Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGAVE

Overganger mellom ulike matematiske register i arbeid med problemløsning

Translations between different mathematical registers in problem solving

Sofie Bjørnevik Totland

Master i matematikk i Grunnskulelærarutdanninga 5 - 10

Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett

Institutt for språk, litteratur, matematikk og tolkning

Veiledere: Mona Røsseland og Erik Eikeland

innleveringsdato: 30.05.2022

Sammendrag

Denne studien er i hovedsak basert på Raymond Duvals forskning, men er supplert med annen aktuell forskning. Målet med studien er å få innsikt i og undersøke i hvilken grad elever på 10. trinn, bruker overganger mellom ulike matematiske registre, som er verktøy i sitt arbeid med problemløsningsoppgaver. I tillegg til dette er det utformet tre forskningsspørsmål som undersøker hvordan elever bruker overganger mellom ulike registre, hvilke feil som vanligvis blir gjort i disse overgangene og til slutt hvordan lærerens tanker og holdninger til overganger påvirker elevenes bruk.

Studien bygger på kvalitativ metode. Det har blitt gjennomført observasjon, intervju og dokumentanalyse for å belyse problemstilling og forskningsspørsmål. Utvalget i studien er en 10.klasse, bestående av 21 elever, i tillegg til matematikklæreren til den aktuelle klassen. Alle elevene i klassen er med i studien, og de ble satt til å løse et sett med fire problemløsningsoppgaver, hentet fra Matematikksenterets eksempeloppgaver, utarbeidet i forbindelse med matematikkeksamen for 10. klasse. Fire av elevene løste oppgavene i gruppe. De ble lokalisert i et annet rom, og hadde det naturlige språket tilgjengelig som register. Deres arbeid med oppgavene ble tatt opp på video og senere analysert. Resten av elevene løste oppgavene individuelt. Alle elevenes besvarelser ble senere analysert gjennom dokumentanalyse. I etterkant av oppgaveløsningen, ble det gjennomført et intervju med matematikklæreren til klassen for å belyse problemstilling og forskningsspørsmål ytterligere. Alt datamaterialet ble analysert med utgangspunkt i Duvals teori, om bruk av overganger mellom ulike representasjoner i arbeid med problemløsningsoppgaver.

Resultatene fra studien antyder at elevenes bruk av overganger i arbeid med problemløsningsoppgaver i stor grad påvirkes av deres tidligere erfaringer, og hvilke representasjoner som er tilgjengelige for elevene under problemløsningen. Elevene, som hadde det naturlige språket tilgjengelig som register, brukte overganger mellom ulike representasjoner i større grad enn de elevene som løste de matematiske problemene individuelt.

Abstract

This study is based on Raymond Duval's research and aims to get a deeper understanding of to which extent students translate between different representation forms (also called registers) as a tool in problem solving. This gives rise to the following research questions; how students use different registers, what errors do they make when translating between registers, and how the teacher's use of translations affects the students' use.

The study is based on qualitative method by conducting observations, document analysis and an interview. Data is collected in a 10th grade mathematics class where 21 students were given four problem-solving tasks taken from the Norwegian Directorate for Education and Training, developed in connection to the official 10th grade exam. All the students solved the problems individually, except for four students who were allowed to use natural language as an additional register in a group setting. Their interactions and solutions were recorded and analyzed. The mathematics teacher responsible for the class was interviewed. Through the analysis all elements in the collected data are analyzed based on Duval's theory about translations between registers and conversions.

The result of this research suggests that the students' use of translations between different registers are affected by former experiences and which registers are available. The results also indicate that the students using the natural language as a register, performed noticeably more translations compared to those that solved the problems individually. This may have been a result of the teacher's focus on using the natural language as a representation prior to the study.

Forord

Denne masteroppgaver markerer avslutningen på min 5-årige grunnskolelærerutdanning ved Høgskolen på Vestlandet. Gjennom årene på høgskolen har jeg fått mange nye og verdifulle bekjentskaper, mye ny og interessant kunnskap og en rekke erfaringer fra praksisfeltet. Alt dette har vært med på å forme meg til den jeg er, og har gitt meg innsikt i den læreren jeg ønsker å bli. Med det ønsker jeg å takke alle mine medstudenter gjennom disse årene, som har vært med på å gjøre studiehverdagen morsom og fylt med gode øyeblikk. I tillegg vil jeg takke for alle gode diskusjoner og læringsøyeblikk. Sammen med mine medstudenter, vil jeg også takke alle forelesere som gjennom fem år har formidlet verdifull kunnskap.

Da jeg begynte arbeidet med denne studien, innså jeg fort hvor mye arbeid som inngår i en slik oppgave. Heldigvis har jeg gjennom hele prosjektet hatt to fantastiske veiledere, som har støttet meg, gitt meg gode råd og motivert meg. Jeg ønsker derfor å rette en stor takk til mine veiledere Mona Røsseland og Erik Eikeland for deres innsats i forbindelse med masteroppgaven min.

Gjennom hele mitt løp på studiet har familien vært en stor støttespiller. De har bidratt til mange gode faglige diskusjoner, kjærlighet og mye latter. Jeg ønsker spesielt å takke min kjære mamma, Anita som har lest, kommentert og vist stor interesse i min masteroppgave, noe som også har vært med på å øke mitt engasjement i oppgaven når det har vært vanskelig å komme videre. Jeg ønsker også å rette en spesiell takk til livets pappa, Hallvard og min kommende samboer Runar som har vært pådrivere for å komme oss ut i naturen for å klarne hodet i arbeidet med oppgaven.

Figurer

Bilder

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Høsten 2020 ble den nye læreplanen LK20 innført i den norske skolen. Denne læreplanen har ført til endringer av praksis for mange lærere og ansatte i skolen. Innenfor matematikkfaget er innføringen av de seks kjerneelementene, en vesentlig endring fra tidligere læreplaner. Disse skal nå inngå i matematikkundervisningen. Et av disse kjerneelementene er representasjoner og kommunikasjon. Dette kjerneelementet innebefatter at elevene skal mestre å bevege seg mellom ulike matematiske representasjoner og kunne bruke forskjellige representasjoner i ulike sammenhenger, basert på egne erfaringer (Utdanningsdirektoratet, 2020). Sammen med den nye læreplanen ble det også innført ny eksamen. Sammenlignet med tidligere eksamener, gitt på 10. trinn, har den nye eksamenen et nytt fokus. Elevene blir i mye større grad utfordret på, blant annet, det å argumentere for sine matematiske valg og begrunne disse. De skal også arbeide med problemløsning, utforskning og representasjoner i matematikkundervisningen. Disse ferdighetene er presentert i kjerneelementet Representasjoner og kommunikasjon i LK20 (Utdanningsdirektorater 2020).

Frem til den nye læreplanen ble innført i 2020, hadde jeg et lite bevisst forhold til det å bruke ulike representasjoner og registre aktivt i arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver. I ettertid har jeg imidlertid sett, at det å bevege seg aktivt mellom ulike representasjoner, er noe jeg likevel, ubevisst, har brukt mye, både når jeg arbeider med matematikk selv, men også igjennom min praksis på forskjellige skoler og klassetrinn. Min erfaring er, at det å bevege seg mellom ulike representasjoner, kan være med på å øke både min egen og elevenes forståelse av matematikken. Det å se et matematisk problem i en annen representasjon enn den opprinnelige, vil kunne bidra til å berike elevenes forståelse og hjelpe dem i prosessen med å finne ut hvordan en skal løse problemet, og hva som blir etterspurt i oppgaven.

Mange elever strever med å forstå matematikkfaget. Duval (2006) har gjennom sitt arbeid, forsøkt å finne ut av hvorfor matematikk oppleves som et så krevende fag for mange. I sin forskning presenterer han en idé om at alle matematiske objekter er utilgjengelig for oss mennesker. I praksis innebærer dette at alle som bedriver noen form for matematisk aktivitet, bare får tilgang til det matematiske objektet gjennom ulike representasjoner av det (Duval, 2006). For matematikeren betyr dette at muligheten for å få erfaringer med det matematiske objektet, ikke er til stede på samme måte som i andre fagdisipliner. I naturfag, for eksempel, kan det gjøres forsøk eller dra på ekskursjoner, og på den måten få konkrete erfaringer med emnet det skal læres noe om. Dette vil ikke være tilfellet for matematiske objekter.

Matematiske objekter kan kun oppleves gjennom representasjoner. For å være i stand til å interagere med matematiske objekter er man som problemløser derfor nødt til å mestre disse representasjonene. Problemløseren er avhengig av å representere det matematiske objektet på en måte som gjør at han forstår og klarer å løse problemet. Dette innebærer noen ganger å gjøre en overgang fra en representasjon til en annen. Forskning viser at elever som mestrer overganger mellom representasjoner har større sannsynlighet for å lykkes med problemløsning (Mulligan & Mitchelmore, 2013; Ozgun-Koca, 1998; Stylianou, 2012).

Dermed er det grunn til å anta at der kan finnes en sammenheng mellom elevers ferdigheter i overganger mellom ulike representasjoner, og deres matematiske forståelse og faglige nivå. Dette var utgangspunktet for denne studien. Jeg ønsket å finne ut mer om hvorvidt overganger mellom ulike representasjoner blir brukt av elever i den norske skolen. Særlig med tanke å at omfattende forskning påpeker viktigheten av å mestre denne ferdigheten, fordi den ser ut til å øke elevers forståelse og prestasjoner i matematikk (Mulligan & Mitchelmore, 2013; Ozgun-Koca, 1998; Stylianou, 2011).

1.2 Teoretisk bakgrunn

Raymond Duvals forskning har fokus på å bevege seg mellom ulike representasjoner og registre i matematikken, og det er hans teori jeg i størst grad ønsker å anvende i denne masteroppgaven. I neste kapittel vil jeg presentere relevante deler av denne teorien og utdype hva som menes med overganger mellom ulike registre i matematikkfaget. Jeg vil belyse hvordan representasjoner kan brukes som et verktøy i arbeidet med matematiske problemløsningsoppgaver. Sammen med Duvals teori, ønsker jeg også å bruke relevante deler av andre forskeres teorier på området.

1.3 Problemstilling/forskningsspørsmål

Ut fra min nysgjerrighet på hvordan aktiv bruk av overganger mellom ulike representasjoner i matematikken, kan være til hjelp for elever i arbeid med problemløsningsoppgaver, har jeg formulert følgende problemstilling:

> *I hvilken grad bruker elever på 10. trinn overganger mellom ulike matematiske registre i arbeid med problemløsningsoppgaver?*

For å undersøke problemstillingen nærmere, har jeg vært på en ungdomsskole og samlet inn data. Der gav jeg et utvalg elever på 10. trinn et sett med ulike problemløsningsoppgaver, som de skulle løse etter beste evne. Besvarelsene på disse har jeg analysert, for å prøve å finne ut i hvilken grad elever på 10. trinn bruker overganger mellom ulike representasjoner aktivt i arbeid med denne typen oppgaver. Deretter har jeg analysert funnene med bakgrunn i Raymond Duvals teoretiske rammeverk, for å se om det foreligger noen sammenhenger mellom hans teori, og det som faktisk spiller seg ut i skolen. I et forsøk på å belyse problemstillingen ytterligere, har jeg videre formulert tre forskningsspørsmål, som er tenkt å skulle være med å supplere besvarelsen av problemstillingen i forskningsprosjektet:

Mine forskningsspørsmål er:

1. Hvordan bruker elever overganger som et verktøy i arbeidet med problemløsningsoppgaver?
2. Hvilke feil gjør elever i overganger mellom ulike registre i arbeid med problemløsningsoppgaver?
3. Hvordan kan lærerens holdninger og tanker rundt bruk av overganger mellom ulike registre påvirke elevenes arbeid?

