Terje Myklebust
Høgskulen på Vestlandet
Idar Mestad
Høgskulen på Vestlandet

DOI: https://doi.org/10.5617/adno.9377

Om kardinaltal og det å oppfatte kardinaltal

Samandrag

I denne teoretiske artikkelen diskuterer vi kardinaltal og kva det vil seie å oppfatte kardinalitet og kardinaltal. Artikkelen går inn på detaljar som krev ei avklaring av desse omgrepa. Her hentar vi inspirasjon blant anna frå matematikk, og vi tar utgangspunkt i kva kardinaltal er i matematikk. Gjennom eit tankeeksperiment identifiserer vi ein type kunnskap/forståing/idear som synes å vere sentral for å oppfatte kardinaltal; vi kallar det mengdetaloppfatning. Det er idear som er relatert til omgrep som til dømes numerical magnitude understanding og approximate number system, men som desse omgrepa likevel ikkje er dekkande for. Vi argumenterer for at mengdetaloppfatning dreier seg om særleg to prinsipp som vi kallar tal-til-mengdeseparasjon og tal-separasjon. Vidare vert omgrepet mengdetaloppfatning plassert i høve til blant anna teljing og to ulike former for subitisering som vi kallar spontan antalbestemming og semispontan antalbestemming.

Nøkkelord: kardinalitet, kardinaltal, mengdetaloppfatning, subitisering, spontan antalbestemming, semispontan antalbestemming, tal-til-mengdeseprasjon tal-separasjon, teljing

About Cardinal Numbers and Cardinal Number Comprehension

Abstract

In this theoretic article we discuss cardinal numbers and what it means to grasp or comprehend cardinality and a cardinal number value. We discuss details that require a clarification of these concepts. We find inspiration partly from mathematics and our point of departure is cardinal numbers in mathematics. A thought experiment identifies some ideas that appear central for what we may mean by grasping a cardinal number value. These ideas are embodied in the concept which we call cardinal number comprehension. Cardinal number comprehension is related to, but not equivalent to, concepts like numerical magnitude understanding and the approximate number system. We argue that cardinal number comprehension is mainly embraced by two principles which we call number-to-set separation and number separation. Futhermore, cardinal number conception is linked and organized in relation to concepts like counting and different forms of subitizing.

Keywords: cardinality, cardinal number, cardinal number comprehension, subitizing, perceptional subitizing, conceptional subitizing, number-to-set separation, number separation, counting

Innleiing

Det å intuitivt gripe (oppfatte) kor stort eit tal er og å kunne relatere det til andre tal er grunnleggande og ligg under alt arbeid med tal i følgje Butterworth, Varma og Laurillard (2011, s. 1050).

Med dette som bakteppe vil vi i denne artikkelen diskutere det å oppfatte kor stort eit tal er. Vi argumenterer for at det er snakk om ein heilt spesifikk kunnskap, eller kanskje kan vi seie at det er ein spesifikk kunnskap som ligg bak slik intuisjon.

Vårt utgangspunkt er at det trengst nøyaktige omgrep og informativ terminologi for å analysere, diskutere og formidle spørsmål som går på barns utvikling og vanskar i matematikk. Ein må då forsøke å utvikle omgrep som peikar på essensielle trekk ved denne utviklinga. Eit døme på slik omgrepsutvikling er måten Gelman og Gallistel (1978) definerer teljing på via dei fem prinsippa: teljeremsa (prinsippet om stabil ordning), parkoplingsprinsippet (1-1 korrespondanse), prinsippet om irrelevant ordning, abstraksjonsprinsippet og kardinalitetsprinsippet som i denne artikkelen vert kalla kardinaltalsprinsippet. Desse prinsippa gir eit omgrepsapparat til å diskutere og analysere teljing og barns utvikling på det området.

Tilsvarande er det behov for eit nøyaktig omgrepsapparat og ein terminologi knytt til det å oppfatte kor stort eit tal er. Det krev blant anna ei avklaring av kardinalitet og kardinaltal. At kardinalitet kan bli tillagt ulikt innhald er blant anna påpeika i Baccaglini-Frank, Carotenuto og Sinclair (2020). Teoretisk kan det vere ønskeleg å utvide omgrepsapparatet om teljing til eit større omgrepsapparat som blant anna famnar om det å oppfatte kor stort eit tal er.

Intensjonen i denne teoretiske artikkelen er tredelt. Punkt éin, som er hovudpoenget, er å diskutere kva det vil seie å oppfatte nøyaktig kor mange eit naturleg tal representerer og å gi eit rammeverk av omgrep for det. Vi innfører omgrepet nøyaktig mengdetaloppfatning, heretter berre kalla mengdetaloppfatning, og vi gir tre prinsipp for omgrepet der vi særleg ser på to av dei som berarar av essensen. Vi presiserer at vi berre diskuterer sjølve omgrepet mengdetaloppfatning. Problem relatert til korleis barn skal tileigne seg mengdetaloppfatning vert ikkje diskuterte. Punkt to er å sette mengdetaloppfatning inn i eit omgrepsapparat av nærliggande fenomen, og å klargjere korleis dei ulike omgrepa, blant anna teljing, står i forhold til kvarandre. Punkt tre er å bidra til ein diskusjon om norsk terminologi i feltet. Artikkelen har ei generell teoretisk tilnærming som vi meiner kan vere interessant for byrjaropplæring, matematikkvanskar og dyskalkuli, men ut over det går vi ikkje nærare inn på desse temaa.

Mengdetaloppfatning er noko anna enn å meistre teljeprinsippa

No ser vi på samanhengen mellom det å oppfatte kor mange element eit tal står for og det å kunne telje, i meininga å meistre Gelman og Gallistel (1978) sine fem prinsipp om teljing. Vi går kort gjennom desse prinsippa her.

Å meistre teljeremsa er å kunne seie talorda i riktig rekkefølgja, det vil seie å kunne repetere, «éin», «to», «tre», tilstrekkeleg langt. Parkopling vil seie å kople elementa i mengda éin-til-éin med elementa i teljeremsa, der ein startar med å kople til talordet «éin». Kardinaltalsprinsippet vil seie at det talordet som vert kopla til det siste elementet i mengda representerer kor mange element det er i mengda. Gelman og Gallistel (1978) kallar desse tre prinsippa for «how to count».

Abstraksjonsprinsippet seier at desse tre prinsippa kan brukast på ei vilkårleg mengde med element, til dømes kan elementa vere av ulike slag. Irrelevant ordning betyr at elementa kan parkoplast til teljeramsa i ei vilkårleg rekkefølgje.

Å kunne telje betyr i denne artikkelen å meistre alle desse fem prinsippa. Men er det å kunne telje tilstrekkeleg for å oppfatte kor mange element eit tal representerer, det vi her kallar mengdetaloppfatning? Vi undersøker dette spørsmålet gjennom eit tankeeksperiment der teljeremsa er bytta ut med alfabetet.

Eit tankeeksperiment: alfabetet som teljeremse

I staden for å telje «éin – to – tre – fire – fem – seks – sju – åtte – ni», kan remsa «a – b – c – d – e – f – g – h – i» brukast som teljeremse. Vidare kan ein behalde titalssystemet. I staden for ti, kan ein seie «a-null» og telje vidare «aa, ab,…» osv.

Merk at når vi i denne artikkelen skriv «tre» så meiner vi det munnlege talordet. Tilsvarande skriv vi «c» for talordet i den alternative teljeremsa. Det vil seie at når vi skriv tre eller 3 så meiner vi omgrepet tre, men når vi skriv «tre» eller «3» så meiner vi termen.

Alle som kan alfabetet og elles kan telje, kan også telje med denne teljeremsa. Fordi dei kan teljeremsa «a – b – c –…», og dei veit at dei skal kople det dei tel éin-til-éin med elementa i denne remsa. Dei meistrar også kardinaltalsprinsippet, det vil seie at dei veit at det siste parkopla talordet til dømes «*g*», representerer kor mange element det er i mengda. Tilsvarande vil dei også meistre dei andre to prinsippa om teljing.

Om dei derimot vert fortalde at ei mengde inneheld «*g*» element, så fortel det (for dei fleste) veldig lite. Dei fleste må truleg tenkje seg grundig om før dei klarar å danne seg eit inntrykk av kor mange «g» er. Merk at dersom tankeeksperimentet skal vere realistisk med tanke på dei utfordringane små barn står overfor i møte med tal, må ein unngå å tenkje på «a» som «éin», «b» som «to» og så vidare. Grunnen er at barn sjølvsagt ikkje har eit anna kjent talsystem som dei kan omsette tala til. At «*g*» er framandt for folk flest, vil med språkbruken i denne artikkelen seie at dei ikkje har mengdetaloppfatning av «g». Trass i at vaksne truleg er mykje betre til å telje med bokstavar enn dei fleste seksåringar er til å telje med talord er mengdetaloppfatninga borte. Dette tankeeksperimentet synleggjer at barn ikkje nødvendigvis har mengdetaloppfatning, sjølv om dei meistrar teljeprinsippa.

Her har vi brukt første del av alfabetet som teljeremse. Grunnen er at dei fleste kjenner alfabetet svært godt og har mykje erfaring med det i samband med rekkefølge. Til tross for det er rekka altså framand som erstatning for talorda. Lesaren kan om ønskeleg velje andre «teljeremser», til dømes kan setninga «barn – kan – mykje – matematikk – før – dei – byrjar – på – skulen» brukast som teljeremse. Det er rimeleg lett å lære seg setninga og dermed å «telje» med ho, men det vi her kallar mengdetaloppfatning vil likevel mangle.

