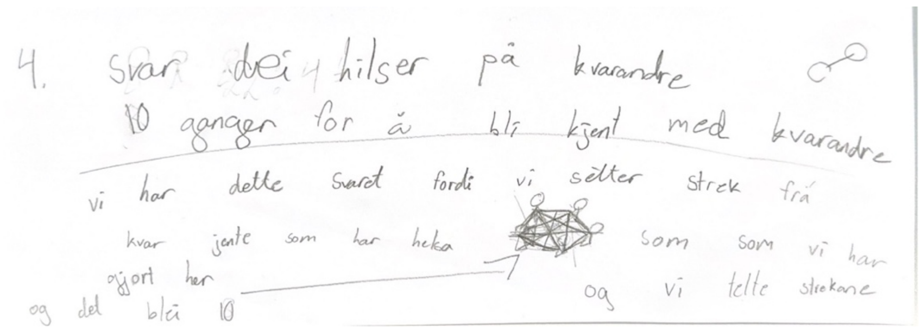
49 Daniel: Det gjer jo ikkje noko om dei har to til overs? Det viktigaste er at det er nok til alle, og at det vert rettferdig.
51 Eveline: Sant, men går det an å dele det likt opp då?
52 Daniel: Ja, sjå her. ((Teiknar figur 36))
53 Eveline: Å-ja, då kan eigentleg alle pizzaane vere slik.
54 Daniel: Ja, for å få dei er like store, kan ein berre gjer om det er like mange pizzastykkje på kvar pizza.



Figur 36 – Utklipp 2 gruppe 4, oppgåve 3

Dei *grunngjev* svaret med at 24-2 = 22 og at ho må dele kvar pizza opp i 6 like store bitar. Ved figur 36 er teikninga med som *støtte for grunngjevinga*, då Daniel viser korleis ein kan dele pizzaane opp i like store delar.

Siste episode er frå gruppe 6, Leon og Alma, sitt arbeid med oppgåve 4 som er av typen endeleg tal tilfelle. Oppgåve 4 omhandlar fem jenter som skal handhelse, der elevane si oppgåve er å finne ut kor mange handtrykk der vert når alle har helsa.



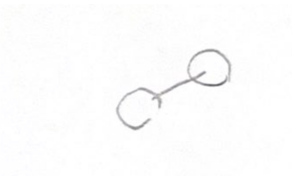
Figur 37 – Gruppe 6, oppgåve 4

Leon og Alma les oppgåva inni seg, og Leon er rask med å *forme ei hypotese* (linje 4) om at alle 5 må helse på 4 kvar då ein ikkje helsar på seg sjølv, altså at det vert 20 helsingar totalt.

4 Leon: Kanskje om alle må helse at det vert 5, og alle må helse på 4?
5 Alma: Fordi ein ikkje helsar på seg sjølv?
6 Leon: Ja. Og då vert det 4 i staden for 5
7 Alma: Då vert det 4+4+4+4+4?
8 Leon: 5 gonger 4 vell.
9 Alma: Ja, vel.
10 Leon: Det vert...
11 Alma: 20.
12 Leon: Då helsar dei 20 gongar.
13 Alma: Ok. Skal vi skrive sånn. Svar er lik 20?

Leon og Alma kjem i linje 11 og 12 fram til at jentene helsar 20 gongar. *Hypotesen dei formar* ynskjer Leon å undersøkje nærare (Linje 21).

21 Leon: Vent litt. (5s) Vi burde sjekke litt... Kanskje for viss 2 helsar, så helsar jo begge?
22 Alma: Kva i alle dagar pratar du om?
23 Leon: Sjå da ((Teiknar to rundingar, som skal førestille to personar, og set strek mellom dei. Sjå figur 38)).



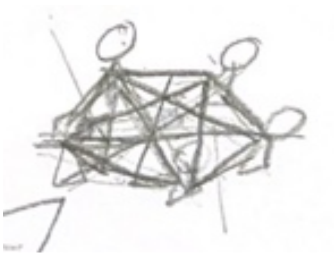
Figur 38 – Utklipp 1 frå gruppe 6, oppgåve 4

25 Alma: Dei helsar?
26 Leon: Ja viss dette er Pia og eine vennen, så når dei helsar så helsar jo begge på kvarandre. Så då vert det kanskje ikkje 20?
28 Alma: Sant, det vert ikkje 20, men mindre enn det.

Leon forkarar i dialogen sitt resonnement og si *hypotese* til Alma ved å nytte *teikning som konkretiseringsmateriale.* Teikninga vert nytta ved at Leon teiknar to personar og set strek mellom dei. Streken skal førestille eit handtrykk. Her har teikninga ein funksjon for å *revidere hypotesen* dei fyrst hadde, og dei veit no at svaret må verte mindre enn 20. I fokusgruppeintervjuet seier Alma at ho synast det var enklare å vise Lucas kva ho meinte. Dette seier Lucas seg samd i.

Vidare pratar elevane om korleis dei kan rekne ut svaret, og prøver ved å helse på kvarandre, der dei lata som dei er fem personar. Dette gjorde til at dei mangla to handtrykk, og svaret dei fekk vart difor 8. Før dei finn svaret slit elevane med å finne ein framgangsmåte, og spør etter hjelp. I linje 31 forsøkjer eg å inspirere elevane til å nytte teikninga for å løyse oppgåva, med forslag om at dei kan forsette slik som på figur 38.