1.4 Oppgavens oppbygning

Oppgaven er delt inn i fire hoveddeler.
I kapittel to vil jeg presentere det teoretiske rammeverket. Her vil jeg i stor grad ha fokus på Raymond Duvals teorier rundt overganger i matematikken. Videre vil jeg avklare en del begreper, som blir brukt for å kunne besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene i denne oppgaven. Jeg vil også presentere relevant tidligere forskning på området.

I kapittel 3 vil jeg presentere forskningsmetode, og begrunne valg av denne. Jeg vil også beskrive selve metoden jeg har brukt. Videre vil relevante etiske problemstillinger knyttet til metoden bli diskutert, sammen med kritikk av metoden. I denne delen vil jeg også begrunne valg av oppgaver, som ble brukt i datainnsamlingen. En beskrivelse av hvordan datamaterialet er analysert, blir også presentert i denne delen.

I kapittel 4 presenteres resultatene fra datainnsamlingen. Datamaterialet vil bli lagt frem ut fra tidligere teori om overganger og behandling av matematiske objekter. Funnene blir her koblet til relevant teori på området.

I kapittel fem drøftes av problemstillingen og forskningsspørsmålene, knyttet opp mot relevant teori og empiri. Denne delen er ment å skulle bidra til å skape en helhetlig rød tråd mellom teorigrunnlaget i oppgaven, relevant tidligere forskning på området, metoden jeg har brukt i datainnsamlingen og funnene i datagrunnlaget, som utgjør empirien. Her vil datamaterialet bli diskutert opp mot det som tidligere har blitt presentert i teorikapitlet.

Avslutningsvis vil jeg trekke noen konklusjoner for studien. Jeg vil også forsøke å trekke noen tråder fremover og presentere noen forslag til tema for forskning på området i fremtiden.

2 Teori

For å kunne gjøre seg forstått og forstå andre, er vi som mennesker avhengig av språk. Vi trenger å ha en felles forståelse for hva forskjellige ord representerer. De ordene vi velger å bruke, skal bidra til å få frem intensjonen med det vi sier. Ord og ytringer kan representere våre meninger eller annen informasjon, som vi som avsender ønsker at en mottaker skal tolke og forstå rett. Språket utvikler seg først og fremst når individet får testet ut språket i samspill med andre, og det er først da mennesket kan lære seg å forstå språket, i tillegg til å gjøre seg forstått (Bloom & Lahey, 1978).

Språket fungerer for oss mennesker som et representasjonsverktøy for å gjøre oss forstått. Både skriftspråk, muntlig språk og tegnspråk er eksempler på representasjoner vi i dagliglivet bruker for å utrykke våre meninger og følelser, eller gi informasjon vi ønsker å formidle til andre. Vi bruker ofte muntlig og skriftlig språk om hverandre, og beveger oss mellom disse uten å tenke over det. Duval (2006) omtaler disse representasjonene som register når han omtaler disse fra et matematisk perspektiv.

Utviklingen av språket skjer først når en interaksjon mellom et individs kunnskap, dets tidligere erfaringer og den aktuelle konteksten finner sted (Bloom & Lahey, 1978). Dette betyr i praksis at et individ utvikler språket sitt, med bakgrunn i sine erfaringer, sin tidligere kunnskap og ut fra ulike hendelsers kontekst. For å eksemplifisere dette, kan en se for seg at en blir fortalt at vann er vått. Med kun denne beskrivelsen, er det ikke mulig å forestille seg hva det vil si at vann er vått. Dersom det er mulighet for å se på og berøre vannet, er det med en gang lettere å begripe utsagnet. Slike erfaringer er med på å utvikle språket vårt. Når det gjelder matematikk, fungerer det ikke helt på samme måte.

Representasjoner betegnes av Goldin & Shteingold (2001) som noe som står for noe annet. I matematikk vil representasjonene representere for det matematiske objektet. Som nevnt innledningsvis, skriver Duval (2006) at matematiske objekter er utilgjengelige for oss mennesker, og at vi kun får tilgang til disse objektene gjennom forskjellige typer matematiske representasjoner. I dette perspektivet er vi helt avhengige av å mestre ulike representasjoner, for å utføre noen form for matematisk aktivitet (Duval, 2006). Duval ønsket med sitt arbeid å belyse hvorfor matematikk, for mange, er så vanskelig å forstå. Som er resultat av arbeidet han utførte, kom han frem til noen svar på akkurat dette. Fordi de matematiske objektene er utilgjengelige for individet som ønsker å interagere med dem, er det ikke mulig å gjøre de samme erfaringene i matematikken, som en kan gjøre i andre fagdisipliner, og også i språket, som nevnt over.

Når Duval (2006) omtaler representasjoner av matematiske objekter, omtaler han disse som forskjellige typer representasjonsregistre. Et eksempel på et register kan for eksempel være det verbale språket. Da bruker vi språket til å representere et matematisk objekt. Et annet register kan være det semiotiske registeret. Semiotikk innebefatter alle matematiske tegn og symboler (Svendsen, 2022). Dersom en befinner seg innenfor dette registeret, vil det matematiske objektet fremstilles gjennom tegn og symboler, som for eksempel en likning. Eksempler på andre registre kan være figurer, tegninger, grafer eller tabeller, som alle er representasjoner for det matematiske objektet.

Når det er snakk om arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver, mener Duval (2006) at det i alt arbeid med matematiske problemer skjer en form for transformasjon av representasjoner. Med en transformasjon, menes at det gjøres en eller annen form for endring på representasjonen til det matematiske objektet. Siden det matematiske objektet er utilgjengelig, kan det ikke gjøres endringer på dette. Endringene må derfor gjøres på dets representasjon. I følge Duval (2006), er disse transformasjonen helt avgjørende for all matematisk aktivitet. Duval deler disse transformasjonene inn i to forskjellige typer matematiske prosesser, som betegnes behandling og omdanning (Duval, 2006).

Behandling kan beskrives som all matematisk aktivitet som skjer innenfor et gitt register. Det innebærer at en ikke beveger seg mellom ulike registre. For å løse en likning, eller et likningssett, hvor man som problemløser ikke ser løsningen direkte, er man i matematikken nødt til å gjøre transformasjoner på likningen for å finne den «ukjente». Når en gjør transformasjoner på en likning, ved for eksempel å bruke flytte-bytte regelen, omtaler Duval dette som å gjøre en behandling. Behandlingen innebefatter altså å gjøre transformasjoner på representasjonen til det matematiske objektet, uten at en beveger seg mellom ulike registre. Enkelt sagt, innebærer dette at all matematisk aktivitet, som skjer innenfor et gitt register, kan omtales som behandling av det matematiske objektet.

Omdanning beskriver Duval (2006) som det å bevege seg mellom ulike registre eller representasjonsformer, uten at egenskapene til det matematiske objektet endres. Dette kan for eksempel være, å bevege seg fra en muntlig representasjon til en semiotisk representasjon. I en omdanningsprosess vil det dermed bare være representasjonsformen for det matematiske objektet som endres.

Duval (2006) omtaler omdanninger som en slags oversettelse. Han mener at i enkelte situasjoner kan omdanningen virke åpenbar, på den måten at det er en én-til-én-relasjon, mellom komponentene i de forskjellige representasjonene. Med dette menes at en som problemløser kan gjøre en direkte oversettelse mellom startrepresentasjonen og målrepresentasjonen. Duval (2006) kaller denne formen for omdanning for en kongruent omdannelse. Han mener at en omdanning, hvor det gjøres en direkte oversettelse, vil kunne være med på å bevare de riktige komponentene i målrepresentasjonen.

I andre situasjoner finnes det ingen direkte link mellom de to representasjonene. Denne typen omdannelse kaller Duval (2006) for ikke-kongruent omdannelse. Ikke kongruent omdannelse kan i noen tilfeller være villedende, da det ikke foreligger en åpenbar måte å gjøre omdannelsen på (Duval, 2006).

Naturlig språk Symbol	Tre pluss fire er lik syv 3 + 4 = 7	Fire er tre mindre enn syv 7 = 4 + 3
Type omdannelse	Kongruent omdannelse	Ikke-kongruent omdannelse

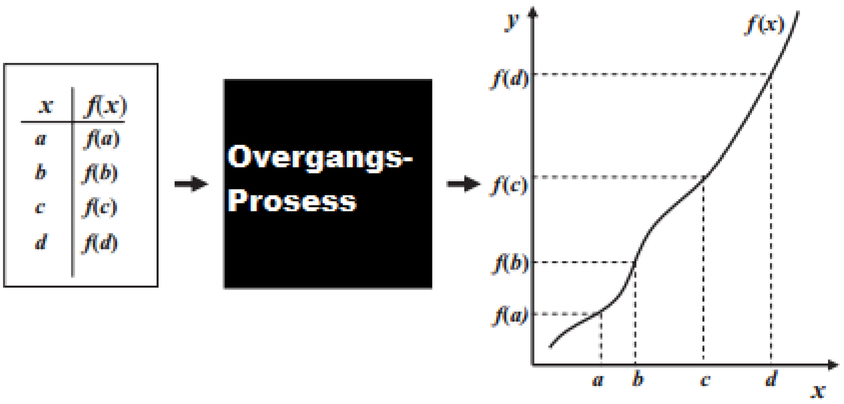
Figur 2.1 - Oversikt over en kongruent og en ikke-kongruent omdannelse

2.1 Overgangsprosessen

Adu-Gyamfi et.al. (2012) omtaler overganger og overgangsprosesser, som de prosessene som innbefatter den kognitive aktiviteten, som fører til at informasjon blir omgjort fra en matematisk representasjon til en annen. Det er her viktig å merke seg at det ikke er selve representasjonen som overføres, men de matematiske idéene og begrepene som blir representert gjennom den. Trekker en linjer til Duval (2006), vil ideene og begrepene samsvare med det han omtaler som det matematiske objektet. Helt konkret vil dette innebære at en slik overgang mellom representasjoner, alltid vil involvere to representasjoner av det samme matematiske objektet, en startrepresentasjon og en målrepresentasjon. Startrepresentasjonen vil da være den representasjonen av det matematiske objektet som fungerer som en katalysator for overgangen. Mens målrepresentasjonen vil være resultatet av selve overgangen og den representasjonen overgangen ender opp med. Adu-Gyamfi et.al.

(2012) omtaler en overgang som vellykket, når representasjonen av det matematiske objektet i målrepresentasjonen, representerer de samme egenskapene, elementene og begrepene som de som blir representert i startrepresentasjonen.