Presisering av hovudproblemstillinga

Mengdetaloppfatning må altså vere noko fundamentalt anna enn det dei fem teljeprinsippa seier noko om. Spørsmålet er kva det eigentleg er for noko. Tankeeksperimentet ovanfor synleggjer at ein vaksen person (vanlegvis) straks oppfattar kor mange til dømes «sju» er, medan han ikkje ser for seg kor mange «g» er. Det gir grunnlag for følgjande problemstilling til diskusjon i denne artikkelen:

> Kva må ein vere i stand til for å oppfatte kor mange element eit talord/talsymbol representerer (mengdetaloppfatning)? Kan essensen formulerast via nokre få grunnleggande prinsipp?

Vi søker ei sparsam framstilling med så få prinsipp som mogleg. Det gir to hovudprinsipp som vi ser på som berarar av essensen. I kapittelet «Diskusjon» forsøker vi å vurdere i kva grad desse prinsippa passar inn under omgrepet mengdetaloppfatning, og omvendt om essensen i mengdetaloppfatning kviler på desse to prinsippa.

Ein kort introduksjon til artikkelens tilnærming til hovudproblemstillinga

I denne artikkelen bruker vi mengdetal synonymt med kardinaltal. Mengdetaloppfatning dreier seg altså om naturlege tal og skal handle om det å oppfatte nøyaktig kor mange element eit naturleg tal står for. Vi fokuserer først og fremst på tal opp til og med ti, større tal vert berre kort diskuterte.

Tankeeksperimentet poengterer at ein vaksen (vanlegvis) ikkje vil sjå for seg kor mange «g» er. Ein kan seie at problemet skuldast mangel på erfaring med «g» i denne samanheng, og derfor manglar også intuisjonen her. Tilsvarande manglar også eit lite barn erfaring med talorda. Det må likevel presiserast at erfaring ikkje berre handlar om å ha sett eller opplevd noko. Med andre ord er ikkje all erfaring like verdifull for å bygge intuisjon på dette området. I artikkelen forsøker vi blant anna å identifisere sentrale moment i erfaringar som bygger det vi kallar mengdetaloppfatning.

Litt upresist kan ein seie at mengdetaloppfatning av talordet «sju» betyr å vere familiær med sjuar-mengda og samtidig vite at ho heiter «sju». Men å vere familiær med sjuar-mengda er ikkje tilfredsstillande som prinsipp sidan det ikkje seier noko om kva det inneber. Vi argumenterer for at mengdetaloppfatning krev ein viss type kunnskap; kort fortalt at det handlar om å kunne dele opp eit tal i to mindre tal, til dømes å kunne relatere talordet «fem» til blant anna talorda «tre» og «to». I tillegg må desse to talorda knytast til mengdene som dei representerer. Dette er kunnskap som har vore sett på som viktig i samband med subtraksjon og addisjon (Moomaw & Dorsey, 2013; Young-Loveridge, 2001, 2002). I denne artikkelen vert det hevda at dette er ein meir grunnleggande kunnskap, nemleg at han er sentral for det som her vert kalla mengdetaloppfatning. Det krev ein heilt annan argumentasjon enn å grunngi at han er viktig for subtraksjon og talforståing generelt. Vi har ikkje funne ei slik tilnærminga verken formulert eller analysert i forskingslitteraturen sjølv om vi kan finne tankar i denne retninga (Andrews & Sayers, 2014; Berch, 2005; Krajewski & Schneider, 2009; Resnick, 1983; Young-Loveridge, 1999, 2001, 2002).

Vi har ei teoretisk tilnærming til problemstillinga, men vi støttar oss likevel på nokre empiriske resultat om approximate number system som vert introdusert nedanfor. Det må presiserast at vi ikkje seier noko om kva system hjernen har for å tenke omkring tal slik som den såkalla triple code modellen (Dehaene & Cohen, 1995; Gelman & Butterworth, 2005; Goswami, 2008). Vi tilnærmar oss problemstillinga ved å analysere og gjere greie for vår bruk av omgrepa, og vi diskuterer konsekvensane av dei.

Nokre nærliggande omgrep til mengdetaloppfatning i forskingslitteraturen

I forskinga på barns forståing av mengder og tal er det nytta fleire ulike omgrep. Her vert nokre av desse omgrepa kort presenterte, og vi argumenterer for at dei ikkje skildrar vår problemstilling, og at dei heller ikkje seier noko om kva for kunnskap og logiske/kognitive prosessar dei krev.

Numerical magnitude understanding

Numerical magnitude understanding (NMU) dreiar seg om å oppfatte storleiken på tal. NMU vert av Fazio, Bailey, Thompson og Siegler (2014, s. 54) karakterisert slik:

> Numerical magnitude understanding refers to the ability to comprehend, estimate, and compare the size of numbers (both symbolic and non-symbolic whole and fractions).

I denne definisjonen handlar NMU om fleire fenomen enn mengdetaloppfatning. NMU handlar både om symbolske og ikkje-symbolske representasjonar, noko vi med bakgrunn i Geary og VanMarle (2016) kan seie er to ulike fenomen som krev ulik type forståing. NMU omfattar også brøk, noko som går langt utover problemstillinga i denne artikkelen som berre dreier seg om å knyte riktig mengde element til eit gitt talord eller talsymbol. NMU vert omtala som «ability to comprehend, estimate and compare», men det seier ikkje noko om kva for kunnskap, logisk resonnement og erfaring som krevjast. Mengdetaloppfatning tek for seg eitt av mange kjenneteikn ved NMU, og ei slik avgrensing er nødvendig for å diskutere problemstillinga i denne artikkelen.

Subitisering

Subitisering er å straks sjå kor mange element det er i ei mengde utan å telje (Freeman, 1912; Kaufman, Lord, Reese & Volkmann, 1949). Forskarar ser ut til å vere einige om at menneske kan subitisere antal opp til tre (Benoit, Lehalle & Jouen, 2004), men somme antyder at ein kan subitisere antal opp til fem og jamvel seks (Sophian, Wood & Vong, 1995; Starkey & Cooper Jr, 1995). Nevrologisk forsking tyder på at subitisering og teljing er ulike prosessar som bruker ulike deler av hjernen (Piazza, Mechelli, Butterworth & Price, 2002). Ein meiner dessutan at subitisering er ei grunnleggande og medfødd evne (Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004) som jamvel ein del dyr har (Benoit et al., 2004; Gelman & Gallistel, 2004; Piazza et al., 2002). Det er likevel ikkje ei medfødt evne å vite at kardinaltalet til trearmengda heiter «tre», det må nødvendigvis lærast. Slik vi forstår det, fordrar ikkje subitisering å kjenne kardinaltalet til mengda, men vi har ikkje funne det eksplisitt uttrykt i litteraturen.

Omgrepa perceptual subitizing og conceptual subitizing er også nytta i litteraturen (Clements, 1999; Sarama & Clements, 2009). Perceptual subitizing er: «Recognizing a number without using other mathematical processes» (Clements, 1999). Slik vi forstår det, er det subitisering og det krevjast at ein også kjenner kardinaltalet til mengda. «Conceptual subitizing refers to identifying a whole quantity as the result of recognizing smaller quantities (recognized through perceptual subitizing) that make up the whole» (Conderman, Jung & Hartman, 2014).

Approximate number system og The parallel individuation system

Approximate number system (ANS) er ein term for eit intuitivt number sense system i hjernen (Feigenson et al., 2004; Szkudlarek & Brannon, 2017). ANS kjem typisk til syne ved at ein kan avgjere kva for ei av to mengder, typisk mengder med prikkar, som har flest element utan å telje, sjølv for store antal. The numerical distance effect seier at dess større antalsforskjell det er mellom mengder, dess raskare og meir påliteleg avgjer ANS kva for ei mengde som har flest element. ANS følger Webers lov, det vil seie at evna til å skilje antal ikkje føreset låge antal, men at det er forholdet mellom dei to antala som er avgjerande. Til dømes skil ANS like lett mellom 75 og 100 element som mellom 6 og 8 element, sidan 75/100=6/8.

I tillegg til ANS snakkar ein også om The parallel individuation system (PIS) som nokon meiner er aktivt ved antal mindre enn 4 som ved subitisering (Hyde, 2011; Le Corre & Carey, 2007). Medan ANS er tenkt å bruke eit mentalt symbol, dannar PIS distinkte mentale symbol for kvart element (Hyde, 2011).

Nokre studie antyder at barns presisjon i ANS predikerer grad av suksess i matematikkfaget i skulen (Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011). Andre studie tyder derimot på at kunnskap om det arabiske talsystemet, munnlege talord og talsymbol, er meir kritisk for matematisk utvikling enn ANS (Göbel, Watson, Lervåg & Hulme, 2014; Mussolin, Nys, Content & Leybaert, 2014). Vi har likevel ikkje funne ei årsaksanalyse av slike observerte samanhengar.

ANS er altså ikkje eit nøyaktig system, og derfor handterer det ikkje mengdetaloppfatning som skal handle om ei nøyaktig oppfatning av kor mange element eit talsymbol representerer. Medan ANS er sagt å vere eit intuitivt system, argumenterer vi for at mengdetaloppfatning krev ein kognitiv prosess heller enn ein intuitiv prosess når det kjem til å oppfatte talord større enn «tre». Når hjernen ikkje har ei nøyaktig intuitiv oppfatning av antal større enn tre, er det faktisk heller ikkje klart kva som skal meinast med å oppfatte slike antal nøyaktig. Derfor diskuterer vi kva det skal bety å oppfatte antal nøyaktig og vidare kva det skal bety å oppfatte talorda nøyaktig (sjå kapittelet «Omgrepet kor mange»).