31 Tina(meg): Eg ser de har teikna her. ((Viser til dei to rundingane med strek, figur 38)). Kanskje de kan prøve å gjere dette med 5 personar?
33 Leon: Ja, ok.
34 Tina: Prøv det, så kjem eg tilbake etterpå og ser korleis det går.
35 Alma: Takk!
36 Leon: Det gav meining. Syns du?
37 Alma: Ja, det vert vell kanskje enklare å teikne det når dei er så mange
38 Leon: Teikn da. Du har blyanten.
39 Alma: Ja! Ha-ha! ((Teiknar 5 rundingar som skal førestille personar))
40 Leon: Også kan du setje strek mellom der til der, og der til der og sånn.
41 ((Alma byrjar å setje strek mellom alle personane. Sjå figur 39))



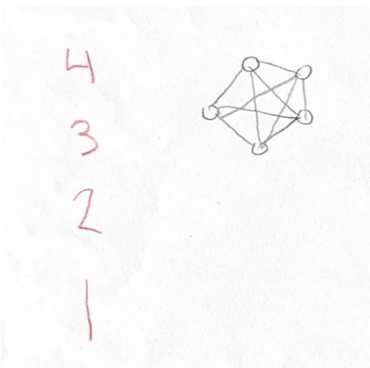
Figur 39 – Utklipp 2 frå gruppe 6, oppgåve 4

42 Alma: Det vert 10... 10 handtrykk.
43 Leon: Korleis veit du det? Du er ikkje ferdig å teikne?

44 Alma: Eg skjønte det når eg byrja å setje strek. For viss dette er Pia så helsar ho på alle dei ((Peikar på dei 4 andre personane på figur 24)). Også ho har då allereie helst på Pia så ho treng ikkje, så då vart det 3 ho må helse.
47 Leon: Aha! No ser eg det. Det vert eigentlig slik då at ho der må helse på dei to da, og den der på ho eine der og den der på... ingen?
49 Alma: Ingen ja, fordi alle har helst på ho.
50 Leon: Nice. Skriv det!

Alma får ikkje teikna ferdig før ho sjølv hadde *identifisert eit mønster* i oppgåva, og kjem deretter med ei ny *hypotese* med støtte i teikninga. Denne hypotesen *grunngjev* ho, både munnleg og skriftleg. Dette gjer ho ved at ho i linje 44 kjem med argument for framgangsmåten, samstundes som ho peikar på teikninga dei har produsert. Elevane nyttar teikninga si som eit verkty for å kome fram til svaret. I intervjuet seier elevparet at å nytte teikninga slik gjorde det enklare å halde orden på kven av personane som hadde helsa. Teikninga er nytta ved å systematisere tal handtrykk. Elevane finn at det er 10 handtrykk då det går ein strek mellom alle som helsar, og elevane tel strekane. Her nyttar dei ei systematisk opplisting av alle moglegheitene, samstundes som det fører til at elevane klarer å sjå føre seg at jentene slapp å helse på alle, fordi dei allereie hadde helsa.

Leon seier at teikninga er litt uoversiktleg, så elevane vel å teikne ei ny oversikt over personane på baksida av arket. Teikninga er her ei *støtte for grunngjevinga* dei gav.



Figur 40 – Gruppe 6, oppgåve 4 (bakside)

4.3 Oppsummering av analyse

Analysen viser at elevane sine teikningar vart nytta ulike stadar i resonneringsprosessen, og på ulike måtar i ulike resonneringsprosessar. Eg også i denne oppsummeringa seie noko om korleis teikningane er nytta i ulike typar bevisoppgåver.

4.3.1 Teikningane sine ulike funksjonar

Av alle 43 elevsvar som er innsamla, består 40 av teikning. Av dei 40 teikningane inneheld elevsvara også anten tal, symbol eller bokstavar. For å sjå på teikneprosessen lagg eg vekt på å analysere episodane som vart filma. 19 av 21 episodar viser at teikninga vart nytta i resonneringa til elevane, med ulike funksjonar og føremål. I kategorien *teikning utan funksjon* fann eg berre to døme, av 21 episodar.

Teikninga nytta som informasjonshaldar førekom 4 gongar i mine episode. Her var teikninga eit stillbilete av situasjonane eller informasjon frå oppgåva. Elevane teikna ikkje pilar, strekar eller sirklar for å representere rekneoperasjonar. Teikninga var heller ei grafisk framstilling av oppgåva, som inneheldt informasjon elevane nytta når dei skulle løyse oppgåva i ulike delar av resonneringa. *Teikning som presentasjon av ei løysing* fann eg fire gongar i blant episodane i datamateriale. Her vart teikninga nytta for å støtte ei grunngjeving eller for å støtte eit bevis. Teikninga vart nytta for å kommunisere si løysing med andre.