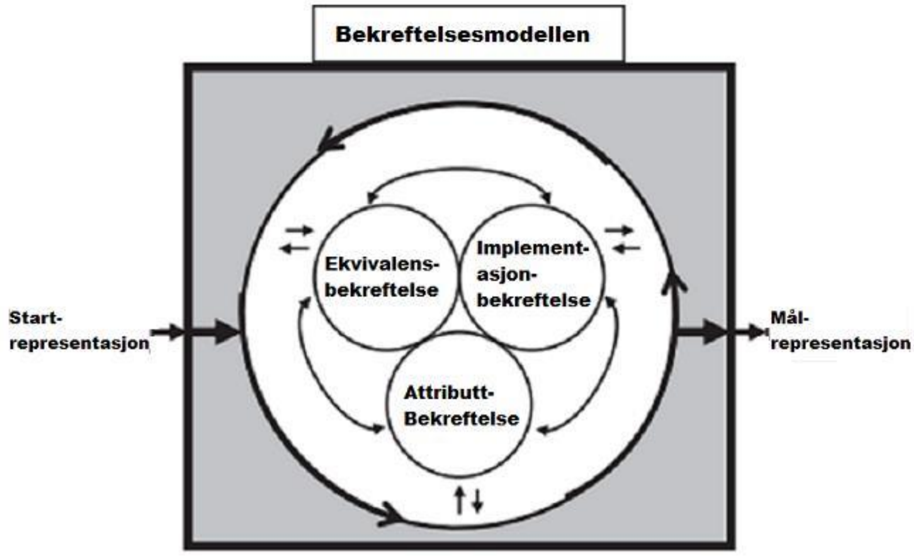
Adu-Gyamfi et.al. (2012) uttrykker en misnøye med hvilket bilde tidligere forskning danner av overgangsprosesser. Prosessene blir i de fleste tidligere studier, betegnet som en svart boks. Denne boksen forestiller elevers ulike evner til å transformere informasjon. Adu-Gyamfi et.al. (2012) hevder at disse evnene er for dårlig definert, og at en slik betraktning av prosessen vil føre til en «rett/galt-karakterisering», hvor overgangene enten blir utført riktig eller galt. En slik forståelse mener de blir en for forenklet tilnærming til prosessen i sin helhet (Adu-Gyamfi et.al., 2012).



Figur 2.2 - «svart-boks» modellen for overgangsprosessen (Adu-Gyamfi et al., 2012, s. 160).

Som vist i figuren over sier denne svarte boksen lite om alle aktivitetene som skjer mellom start- og målrepresentasjonen i en overgangsprosess. En konsekvens av dette blir at feil gjort innenfor «boksen» antas å skje enten som en følge av at individet som har gjennomført overgangen, har en misoppfatning av fagstoff relatert til de ulike representasjonene av det matematiske objektet, eller som en følge av at problemløseren har gjort en triviell feil (Adu-Gyamfi et.al., 2012).

Denne «svart boks» tilnærmingen til overgangsprosessen mener Adu-Gyamfi et.al. (2012) at ikke er dekkende nok, for å kunne kartlegge feil og vanskeligheter elever har i arbeid med overganger mellom ulike representasjoner av matematiske objekter. Som en konsekvens av misnøyen med tidligere forsknings bilde av overgangsprosesser, har de utviklet en annen modell, som de opplever at beskriver overgangsprosesser bedre, og som enklere kan hjelpe med å avdekke og forklare elevers vanskeligheter i overgangsprosessen. Denne modellen har Adu-Gyamfi et.al. (2012) kalt bekreftelsesmodellen (Adu-Gyamfi et.al., 2012).



Figur 2.3 - Bekreftelsesmodellen. (Adu-Gyamfi et.al., 2012, s. 161).

Modellen ble utviklet for å forklare elevers handlinger i overgangsprosesser. Adu-Gyamfi (2012) mener det er viktig å kunne bestemme om noen overganger er mer utfordrende enn andre, og hvorfor. Som vist i figuren over består modellen av tre viktige elementer; Implementasjonsbekreftelse, attributtbekreftelse og ekvivalensbekreftelse. I følge Adu-Gyamfi et.al. (2012), kan disse tre handlingene utføres i en hvilken som helst rekkefølge. Det vil være mulig å gjøre overganger korrekt uten å være bevisst på disse tre handlingene, men Adu-Gyamfi et.al. (2012) påpeker at det er viktig å bekrefte disse handlingene, for å unngå feil i overgangsprosessen.

Implementasjonsbekreftelse dreier seg om å bekrefte at steg i algoritmen for overgangen har blitt korrekt utført. Problemløseren må i alle overganger, fra en matematisk representasjon til en annen, avbilde informasjon om det matematiske objektet fra startrepresentasjonen til informasjon om det samme matematiske objektet i målrepresentasjonen. I følge Adu-Gyamfi et.al. (2012) kan dette, i noen tilfeller, gjøres prosedyremessig, uten at stegene i overgangsprosessen får stor grad av oppmerksomhet. Eksempelvis når elever skal gjøre en overgang fra en tabell til graf i et koordinatsystem. Fra tabellen kan ikke en x-verdi gi annet enn en y-verdi. Dersom en har endt opp med to y-verdier for samme x-verdi, har det i overgangen skjedd en feil. I denne prosessen vil det derfor være nyttig for elevene og sjekke over arbeidet sitt om implementeringene av tallpar i koordinatsystemet er gjort på riktig måte.

Attributtbekreftelse innebærer at det gir bekreftelse på at egenskapene ved det matematiske objektet er de samme i målrepresentasjonen som i startrepresentasjonen. Elevens evne til å identifisere og forstå egenskapene til det matematiske objektet vil derfor være avgjørende for dette steget i bekreftelsesmodellen. Dette kan for eksempel være å bekrefte at stigningstallet til en algebraisk representasjon er den samme som i den samsvarende grafen.

Ekvivalensbekreftelse går ut på at startrepresentasjonen og målrepresentasjonen skal formidle den samme informasjonen om det matematiske objektet. Ekvivalensbekreftelse kan ifølge Adu-Gyamfi et.al. (2012) lett forveksles med attributtbekreftelse, da begge to omhandler å bevare egenskaper ved det matematiske objektet. Forskjellen blir beskrevet som at attributtbekreftelse skal hjelpe elever å se hvorvidt begreper i startrepresentasjonen er bevart og riktig transformert til målrepresentasjonen. Ekvivalensbekreftelse handler på den andre siden om å forsikre seg om at de egenskapene ved det matematiske objektet som ikke er eksplisitte i startrepresentasjonen er bevart i målrepresentasjonen (Adu-Gyamfi, 2012).

Ved å gjøre disse prosessene korrekt i overgangsprosessen, kan problemløseren enkelt unngå feil som Adu-Gyamfi et.al. (2012) betegner som; implementasjonsfeil, tolkningsfeil og bevaringsfeil. Disse blir utdypet senere i kapitlet.

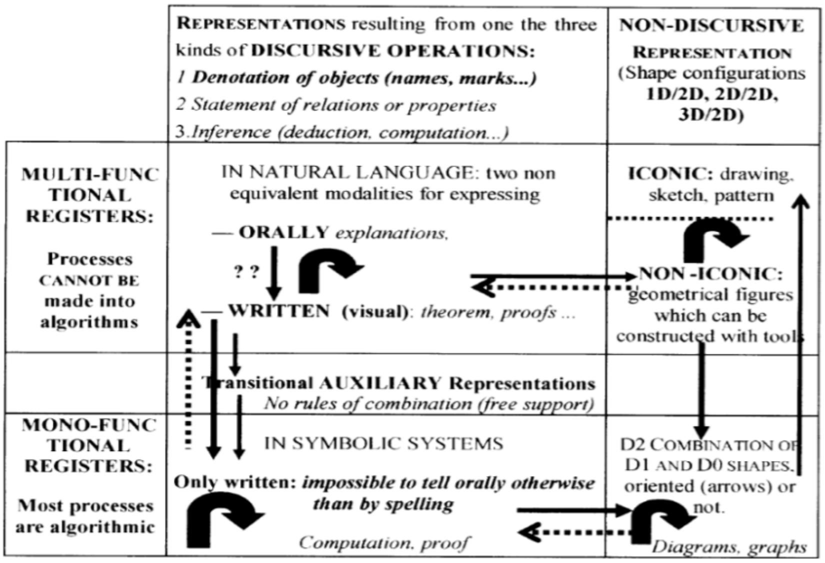
2.2 Duvals klassifisering av representasjoner

Duval (2006) deler representasjoner inn i fem kategorier, alt etter hvilke egenskaper den enkelte representasjonen har. Ett av de fem representasjonssystemene er det naturlige språket. Dette representasjonssystemet innebefatter alt av muntlig og skriftlig språk, med forklaringer og beskrivelser. Symbolsystemet er ifølge Duval (2006) et annet representasjonssystem. Herunder er alt av skriftlige matematiske symboler, som blant annet algebraiske symboler og tallsymboler. Det tredje representasjonssystemet, det ikoniske systemet, omhandler alt av skisser, mønstre og tegninger. I det ikke-ikoniske systemet, finnes de geometriske figurer, og i det femte systemet ligger diagrammer og grafer. Inndelingen Duval (2006) presenterer, viser at det finnes et stort utvalg representasjoner i matematikkens verden, som kan benyttes, når en arbeider med matematikk.

I tillegg til å dele representasjoner inn i ulike representasjonsformer, deler også Duval (2006) representasjonene inn i det han omtaler som systemer. Disse systemene deles inn i fire ulike typer semiotiske systemer. I de semiotiske systemene deles de forskjellige semiotiske representasjonene inn etter hvilke egenskaper den gitte representasjonen innehar. De fire semiotiske systemene er:

- Naturlig språk
- Illustrasjoner
- Symbolspråk
- Tabeller/grafer/diagrammer

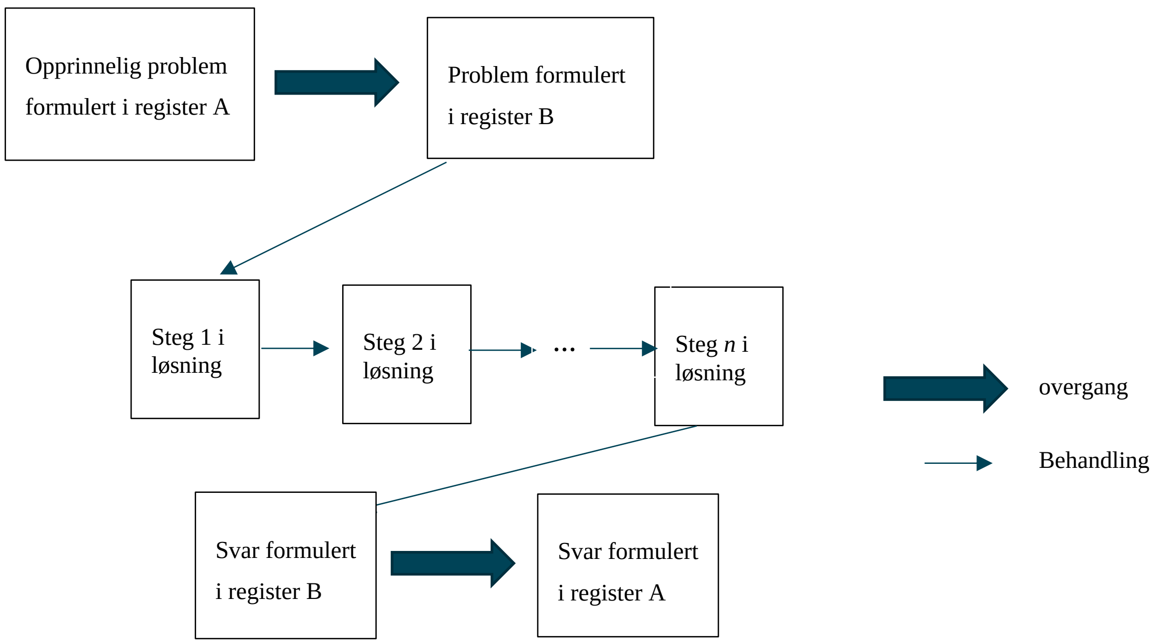
Videre beskriver Duval (2006) det han kaller mono- og multi-funksjonelle semiotiske registre. Et monofunksjonelt register, er et register hvor de matematiske prosessene innenfor det gitte registeret tar form som algoritmer. Et eksempel på dette kan være et regnestykke, hvor det er tall og symboler som brukes til å representere det matematiske objektet. De monofunksjonelle registrene er særegne for matematikken, og denne typen representasjoner blir ikke brukt innenfor andre disipliner. På den andre siden har man multifunksjonelle registre. Denne typen registre er ikke spesielle for matematikken, og kan dermed også brukes i andre disipliner og sammenhenger. Et eksempel på en slik representasjon kan være det naturlige språket. Dette er en representasjon som kan brukes i arbeid matematikk, men som også blir brukt i så og si alle andre disipliner og sammenhenger, og denne representasjonen er dermed ikke spesiell for matematikken.