Mapping

Å knyte tal til riktig mengde, og omvendt å knyte mengde til riktig tal, utan å telje, vert i engelsk litteratur omtala som mapping, eller meir utførleg som mapping between symbolic- and nonsymbolic numerical magnitudes (Mundy & Gilmore, 2009). Mapping-evna har vore testa blant anna ved å la forsøkspersonane samanlikne ei mengda A med eit talord/talsymbol (Temple & Posner, 1998). Oppgåva er då å avgjere om talordet representerer fleire, færre eller like mange element som det er i mengda A. Som ANS følger også evna til mapping Webers lov. Det vil seie at det er forholdet mellom talet (talordet) og talet på element i mengda som er avgjerande for om ein klarar å skilje dei (Sullivan & Barner, 2013).

Ein kan kanskje med ein viss rett seie at «g», i tankeeksperimentet ovanfor, er framandt fordi ein ikkje meistrar mapping frå «g» til mengde. Likevel svarar ikkje omgrepet mapping på problemstillinga i denne artikkelen, blant anna fordi det ikkje seier noko om mekanismane bak det å meistre slik mapping.

> While it is clear that we can map number words onto ANS representations of numerical magnitude, surprisingly little is known about the nature of these mappings, and descriptions of possible mechanisms are rare in the literature» (Sullivan & Barner, 2013, s. 390).

Eksperimenta til Sullivan og Barner (2013) tyder på at hjernen bruker andre system for låge antal enn for høge antal.

Eit omgrepsapparat for samanhengen mellom mengder og tal

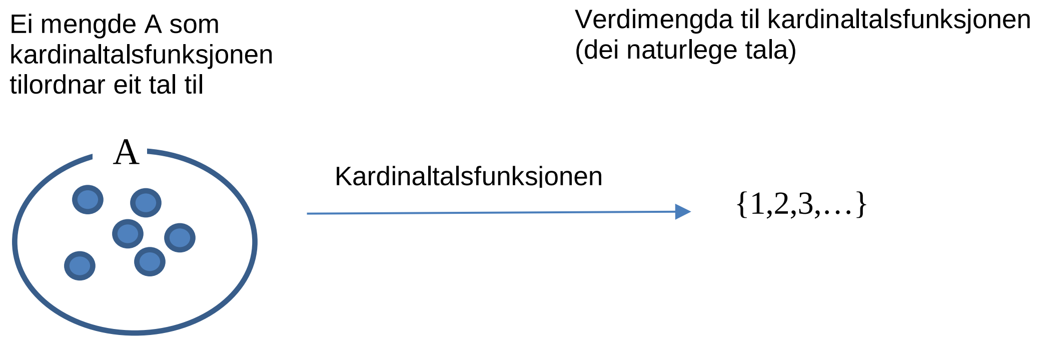
I dei følgjande kapitla, før vi går over til diskusjonen, presenterer vi eit omgrepsapparat for samanhengen mellom mengder og tal. Vi startar med å avklare omgrepa *kor mange, kardinalitet og kardinaltal*.

Omgrepa kor mange, kardinalitet og kardinaltal

Spør ein kor mange det er i ei mengde forventar ein typisk eit tal til svar. Dette til trass, omgrepet kor mange føreset ikkje tal. Men kva er då eigentleg omgrepet kor mange?

Vi startar med skilnaden på kardinalitet og kardinaltal som er ein sentral del av problemstillinga i denne artikkelen. To mengder der elementa kan parkoplast vert sagt å ha same kardinalitet. Spørsmålet om kor mange er eit spørsmål om kardinalitet, for det er parkopling som skildrar både kardinalitet og spørsmålet om kor mange. Kardinaltalet til mengda $\{1,2,\ldots,n\}$ er definert som n, og alle mengder med same kardinalitet har same kardinaltal. Ein kan seie at talordet er namnet til kardinaliteten. Matematisk sett er kardinaltal ein funksjon frå (for vår del endelege) mengder til dei naturlege tala, og kardinaltalet (funksjonsverdien) til ei mengde er då eit naturleg tal (sjå figur 1). Kardinaltal er altså ikkje eit tal, men verdien som funksjonen kardinaltal tilordnar ei mengde er eit (naturleg) tal. Funksjonen kardinaltal er vidare eit såkalla mål, det vil blant anna seie at kardinaltalet til unionen av to disjunkte mengder A og B er lik summen av kardinaltalet til A og kardinaltalet til B. Det sikrar at unionen av mengder korresponderer med det å addere dei tilhøyrande tala.

Kardinalitet er altså ein relasjon mellom mengder, medan kardinaltal er ein funksjon frå mengde til tal. Det gir meining å vise tre fingrar som svar på kardinalitet (kor mange), men det er ikkje svar på kva kardinaltalet til mengda er. I denne artikkelen ser vi altså ikkje på tre fingrar som ein representasjon for talet 3, men tre fingrar er derimot ei mengde med same kardinalitet som den aktuelle mengda. Eit spørsmål om kor mange (kardinalitet) krev altså ikkje at ein refererer til tal, men eit spørsmål om kardinaltal krev referanse til tal, og det må dessutan vere avklara kva talsystem ein bruker. At det er skilnad på kardinalitet og kardinaltal er dessutan grunnen til at vi i denne artikkelen vel å seie kardinaltalsprinsippet i staden for kardinalitetsprinsippet.



Figur 1 Kardinaltal er ein funksjon (kardinaltalsfunksjonen). Funksjonen kardinaltal tilordnar eit naturleg tal til den mengda ein gir til funksjonen. Vi kan seie at definisjonsmengda til kardinaltalsfunksjonen er alle endelege mengder.

Kardinaltalsfunksjonen gir grunnlag for ein taksonomi (klassifisering) der vi skil mellom omgrep som går frå mengde til tal og omgrep som går motsett veg, nemleg frå tal til mengde, sjå figur 1. Ved hjelp av denne taksonomien skal vi plassere blant anna mengdetaloppfatning i eit omgrepsapparat, og han vil vere med på å avklare omgrepa. Komande kapittel tar for seg omgrep som går frå mengde til tal. Det er altså omgrep som dreier seg om den operasjonen som kardinaltalsfunksjonen utfører, for han går frå mengde til tal. Deretter går vi over til omgrepet mengdetaloppfatning som går frå tal til mengde, og som slik sett dreiar seg om det inverse bildet under kardinaltalsfunksjonen.

Forslag til terminologi for ulike prosessar som går frå mengde til tal

I denne artikkelen seier vi *å bestemme antalet* når vi meiner å finne kardinaltalet til mengda. Ein kan bestemme antalet ved teljing, men spesielt for mindre mengder er det ofte ikkje nødvendig å telje for å bestemme antalet.

Her og seinare i artikkelen nyttar vi uttrykket *kjende konstellasjonar*. Med dette uttrykket vert det meint konstellasjonar av prikkar slik dei førekjem på terningen, eller tilsvarande lett attkjennelege konstellasjonar.

Vi innfører termen *spontan antalbestemming* for subitisering med den presiseringa at ein også kan seie kva kardinaltalet til mengda er. Conceptual subitisering er svært likt, mulegens identisk, med det vi her kallar *semispontan antalbestemming*. Det betyr at dersom til dømes sju prikkar er organisert i to grupper av høvesvis fire prikkar og tre prikkar, der kvar av desse er organiserte i kjende konstellasjonar, då kan ein straks seie at det er «sju» prikkar utan å telje. I semispontan antalbestemming vert altså delgruppene spontant antalbestemt, og vidare har ein den nødvendige kunnskapen for å bestemme tal-ordet/symbolet. Det er slik sett berre ein delvis spontan prosess og derav termen semispontan.

Omgrepa teljing, spontan antalbestemming og semispontan antalbestemming går altså frå mengde til tal.

Prosessar og omgrep som går frå tal til mengde

Ovanfor avklara vi omgrepa kor mange, kardinalitet og kardinaltal. Det gir eit grunnlag for å diskutere det *å oppfatte kor mange* som så gir eit grunnlag for å diskutere mengdetaloppfatning. Med bakgrunn i den diskusjonen formulerer vi prinsippa *tal-til-mengdeseparasjon* og *tal-separasjon*. Til slutt vert mengdetaloppfatning knyta til desse prinsippa.

Før vi diskuterer det å oppfatte kor mange, presenterer vi ein premiss for artikkelens tilnærming til mengdetaloppfatning.

Ein premiss for artikkelens tilnærming til mengdetaloppfatning

Kognitiv forsking har vore opptatt av korleis hjernen oppfattar talmengder (Dehaene & Cohen, 2007; Feigenson et al., 2004; Khanum, Hanif, Spelke, Berteletti & Hyde, 2016). Som nemnt skil ikkje ANS presist når nonsymbolic-magnitude (til dømes prikkar) er høgt. Det er eit argument for å seie at det å vurdere nøyaktig kor mange det er i ei mengde (fleire enn tre, jf. subitisering) ikkje er ein intuitiv prosess, men at det krev bestemte kunnskapar. Ut frå dette legg vi følgande premiss til grunn i denne artikkelen:

> Hjernen har ikkje noko presis oppfatning eller presist bilde av kardinalitet høgre enn tre som ikkje bygger på annan informasjon/førestillingar om kardinaliteten.

Premissen er altså at eit mentalt bilde eller oppfatning av ein kardinalitet høgre enn tre må bygge på informasjon/førestillingar som ikkje har noko å gjere med kardinaliteten (kor mange det er) i seg sjølv. Det kan til dømes vere informasjon/førestillingar om korleis elementa i ei mengde (til dømes prikkar) er plasserte eller grupperte. Alternativet til denne premissen er å forklare avgrensinga i det å skilje mengder av ulike kardinalitetar med avgrensingar i sansesystemet heller enn med avgrensingar i ANS. Merk at vi har sett grensa til tre i premissen for denne artikkelen, men så lenge ein aksepterer at det er ei grense, er prinsippet det same sjølv om grensa til dømes skulle vere fem.