I kategorien *teikning som konkretiseringsmateriale* fann eg flest episode. Teikningane kunne i denne kategorien både vere med på å forme hypotese, revidere hypotesen, underbyggje hypotesen, støtte ei grunngjeving, og støtte eit bevis. Teikningane var i denne kategorien både ei støtte i prosessar knytt til leiting etter likskapar og skilnader, samt i prosessar knytt til validering. Summert tolkar eg at teikningane på ulike måtar er meiningsfull for elevane si resonnering i matematikk. Ved å lage ei teikning som elevane nytta aktivt, kunne dei teste ut moglege løysingar på oppgåva, samt nytte teikninga for å kommunisere sine matematiske idear med andre. Teikninga var nyttig for å løyse oppgåva, og vi kan sjå ved døma i analysen at elevpara nytta piler, strekar og sirklar for å utføre bevegelsar som til dømes å flytte, fjerne eller leggje til element.

4.3.2 Teikning i ulike oppgåvetypar

Eg gav elevane oppgåver i A. J. Stylianides (2016) sine tre kategoriar for bevisoppgåver: enkelttilfelle, endeleg tal tilfelle og uendeleg tal tilfelle. Elevane nytta teikning i stor grad i alle oppgåvetypane, og teikninga hadde nesten alltid ein funksjon i resonneringa til elevane. Det var ikkje funn av at løysing av spesielle oppgåvetypar ikkje har nytte av teikning.

Når det gjaldt oppgåva med uendeleg tal tilfelle, vart teikninga i stor grad nytta som informasjonshaldar. Dette kan sjåast i samanheng med at ein i oppgåver med uendeleg tal tilfelle ikkje har moglegheita til å systematisk liste opp alle tilfelle. Dette er nettopp fordi tal tilfelle i slike oppgåver er uendeleg. Det kan tenkjast at elevane ved ei slik oppgåve nytta teikninga i større grad for å forstå strukturen i oppgåva. I intervjuet med elevane vart elevane spurt kvifor dei teikna i oppgåve 2 (oppgåva med uendeleg tal tilfelle), og om teikninga var til nytte. Ein elev svarte følgjande: «Det hjelpte ikkje like mykje å teikne på denne som dei andre oppgåvene, synast eg». Når eg spurte kvifor, var svaret at dei ikkje kunne teikne alle tårna ein kunne byggje, og at det var dermed vanskeleg å kome fram til eit svar. Elevane nytta teikninga fordi dei synast det var vanskeleg å sjå føre seg, og halde orden på fleire moglege tårn på ein gong i hovudet.

5. Drøfting

Eg vil i dette kapittelet diskutere mine funn om korleis elevar på 4.trinn nyttar teikning i arbeid med matematisk resonnering, i samband med andre forskarar sine resultat. Mine funn vert altså sett i lys av tidlegare forsking. Dernest vil eg ta opp pedagogiske implikasjonar av studien. Eg vil òg drøfte ulike faktorar knytt til forskingsprosessen, som studien min si metode og setje studien i eit kritisk lys.

5.1 Funn i lys av tidlegare forsking

I min studie var teikning eit viktig verkty for mange elevar, og hadde i dei fleste tilfelle ein funksjon i elevane si matematiske resonnering. Dette samsvarar med tidlegare forsking om teikning i matematikk, som peikar på at teikning er eit viktig verkty både når det gjeld kommunikasjon og i problemløysing (Saundry & Nicol, 2006; Dahl, 2020; Bakar et al., 2016; Edens & Potter, 2007; Papandreou, 2014; Woleck, 2001).

Til tross for tidlegare forsking sine utsegn om at teikning kan verte sett på som eit mindre gyldig verkty i matematikk, fann eg sprikande meiningar om dette i min studie. Bakar et al. (2016) fann at elevar såg på teikning som ein aktivitet som berre skulle utførast av ein lærar, og som var for vanskeleg for elevane. Bakar et al. (2016) hevda òg at elevane ikkje såg nytta av teikning i matematikk. I min studie fann eg på den andre sida at mange av elevane teikna spontant, og uttrykte at teikninga var til nytte i fleire tilfelle. Som ein Leon sa i fokusgruppeintervjuet: «Teikning er jo matematikk! Spesielt om ein nyttar det riktig».

Den store førekomsten av teikning kan vise potensiale teikninga har. I fleire av episodane prøvde elevane å finne ein framgangsmåte utan teikning fyrst, då utan å lykkast. Då dei tok i bruk teikning fann dei så ein måte å løyse oppgåva på. Fleire forskarar, som mellom anna Bakar et al. (2016) og Edens og Potter (2001) hevdar i si forsking at det finst eit positivt forhold mellom teikning og det å finne ei løysing på ei oppgåve. Episodane i min studie samsvarar med desse funna, då elevane som nytta teikning med funksjon har i dei alle fleste tilfelle funne ei løysing på oppgåva.

Elevane nytta teikning både for å løyse oppgåver, og for å kommunisere si tenking med andre, noko som er i tråd med mellom anna Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020) sine funn. Teikning vert nytta på ulike måtar til ulike føremål, og eg fann i min studie at teikningane vart mest nytta som konkretiseringsmateriale. Det var òg den kategorien som verka å vere mest allsidig innan resonneringsprosessane.