Figur 2.4: Eksempler på ulike representasjonssystemer i matematikk. (Duval, 2006, s. 110).

2.3 En visualisering av Duvals tankegang

Hana (2014) beskriver Duvals syn på prosessen med å løse et matematisk problem, ved at en starter med å finne problemet formulert i register A. Deretter er det ønskelig å finne det mest effektive registeret å løse problemer i; register B, en gjør da en omdanning av det matematiske objektet til ønsket register. Deretter gjøres det en rekke behandlinger til det matematiske objektet innad i det valgte registeret (register B). Når en har løst problemet gjøres det igjen en omdanning tilbake til register A, som nå gir løsningen på problemet i det registeret svaret blir etterspurt i (Hana, 2014).



Figur 2.4 - rekonstruert fra «Figur 4.11» av (Hana, 2014, s. 158)

2.4 Vanskeligheter i transformasjoner av matematiske objekter

I følge Duval (2006), har de to formene for matematisk aktivitet som han kaller omdanning og behandling, forskjellig grad av kompleksitet. Omdanning betegnes som den mest komplekse av de to, da denne formen for matematisk aktivitet krever at problemløseren tar i bruk flere prosesser i arbeid med transformasjonen. Problemløseren er imidlertid nødt til å gjenkjenne det matematiske objektet i begge representasjonsformene (Duval, 2006). Det betyr i praksis at han er nødt til å se sammenheng mellom den opprinnelige representasjonen, og målrepresentasjonen en ønsker å representere det matematiske objektet i, etter at omdanningen har funnet sted. Som en konsekvens av dette kan utfordringer med omdanning skje av to ulike grunner;

1. Konteksten bak det matematiske objektet er en annen i målrepresentasjonen enn i den opprinnelige representasjonen.
2. Ved bruk av det naturlige språket som representasjonsform, kan behandling her være

mer kompleks, enn i representasjonsformer som tillater problemløseren å visualisere det matematiske objektet (Duval, 2006).

Duval (2006) hevder at årsaken til at omdanning er mer kompleks enn behandling, er at omdanning krever flere kognitive aktiviteter, og han trekker frem tre av disse. Den første kognitive aktiviteten som kreves i en omdanning, er å gjenkjenne det matematiske objektet som blir representert, og å gjenkjenne dets viktige egenskaper ut fra den konteksten det representeres i. Den andre er at problemløseren må gjøre transformasjoner, uten å gjøre endringer på det matematiske objektet, eller objektets semantiske innhold. Den tredje er at problemløseren må se for seg hvilke adekvate egenskaper ved det matematiske objektet, målrepresentasjonen representerer.

Hvilke vanskeligheter som oppstår i arbeidet med matematiske problemer, avhenger av hvilke transformasjoner som skal gjøres med det matematiske objektet. Vanskelighetene oppstår fordi monofunksjonelle og multifunksjonelle registre oppfattes ulikt fra elev til elev. Det at elevene alltid har tilgang til det multifunksjonelle registeret, som er det naturlige språket, kan være villedende og også føre til store misforståelser mellom lærere og elever. Det igjen kan få store konsekvenser for elevenes grunnleggende og fullstendige tankeprosesser, og deres evne til å resonnere og visualisere (Duval, 2006, s. 115-116).

En omdanning fra en representasjon til en annen sies å være spontan, dersom de to representasjonsformene er kongruente med hverandre. Det at to representasjoner er kongruente med hverandre, innebærer at de to representasjonene er umiddelbart og direkte semantisk korresponderende, og de viktigste egenskapene i begge de to er de samme. Desto mindre korrespondanse det er mellom de to representasjonene, desto større er den kognitive avstanden mellom dem (Duval, 2006).

Den kognitive avstanden mellom to representasjoner er også avhengig av hvilken retning omdanningen gjøres i. To representasjoner kan for eksempel være kongruente når omdanningen skjer i en retning, men ikke kongruente når omdanningen gjøres i motsatt retning (Iori, 2017, s.285). Den kognitive avstanden mellom kilderepresentasjonen og målrepresentasjonen, når en skal løse et matematisk problem, kan være avgjørende for om elevene lykkes med omdanningen, eller om det skjer feil i omdanningsprosessen. Dette samsvarer også med Janviers teori, hvor han hevder at omdanning fra eksempelvis tabell til algebraisk uttrykk, er en global aktivitet, hvor det er stor kognitiv avstand og lite kongruens mellom de to representasjonene, mens en omdanning fra algebraisk graf til tabell, er lokal aktivitet, hvor det er liten kognitiv avstand og vesentlig større kongruens mellom representasjonene (Janvier, 1987). Bossé et.al. (2011) skriver at feil som gjøres i overganger til eller fra det naturlige språket, skiller seg fra andre feil som skjer i semiotiske registre som for eksempel grafiske representasjoner, symbolske representasjoner eller tabeller. Feil gjort i slike overganger oppstår ofte som en konsekvens av at elever ikke får med seg viktige egenskaper ved det matematiske objektet, når de beveger seg mellom representasjonssystemer (Bossé, et.al., 2011). Dette kan tyde på liten grad av kongruens mellom det naturlige språket og andre semiotiske registre.

Adu-Gyamfi et.al. (2012) hevder på sin side, at det kan oppstå tre typer feil i en overgangsprosess mellom matematiske representasjoner. Den første typen feil som blir nevnt er *implementasjonsfeil.* Denne typen feil skjer ofte som en konsekvens av at et steg i algoritmen som brukes, er utført ukorrekt. Feilen blir ofte gjenkjent ved feil i beregninger, men kan også oppstå når problemløseren forveksler x- og y-aksen i et koordinatsystem. Da vil de eventuelle koordinatene eller grafen blir implementert feil i koordinatsystemet. Den andre typen feil som blir nevnt er *tolkningsfeil*. Feilen innebærer at elevene på en ukorrekt måte tolker, eksemplifiserer eller karakteriserer egenskapene til start- og målrepresentasjonen. Denne typen feil kan oppstå når som helst i overgangsprosessen, også når elever bruker det som kalles for en overgangsrepresentasjon. Overgangsrepresentasjoner blir ofte brukt som et hjelpemiddel, for lettere å kunne gjøre en korrekt overgang fra start- til målrepresentasjonen. Dette innebærer at en *tolkningsfeil* kan skje både i direkte overganger fra start- til målrepresentasjoner, men også underveis i overgangsrepresentasjonene. Den siste feilen Adu-Gyamfi et.al. (2012) presenterer, er det de kallet *bevaringsfeil.* Denne typen feil skjer når elever ikke lykkes med å få med seg alle de viktige egenskapene til det matematiske objektet fra den ene representasjonen til den neste. Dette skjer som en konsekvens av at viktige egenskaper ved det matematiske objektet ikke blir identifiser av elevene i startrepresentasjonen, og de får derfor ikke med seg disse egenskapene videre til eventuelle overgangsrepresentasjoner eller til målrepresentasjonen. Et eksempel på dette kan være når en elev har gjort en overgang fra et funksjonsutrykk til en graf. Eleven kan ha klart å gjøre en korrekt overgang til graf, men har ikke regnet ut grafens verdi for alle punkter, og vil derfor få feil når grafen tegnes inn i koordinatsystemet (Adu-Gyamfi et.al., 2012).

2.5 Matematisk forståelse i lys av Duvals teori

Skemp (1976) beskriver hvordan han ble bevisst på hva som kan legges i forståelse innenfor matematikken. Han hadde tidligere sett på forståelse som det å vite hva, hvordan og hvorfor. I dialog med en norsk matematikkdidaktiker, Steig Mellin-Olsen, ble han gjort oppmerksom på at det var to betydninger av begrepet forståelse. Som en konsekvens av dette skiller Skemp (1976) mellom instrumentell- og relasjonell forståelse når han skal beskrive den matematiske forståelsen. Han beskriver den instrumentelle forståelsen som «rules whitout reason». Dette innebærer at det brukes en rekke regler og prosedyrer for å løse det matematiske problemet en står overfor. Reglene og prosedyrene blir brukt, uten en forståelse for hvorfor de benyttes til å løse et gitt problem. Videre beskrives relasjonell forståelse, som en forståelse hvor problemløseren vet hvilke prosedyrer som kan benyttes for å løse det matematiske problemet. I tillegg til å vite hvilke prosedyrer som skal brukes, vet problemløseren også hvorfor disse prosedyrene vil være nyttige, for å løse det gitte problemet. Den relasjonelle forståelse gjør det dermed lettere å se sammenheng mellom matematiske begreper og prosedyrer (Skemp, 1976).

Dersom en ser Skemps teori i lys av Duvals teori om representasjoner, kan en trekke linjer mellom den relasjonelle forståelsen, og problemløserens evne til å mestre og bevege seg mellom ulike matematiske registre. Den relasjonelle forståelsen dreier seg om å klare å se sammenhenger, eller relasjoner, i matematikken og dermed se «det store bildet». Dersom en i arbeid med matematiske problemer, ikke klarer å se disse sammenhengene, blir det også vanskelig å se, at en annen representasjonsform er mer egnet til å løse det gitte matematiske problemet. Det er videre mulig å også trekke linjer mellom behandling og den instrumentelle forståelsen. Når det arbeides med behandling av det matematiske objektet, gjøres endringer på representasjonen av det matematiske objektet, uten at problemløseren beveger seg mellom ulike registre. Dette kan gjøres dersom problemløseren har en instrumentell forståelse og lært seg de riktige algoritmene for å løse det matematiske problemet.