Det å oppfatte kor mange

Vi minner om at det å oppfatte kor mange og det å oppfatte kardinalitet er det same i denne artikkelen. Omgrepet kor mange bygger altså på samanlikning av mengder, via parkopling. Spørsmålet om kor mange det er i ei mengde A, vert i prinsippet svart på ved å seie at det er like mange element som i ei anna mengde B, der like mange betyr at det er parkopling mellom elementa i A og elementa i B. Men viss ein ikkje har ei oppfatninga av kor mange det er i mengda B, er dette svaret langt på veg meiningslaust (bortsett frå i situasjonar der det er nok å vite at det er ei parkopling mellom mengdene). Det vil seie at eit fullverdig svar som regel krev at ein samanliknar mengda A med ei mengde som mottakaren kjenner godt frå før. Det er blant anna det ein forsøker å gjere når ein seier at det er «sju» element i mengda A (i tillegg kan ein teljefør mottakar telje opp ei ny mengde med sju element, men det er underordna her). Med andre ord reknar ein då med at mottakaren har det denne artikkelen kallar for mengdetaloppfatning av «sju».

Omgrepet kor mange dreiar seg som nemnt om samanlikning. Å ha ei nøyaktig oppfatning av kor mange det er i ei mengde A må dermed bety å (mentalt) kunne vise til/førestille seg (utan teljing) ei anna mengde av same kardinalitet, eventuelt å vise til ein kombinasjon av mengder som til saman har same kardinalitet som mengda A. Problemet er at det krev at ein oppfattar kor mange det er i den sist tilviste mengda (som igjen betyr å vise til ei ny mengde). Ein er altså inne i ei evig løkke. Dette poenget er heilt grunnleggande for vår tilnærming til omgrepet mengdetaloppfatning. Spørsmålet er om ein kan vise til ei mengde som ein openbart oppfattar utan ytterlegare samanlikning.

Løysinga eller vegen ut av den evige løkka (frå førre avsnitt), ligg i å akseptere at hjernen oppfattar kardinaliteten til dei minste mengdene nøyaktig (jf. PIS og ANS). Det betyr at det å oppfatte kardinaliteten til dei minste mengdene ikkje treng ytterlegare samanlikning. Å oppfatte høgre kardinalitetar krev derimot meir (jf. premissen i førre avsnitt); det impliserer å kunne vise kardinaliteten som ein kombinasjon av delmengder. Dersom ei av delmengdene inneheld meir enn tre element, må også denne kardinaliteten vere oppfatta. Det vil seie at ein også kan vise denne delmengda som to delmengder av maks tre element. Å oppfatte kardinalitet er då eit byggesystem, der det å oppfatte høge kardinalitetar krev at ein oppfattar dei lægre kardinalitetane. Det er dette vi meiner med at det å oppfatte kor mange (kardinalitet) krev kunnskap og kognisjon.

Å oppfatte kardinaliteten til ein kjend konstellasjon

I lys av det som er sagt ovanfor følger det at å oppfatte kardinaliteten til ein kjend konstellasjon, til dømes femmarsida på terningen, vil seie å vere medviten at konstellasjonen er samansett av tre og to prikkar, men utan nødvendigvis å kjenne talorda «tre» og «to». Derimot treng ikkje det å kjenne att konstellasjonen å bety at ein oppfattar kardinaliteten til konstellasjonen. Det å kjenne att konstellasjonen treng eigentleg ikkje bety noko anna enn å kjenne att konstellasjonen som eit bilde/ikon som i ytste konsekvens er ekvivalent med å kjenne att symbolet 5.

Omgrepet mengdetaloppfatning bygger på det å oppfatte kor mange

Mengdetaloppfatning er relatert til det å oppfatte kardinaliteten til mengder. Meir presist, mengdetaloppfatning av eit tal (talord/symbol) betyr at ein (mentalt) knyter riktig kardinalitet til talet (talordet/symbolet) utan å telje/parkople, men for å gjere det, må kardinaliteten til mengda vere oppfatta. Vi presiserer at vi her først og fremst snakkar om tala 1, 2, … , 10.

Vi skal igjen bruke teljeremsa «a – b – c – … – i» (jf. tankeeksperimentet ovanfor) for å synleggjere utfordringane med å oppfatte kardinaliteten som eit tal viser til. Av det som er sagt ovanfor, kan ein kanskje seie at når ein har lært at dei minste kardinalitetane heiter høvesvis «a», «b» og «c», så har ein mengdetaloppfatning av «a», «b», og «c» (seinare i artikkelen argumenterer vi for at dette likevel ikkje er tilstrekkeleg, men her går vi ikkje inn på desse detaljane).

Mengdetaloppfatning av «g» er meir komplisert blant anna fordi det, som diskutert ovanfor, er meir komplisert å oppfatte kardinaliteten som «g» viser til. Kardinaliteten til g-mengda vert som nemnt oppfatta via ein kombinasjon av mengder. Å oppfatte kardinaliteten til «g» krev derfor at «g» vert knyta til ein kombinasjonen av mengder som ein oppfattar kardinalitetane til. Det vil seie å vite at «g» viser til like mange element som det til dømes er i unionen av c-mengda og d-mengda. Det gjer ein, i alle fall til ein viss grad, om ein veit at «g» er «c» og «d», samtidig som ein kan vise til «c» som tre element og «d» som fire element (ein må altså også ha mengdetaloppfatning av «d»). Dei språklege/abstrakte samanhengane mellom tala er med andre ord tilstrekkelege dersom dei minste talorda kan førast tilbake til verkelegheita utan teljing. Mentale bilde av kardinaliteten som eit tal større enn tre viser til, må altså bygge på kognisjon i form av oppdelingar av mengda. Til dømes kan ein familie med to vaksne og tre barn danne eit mentalt bilde av fem element nettopp fordi mengda er strukturert i to og tre. Eit individ som ikkje kan relatere talorda til slike samanlikningar har ikkje det som her vert kalla mengdetaloppfatning.

Vi skal no gå gjennom dei tekniske detaljane via tre prinsipp. Det første prinsippet knyter saman kardinalitetar og tal. Det er heilt grunnleggande både for antalbestemming og mengdetaloppfatning. Vi ser på det som eit grunnlag som må vere på plass forut for begge desse omgrepa heller enn som berar av essensen i mengdetaloppfatninga. Derfor nummererer vi det som prinsipp 0. Deretter presenterer vi prinsipp 1 og prinsipp 2 som vi seinare peikar ut som essensen i omgrepet mengdetaloppfatning.

Prinsipp 0, 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet og talord

Å meistre kardinaltalsprinsippet betyr ikkje nødvendigvis å innsjå at to mengder med same kardinaltal har like mange element. Det er eit spørsmål om å kople kardinaltalsprinsippet til parkopling, og det er eit spørsmål om å meistre transitivitetseigenskapen til parkoplinga. Det vil seie at dersom to mengder A og B har same kardinaltal, n, kan både A og B parkoplast med mengda $\{1,2,\ldots,n\}$, og då kan også A parkoplast med B). Nunes og Bryant (1996, s. 41) seier det slik:

> …it is one thing to be able to count and answer the question “how many” but quite another to understand the significance of the number uttered at the end of the counting as a measure of the set size.

Problemet er vel studert (Baroody & Wilkins, 1999; Bermejo, Morales & Garcia deOsuna, 2004; Muldoon, Lewis & Freeman, 2009; Sarnecka & Gelman, 2004; Sarnecka & Wright, 2013), og det er relatert til equinumerosity og conservation-of-number task (Piaget, 1952). Fenomenet har også vore kalla specificity of numbers (Sarnecka & Gelman, 2004; Sarnecka & Wright, 2013).

Kardinaltal er ikkje ein éin-éintydig funksjon, men vi definerer likevel:

Prinsipp 0: Prinsippet om 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet og tal(ord): kardinaltalet til ei mengde A er lik kardinaltalet til ei mengde B viss og berre viss A og B har same kardinalitet (det vil seie at dei kan parkoplast).

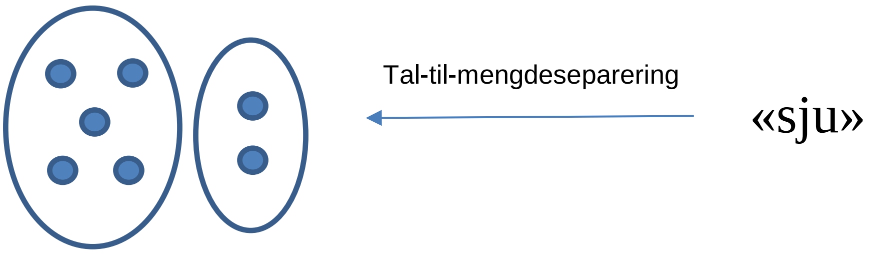
Talorda fungerer altså som éin-éintydige namn på kardinalitetar. Det vil seie at talorda vert relatert til parkopling, slik at om to mengder har same talord (namn) er det parkopling mellom mengdene, elles er det ikkje det. Eit barn som gjer bruk av at to mengder med same talord kan parkoplast bruker prinsippet om 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet og talord. Som idé føreset ikkje prinsippet om 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet og talord verken teljeremsa eller kardinaltalsprinsippet.

Prinsipp 1, tal-til-mengdeseparering – ein prosess frå tal til mengde

Semispontan antalbestemming går som nemnt frå mengde til tal, det dreier seg altså om å sjå kva kardinaltalsfunksjonsverdien til mengda er, sjå figur 1. Vi ønskjer eit liknande omgrep som går i motsett retning, det kallar vi (frå-)tal-til-mengdeseparering og går frå tal til mengde, jf. figur 2.