I delkapittel 4.2.3 ser vi at Theodor løyste oppgåva fyrst ved hjelp av hovudrekning, for så å teikne når læraren bed om ei grunngjeving på arket. Bakar et al. (2016) fann at elevane som teikna etter dei hadde funne svaret, gjer dette for å enklare kommunisere løysinga si. Frå intervjuet sa ein elev: «Eg likar å teikne, for då får eg ut følelsar. Eg får forklart det eg tenkjer med hjelp av teikningane.» Med det kan eleven meine at ein lettare kan kommunisere tankane sine med andre på denne måten, då det ikkje alltid er lett å setje ord på tankane sine. Det verka som elevane kunne synast at det var vanskeleg å forklare til andre berre gjennom verbalt språk. Dette samsvarer med Papandreou (2014) og Boaler et al. (2016) som seier i sine studiar at teikning kan vere til nytte i kommunikasjonen hjå born.

Det er viktig å leggje til at sjølv om teikning hjelper born med å vise tenkinga si, trengs det ein kombinasjon av fleire representasjonar for å kommunisere matematiske idear (Papandreou, 2014; Edens & Potter, 2001). Duval (2006) nemner at det å kunne byte mellom ulike representasjonar er viktig for elevane. Dette kan nemleg styrkje deira matematiske ferdigheiter. I alle episodane der elevane har teikna, inneheldt også arbeidet deira tal eller bokstavar. Elevane nytta også verbalt språk, mellom anna når dei viste til teikninga i samtalane seg imellom eller med læraren. I intervju sa ein elev: «Det er lurt å både teikne og skrive samstundes, tenkjer eg». I alle episodar vart det som sagt nytta ein kombinasjon av fleire representasjonar, uansett kva funksjon teikninga hadde. Edens og Potter (2001) hevdar at ved å kombinere til dømes skrift og teikning, kan ein enklare kommunisere løysinga si med andre. Eg fann at det var ei overvekt av piktografiske teikningar, med variasjonar av detaljar. Mine funn angåande når elevar teikna detaljar samsvarar med Woleck (2001) sitt funn. Elevane forsto etterkvart kva tid det var føremålstenleg med detaljar og ikkje. Eit døme er der eit elevpar (presentert i 4.1) teikna sirklar i staden for menneske, fordi elevane sa at det gjekk kjappare å gjere det slik.

Dei to teikningane utan funksjon kom då elevane ikkje viste korleis dei skulle nytte teikninga. Ved teikning utan funksjon kan vi sjå tilbake til dømet med Eveline og Daniel. I dømet kunne teikninga vore nyttig som konkretiseringsmateriale for Eveline og Daniel då løysingstrategien ikkje var sjølvsagt for dei. I episoden om Petter og Anna der dei nytta teikning som informasjonshaldar, tenkjer eg elevane kunne nytta teikninga vidare som eit konkretiseringsmateriale. Dette for å få det fulle utbytte av teikninga, då dei i denne episoden ikkje kom fram til eit bevis på den generelle hypotesen. Med andre ord viser dette viktigheita av å støtte bruk av teikning som representasjon, då ikkje alle born teiknar spontant og ikkje har erfaring med å teikne til eit matematisk føremål (Bakar et al., 2006; Woleck, 2001). Dette vil eg vil kome tilbake til i kapittel 5.2 som omhandlar studien sine implikasjonar.

Både resonnering, argumentasjon og bevis er fundamentalt for å utvikle forståing og ferdigheiter i matematikk (Ball & Bass, 2003; Jeannotte & Kieran, 2017; A. J. Stylianides, 2016). Ball og Bass (2003) fann i sin studie at fleire lærarar påstod at elevane deira ikkje kunne resonnere matematikk. Dette sa Ball og Bass (2003) seg ueinige i, då det handlar om at elevane kan resonnere berre dei lærar korleis. Det er òg viktig at ein utrykkjer seg med representasjonar som er kjende for seg sjølv og andre elevar (Alseth & Røsseland, 2014; A. J. Stylianides, 2007). I min studie resonnerte mange av elevane ved å nytte teikninga i ulike resonneringsprosessar. Dette kan sjåast i forbinding med Bakar et al. (2016), som hevdar at elevar kan verte engasjert til å resonnere om ein nyttar ulike representasjonar.

5.2 Pedagogiske implikasjonar av studien

Som nemnt har vi mange ulike måtar å uttrykkje oss på i matematikk, og teikning er ein av måtane. Ein kan både ved min og fleire andre studiar, sjå ulike potensiale teikning har i matematikk. Ein implikasjon av min studie er å sjå potensialet teikninga har i resonneringa til elevane. Teikning kan vere ei støtte både for å forme hypotese, revidere hypotese, underbyggje hypotese, støtte grunngjeving eller støtte bevis. Som nemnt i førre delkapittel hevda lærarar i studien til Ball og Bass (2003) at elevane deira ikkje kunne resonnere. Det å sjå potensialet teikningane har hatt i min studie til støtte for elevar si resonnering, vonar eg kan vere med på å nyansere dei meiningane fleire lærarar har om teikning som ugyldig verkty i matematikk.