2.6 Janviers tabell

Claude Janvier (1987) skriver, i likhet med Duval, også om representasjoner og overganger mellom disse, da med spesielt søkelys på funksjoner. Janvier (1987) deler representasjoner, som kan tas i bruk i arbeidet med funksjoner, inn i fire forskjellige representasjonsformer:

- Situasjon (verbalbeskrivelse)
- Tabell
- Graf
- Algebraisk uttrykk (symboler)

Til Fra	Situasjon, verbalbeskrivelse	Verditabell	Graf	Algebraisk uttrykk (symbolsk)
Situasjon, verbalbeskrivelse		Måling/ nøyaktig betraktning *Global aktivitet*	Skissering *Global aktivitet*	Modellering *Global aktivitet*
Verditabell	Lesing *Global aktivitet*		Plotting *Lokal aktivitet*	Tilpassing *Global aktivitet*
Graf	Tolkning *Global aktivitet*	Avlesning *Lokal aktivitet*		Kurvetilpassing *Global aktivitet*
Algebraisk uttrykk (symbolsk)	Parameter- gjenkjennelse *Global aktivitet*	Beregning *Lokal aktivitet*	Skissering *Lokal aktivitet*	

Figur 2.5 - Janvier (1987) Tilført graden av kompleksitet til konverteringer av Bossé et al. (2011)

Tabellen over viser en oversikt over de ulike representasjonsformene Janvier hevder at kan brukes i arbeid med funksjoner. Disse er listet opp både horisontalt og vertikalt. Feltene mellom to forskjellige representasjonsformene viser hvilke ferdigheter som kreves for å bevege seg mellom to representasjoner. Den beskriver også hvilken type aktivitet overgangen betegnes som. Eksempelvis kan problemløseren bevege seg fra et algebraisk uttrykk til en graf. For å gjøre denne overgangen mellom de to representasjonene, kan problemløseren lese ut fra tabellen at han må skissere opp grafen. Utgangspunktet blir de egenskapene han finner ved å studere den algebraiske fremstillingen av det matematiske objektet. Denne formen for matematisk aktivitet, blir i tabellen betegnet som lokal aktivitet. Det innebærer at problemløseren har all den informasjonen han trenger i startrepresentasjonen i denne overgangsprosessen og kan bevege seg direkte fra startrepresentasjonen til målrepresentasjonen. Det er dermed ikke nødvendig å gå via en annen representasjonsform for å finne tilstrekkelig informasjon til målrepresentasjonen.

Dersom det skal gjøres en overgang som betegnes som global aktivitet, innebærer dette at problemløseren må gå via en annen representasjon, for å finne tilstrekkelig informasjon om det matematiske objektet, og derfra ha muligheten til å gjøre en overgang til målrepresentasjonen (Janvier 1987).

2.7 Problemløsning

De fleste definisjonene av problemløsning hevder, at dersom en oppgave skal kunne ses på som et problem, og ikke en rutineoppgave, krever det at problemløseren ikke umiddelbart identifiserer en passende løsningsstrategi (Kongelf, 2011). Problemløseren skal være nødt til å bruke sine eksisterende kunnskaper på en ny måte, og finne nye, ukjente strategier for å klare å løse problemet. Med utgangspunkt i en slik definisjonen på et problem, vil et problem være subjektivt, dynamisk og individbasert. Det innebærer at en matematisk utfordring, kan være en rutineoppgave for en elev, mens den vil kunne oppleves som et problem for en annen elev.

George Polya (2014) omtaler problemløsning som en ferdighet, og sammenligner dette med svømming, at det er mer som en praktisk ferdighet. Han er blant de første som hevder at et individ kan utvikle seg til å bli en god problemløser. I boka "*How to solve it",* som er skrevet som en håndbok, presenterer han en firetrinnsmodell, hvor det blir gitt en heuristisk presentasjon av ulike strategier, for hvordan bli en god problemløser. Han nevner fire følgende trinn i modellen:

1. Forstå problemet
2. Lag en plan
3. Gjennomfør planen
4. Se tilbake

Disse fire trinnene kan ses på som en fast fremgangsmåte i arbeidet med å løse matematiske problemer spesielt, men den kan også brukes på andre, mer generelle problemer. I håndboken beskriver Polya (2014) konkrete strategier, som kan være spesifikke for en gitt situasjon, men som også kan gjøre seg gjeldende i andre, lignende situasjoner. Han hevder at heuristikk handler om å løse oppgaver, og at målet med heuristikken er å bli bevisst på forklaringer og øyeblikk som er avgjørende for å klare og løse et problem. Å velge mellom det kjente og det ukjente er også en sentral del i heuristikken, og hvilke valg vi tar, påvirker hvordan vi arbeider med problemløsning. Mennesker har en tendens til å velge det som er kjent for dem heller enn det som er ukjent (Polya, 2014). En slik problemløsningsforståelse, kan være aktuell i arbeidet med problemløsningsoppgaver i matematikken. Problemløserens valg av representasjoner, kan tenkes å bli påvirket direkte, ved at det i mange tilfeller vil være komfortabelt å velge en representasjonsform av det matematiske problemet, som er kjent og som en har arbeidet med tidligere. Dette betyr imidlertid ikke at den valgte kjente representasjonen, alltid vil være den representasjonen som skildrer det matematiske objektet best, for det gitte matematiske problemet (Polya, 2014).

Polya definerer det å ha et problem, som en bevisst søken etter en handling som er egnet til å oppnå et klartenkt, men ikke umiddelbart oppnåelig mål (Polya, 1981, s.117). Dermed kan en si at problemløsning blir prosessen med å finne denne egnede handlingen, som kan bidra til å løse problemet. For å drive med problemløsning, fordrer det at der foreligger et problem, da problemløsningen blir en konsekvens av problemet.

Ser en Polya sitt syn i lys av Duvals (2006) teori, har de det til felles, at begge ønsker å finne den mest egnede representasjonen av det matematiske problemet, noe som da også vil være den mest hensiktsmessige måte å løse problemet på. Den heuristiske håndboken til Polya (2014), med de fire trinnene for å løse et problem, kan også være en alternativ representasjon av Hana (2014) sin visualisering av Duvals tanker om problemløsning. Hanas modell representerer også prosessen med å løse et problem, og den vil bli presentert senere i kapitlet.

Når en gruppe mennesker sammen prøve å løse ulke problemer, kalles dette et problemløsningsteam. Et problemløsningsteam være i stant til å løse mer kompliserte problemer sammen, enn det en individuell problemløser klarer alene. Det ser ut til at når oppgavene er komplekse og vanskelige, kan arbeid i team gi noen synergieffekter, som gjør at teamet løser oppgaver sammen, som det enkelte teammedlem vanskelig ville klart å løse alene. Teamet verdsetter intellektuelle og kommunikasjonsmessige ferdigheter hos deltakerne. Evnen til å utrykke seg tydelig, er også en viktig egenskap hos en deltaker i et problemløsningsteam. Dette fordi kommunikasjon er essensielt for å klare å løse problemer sammen (Bang, 2008).

2.8 Representasjoners fire roller i problemløsning

Med støtte i tidligere forskning, presenterer Stylianou (2011) fire viktige roller, representasjoner spiller i arbeidet med problemløsningsoppgaver i matematikk.

Representasjoner kan brukes s*om et verktøy for å forstå informasjon*. De blir da et verktøy for å se de ulike aspektene ved det matematiske problemet, og for å se sammenhenger mellom disse. Dette utgjør en viktig del av det å bruke representasjoner, da det er et velkjent problem at problemløseren ikke får tilstrekkelig oversikt over de mest aktuelle egenskapene ved det matematiske problemet i startrepresentasjonen. Problemløseren vil derfor tjene på å representere det matematiske objektet ved hjelp av andre typer representasjoner, og vil dermed lettere kunne løse et matematiske problem (Schoenfeld, 1985).

Representasjoner brukes også s*om et verktøy for å registrere mentale matematiske prosesser*. I denne sammenhengen blir representasjonene et verktøy for å skrive eller tegne ned de mentale matematiske prosessene i problemløsningen, slik at problemløseren til enhver tid har oversikt over de matematiske prosessene. Dermed slipper han å holde kontroll på all informasjon om det matematiske problemet mentalt (Newell & Simon, 1972).

Representasjoner kan videre brukes s*om verktøy til videre utforskning av problemet.* Da blir representasjonene et verktøy for å gjøre endringer på tidligere representasjoner av det matematiske objektet, noe som muliggjør manipulering av det matematiske objektet. Utfra disse representasjonene, kan problemløseren avdekke ny informasjon og nye implikasjoner i problemløsningen. Innenfor utforskning kan problemløseren både utdype, søke dypere i og abstrahere en representasjon (Stylianou & Silver, 2004).

Endelig kan representasjoner brukes s*om et verktøy for å overvåke og evaluere egen progresjon i arbeid med problemløsning*. I denne sammenhengen nyttes representasjoner som et verktøy som bidrar til å holde oversikt over problemløserens egen progresjon og utvikling i problemløsningen. Han kan da bruke representasjoner til å ta kvalifiserte valg, når han skal sette seg videre mål, og til å vurdere om han skal opprettholde eller revidere gjeldende planer (Stylianou, 2011,).

2.9 Mentale prosesser og representasjoner

Goldin og Shteingold (2001) skiller mellom indre og ytre representasjoner. Hvert individ har sine personlige mentale representasjoner. Knyttet til elever i skolen, er indre representasjoner umulige for læreren og observere direkte. Læreren kan likevel prøve å gjøre antagelser om disse ved å tolke elevenes ytre representasjoner, med bakgrunn i deres arbeid. Ytre representasjoner er de representasjonene elevene, sammen med andre, kan henvise til, og som kan diskuteres. På mange måter er disse en slags fysiske fremstilling av de indre mentale representasjonene (Goldin & Shteingold, 2001).

2.10 Tradisjonell undervisning og undersøkelseslandskap/undersøkende undervisning

Den tradisjonelle undervisningen er en velkjent undervisningsform i den norske skolen. En matematikk time starter gjerne med at elevene blir introdusert for nytt fagstoff i forelesningsform, deretter skal de arbeide individuelt med oppgaver knyttet til samme tema som i forelesningen. Dette blir da en form for repetisjon av det som har blitt gjennomgått i plenum. Avslutningsvis, går gjerne læreren gjennom oppgavene elevene har arbeidet med i timen og gir deretter hjemmelekser, som også oppsummerer økten (Klette et.al., 2015).

I undersøkende undervisning, skal elevene målrettet arbeide med å formulere og avgrense problemer, gjennomføre empiriske undersøkelser, finne informasjon, lage modeller og hypoteser, diskutere med lærer og medelever og finne argumenter som kan brukes i matematiske diskusjoner. Elevenes egne erfaringer skal stå i sentrum av undervisningen. På denne måten kan matematikken lettere bli en del av elevenes dannelse og personlige utvikling. En slik undervisningsform krever imidlertid at undersøkelsene som blir gjort innebefatter viktige matematiske poeng eller kompetanser (Blomhøj, 2021, s. 2).

Som et alternativ til undersøkende undervisning, snakker Blomhøj (2021) om det han kaller for formidlende undervisning. Denne undervisningsformen samsvarer på mange punkter med den tradisjonelle undervisninger beskrevet over, men vil også ha elementer av undersøkende undervisning. Blomhøj hevder at en blanding av disse to formene for undervisning, vil være det mest effektive. Han trekker frem noen essensielle elevaktiviteter som må være til stede, for at undervisningen skal være undersøkende:

- Stille spørsmål
- Avgrense og strukturere
- Observere systematisk
- Måle og kvantifisere
- Klassifisere
- Utvikle definisjoner
- Beregne og lage overslag
- Innføre og anvende symboler
- Anvende algebra
- Resonnere og bevise

- Representere og visualisere
- Danne og teste hypoteser
- Eksperimentere
- Kontrollere variabler
- Fortolke og vurdere resultater
- Kommunisere

  (Blomhøj, 2021, s. 10)

Disse elevaktivitetene, vil kunne forekomme i ulike undervisningsformer, men de er likevel særlig fremtredende i undersøkende undervisning, og de vil også være hyppig til stede innenfor nettopp denne undervisningsformen (Blomhøj, 2021, s.10). Ut fra kjennetegnene for undersøkende undervisning, er det naturlig å tenke problemløsningsoppgaver inn i denne undervisningsformen, heller enn i den tradisjonelle undervisningsformen, som ofte baseres på rutineoppgaver.