Prinsipp 1: Tal-til-mengdeseparering er å (ut frå talordet/talsymbolet) illustrere talets kardinalitet med to delgrupper av kjende konstellasjonar utan å parkople/telje.

Døme: Ein av mange tal-til-mengdesepareringer av «sju» er å sette opp ein kjend konstellasjon av fem prikkar og ein av to prikkar (utan å parkople/telje), jf. figur 2.



Figur 2 Ein som meistar tal-til-mengdeseparering kan ut frå eit talord til dømes «sju», eventuelt talsymbolet 7, illustrere kardinaliteten med to delgrupper av kjende konstellasjonar utan å parkople/telje.

Frå ein matematisk ståstad dreier tal-til-mengdeseparering seg om talets inverse bilde under funksjonen kardinaltal, sjå figur 1.

Semispontan antalbestemming krev berre at ein kjenner att ein konstellasjon og veit kva han heiter når ein ser han. Tal-til-mengdeseparering krev derimot at ein sjølv kan attskape konstellasjonane når ein høyrer talordet. Vår hypotese er at det er meir krevjande enn semispontan antalbestemming.

Prinsipp 2, tal-separasjon

Semispontan antalbestemming og tal-til-mengdeseparasjon involverer både talord og mengder. Desse omgrepa har begge ei rein språkleg (verbal og eventuelt symbolsk) side som vi kallar for høvesvis tal-kombinasjon og tal-separasjon og vert diskuterte her. At det dreiar seg om meir enn tekniske forskjellar er indikert av empiriske forsøk. Til dømes kan barn sjå at om det er to brikker i ein boks, og vi puttar på to ekstra, har vi fire brikker. Likevel ser dei ikkje kva talord «to» og «to» gir (Hughes, 1981).

Omgrepet tal-kombinasjon er ein abstrakt parallell til semispontan antalbestemming. Tal-kombinasjon betyr å kunne setje saman to tal til eit større tal (via talord eller eventuelt talsymbol). Til dømes å vite at «to» og «tre» er «fem».

Tilsvarande er tal-separasjon ein abstrakt parallell til tal-til-mengdeseparering.

> Prinsipp 2: Tal-separasjon betyr å vite kva for to mindre tal eit tal er sett saman av (via talord/talsymbol). Til dømes å vite at «fem» er «to» og «tre», og at «fem» er «fire» og «éin».

Tal-separasjon er her avgrensa til det å vite kva for to mindre tal eit tal er samansett av. Å vite at «fem» er «to» og «to» og «éin» er likevel ein indirekte konsekvens av å kunne tal-separasjon av alle talorda opp til «fem».

Eit perspektiv på tal-kombinasjon og tal-separasjon: Tal-kombinasjon er å finne funksjonsverdien $f(x, y) = x + y$. Tal-separasjon av til dømes fem er å finne løysingsmengda til likninga $x + y = 5$. Slik sett er ikkje tal-separasjon det motsette av tal-kombinasjon, noko blant anna dei heilt ulike teknikkane for å angripe desse to situasjonane på ymtar om.

Tal-kombinasjon og tal-separasjon er altså operasjonar i verdimengda til funksjonen kardinaltal, jf. figur 1. Barn må innsjå at det å slå saman og dele opp mengder har sin parallell i operasjonar på dei naturlege tala (matematisk sett er det garantert av at funksjonen kardinaltal er eit mål), men om det faktisk er ei utfordring for barn vert ikkje diskutert i denne artikkelen. Her nøyer vi oss med å påpeike at det er ein nødvendig føresetnad for mengdetaloppfatning.

Mengdetaloppfatning

Talorda fungerer (blant anna) som éin-éintydige namn på dei ulike kardinalitetane. Titalssystemet er eit kombinatorisk kodesystem med ti siffer som organiserer i tiargrupper, og grupperingane er i meir eller mindre grad reflekterte i talorda. Desse grupperingane må vere med i prinsippa bak omgrepet mengdetaloppfatning. Der er fordi at omgrepet mengdetaloppfatning er knytt til talord/talsymbol i eit gitt talsystem, og ho er derfor avhengig av nettopp det systemet. Med andre ord, det å oppfatte kor mange element talorda/talsymbola peikar på, må blant anna avhenge av det kodesystemet som talsymbola/talorda er bygd opp etter. Men den kombinatoriske kodinga startar først med talet ti. Derfor kan ikkje mengdetaloppfatning av tal opp til og med ti støtte seg på posisjonssystemet og er slik sett fundamentalt annleis enn mengdetaloppfatning av tal over ti (det er likevel ikkje sagt at måten ein oppfattar tal mindre enn ti på ikkje kan verke også for noko større tal enn ti).

Vi tar no for oss mengdetaloppfatning av tal opp til og med ti. Vi ser på prinsippet om 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet og talord som ein nødvendig føresetnad som nærast går forut for omgrepet mengdetaloppfatning, heller enn at det er ein del av mengdetaloppfatninga. Derfor legg vi no til grunn at det er på plass.

Vi gir to prinsipp for mengdetaloppfatning av eit naturleg tal (talord/talsymbol) $n \leq 10$. Det er prinsippa om:

1. minst éin tal-til-mengdeseparasjon (prinsipp 1) av kvart talord opp til og med n
2. tal-separasjonane (prinsipp 2) av talorda opp til og med n

Vi vel som regel å seie mengdetaloppfatning av eit tal sjølv om det i stor grad er knytt til talordet/talsymbolet.

Merk at dei fem teljeprinsippa (Gelman & Gallistel, 1978) ikkje er prinsipp for mengdetaloppfatning. Grunnen er at vi ser på mengdetaloppfatning som ein prosess som går frå tal til mengde, medan teljeprinsippa dreiar seg om mapping frå mengde til tal.

Som sagt ser vi på prinsipp 0, 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet og talord, som eit grunnlag heller enn som essensen i mengdetaloppfatning. Det kan vel jamvel diskuterast om det er implisitt i det å meistre prinsippet om tal-til-mengdeseparasjon. Det er heller ikkje avhengig av kva teljeremse ein bruker (jf. tankeeksperimentet i starten av artikkelen). Til dømes ville ein som vaksen meistre dette prinsippet sjølv med alfabetet som teljeremse. Det vert derfor i lita grad diskuterte i dei følgjande kapitla.

Diskusjon

Tilbake til hovudspørsmålet i artikkelen; kva er det som gjer at vi straks oppfattar kor mange til dømes «sju» er, medan vi ikkje ser for oss kor mange «g» er? Vi påstår at «g» er framandt for oss fordi vi verken kan tal-separere eller tal-til-mengdeseparere «g». Vi veit ikkje at «g» er samansett av «e» og «b» eller av «c» og «d», og vi ser heller ikkje kva kardinalitetar desse «talorda» peikar på. Om vi derimot kunne tal-til-mengdeseparere «e», hadde vi ført «e» tilbake til den kjende konstellasjonen på terningen. Viss vi i tillegg kunne tal-separere «g» i «e» og «b» og samtidig visste kva «b» peika på, då hadde vi eit bilde av «g». Om vi kunne alle tal-separasjonane, så var «g» plassert i høve til alle dei andre «talorda» til dømes «d» og «f», og «g» ville vere rimeleg bra oppfatta.

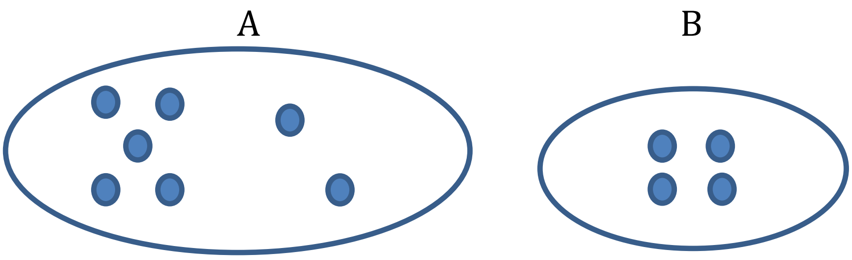
Her er mengdetaloppfatninga av «g» grunngitt med bruk av begge prinsippa, men kunne vi klart oss med berre eitt av desse prinsippa? I dei to neste delkapitla argumenterer vi for at det ikkje er tilstrekkeleg med berre eitt av desse prinsippa, men at begge prinsippa er nødvendige.

Argument for at tal-separasjon ikkje er tilstrekkeleg for mengdetaloppfatning

Er det tilstrekkeleg å ha kontroll på tal-separasjonane til talet? Er det til dømes nok å vite at «e» er «a» og «d», «b» og «c», «d» og «a», eller «c» og «b»? Nei det er tvilsamt, fordi tal-separasjonane i prinsippet kan lærast utanåt som ei regle, men om ein ikkje klarar å knyte dei opp mot mengder med riktig kardinalitet, er dei jo nettopp berre ei regle. Å ha pugga desse tal-separasjonane, er til dømes neppe ein garanti for at ein veit kva for ei side av terningen «e» er namnet på. Derfor er ikkje tal-separasjons-prinsippet tilstrekkelege aleine. Vi må i tillegg ha tal-til-mengdeseparasjon nettopp for å forankre «e» til «rett» side på terningen.

Argument for at tal-til-mengdeseparasjon ikkje er tilstrekkeleg for mengdetaloppfatning

Er det tilstrekkeleg å ha kontroll på tal-til-mengdeseparasjon av talet? Tal-til-mengdeseparering av «5» sikrar det å knyte «5» til riktig side av terningen (eventuelt til ein annan tilsvarande kjend konstellasjon). Tal-til-mengdeseparering av «5» demonstrerer altså at ein oppfattar kardinaliteten til 5-mengda ved å dele mengda opp i to delmengder som PIS-systemet handterer nøyaktig. Dette er likevel ikkje eit tilstrekkeleg prinsipp for mengdetaloppfatning. For å argumentere for det, bruker vi igjen teljeremsa «a – b – c – … – i». Argumentasjonen går slik:



Figur 3. To mengder, A og B, organisert i kjende konstellasjonar.