Eg vonar at min studie kan belyse korleis ein kan analysere born sine teikningar, med føremål om å seie noko om det matematiske potensiale som ligg hjå teikningane. Det er nyttig for lærarar vite om dette potensiale, og på kva ulike måtar teikning kan verte nytta for å støtte elevane i deira resonnement. Det er altså viktig å verdsetje, og støtte tidleg utvikling av born sine teikningar som matematiske representasjonar. For at elevane skal sjå potensialet til teikning i matematikk, avhenger det av at læraren ser potensialet. Som nemnt i fleire tidlegare studiar vert teikning ofte sett på som eit mindre verdifullt, og nokre gongar eit ugyldig verkty i matematikk (Bakar et al., 2016; Papandreou, 2014; Edens & Potter, 2001). Ved å kunne noko om teikning sitt potensiale i matematisk resonnering vil det som lærar vere enklare å gje teikning den plassen i matematikk den burde ha, noko eg vonar min studie kan bidra til.

Elevar møter ukjende representasjonar i skulen, og læraren kan støtte denne overgangen ved å ta utgangspunkt i representasjonar som allereie er kjend hjå elevane, som til dømes teikning. For å gjere dette krevjast det at læraren fremjar teikning som eit gyldig verkty i matematikk, og støtter elevane i korleis teikninga kan vere eit nyttig verkty i matematikk. Bobis og Way (2018) skreiv at det er nyttig for lærarar å tileigne seg kunnskap om korleis ein kan kjenne att det pedagogiske potensialet som ligg i born sin teikneaktivitet, for å støtte under det matematiske som skjer i teikneprosessen. Det er ikkje er eit sjølvfølgje at elevar kan å teikne for eit matematisk føremål, og difor trengs det ei rettleiing frå læraren (Bakar et al., 2016; Crespo & Kyriakides, 2007).

Med innføring av resonnering og argumentasjon som kjerneelement i LK20, inneber det at resonnering og argumentasjon er eit viktig element i matematikk på alle trinn (Kunnskapsdepartementet, 2019). Resonnering er ei grunnleggjande ferdigheit i matematikk (Ball & Bass, 2003; Jeannotte & Kieran, 2017). Dermed er det naudsynt for matematikklærarar, sjølv om ein skal arbeide med dei yngste elevane, å kunne noko om elevar si matematiske resonnering. For at lærarar skal kunne beherske å hjelpe elevar med å resonnere matematisk, er det viktig å kunne identifisere dei matematiske resonneringsprosessane til elevane. Ved Jeannotte og Kieran (2017) sin modell for prosessar i matematisk resonnering får ein innsikt i dei ulike prosessane, og kva som kjenneteiknar dei. Dette kan vere til nytte for lærarar for å identifisere matematisk resonnering hjå elevane. Ein annan viktig faktor er at lærarar kan velje og tilpasse oppgåver som fremjar resonnering og bevis (Ball& Bass, 2003). Som Stylianides (2016) hevdar, er det fleire grunnar til lite bevis i skulen som mellom anna lærarar sin tru på bevis og lærarar sin kunnskap om bevis. I min studie fann eg bevis, samt grunngjevingar for kunne med nokre grep vorte bevis.

I min studie har eg undersøkt prosessane der teikningane vart produsert, og ikkje berre analysert teikningane som ferdige produkt. Woleck (2001) nemner i si forsking at det var samtala rundt teikninga som var med på å gje innsikt i elevane si resonnering. Teikninga kan altså verte nytta for lærarar for å få innblikk i elevane sine tankar, og såleis vite meir om elevar si forståing i matematikk Eg vonar at det kan vere eit viktig bidrag i forskinga at eg ikkje berre har analysert teikningane som produkt, men spegla teikneprosessen opp mot elevane sine resonneringsprosessar. Eg ynskjer at min studie kan vere eit bidrag både til lærdom for lærarar og lærarstudentar, og til inspirasjon for vidare forsking.

5.3 Studien sine avgrensingar og metodekritikk

I studien gjennomførte eg eit pilotprosjekt, noko som gjorde meg meir førebudd til den faktiske datainnsamlinga. Eg gjorde fleire endringar etter pilotprosjektet, men det var òg andre faktorar eg kunne tenkt over. Noko eg kunne gjort annleis, var å setje av meir tid til observasjonane. Ein klokketime med matematikk med elevar på barneskulen går fort, då ein både skal ha innleiing til opplegget, samt ei avslutning. Tida gjekk altså fort under datainnsamlinga, og eg hadde avgrensa med tid til kvar gruppe som vart observert og intervjua. I forkant av datainnsamlinga ville eg hatt eit møte med lærarane til elevane for å ha meir likskap i korleis vi rettleia elevane under studien.

Når det gjeld analysemetode, var det ein utfordrande prosess å velje ut kategoriar, og utforme eit rammeverk eigna for å svare på mi problemstilling. Då Saundry og Nicol (2006) og Dahl (2020) hadde kategoriar som overlappa kvarandre, måtte eg ta eigne val og gjere tolkingar. Eg valde å avgrense kategoriane, for å kunne plassere ei teikning i berre ein kategori. Vala eg tok er basert på mi tolking, og samsvarar moglegvis ikkje med kva andre forskarar tolkar og kva val dei ville tatt. Samstundes syner mi analyse teikneprosessen til elevane, noko som gjorde det naudsynt å gjere ei open koding der eg utarbeida nokre eigne kategoriar for teikning i resonnering.

6. Avslutning

I studien har eg undersøkt korleis elevar på 4.trinn nytta teikning i sine matematiske resonneringsprosessar, med utgangspunkt i følgjande problemstilling:

Korleis nyttar elevar på 4.trinn teikning i arbeid med matematisk resonnering?