2.11 Representasjonskompetanse og problembehandlingskompetanse

Niss og Jensen, la i 2002 frem en rapport til den danske regjeringen, hvor de presenterte forslag til endringer i den danske skolens læreplaner. Rapporten er forskningsbasert. I rapporten foreslår de åtte kompetanser, de hevder er viktige i skolen. En av disse er problemløsningskompetanse og representasjonskompetanse i matematikken. De utdyper både hvilke kompetanser læreren bør ha innenfor de ulike elementene, og hvilke kompetanser elevene bør inneha på forskjellige tidspunkt i utdanningsløpet fra 1. til 13. klasse. Rapporten omfatter også yrkesfagutdannelser hvor matematikk er aktuelt, samt høyere utdanning hvor matematikk inngår.

Denne rapporten ble utviklet som en konsekvens av det Niss og Jensen (2002), omtaler som en «nærmest eksplosiv vitenproduksjon og omfattende forandring i kultur og samfunn» innenfor fagene i skolen. I følge Niss og Jensen (2002) er denne utviklingen med på å øke presset på økt faglighet i skolefagene. For å møte dette presset trengs en revolusjon, og en endring, der en beveger seg bort fra det tradisjonelle pensumet og den tradisjonelle undervisningen. Det utvikles nye metoder for undervisning og innhold, og det settes også nye mål for testing og evaluering av fagene (Niss & Jensen, 2002). Selv om rapporten er rettet mot det danske skolesystemet i 2002, står vi i Norge overfor mange av de samme utfordringene i skolen i dag. Representasjoner og kommunikasjon er da også inntatt som et eget kjerneelement i LK 2020. I og med at rapporten til Niss og Jensen (2002) er forskningsbasert, vil kompetansekravene som stilles til lærere og elever ha klare paralleller til vårt eget skolesystem, og vurderes derfor å være relevant her.

2.11.1 Lærerens representasjonskompetanse

I følge Niss og Jensen (2002) har læreren representasjonskompetanse, når han mestrer å benytte ulike typer representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer og situasjoner. Læreren må forstå sammenhengen mellom forskjellige representasjoner for det samme matematiske objektet, og kjenne egenskapene til de forskjellige representasjonene, slik at han kan velge den representasjonen som er mest formålstjenlig til det enkelte formålet (Niss & Jensen, 2002, s.98).

For at læreren på best mulig måte skal kunne støtte opp om den enkelte elevs behov og kunne tilby en variert undervisning som appellerer til alle elevene, påpekes viktigheten av at læreren mester ulike representasjoner. Videre må læreren kunne noe om egenskapene til de ulike representasjonene og vite når det er hensiktsmessig å bruke de forskjellige representasjonsformene (Niss & Jensen, 2002, s.98).

Et annet aspekt som trekkes frem, med tanke på lærerens representasjonskompetanse, er evnen til å kunne bruke en rekke forskjellige representasjoner, for å belyse ulike sider av de matematiske objektene og problemene for elevene. Læreren må kunne bevege seg mellom ulike representasjoner, samtidig må det gå en «rød tråd» gjennom undervisningen, slik at læreren presenterer de ulike representasjonene og egenskapene på en meningsfull måte for elevene (Niss & Jensen, 2002, s.98).

2.11.2 Elevers representasjonskompetanse i grunnskolen

For elever i grunnskolen er representasjonskompetanse, at elevene skal kunne forstå og benytte seg av ulike typer representasjoner av matematiske objekter, fenomener, problemer og situasjoner. Elevene skal i noen grad forstå sammenhengen mellom de ulike representasjonene, som representerer samme objekt. De skal i noen grad kunne velge den mest hensiktsmessige representasjonen for det gitte formålet, i tillegg til å kunne bevege seg mellom ulike representasjoner. Fra mellomtrinnet og videre i utdanningsløpet, bør det også kunne forventes at elevene har kjennskap til styrker og svakheter ved de ulike representasjonene (Niss & Jensen, 2002, s. 213).

2.11.3 Lærerens problemløsningskompetanse/ problembehandlingskompetanse

For læreren innebærer problemløsningskompetanse, at han har evne til å klare å oppdage, formulere, avgrense og presisere ulike matematiske problemer. Enten det gjelder rene matematiske problemer, anvendte problemer eller åpne og lukkede problemer. Læreren skal videre beherske og løse matematiske problemer han selv og andre har formulert, da gjerne gjennom ulike løsningsstrategier (Niss & Jensen, 2002, s. 88).

Niss og Jensen (2002) trekker også frem at læreren må ha nødvendig didaktisk- og pedagogisk kompetanse. Det er avgjørende at læreren selv er komfortabel med undervisningsformen, for at han skal kunne lede undersøkende, eksperimenterende og problemløsende klasseøkter. Eksisterende forskning på området viser at mange lærere synes det er utfordrende å arbeide med problemløsning i starten (Niss & Jensen, 2002, s. 88).

For at læreren skal klare å tilfredsstille kravet om tilpasset opplæringen til den enkelte elev, bør læreren være i stand til å utfordre elever på ulike nivåer og kunne tilby alle elever å arbeide med problemløsning på sitt nivå (Kunnskapsdepartementet, 2017). For å gjøre dette kreves kunnskap nok til å kunne formulere og presisere et stort mangfold av matematiske problemløsningsoppgaver, som læreren selv, også må være komfortabel med å løse. Med tanke på at elevene ofte er på ulike nivåer, er det en forutsetning at læreren klarer å hjelpe elever til å løse et matematiske problemer ved hjelp av en rekke ulike løsningsstrategier (Niss & Jensen, 2002, s. 88).

2.11.4 Elevers problemløsningskompetanse

Det er rimelig å forvente at elever i grunnskolen skal kunne finne og formulere forskjellig matematiske problemer. I tillegg må de også klare å løse problemene i noen grad. Mot slutten av grunnskolen, er det naturlig at forventingene til hva elevene skal meste når det gjelder problemløsning, økes. På dette nivået i utdanningsløpet, bør elevene mestre og finne, formulere, avgrense og presisere matematiske problemer. De bør også kunne løse allerede ferdigoppstilte problemløsningsoppgaver. Det er viktig å huske på, at et matematisk problem er en type spørsmål som krever en viss grad av undersøkelse for å kunne løses. Spørsmål som enkelt kan løses ved hjelp av en algoritme, anses ikke som et matematiske problem (Niss & Jensen, 2002, s. 200-201)

2.12 Vygotsky – representasjoner som den mer kunnskapsrike andre i problemløsning

Vygotskys tanker rundt den proksimale utviklingssonen, kom som en konsekvens av hans interesse for barns ferdigheter, hva barna klarer å løse alene og hva de klarer ved hjelp av andre. Han beskrev ZPD (Zone of Proximal Development) som; avstanden mellom det faktiske utviklingsnivået (individuell problemløsning) og nivået av potensiell utvikling (problemløsning med veiledning av voksne, eller i samarbeid med en mer kunnskapsrik annen) (Abtahi et.al., 2017; Vygotsky, 1978, s.86). Fra dette, utviklet Vygotsky og hans tilhengere en utvidet idé, hvor det fremkommer at det er i ZPD barn lærer, og da bare når barnet er i interaksjon med andre som er mer kunnskapsrike enn seg selv. Den proksimale utviklingssonen har blitt konseptualisert som toveis, hvor rollen som den mer kunnskapsrike andre kan veksle mellom deltakerne (Abtahi, et.al., 2017) (Eget arbeid. (2020) *Hjemmeeksamen – Vitenskapsteori og metode.* [Hjemmeeksamen] Høgskolen på Vestlandet).

Det har blitt foreslått å utvide ZPD til å inkludere tegn og/eller verktøy, som en mulig mer kunnskapsrike annen i interaksjonen. Dette innebefatter de fysiske egenskapene til tegnet eller verktøyet som blir brukt (Abtahi, 2017). En slik utvidelse, vil i noen tilfeller gjøre verktøyet til den mer kunnskapsrike andre, som veileder elevene i deres arbeid med matematikk. Dette åpner også en diskusjon, om hvordan veksling mellom hvem som er den mer kunnskapsrike andre kan konseptualiseres (Abtahi et.al., 2017). Trekkes det linjer til Duval (2006), blir spørsmålet hvorvidt representasjoner kan være med på å hjelpe elever i arbeidet med matematiske problemer, og om ulike representasjoner da kan fungere som en slags mer kunnskapsrik annen for elevene (Eget arbeid. (2020) *Hjemmeeksamen – Vitenskapsteori og metode.* [Hjemmeeksamen] Høgskolen på Vestlandet).

Et verktøy er definert som et middel for ekstern aktivitet, som mennesker kan bruke til å påvirke en gjenstand. Eksempler på verktøy kan være hammere, stoler eller papir. Tegn vil være interne virkemidler, som påvirker menneskers atferd (Abtahi, et.al., 2017). Vygotsky

(1978) mente at verktøy er eksternt orientert for mennesker til å mestre og seire over naturen. Tegn på sin side, er et internt orientert, og skal bidra til menneskene gjennom å meste seg selv (Eget arbeid. (2020) *Hjemmeeksamen – Vitenskapsteori og metode.* [Hjemmeeksamen] Høgskolen på Vestlandet).

Abtahi mfl. beskriver i en artikkel fra 2017, at det, ifølge Vygotsky, kan være verktøy som opptrer som den mer kunnskapsrike andre, i noen læringssituasjoner, hvor verktøyene blir tolket og brukt på riktig måte. Dersom elevene, gjennom bruken av konkreter, klarer å se nytten av verktøyene, kan dette hjelpe dem til å arbeide i den proksimale utviklingssonen. Verktøyet opptrer da som den mer kunnskapsrike andre. Elevene klarer da mer i samhandling med verktøyet, sammenlignet med hva eleven hadde klart uten dette. Det vil også være aktuelt for læreren å være til stede, for å kunne veilede elevene og stille relevante spørsmål, for å bidra til få dem til å utnytte den mer kunnskapsrike andre, på den mest effektive og hensiktsmessige måten (Abtahi, et.al., 2017, s. 13-14) (Eget arbeid. (2020) *Hjemmeeksamen – Vitenskapsteori og metode.* [Hjemmeeksamen] Høgskolen på Vestlandet).