Anta at ein person tenker på «g» som konstellasjonen til venstre og på «d» som konstellasjonen til høgre i figur 3. Det vil seie at vedkomande kan ei, av mange, tal-til-mengdesepareringer av «g» og av «d». Kvifor er ikkje dette tilstrekkeleg for mengdetaloppfatning av «g» og «d»? Kvifor må ein i tillegg kunne tal-separasjon? Grunnen er at ei fullgod mengdetaloppfatning faktisk inneber det å ha ei oppfatning av skilnaden mellom to mengder. Vårt argument for det går gjennom følgande parallell: Korleis kan vi hevde at vi har mengdetaloppfatning av «to» og «tre»? At vi har ei klar mengdetaloppfatning av «to» og «tre» må i det minste bety at vi har ei klar oppfatning av at toar- og trear-mengda er ulike, og at vi har ei klar oppfatning av kva skilnaden er. Dette poenget tar vi med til større tal, og det er då eit argumentet for at ei fullgod mengdetaloppfatning av «g» må omfatte ei klar oppfatning av kva som skil «g» frå blant anna «d». Men å knyte «g» og «d» til mengdene i figur 3, er i seg sjølv ikkje nok til å garantere at skilnaden mellom desse to mengdene er oppfatta (Det trengst faktisk ein liten analyse for å sjå kva skilnaden på dei to mengdene i figur 3 er). Det er klart at mengda A kan omorganiserast til konstellasjonar av fire og tre prikkar og då er skilnaden openberr. Men det er neppe ein rask mental operasjon, og mengdetaloppfatning av tal mindre enn ti kan ikkje bygge på tunge prosessar. Om vi derimot veit at «g» er «d» og «c» (og gitt at vi har mengdetaloppfatning av «d» og «c»), då er skilnaden openberr. Dette er våre argument for at tal-separasjonane er nødvendige for mengdetaloppfatning. Alternativet er å kunne alle tal-til-mengdeseparasjonanen, men det spørs om det er realistisk å kunne alle tal-til-mengdeseparasjonane utan å kunne tal-separasjonane.

Prinsipp for mengdetaloppfatning av fleirsifra tal

Mengdetaloppfatning av tal over ti vert berre kort diskutert. Mengdetaloppfatning for tal over ti vil typisk vere annleis enn for tal opp til ti, utan dermed å seie at det er eit absolutt skilje ved ti (Ross, 1989; Sullivan & Barner, 2013). Vi har argumentert for at essensen i mengdetaloppfatninga av små tal er konkret, nøyaktig og spontan. For større tal derimot kan det i langt større grad diskuterast kor konkret, nøyaktig og ikkje minst spontan mengdetaloppfatninga kan vere. Argumentasjonen nedanfor leiar oss til å seie at ho bygger meir og meir på analysering dess større talet er, og slik sett vert ho meir og meir abstrakt og mindre og mindre spontan dess større talet er.

Mengdetaloppfatning for tal over ti må inkludere mengdetaloppfatning av tal opp til ti, men i tillegg må ho nytte seg av posisjonssystemet. Omgrepet mengdetaloppfatning er altså knyta til eit bestemt talsystem. Også for tal over ti er det oppdeling som er stikkordet, men no er oppdelingar som følger posisjonssystemet sentrale. Vi hevdar altså at mengdetaloppfatning av tal over ti er ein kombinasjon av mengdetaloppfatning av tala opp til ti og grupperingane i posisjonssystemet. Ein person som ser på «57» som «fem» tiarar og «éin» sjuar, har god mengdetaloppfatning av 57 dersom han i tillegg har ei god mengdetaloppfatning av tala ti, fem og sju samt prinsippa i posisjonssystemet.

Prinsippa for mengdetaloppfatning av eit naturlege tal $n > 10$ er:

1. prinsippa for mengdetaloppfatning av dei naturlege tala opp til og med ti,
2. og at ein kombinerer desse med prinsippa i posisjonssystemet.

Samanhengen mellom talorda og prinsippa i posisjonssystemet må altså vere på plass. Med det meiner vi at til dømes «femti» må oppfattast som «fem» tiarar, «hundre» må oppfattast som «ti» tiarar og så vidare. Vidare må til dømes «tolv» oppfattast som «12» som igjen vert oppfatta som «éin» tiar og «to» einarar. I innlæringsperioden til barna kan desse samanhengane representere mange problem, men som tidlegare nemnt, berer det for langt å diskutere dei her.

Om ekstensjonen til mengdetaloppfatnings-prinsippa

Kan det seiast noko om ekstensjonen til mengdetaloppfatnings-prinsippa? Prinsippa omfattar det dei konkret seier, men det er vanskeleg å seie kva meir dei eventuelt omfattar. Det kan i liten grad trekkast stringente logiske slutningar mellom ulike omgrep på dette området. Vi har heller ingen garanti for at eit individ kan overføre kunnskap frå eit område til eit anna eller trekke logiske slutningar mellom ulike omgrep. Slike spørsmål må typisk undersøkast empirisk. Likevel kan og bør nokre vurderingar gjerast, blant anna som eit grunnlag for eventuelle empiriske undersøkingar.

Meir om forholdet mellom teljing og mengdetaloppfatning

I starten av artikkelen argumenterte vi for at det å kunne teljeprinsippa ikkje er tilstrekkeleg for mengdetaloppfatning, men kva med det omvendte spørsmålet? Er det mogeleg å meistre mengdetaloppfatnings-prinsippa utan å meistre teljeprinsippa? Sjølv om det er teoretiske samanhengar mellom til dømes tal-separasjon (som er eit av mengdetaloppfatnings-prinsippa) og teljeremsa (som er eit av teljeprinsippa), er ikkje teljeprinsippa direkte involverte i mengdetaloppfatnings-prinsippa bortsett frå at parkopling mellom mengder er involvert via prinsippet om 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet og talord. I teorien er det derfor mogeleg å meistre mengdetaloppfatnings-prinsippa utan å ha kjennskap til teljeprinsippa, men om det er mogeleg i praksis er derimot eit empirisk spørsmål. Vi utelukkar altså ikkje at eit barn til dømes kan oppfatte «fire» som «to» og «to» utan å ha kontroll på verken teljeremsa opp til «fire» eller kardinaltalsprinsippet, ei heller dei andre teljeprinsippa.

Døme på kunnskap som mengdetaloppfatnings-prinsippa ikkje identifiserer som mengdetaloppfatning

Anta at eit barn veit at det er «17» elevar i klassen sin. Fungerer klassen då som eit mentalt bilde på kor mange «17» viser til, og bør ein seie at barnet då har mengdetaloppfatning av 17? Denne kunnskapen tilfredsstiller ikkje mengdetaloppfatnings-prinsippa for 17, men burde han inkluderast som prinsipp for mengdetaloppfatning? Vi vil her argumentere for at han ikkje bør det. Sett at barnet også kjenner parallellklassen godt og veit at dei er «19» elevar, vil ikkje desse to klassane då fungere som bilde på kardinaliteten til høvesvis «17» og «19»? Om dette verkeleg er all kunnskapen eleven har om 17 og 19, då har han truleg ikkje ein gong ei formeining om kva som er størst av 17 og 19. Og då er ikkje denne kunnskapen god nok til å seie at eleven har mengdetaloppfatning av verken 17 eller 19. Derimot, om eleven i tillegg veit at det er «to» fleire elevar i parallellklassen og kanskje veit at det er «9» jenter og «8» gutar i klassen, eller at han ser for seg eit klasserom der elevane sit på rekke og rad, då kan det vere starten på mengdetaloppfatning av 17. Men då er ein inne på oppdeling, og det er nettopp det mengdetaloppfatnings-prinsippa dreiar seg om.

Mengdetaloppfatning og tallinjeestimering

Numerical magnitude understanding er nært knytt til eller ofte operasjonalisert og målt via tallinjeestimering (TLE) (Siegler & Booth, 2004; Siegler & Lortie-Forgues, 2014; Siegler & Opfer, 2003). Ein variant av TLE er å plassere eit tal på korrekt plass på ei linje der berre endepunkta, til dømes 0 og 10, er markerte. Vidare er det to versjonar av TLE: tal-til-posisjon (Laski & Siegler, 2007) og posisjon-til-tal (Siegler & Opfer, 2003). Skår på slike testar blir av mange hevda å vere ein viktig indikator for barnehage- og småskulebarns framtidige suksess i matematikk (Booth & Siegler, 2008; Siegler, 2016; Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Spørsmålet om kausalitet er likevel omstridt (LeFevre et al., 2013), og som for mapping, har det vore få forsøk på å forklare kva som eigentleg er mekanismen mellom dei observerte samanhengane (Fazio et al., 2014). I det ligg det implisitt ein tanke om at det er ein eller fleire bakanforliggande variablar (eigenskapar) som gir denne korrelasjonen. Kan mengdetaloppfatnings-prinsippa vere slike bakanforliggande forklaringsvariablar? I dei to neste avsnitta diskuterer vi om mengdetaloppfatnings-prinsippa er tilstrekkelege og nødvendige for å skåre godt på tallinjeestimeringstestar.