Ved å studere elevsvar, videoopptak og notatar frå observasjon og intervju, har eg sett nærare på teikneprosessane til elevane, og sett dei opp mot elevane sine matematiske resonneringsprosessar. Slik som tidlegare forsking, viser funna frå min studie at teikning var eit nyttig verkty i elevane si resonnering. I min studie nytta eit stort fleirtal av elevane teikninga aktivt i løysinga av oppgåvene. I 19 av 21 episodar var teikninga ei støtte i den matematiske resonneringa til elevane. Det var altså berre to episode der teikninga ikkje hadde noko funksjon i resonneringsprosessane, men dette betyr heller ikkje at den «stod i vegen» for den matematiske resonneringa.

Hovudsakleg viser funna mine at teikning vart nytta for å løyse ei oppgåve, eller for å kommunisere si tenking med andre. Mest av alt vart teikninga nytta som eit konkretiseringsmateriale, og denne kategorien viste seg å vere mest allsidig med tanke på funksjonen teikninga hadde i resonneringsprosessane til elevane. Andre nytta teikninga for å halde orden på element i oppgåva, som ein informasjonshaldar. Nokre elevar teikna etter dei hadde løyst oppgåva, og nytta dermed teikninga som ein presentasjon av svaret. Det kom fram av funna at elevane som teikna etter dei hadde løyst oppgåva ofte ynskja å validere svaret sitt, ved å grunngje eller bevise med utgangspunkt i teikninga. Teikningane sine funksjonar i resonneringa varierte, men eg fann at elevane nytta teikninga for å forme ei hypotese, revidere hypotese, underbyggje hypotese, støtte grunngjeving eller støtte bevis.

Alle elevpar som nytta teikning i oppgåveløysinga eller for å kommunisere med andre, nytta og anten tal, bokstavar eller symbol i tillegg. Elevane kombinerte såleis teikning med andre representasjonar i sine elevsvar, noko som gjorde det enklare å tolke teikninga. Elevane viste også at dei forstod korleis dei kunne nytte ulike representasjonar, og forbindinga mellom dei. Funna mine knytt til detaljar i teikningane, viser at dei fleste elevar teikna elementa i oppgåva slik dei vert presentert. Med andre ord teikna elevane som oftast piktografiske teikningar, med ulik grad av detaljar. Elevane teikna oftast detaljar der det var føremålstenleg for oppgåveløysinga, eller for å kommunisere med andre.

Summert opp viser forskinga mi at teikning kan verte nytta for å halde orden på element i oppgåva, for å presentere ei løysing, eller som konkretiseringsmateriale. Ein viktig faktor er at elevane får støtte frå læraren ved å nytte varierte representasjonar som til dømes teikning. Teikning i matematikk kan med andre ord ha eit stort potensial, og vere eit meiningsfult verkty i matematikk, men: «Above all else, drawing as a mathematical representation, must be meaningful to the drawer.» (Bakar et al., 2016, s.93).

6.1 Vidare forsking

Etter å ha gjennomført eit forskingsprosjekt er det naturleg kome med forslag og idear for vidare forsking innan feltet for å bidra til vidare forsking (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 268). I søk etter tidlegare forsking vart det gjort lite funn av studiar som har sett på resonneringsprosessar og teikning saman. Derimot fann eg fleire som har fokusert på teikninga sin funksjon i problemløysingssituasjonar, og forsking retta mot teikning som ferdig produkt (Dahl, 2020; Bakar et.al, 2016; Edens og Potter 2007; Saundry & Nicol, 2006). Sjølv om eg no har forska på teikneprosessen saman med matematisk resonnering i mi masteroppgåve, hadde det vore spennande å sjå om andre hadde fått avvikande eller samsvarande funn.

Vidare kunne det vore spennande med eit langtidstudie, der ein forskar fekk følgje ei klasse eller ei gruppe i ei lengre periode. Det kunne ha vore eit godt tilskot til forskinga å sjå på utviklinga av teikning og resonnering over tid, for å finne eventuelle forandringar i resonnement eller i teikneprosessen. Vert teikningane enklare eller meir detaljrike etterkvart? Vert teikninga nytta i andre fasar av resonneringsprosessen over tid? Observering av ei gruppe over lengre tid nemner Postholm og Jacobsen (2018, s.105) at kan vere med på å gje ei rikare skildring av situasjonen.

Edens og Potter (2001) fann at elevane nytta mindre visuelle representasjonar dess eldre elevane vart. Dei fann òg at lærarar la meir vekt på kommunikasjon gjennom symbol og skriftleg språk. Det hadde vore interessant å undersøkje om denne utviklinga skjer grunna lærarar si vekt på skriftleg språk, eller grunna tidseffektiviteten ved å skrive symbol kontra å teikne.

Til tross for at teikning viser seg å kunne vere eit nyttig verkty i matematikk, vil eg påstå at det endå er mangelfull forsking på korleis ein som lærar kan fremje bruk av teikning, og korleis teikningane kan vere til nytte for elevar i matematikk. Eg vonar at eg med min studie har bidrege til å kome med nyttige funn, og at andre finn inspirasjon til å vidare forske på teikninga sin plass i matematikk.