2.13 Tidligere forskning

Ifølge Stylianou (2011), viser forskning at mange elever sliter med å bruke ulike representasjoner i sitt arbeid med matematikk. Lærere i skolen mangler også kunnskap om hvordan de effektivt og hensiktsmessig kan bruke ulike representasjoner i undervisning på en fruktbar måte. National Council for Teachers of Matematics (NCTM) har også i en rapport fra 2000, konstatert at representasjoner er en av fem viktige elementer i matematikk. Det anbefales fra NCTM at alle elever er drevne i det å bruke representasjoner aktivt i sitt arbeid med problemløsning i matematikken. Bruk av representasjoner er, som nevnt, ett av elementene i matematikk elevene gjerne sliter mest med. Det er også tvilsomt at elever i skolen får en bedre forutsetning for å mestre representasjoner, når forskningen også viser at lærere sliter med å bruke ulike matematiske representasjoner på fruktbare og hensiktsmessige måter. Flere forskningsprosjekter viser at representasjoner i matematikk, spiller en stor rolle både for produktet og prosessen i arbeid med problemløsningsoppgaver (Stylianou, 2011).

En annen studie, utført av Stylianou (2010), har undersøkt læreres tanker og holdninger til representasjoner, og hvordan representasjoner kan brukes som en del av problemløsningsprosessen. Utgangspunktet for studien var å undersøke representasjoners rolle i skolen, på tvers av nivåer og emner, knyttet til den nye læreplanen i USA. Studien ble gjennomført på ungdomsskolen, gjennom intervjuer av lærere. Det viste seg at lærerne bruker representasjoner på flere ulike måter i eget arbeid. De har også utviklet definisjoner av begrepet, som innebærer at representasjonene først og frem kommer som et produkt av problemløsningen. Som prosess spiller representasjoner en liten rolle i lærernes arbeid. Dette kan indikere, at representasjoner som prosess i lærernes undervisning har en mer perifer rolle. Funnene i studien impliserer at representasjoner i skolen, snarere blir sett på som et tema det skal undervises i, heller enn et verktøy som kan være nyttig å bruke i arbeid med problemløsningsoppgaver. Studien viser videre at det kun er de høyt-presterende elevene, som bruker representasjoner som et verktøy i sitt arbeid (Stylianou, 2010).

I en artikkel av Ainsworth et.al. (2002), slår de fast at det å bruke forskjellige registre i arbeid med matematiske problemer, vil bidra til å belyse ulike sider ved det matematiske problemet. De finner at det er en klar sammenheng mellom å mestre faget, og effektivt bruke overganger mellom forskjellige representasjoner i matematikken. Det er også en sammenheng mellom det å mestre og bruke den mest effektive representasjonen til å løse det matematiske problemet, og problemløserens ferdigheter i matematikk. Ainsworth et.al. (2002) beskriver de som mestrer dette godt som eksperter, mens de som gjerne ikke mestrer det like godt blir betegnet som nybegynnere. Dette kan være med å støtte opp under, at det å mestre overganger mellom ulike registre i matematikken, kan være en indikasjon på problemløserens matematiske ferdigheter. Det kan også si noe om i hvilken grad problemløseren mestrer å løse problemløsningsoppgaver i matematikk (Ainsworth et.al., 2002).

Det er mulig å trekke noen linjer mellom denne forskningen og relasjonell forståelse. Hvor elever som har denne typen forståelse, har en større forutsetning for å klare å gjøre nødvending overganger, slik at de lettere får tilgang til de nødvendige egenskapene ved det matematiske objektet, for så å klare å løse det matematiske problemet.

Ozgun-Koca (1998) har undersøkt hvorfor elever velger gitte representasjoner i arbeidet med å løse matematiske problemer. Utgangspunktet for studien var tidligere forskning på området, som viste at elever i stor grad drar nytte av å mestre mange ulike representasjoner i arbeid med problemløsningsoppgaver. Videre hjelper det å mestre representasjoner, elever med å abstrahere og forstå matematiske konsepter. Ozgun-Koca (1998) intervjuet elever og gjennomførte en rekke observasjonsøkter, for å kartlegge hvordan elever på den videregående skolen ser på og benytter seg av representasjoner. Resultatet viste en trend, hvor elevers tidligere erfaringer, deres kunnskap, samt deres personlige preferanser, påvirket hvilke representasjoner elevene valgte å bruke for å løse et matematisk problem (Ozgun-Koca, 1998).

Mulligan og Mitchelmore (2013) gjennomførte en studie, hvor barns årvåkenhet for mønster og strukturer i matematikken ble undersøkt. Denne årvåkenheten kaller de for «Awerness of Mathematical Pattern and Structure, AMPS». Hypotesen for undersøkelsen var, at jo mer barn har utviklet sitt interne system for semiotiske representasjoner, desto mer organisert og sammenhengende vil deres ytre representasjoner være. Deres matematiske kompetanse vil dermed være tilsvarende høyere. Gjennom deres studie fant Mulligan og Mitchelmore en klar sammenheng mellom elevers interne system for semiotiske representasjoner og elevenes bevissthet i valg av representasjoner og deres prestasjoner i arbeid med matematiske oppgaver (Mulligan & Mitchelmore, 2013).

Dette funnet samsvarer godt med Duvals forskning på området. Han hevder at mestring av ulike representasjoner og overganger mellom disse, samt mestring av behandlinger innad i de ulike registrene, i stor grad vil gjenspeile den enkeltes kompetanse i matematikk, og den enkeltes forståelse for matematiske objekter og prosesser (Duval, 2006).

3 Metode

Gjennom dette forskningsprosjektet ønsket jeg å samle inn data ved hjelp av tre forskjellige metoder. I dette kapitlet vil jeg begrunne mine valg av metoder for å belyse problemstilling og forskningsspørsmål. Jeg ønsker å utdype valg av forskningsdesign i lys av problemstillingen, samt begrunne hvorfor jeg har valgt et kvalitativt forskningsdesign. Videre vil de ulike metodene brukt i prosjektet bli presentert, og jeg vil drøfte de ulike metodenes funksjoner, med tanke på å besvare problemstillingen. Til slutt vil jeg også drøfte noen etiske utfordringer og refleksjoner.

Gjennom forskningsprosjektet har jeg hatt en konstruktivistisk tilnærming til forskning og kunnskap i arbeidet mitt. Denne vitenskapsteoretiske tilnærmingen innebærer at virkeligheten og sannheten hele tiden er i utvikling og endring. Sannheten blir dannet i individet selv, og kan se ulik ut for ulike personer. Tilnærmingen tar utgangspunkt i at det er umulig å skille mellom forskeren og den eller de det forskes på. Forskeren kan ikke si noe sikkert om hvordan forskningsobjektet virkelig er, men han sier noe om hvordan det blir oppfattet av han som forsker. Verden oppfattes forskjellig av ulike individer, og mennesker konstruerer sin virkelig mer eller mindre aktivt. Det vil derfor være mange forskjellige konstruksjoner av virkeligheten, og det vil som forsker være vanskelig å si at en konkret virkelighet er sann, mens en annen ikke er det. Innenfor dette kunnskapssynet er det ikke mulig å snakke objektivt om sannheten. Det er her tale om en intersubjektiv sannhet, noe som innebærer at flere forskere er enige om hvordan de oppfatter virkeligheten. Dette er en god beskrivelse av virkeligheten, men den beskriver ikke virkeligheten i seg selv (Postholm & Jacobsen, 2021). Innenfor denne tilnærmingen, blir kunnskap sett på som et sosialt fenomen, hvor kunnskap blir konstruert gjennom forståelse og mening, skapt i samhandling med andre. En som befinner seg innenfor dette kunnskapssynet er Vygotsky, med sin teori om hvordan læring skjer gjennom sosial samhandling med andre. Språket står dermed sentralt for å at læring skal finne sted (Postholm & Jacobsen, 2021). Ser vi dette i sammenheng med mitt forskningsprosjekt, innebærer det at jeg ikke kan si noe om hvordan virkeligheten faktisk er. Det jeg presenterer blir da, hvordan jeg i samhandling med mine informanter, oppfatter virkeligheten.

Som forsker kan det være hensiktsmessig å plassere meg selv epistemologisk. Innenfor epistemologien finnes det to retninger, positivismen og interpretivisme (fortolkningsparadigme). Positivisme omhandler i stor grad naturen, og dens forskningsmetoder. Her lager forskeren hypoteser, som skal bekreftes eller avkreftes gjennom vitenskapelige forsøk. Interpretivismen står i en motsetning til positivismen. Her blir forskeren gitt rom til å tolke og etterstrebe å forstå det han forsker på. Dette innebærer at forskeren kan tolke sine data, og drøfte disse opp mot tidligere empiri og teori (Bryman, 2016).

På bakgrunn av dette har jeg i datainnsamlingsprosessen tatt videoopptak av fire elever i en 10. klasse, som løser problemløsningsoppgaver i matematikk sammen i gruppe. Jeg har også samlet inn besvarelser fra de øvrige elevene i klassen, som jobbet med å løse de samme oppgavene, individuelt. De hadde dermed ikke det naturlige språket tilgjengelig som register. Til slutt har jeg gjennomført et semi-strukturert intervju med læreren til den aktuelle klassen. Disse dataene skal hjelpe meg i arbeidet med å besvare problemstillingen min og de tilhørende forskningsspørsmålene, som er styrende for prosessen.

3.1 Forskningsdesign

3.1.1 Dokumentanalyse

Et dokument kan være alle skriftlige datakilder som er relevante for forskeren. Dokumentet omtales som alle bevarte nedtegnelser av personers tanker, handlinger eller skaperverk. For at forskeren skal kunne kalle datamaterialet sitt for et dokument, kan ikke materialet være generert av forskeren selv. Det må også være samlet inn fra en situasjon i fortiden. Dokumentanalyser tar dermed for seg levninger fra fortiden, som brukes for å belyse en problemstilling. Problemstillingen for forskningsprosjektet setter derfor rammer for hvilke dokumenter som skal analyseres, i arbeidet med dokumentanalysen (Christoffersen & Johannessen, 2012).

For å kunne undersøke problemstillingen min, var jeg avhengig av at elever løste matematiske problemløsningsoppgaver, som jeg kunne analysere. For å kunne si noe om, i hvilken grad elever bruker overganger som er verktøy i arbeid med problemløsningsoppgaver, var det behov for å analysere elevenes besvarelser. Disse skulle bidra til å belyse problemstillingen min, sammen med tidligere forskning og teori på området. Første del av datamaterialet mitt ble derfor samlet inn gjennom at elever fra den utvalgte klassen løste fire problemløsningsoppgaver. Oppgavene som ble brukt utfordret elevene på ulike måter faglig og kunne tilby flere ulike løsningsstrategier, noe som er kjennemerker for problemløsningsoppgaver (Kongelf, 2019). Etter at elevene hadde løst oppgavene ønsket jeg å se på deres løsninger og hvorvidt de har brukt overganger mellom forskjellige matematiske registre, som et verktøy for å løse de matematiske problemene. Jeg ønsket deretter å analysere elevenes løsningsstrategier ut fra teorien til Duval om bruk av overganger mellom ulike matematiske registre.