Er mengdetaloppfatnings-prinsippa tilstrekkelege for å meistre tallinjeestimering? Først ser vi på ei tallinje med markørar for kvart tal frå éin til ti, og der femmaren er spesielt markert. Kor vidt ein person som meistrar mengdetaloppfatnings-prinsippa vil kunne plassere til dømes «7» på riktig plass på denne tallinja, er eit empirisk spørsmål. Likevel kan ein spørje om det å meistre desse prinsippa i teorien er tilstrekkeleg for å løyse oppgåva. Strengt tatt er dei vel ikkje det. Ein må i tillegg meistre semispontan antalbestemming (når ein ikkje skal telje på tallinja), og det krevjast at ein meistrar mengdetaloppfatnings-prinsippa for fleire talsymbol enn «7». Anta no at eit barn meistrar desse prinsippa for alle talsymbola opp til og med 10. Det vil seie at barnet veit at «10» er «5» og «5», og det skal då i teorien klare å plassere «5» på denne tallinja dersom det i tillegg meistrar semispontan antalbestemming. Mengdetaloppfatning av 7 betyr vidare at barnet veit at «7» er «5» og «2», og ved spontan antalbestemming kan barnet då i teorien plassere «7» to plassar etter «5» (utan å telje). Det må presiserast at dette er ein teoretisk argumentasjon. I praksis er slike resonnement krevjande, og ein har ingen garanti for at barn klarer å anvende mengdetaloppfatnings-prinsippa her. Som nemnt må det undersøkast empirisk.

I tallinjeestimeringseksperiment vert også den tomme tallinja nytta, det vil seie ei tallinje utan markeringar bortsett frå at endepunkta gjerne er markerte og talfesta. Her krevjast ikkje semispontan antalbestemming, men derimot må ein vurdere avstandar.

Er mengdetaloppfatnings-prinsippa nødvendige for tallinjeestimering? Kan det tenkjast at barn kan plassere talsymbola på tallinja utan å meistre mengdetaloppfatnings-prinsippa (og utan å telje)? Det vil i så fall kunne vere eit argument for at desse prinsippa ikkje fangar opp hovudtrekka i mengdetaloppfatninga. Svaret er kanskje ja, men i så fall må ein spørje kva kunnskap barnet då nyttar. Kan det tenkjast at barnet ser for seg tallinja med alle talsymbola på? Men er det då rimeleg å seie at barnet har mengdetaloppfatning? Vi vil no argumentere for at det ikkje er det. For det første er det noko uklart kva det vil seie å sjå tallinja for seg. Skal det bety at individet har eit fotografisk minne av tallinja, og at det ikkje ligg vurderingar bak? Betyr det til dømes at barnet ikkje vurderer plasseringa av «7» i forhold til «5» og «10»? Dersom det verkeleg ikkje ligg nokon slike vurderingar bak, må ein spørje kva det å plassere «7» på tallinja eigentleg seier om å oppfatte 7. Dersom ein derimot meiner at barnet ikkje berre ser tallinja for seg som eit bilde, men at det i tillegg vurderer tala i forhold til kvarandre, då kan det spørjast om ein verkeleg kan seie at barnet ikkje bruker mengdetaloppfatnings-prinsippa. Desse prinsippa er vel trass alt berre ei formalisering og presisering av kva det vil seie å sjå tala i forhold til kvarandre og det å knyte dei til verkelegheita.

Oppsummering og implikasjonar

I denne artikkelen diskuterer vi eit sett av omgrep (omgrepsapparat) som dreiar seg om forholdet mellom mengder og dei naturlege tala (talorda). Spesielt diskuterer vi kva det vil seie å oppfatte nøyaktig kor mange element eit talord viser til, og vi har introdusert termen mengdetaloppfatning for det. Vi foreslår tre prinsipp for mengdetaloppfatning. Det er prinsippet om 1-1-korrespondanse mellom kardinalitet (sjå definisjonen av kardinalitet i artikkelen) og talord, eit prinsippet som vi nærast ser på som ein grunnleggande føresetnad forut for omgrepet. Og dei to prinsippa tal-til-mengdeseparasjon og tal-separasjon som uttrykker sentrale mekanismar i omgrepet. Her legg vi vekt på at kardinaliteten «bak» talet må kunne illustrerast med to delgrupper av kjende konstellasjonar utan å telje (tal-til-mengdeseparasjon), og at ein må kunne dele opp talet slik at ein representerer det med ein kombinasjonen av to mindre tal (tal-separasjon). Vi har argumentert for at begge prinsippa er nødvendige.

Omgrepsapparatet i artikkelen skil tydeleg mellom det å gå frå mengde til tal og det å gå frå tal til mengde, jf. figur 1. Det å gå frå mengde til tal, er knytt til kjende omgrep som teljing via dei fem teljeprinsippa (Gelman & Gallistel, 1978), og ulike former for subitisering som vi har kalla for spontan-antalbestemming og semispontan-antalbestemming. Mengdetaloppfatning går den motsette vegen, det vil seie at ho går frå talord/talsymbol til mengde. Omgrepa er altså sett i system og ordna i forhold til kvarandre. Det dannar eit omgrepsapparat som kan sjåast på som ei vidareutvikling av teljeprinsippa (Gelman & Gallistel, 1978) i den forstand at det inkluderer teljeprinsippa samtidig som det går noko vidare.

Vi har også argumentert for at mengdetaloppfatning, via dei to prinsippa tal-til-mengdeseparasjon og tal-separasjon, kan vere ein mogleg forklaringsfaktor bak dei empiriske funna at gode prestasjonar i tallinjestimering fell saman med gode prestasjonar i matematikk.

Sjølv om det ikkje har vore eit direkte tema i denne artikkelen, kan omgrepet mengdetaloppfatning via dei to prinsippa, tal-til-mengdeseparasjon og tal-separasjon, ha didaktiske implikasjonar for lærarar i barnehage og skule. Blant anna fordi at mengdetaloppfatning samt dei ulike formene for antalbestemming slik som teljing via dei fem teljeprinsippa, spontan- og semispontan antalbestemming er ein del av eit omgrepsapparat og eit språk for å diskutere barns utvikling på dette området. Eit velfungerande omgrepsapparat kan vere med å ordne tankar og bevisstgjere barnehagelærarar/lærarar på barns matematiske utvikling. Blant anna kan medvitet om at barn kan mangle mengdetaloppfatning sjølv om teljinga er på plass, påverke lærarens forståing for og tilnærming til eit barns strev med matematikk. Dessutan kan ei god klargjering av desse omgrepa gjere læraren merksam på at mengdetaloppfatning kan vere eit grunnleggande problem som kanskje ligg bak andre vanskar i matematikk hjå ein elev. Kanskje seier dei også noko om kva personar med dyskalkuli har problem med, og dei kan vere eit utgangspunkt for å diskutere kva som er essensen i det ein elev med dyskalkuli treng ekstra støtte for å utvikle.

Medvitet om prinsippa for mengdetaloppfatning kan potensielt seie noko om korleis mengdetaloppfatning kan utviklast hjå barn. Som sagt er mengdetaloppfatning noko anna enn teljing. Det er derimot nærliggande å tenkje at «hoppteljing», til dømes det å telje «2, 4, 6 …», kan vere med å utvikle mengdetaloppfatninga. Fordi «hoppteljing» har eit element av oppdeling i seg så lenge ein er bevisst differansen, som i dette dømet er to. Vidare vert denne oppdelinga knytt til talorda når ein «hopptel», og medvitet at «2» og «2» er «4», «4» og «2» er «6» og så vidare, kan her bli utvikla. Med andre ord fokuserer «hoppteljing» på dei to sentrale mengdetaloppfatnings-prinsippa. Her kan det vere relevant å nemne at det nyleg har vore fokusert på ordinalitet (rekkefølge) som viktig for å utvikle number sense (Baccaglini-Frank et al., 2020; Björklund, Marton & Kullberg, 2021; Sinclair & Coles, 2017). Kanskje kan mengdetaloppfatning, via dei to prinsippa, vere eit omgrep for å diskutere, forstå og forklare slike samanhengar. Til dømes slik tallinjeestimering på den tomme tallinja er diskutert i denne artikkelen.

I den grad mengdetaloppfatning kan seiast å vere relevant for det å intuitivt gripe (oppfatte) kor stort eit tal er (intuitively grasp the size of a number) (Butterworth et al., 2011), pretenderer mengdetaloppfatnings-prinsippa å seie noko om kva ein eigentleg, og typisk ubevisst, oppfattar om talstorleiken og som kanskje blir referert til som intuisjon.

Spørsmål for vidare forsking

Artikkelen opnar for empiriske undersøkingar så vel som teoretiske. Ein kan blant anna søke å utvikle målemetodar og testar basert på dei to nemnde prinsippa for å undersøkje mengdetaloppfatning hjå barn empirisk. Artikkelen har forsøkt å avklare og plassere ei rekke omgrep i forhold til kvarandre i eit omgrepsapparat. Dette er likevel ikkje ei avslutta oppgåve, og frå ein teoretisk ståstad kan det vere ønskeleg å avklare og inkludere andre nærliggande omgrep samt å avklare forholda dei i mellom. I tillegg kan og bør sjølvsagt vår måte å gjere dette på diskuterast og utfordrast.

Forholdet mellom mengdetaloppfatning (som går frå tal til mengde) og ulike former for antalbestemming (som går frå mengde til tal) bør undersøkast empirisk. Det kan vere interessant å undersøke empirisk om mengdetaloppfatning faktisk er meir krevjande enn semispontan-antalbestemming. Kan til dømes barn med dårleg mengdetaloppfatning likevel meistre semispontan-antalbestemming? Det er neppe å ta hardt i å seie at slike undersøkingar vil krevje veloverveide testmetodar.

På same måte som skår på tallinjeestimering viser seg å predikere matematikkprestasjonar, kan det vere interessant å teste om mengdetaloppfatning via dei to prinsippa kan predikere matematikkprestasjonar.