«Teikning er jo matematikk! Spesielt om ein nyttar det riktig.»
- Leon, 4.trinn

7. Referanseliste

Alseth, B., & Røsseland, M. (2014). Undersøkelseslandskap i matematikk. I H. Traavik (Red.), *Lese, skrive, regne* (s. 109–132). Universitetsforlaget.

Bakar, K. A., Way, J., & Bobis, J. (2016). Young Children's Drawings in Problem Solving. I *Mathematics Education Research Group of Australasia*. Mathematics Education Research Group of Australasia.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children: A reader* (s. 216–235). Hodder and Stoughton.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 27–44.

Boaler, J., Chen, L., Williams, C., & Cordero, M. (2016). Seeing as Understanding: The Importance of Visual Mathematics for our Brain and Learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, *5*(5), 1–6. https://doi.org/10.4172/2168-9679.1000325

Bobis, J., & Way, J. (2018). Building Connections Between Children's Representations and Their Conceptual Development in Mathematics. I V. Kinnear, M. Y. Lai, & T. Muir (Red.), *Forging Connections in Early Mathematics Teaching and Learning* (s. 55–72). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7153-9

Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Abstrakt Forlag.

Crespo, S. M., & Kyriakides, A. O. (2007). Research, Reflection, Practice: To Draw or Not to Draw: Exploring Children's Drawings for Solving Mathematics Problems. *Teaching Children Mathematics*, *14*(2), 118–125. https://doi.org/10.5951/TCM.14.2.0118

Dahl, H. (2020). Tegning som verktøy for å utforske multiplikative situasjoner. I V. Nilssen & S. M. Høynes (Red.), *Samtaleorientert matematikk: Et samspill mellom didaktiske og adidaktiske situasjoner* (s. 193–221). Fagbokforlaget.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Edens, K. M., & Potter, E. F. (2001). Promoting Conceptual Understanding through Pictorial Representation. *Studies in Art Education*, *42*(3), 214–233. https://doi.org/10.1080/00393541.2001.11651699

Edens, K., & Potter, E. (2007). The Relationship of Drawing and Mathematical Problem Solving: Draw for Math Tasks. *Studies in Art Education*, *48*(3), 282–298. https://doi.org/10.1080/00393541.2007.11650106

Grevholm, B., Riesbeck, E., & Taflin, E. (2013). Å lære matematikk gjennom problemløsning. I B. Grevholm (Red.), *Matematikkundervisning 1-7* (s. 207–237). Cappelen Damm Akademisk.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Kleven, A. H. (2022, februar). A framework for analysing drawings as tools for mathematical reasoning. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03750243

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10.trinn (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

NTNU. (u.å.). *Fire kort*. Matematikksenteret. Henta 22. april 2023, frå https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/grunnskole/fire-kort

Papandreou, M. (2014). Communicating and Thinking Through Drawing Activity in Early Childhood. *Journal of Research in Childhood Education*, *28*(1), 85–100. https://doi.org/10.1080/02568543.2013.851131

Postholm, M. B., & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen*. Cappelen Damm Akademisk.

Saundry, C., & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children`s mathematical reasoning through pictures. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*, *5*, 57–63.

Schoenfeld, A. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. I D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Red.), *Teaching and learning proof across the grades, a K-16 perspective* (s. xii–xvi). Traylor & Francis Group.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom*. Oxford University Press.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: Knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 307–332. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9

Stylianides, G. J. (2008). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, *28*(1), 9–16.

Utdanningsdirektoratet. (2019, november 18). *Hva er kjerneelementer?* https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hva-er-kjerneelementer/

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures: An investigation of children’s mathematical drawings. I A. Cuoco & F. R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (s. 215–227). National Council of Teachers of Mathematics.

Aase, T. H., & Fossåskaret, E. (2014). *Skapte virkeligheter: Om produksjon og tolkning av kvalitative data* (2.utg). Universitetsforlaget.

8. Vedlegg

Vedlegg 1: Samtykkeskjema

Vedlegg 2: Infoskriv til elevar

Vedlegg 1 – Samtykkeskjema

Vil du delta i forskingsprosjektet

"Teikning i matematikk"?

Til føresette ved 4.trinn.
Dette er eit spørsmål til deg om å la ditt barn om å delta i eit forskingsprosjekt der føremålet er å *seie noko om korleis elevar kan bruke teikning for å løyse problemløysingsoppgåver i matematikkfaget.* I dette skrivet gjev vi deg informasjon om måla for prosjektet, og om kva deltaking vil innebere for ditt barn.

Føremål
Føremålet med prosjektet er å samle inn datamateriale til mi masteroppgåve i matematikkdidaktikk. Eg har valt å skrive om resonnering og argumentasjon i teikning i matematikk, nærmare bestemt i problemløysing. Den foreløpige problemstillinga lyder som følgjer: *«Korleis bruker elevar på 4.trinn teikning i si resonnering og argumentasjon med å løyse problemløysingsoppgåver?»*

Kven er ansvarleg for forskingsprosjektet?
HVL, Høgskulen på Vestlandet, Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett er ansvarleg for prosjektet.

Kvifor får du spørsmål om å delta?
Utvalet mitt er tilfeldig då målet er å seie noko generelt om fjerdeklassingar i matematikk, og korleis dei brukar teikning i matematikk. Alle elevar på trinnet vil få same førespurnad.

Kva inneber det for deg å delta?
Dersom de vel å delta i prosjektet inneber det at barnet ditt gjennomfører nokre oppgåver saman med ein medelev i ein matematikktime. Her vil eg ta video-opptak ovanfrå av nokre av elevpara, slik ein skal kunne sjå kva elevane skriv og teiknar, samstundes som ein høyrer kva dei seier. Dette skal skje i klasserommet, og alle elevane får dei same oppgåvene. Eg vil vere til stades, og spørje spørsmål til elevane angåande oppgåva og deira resonnering og argumentasjon.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Dersom de vel å delta, kan de når som helst trekkje samtykket tilbake utan å gje nokon grunn. Alle personopplysingane vil då bli sletta. Det vil ikkje føre til nokon negative konsekvensar for dykk dersom de ikkje vil delta eller seinare vel å trekkje dykk.

Ditt personvern – korleis vi oppbevarer og bruker opplysingane dine
Vi vil berre bruke opplysingane vi får til føremåla vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandlar opplysingane konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Eg og min rettleiar vil vere dei einaste som har tilgang til datamaterialet. For å sikre dette vil eg ha kamerautstyr og minnepenn låst inne i skap. Opptaket vil bli transkribert og anonymisert i etterkant, slik at det ikkje blir mogeleg å spore samtalar eller elevarbeid tilbake til enkeltpersonar. Elevarbeid vil bli merka med nummer i staden for namn.

Kva skjer med opplysingane dine når vi avsluttar forskingsprosjektet?
Personopplysingar og videoopptak blir sletta når prosjektet er avslutta, og oppgåva er godkjend. Dette er etter planen 15.05.23.

Kva gjev oss rett til å behandle personopplysingar om deg?
Vi behandlar opplysingar om deg basert på samtykket ditt.

På oppdrag frå *HVL* har Personverntjenester vurdert at behandlinga av personopplysingar i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Dine rettar
Så lenge ditt barn kan identifiserast i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i kva opplysingar vi behandlar om barnet ditt, og å få utlevert ein kopi av opplysingane,
- å få retta opplysingar om barnet ditt som er feil eller misvisande,
- å få sletta personopplysingar om barnet ditt,
- å sende klage til Datatilsynet om behandlinga av personopplysingane til barnet ditt.

Dersom du har spørsmål til studien, eller om du ønskjer å vite meir eller utøve rettane dine, ta kontakt med:

- HVL ved Kirsti Rø, kirsti.ro@hvl.no
- Tina Kjøde Honningsvåg, 596744@hvl.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS
  E-post: personverntjenester@nsd.no
  Telefon: 55 5821 17

Dersom du har spørsmål knytt til Personverntjenester si vurdering av prosjektet kan du ta kontakt med:

- Personverntjenester, på e-post (personverntjenester@sikt.no) eller på telefon: 53 21 15 00.

Venleg helsing

Kirsti Rø	*Tina Kjøde Honningsvåg*
Forskar/rettleiar	Student

Samtykkeerklæring

Eg har motteke og forstått informasjon om prosjektet *Teikning i matematikk* og har fått høve til å stille spørsmål. Eg samtykker til:

☐ å delta i *innsamling av elevarbeid*
☐ å delta i prosjektet med *video-opptak*

Eg samtykker til at opplysingane mine kan behandlast fram til prosjektet er avslutta.

(Signert av føresett, dato)

Vedlegg 2 – Infoskriv til elevar

Vil du delta i forskingsprosjektet mitt?

Til elevar ved 4.trinn.

Eg er student ved HVL, Høgskulen på Vestlandet, der eg går mitt siste år på lærarutdanninga. Der har studentane kvart sitt prosjekt, sidan vi skal skrive ei masteroppgåve. Dette er eit prosjekt der eg skal finne ut av korleis elevar på 4.trinn tenkjer når dei løyser problemløysingsoppgåver med ein medelev.

Det som vil skje er at eg kjem på besøk til dykk ein matematikktime no i januar. Då har eg med meg nokre oppgåver som de skal løyse i par. De får utdelt ark som de skal skrive på, og som eg gjerne har lyst å samle inn etterpå for å sjå korleis de har løyst oppgåvene. Desse vil ikkje bli merka med namn, men med nummer. Alle i klassa får løyse oppgåvene, anten dei er med i prosjektet eller ikkje.

Eg ynskjer å filme nokon av elevpara for å høyre korleis dei samtalar om oppgåvene til kvarandre. Dette gjeld berre dei som har fått godkjenning frå føresette. Det er berre eg og min rettleiar som har tilgang til å sjå desse videoklippa, og dei vil bli sletta når oppgåva er godkjend.

Alle elevar i klassa di vil få same førespurnad, og det er frivillig å delta. Eg kjem ikkje til å nemne namna til nokon av dykk i oppgåva mi. Oppgåva mi skal eg levere i mai, og då håpar eg at den blir godkjent, og at eg er ferdig utdanna lærar!

Eg håpar du ynskjer å delta i mitt prosjekt. Dersom du har spørsmål om dette kan du snakke med kontaktlæraren din eller dine føresette, som har fått endå meir informasjon om dette.

Venleg helsing

Tina Kjøde Honningsvåg