Det er heller ikkje klart kva som er mekanismane bak den observerte korrelasjonen mellom tallinjeestimering og framtidige matematikkprestasjonar. Vi har lansert mengdetaloppfatning via dei to prinsippa som ein mogleg bakanforliggande forklaringsfaktor for denne samanhengen. Svaret eller rettare sagt indikasjonar på om det kan vere slik må ein truleg søke via empiriske undersøkingar. Det er likevel ikkje klart korleis slike undersøkingar kan utformast.

Om forfatterne

Terje Myklebust er førsteamanuensis ved Høgskulen på Vestlandet. Hans forskingsinteresser er omgrepsutvikling og talomgrepet i byrjaropplæringa samt statistisk analyse i utdanningsforsking.
Institusjonstilknytning: Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett, Høgskulen på Vestlandet, Postboks 7030, 5020 Bergen, Norge
E-post: terjemy@hvl.no

Idar Mestad er førsteamanuensis ved Høgskulen på Vestlandet. Hans forskingsinteresser: Utforskande dialog knytta til praktisk arbeid, sosiovitenskapelege kontroversar og forskingsbasert lærarutdanning
Institusjonstilknytning: Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett, Høgskulen på Vestlandet, Postboks 7030, 5020 Bergen, Norge
E-post: idar.mestad@hvl.no

Referanser

Andrews, P. & Sayers, J. (2014). Foundational number sense: A framework for analysing early number-related teaching. *MADIF 9, The Ninth mathematics Education Research Seminar, Umeå, Februari 5-6, 2014*.

Baccaglini-Frank, A., Carotenuto, G. & Sinclair, N. (2020). Eliciting preschoolers' number abilities using open, multi-touch environments. *ZDM*, *52*, 779-791. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-020-01144-y

Baroody, A. J. & Wilkins, J. L. (1999). The development of informal counting, number, and arithmetic skills and concepts.

Benoit, L., Lehalle, H. & Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development*, *19*(3), 291-307. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2004.03.005

Berch, D. B. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 333-339. https://doi.org/https://doi.org/10.1177%2F00222194050380040901

Bermejo, V., Morales, S. & Garcia deOsuna, J. (2004). Supporting children's development of cardinality understanding. *Learning and Instruction*, *14*(4), 381-398. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.010

Björklund, C., Marton, F. & Kullberg, A. (2021). What is to be learnt? Critical aspects of elementary arithmetic skills. *Educational Studies Mathematics*, *107*, 261-284. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-021-10045-0

Booth, J. L. & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child development*, *79*(4), 1016-1031. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2008.01173.x

Butterworth, B., Varma, S. & Laurillard, D. (2011). Dyscalculia: from brain to education. *science*, *332*(6033), 1049-1053. https://doi.org/DOI:10.1126/science.1201536

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching children mathematics*, *5*, 400-405.

Conderman, G., Jung, M. & Hartman, P. (2014). Subitizing and early mathematics standards: A winning combination. *Kappa Delta Pi Record*, *50*(1), 18-23. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/00228958.2014.871686
Dehaene, S. & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition*, *1*(1), 83-120.
Dehaene, S. & Cohen, L. (2007). Cultural recycling of cortical maps. *Neuron*, *56*(2), 384-398. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.neuron.2007.10.004
Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A. & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *123*, 53-72. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.01.013
Feigenson, L., Dehaene, S. & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in cognitive sciences*, *8*(7), 307-314. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002
Freeman, F. N. (1912). Grouped objects as a concrete basis for the number idea. *The Elementary School Teacher*, *12*(7), 306-314.
Geary, D. C. & VanMarle, K. (2016). Young children’s core symbolic and nonsymbolic quantitative knowledge in the prediction of later mathematics achievement. *Developmental psychology*, *52*(12), 2130-2144. https://doi.org/https://doi.org/10.1037/dev0000214
Gelman, R. & Butterworth, B. (2005). Number and language: how are they related? *Trends in cognitive sciences*, *9*(1), 6-10. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.11.004
Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Gelman, R. & Gallistel, C. R. (2004). Language and the origin of numerical concepts. *Science*, *306*(5695), 441-443. https://doi.org/DOI:10.1126/science.1105144
Goswami, U. (2008). *Cognitive development: The learning brain* Psychology Press.
Göbel, S. M., Watson, S. E., Lervåg, A. & Hulme, C. (2014). Children’s arithmetic development: It is number knowledge, not the approximate number sense, that counts. *Psychological science*, *25*(3), 789-798. https://doi.org/https://doi.org/10.1177/0956797613516471
Hughes, M. (1981). Can preschool children add and subtract? *Educational Psychology*, *1*(3), 207-219. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/0144341810010301
Hyde, D. C. (2011). Two systems of non-symbolic numerical cognition. *Frontiers in human neuroscience*, *5*, 150. https://doi.org/https://doi.org/10.3389/fnhum.2011.00150
Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *The American journal of psychology*, *62*(4), 498-525. https://doi.org/https://doi.org/10.2307/1418556
Khanum, S., Hanif, R., Spelke, E. S., Berteletti, I. & Hyde, D. C. (2016). Effects of non-symbolic approximate number practice on symbolic numerical abilities in Pakistani children. *PLoS one*, *11*(10), e0164436. https://doi.org/https://doi.org/10.1371/journal.pone.0164436
Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, *19*(6), 513-526. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.10.002
Laski, E. V. & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child development*, *78*(6), 1723-1743. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01087.x

Le Corre, M. & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, *105*(2), 395-438. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005

LeFevre, J.-A., Jimenez Lira, C., Sowinski, C., Cankaya, O., Kamawar, D. & Skwarchuk, S.-L. (2013). Charting the role of the number line in mathematical development. *Frontiers in Psychology*, *4*(641). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00641

Mazzocco, M. M., Feigenson, L. & Halberda, J. (2011). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *PLoS one*, *6*(9), e23749. https://doi.org/https://doi.org/10.1371/journal.pone.0023749

Moomaw, S. & Dorsey, A. G. (2013). The use of numeric and non-numeric symbols by preschool children in early addition. *Journal of Research in Childhood Education*, *27*(3), 319-329. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/02568543.2013.796332

Muldoon, K., Lewis, C. & Freeman, N. (2009). Why set-comparison is vital in early number learning. *Trends in cognitive sciences*, *13*(5), 203-208. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tics.2009.01.010

Mundy, E. & Gilmore, C. K. (2009). Children’s mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. *Journal of experimental child psychology*, *103*(4), 490-502. https://doi.org/doi.org/10.1016/j.jecp.2009.02.003

Mussolin, C., Nys, J., Content, A. & Leybaert, J. (2014). Symbolic number abilities predict later approximate number system acuity in preschool children. *PLoS one*, *9*(3), e91839. https://doi.org/https://doi.org/10.1371/journal.pone.0091839

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics* Wiley-Blackwell.

Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge & Kegan Paul, Ltd.

Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B. & Price, C. J. (2002). Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *Neuroimage*, *15*(2), 435-446. https://doi.org/https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0980

Resnick, L. (1983). A developmental theory of number understanding. I H. P. Ginsburg (Red.), *The development of mathematical thinking* (s. 109-151). New York: Academic Press.

Ross, S. H. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, *36*(6), 47-51. Henta frå http://www.jstor.org/stable/41194463

Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* Routledge.

Sarnecka, B. W. & Gelman, S. A. (2004). Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific. *Cognition*, *92*(3), 329-352. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.10.001

Sarnecka, B. W. & Wright, C. E. (2013). The idea of an exact number: Children's understanding of cardinality and equinumerosity. *Cognitive science*, *37*(8), 1493-1506. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/cogs.12043

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: The common core of numerical development. *Developmental Science*, *19*(3), 341-361. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/desc.12395

Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child development*, *75*(2), 428-444. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144-150. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/cdep.12077

Siegler, R. S. & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological science, 14*(3), 237-250. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/1467-9280.02438
Sinclair, N. & Coles, A. (2017). Returning to Ordinality in Early Number Sense: Neurological, Technological and Pedagogical Considerations. I E. Faggiano, F. Ferrara & A. Montone (Red.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education: Perspectives in the Digital Era* (s. 39-58). Cham: Springer International Publishing.
Sophian, C., Wood, A. M. & Vong, K. I. (1995). Making numbers count: The early development of numerical inferences. *Developmental psychology, 31*(2), 263. https://doi.org/https://doi.org/10.1037/0012-1649.31.2.263
Starkey, P. & Cooper Jr, R. G. (1995). The development of subitizing in young children. *British Journal of Developmental Psychology*, *13*(4), 399-420. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1995.tb00688.x
Sullivan, J. & Barner, D. (2013). How are number words mapped to approximate magnitudes? *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 66*(2), 389-402. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/17470218.2012.715655
Szkudlarek, E. & Brannon, E. M. (2017). Does the approximate number system serve as a foundation for symbolic mathematics? *Language Learning and Development, 13*(2), 171-190. https://doi.org/https://doi.org/10.1080/15475441.2016.1263573
Temple, E. & Posner, M. I. (1998). Brain mechanisms of quantity are similar in 5-year-old children and adults. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *95*(13), 7836-7841. https://doi.org/https://doi.org/10.1073/pnas.95.13.7836
Young-Loveridge, J. (1999). The acquisition of numeracy. *SET: Research information for teachers*, *1*, 12.
Young-Loveridge, J. (2001). Helping children move beyond counting to part-whole strategies. *Teachers and Curriculum*, *5*(1).
Young-Loveridge, J. (2002). Early childhood numeracy: Building an understanding of part-whole relationships. *Australian Journal of Early Childhood*, *27*(4), 36-43. https://doi.org/https://doi.org/10.1177/183693910202700408