Metoden som er brukt, kan ha noen fellestrekk med en åpen spørreundersøkelse, hvor deltagerne svarer på ulike spørsmål. Undersøkelsen ikke har svaralternativer, men informantene fyller inn sine svar selv. De matematiske problemløsningsoppgavene kan på mange måter sees som spørsmål, og noen av oppgavene da også gitt i spørsmålsform. Elevene har også besvart oppgavene uten at det er gitt svaralternativer. Jeg har likevel valg og kalle min metode for dokumentanalyse, da det er elevenes besvarelse som blir analysert opp mot tidligere teori. Slik jeg ser det vil dokumentanalyse være den metoden som er best egnet til å belyse min problemstilling. For å kalle metoden dokumentanalyse, kan jeg som forsker ikke ha frembrakt dokumentet selv. Slik jeg tolker det, er det elevene som har generert dokumentene gjennom sine besvarelser, hvor jeg kun har fungert som en katalysator for denne genereringen (Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.1.2 Observasjon

Observasjon er en datainnsamlingsmetode som er godt egnet, når forskeren ønsker direkte tilgang til det som skal undersøkes. Et eksempel på dette kan være samhandling mellom elever i et klasserom. Observasjon vil i mange tilfeller være den eneste måten forskeren kan skaffe seg gyldig kunnskap om en situasjon på. Under observasjonen er forskeren til stede i det som skjer og opplever dette i nuet selv, heller enn å støtte seg på andres beskrivelser av en konkret situasjon. Under selve observasjonen vil det være mange faktorer som påvirker forskeren og hans oppfattelse av situasjonen. Tidligere opplevelser, erfaringer og kunnskap, sammen med lukt, lys, følelser, smaker osv., vil være med på å påvirke hvordan forskeren opplever det som observeres (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Observasjon kan være meget tidkrevende, og forskeren bør være sikker i sitt valg av metode, før han setter i gang med observasjonen. Ofte vil det være små grupper eller settinger som observeres. Observasjonen kan gjennomføres strukturert eller ustrukturert. Dersom forskeren gjennomfører en strukturert observasjon, vil det i forkant av observasjonen, være utarbeid et skjema med momenter forskeren har bestemt seg for å se etter under observasjonen. I skjemaet vil observatøren dokumentere hendelser som finner sted under observasjonen, gjerne i pre-definerte kategorier, som vil belyse det, det forskes på. En annen måte å dokumentere strukturerte observasjoner på kan være gjennom videoopptak. Da vil observatøren filme seansen som forskes på, og kan i ettertid gå tilbake og analysere hendelsen ut fra sine pre-definerte kategorier og kjennetegn.

Ustrukturert observasjon betyr at forskeren ikke har gjort seg opp noen meninger om hvilke detaljer det skal settes søkelys på i forkant av observasjonen (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Observatøren må i forkant av observasjonen bestemme hva hans rolle skal være gjennom observasjonen. Observatøren kan for eksempel være deltakende observatør, noe som innebærer at observatøren deltar aktivt i det som foregår. Han blir da en del av miljøet det forskes på. Observatøren kan også være ikke-deltakende. Da vil observatøren i liten eller ingen grad delta i den ordinære samhandlingen mellom objektene som det forskes på. Forskeren vil i større grad involvere seg gjennom intervjuer eller samtaler (gjort utenfor selve observasjonen), og ikke som deltaker (Christoffersen & Johannessen, 2012). Det skilles også mellom åpen og skjult observasjon. I en skjult observasjonssetting vil deltakerne i motsetning til åpen observasjon ikke være klar over at de blir observert (Bulmer, 1982).

Gjennom mitt prosjekt, ønsket jeg å sikre at alle representasjonsformene var tilgjengelige for elevene. Som en konsekvens av dette var det viktig å ikke utelukke språket som representasjonsform. For å gjøre denne representasjonsformen tilgjengelig for noen elever, ble en liten gruppe på 4 elever tatt med på et annet rom. Her kunne elevene snakke sammen og bruke språket aktivt som representasjonsform i arbeidet sitt. For å kunne analyse elevenes samtaler opp mot deres besvarelser i ettertid, var jeg som forsker avhengig av å ha tilgang til deres samtaler. Det ble da ansett som mest gunstig å ta videoopptak av elevenes løsningsprosess, slik at jeg enkelt kunne finne igjen hva som ble sagt i arbeidet med de forskjellige oppgavene. I rommet der elevene satt, ble det derfor satt opp kamera. Kameraet filmet bordet elevene arbeidet ved, uten at elevenes ansikt ble tatt med på videoen, da dette ikke vil være relevant for datasettet.

Gjennom observasjonen var jeg som observatør ikke-deltakende. Dette fordi elevene i størst mulig grad skulle løse de matematiske problemene på egenhånd, uten hjelp fra andre. Jeg ville ikke forstyrre elevene i deres arbeid, da verken elevene eller jeg kjente hverandre. Dersom jeg hadde vært deltagende observatør, kunne dette blitt opplevd som påtrengende av elevene. Observasjonen ble gjennomført som en åpen observasjon, hvor alle deltakere var gjort oppmerksom på at de ble observert og filmet. Elevenes foresatte hadde også signert samtykkeerklæring, som var samlet inn i forkant av observasjonen (se vedlegg 2). Samtykkeerklæringen var også godkjent av NSD før observasjonen startet (Norsk senter for forskningsdata) (se vedlegg 1).

3.1.3 Intervju

Kvalitative intervju er den datainnsamlingsmetoden, som er mest brukt for å samle inn kvalitative data. Det er en metode som gir forskeren tilgang til intervjuobjektets tanker, intensjoner, erfaringer, følelser og meninger m.m. I dette prosjektet var det hensiktsmessig å gjennomføre et kvalitativt intervju, ettersom jeg ønsker tilgang til lærers erfaringer, intensjoner og tanker rundt representasjoner og overganger mellom disse. Jeg ønsket også å finne ut hvordan den aktuelle klassen har arbeidet med problemløsningsoppgaver i forkant av datainnsamlingen. Målet med et kvalitativt intervju er å beskrive et fenomen. For å kunne tolke og analysere beskrivelsene som kommer frem gjennom intervjuet, trenger forskeren å ha tilgang til datamaterialet i ettertid. Det er derfor vanlig å bruke lydopptak eller tilsvarende opptaksmetoder, slik at datamaterialet blir tilgjengelig for forskeren over tid. Etter at intervjuet er gjennomført, transkriberes innholdet fra opptakene, til senere analyse av dataene (Christoffersen & Johannessen, 2012, s.77).

Oppbygningen av et kvalitativt intervju kan variere fra strukturert med faste svaralternativer- til ustrukturert intervju uten planlagte spørsmål. Som en mellomting av strukturerte- og ustrukturerte intervjuer, har vi semi-strukturerte intervjuer. I denne intervjuformen vil spørsmålene i noen grad være fastsatt på forhånd. Forskeren har utformet en intervjuguide, som vil fungere som en overordnet veileder gjennom intervjuet. Rekkefølgen på spørsmål og tema kan variere og tilpasses til hvordan det enkelte intervjuet forløper. I tillegg vil denne intervjuformen åpne for at forskeren kan stille spontane oppfølgingsspørsmål underveis (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Som en del av mitt datamateriale, har jeg valgt å gjennomføre et intervju på ca. 15 minutter. Intervjuobjektet var læreren til matematikklassen, som har deltatt i forskningsprosjektet.

Intervjuet med læreren ble gjennomført som et semi-strukturert intervju, hvor det var mulighet for oppfølgingsspørsmål underveis. I forkant av intervjuet hadde jeg laget en intervjuguide, som skulle danne grunnlaget for intervjuet (se vedlegg 5). Den bestod av 11 spørsmål, hvor alle dreide seg om lærerens tanker, holdninger og praksis rundt representasjoner og problemløsningsoppgaver. Underveis i intervjuet var det muligheter for å stille oppfølgingsspørsmål. Det ble imidlertid ikke stilt mange slike spørsmål gjennom intervjuet, da det ikke var naturlig eller nødvendig, ut fra svarene læreren ga.

Intervjuet av læreren ble gjennomført for å få kunnskap om lærerens tanker og holdninger til å bruke overganger aktivt, i arbeidet med problemløsningsoppgaver i matematikk. Jeg ønsket også å finne ut av hvilken tilnærming læreren hadde til å arbeide målrettet med å bruke overganger i problemløsningsoppgaver, som en del av matematikkundervisningen Hensikten med intervjuet var også å få kunnskap om hvordan elevene har arbeidet med overganger mellom ulike representasjoner tidligere. Forskning på feltet tilsier at lærerens tilnærminger og elevenes tidligere erfaringer påvirker deres prestasjoner og ferdigheter i arbeid med overganger mellom ulike representasjoner (Ozgun-Koca, 1998; Stylianou, 2011). Jeg ville på bakgrunn av dette kartlegge elevenes erfaringer med å bruke overganger mellom forskjellige representasjoner, som et hjelpemiddel i arbeidet med problemløsningsoppgaver i matematikken. Den som var best egnet til å si noe om dette, var etter mitt syn læreren, som er ansvarlig for undervisningsopplegget til elevene. Informasjonen som fremkom i intervjuet, vil være ett bidrag til å belyse forskningsspørsmålene mine og problemstillingen.

3.2 Utvalg

Noe av det som kjennetegnet kvalitativ metode, er at forskeren ønsker å få informasjon om et begrenset antall mennesker. For å kunne tilegne seg denne informasjonen må disse menneskene velges ut. Dette er det som kalles utvalg av informanter, og vil være det som danner utvalget i en studie. Utvalget skal også være med på sikre at all nødvendig data blir samlet inn. Det er derfor viktig at forskeren i utvelgelsesprosessen gjør et grundig arbeid (Christoffersen & Johannessen, 2012).

3.2.1 Valg av skole og klassetrinn

For å finne informanter til å delta i min studie måtte jeg først bestemme meg for hvilke informanter utvalget skulle bestå av. Valget falt på 10. klasse elever fra en norsk skole, samt deres matematikklærer. Dette fordi jeg ønsket å se på elevers bruk av overganger i arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver. Jeg tok derfor utgangspunkt i eksempeloppgaver utarbeidet av Matematikksenteret hentet fra Udir.no. Disse oppgavene var laget som øvingsoppgaver til eksamen for elever på 10. trinn. Det ville derfor være naturlig at 10. trinns elever, skulle løse oppgavene, da disse ville være nivåtilpasset til den aktuelle elevgruppen. Videre fortsatte arbeidet med å finne informanter som ønsket å delta i studien.

I arbeidet med å finne informanter som ville delta i studien, tok jeg kontakt med fire forskjellige ungdomsskoler. En ungdomsskole sa seg villig til å delta i prosjektet. Jeg valgte da å gjennomføre datainnsamlingen på denne skolen. Gjennom studiet har jeg hatt flere praksisperioder ved denne skolen. Det var naturlig å ta kontakt med denne skolen, fordi jeg hadde etablerte kontakter der. Jeg valgte å henvende meg til rektor, for å få avklart om en matematikklærer på 10. trinn, var villig til å delta i studien. Rektor bekreftet at en lærer ville delta. Jeg hadde verken kjennskap til den aktuelle læreren eller klassen fra praksis. Ettersom elevene skulle løse eksamensoppgaver for 10.trinn, var det naturlig å finne informanter på dette trinnet. Da ville oppgavene være tilpasset elevenes forventede faglige nivå.

Det finnes flere ulike typer utvalg. Et homogent utvalg, er en gruppe informanter som har en felles tilhørighet. Siden alle elevene gikk på den samme skolen, i den samme klassen og hadde den samme matematikklæreren, kan utvalget omtales som et homogent utvalg. I tillegg ønsket jeg å finne ut mer om likheter, ulikheter og fenomener innenfor denne gruppen mennesker (Christoffersen & Johannessen, 2012).

Utvalget ble det i to, hvor fire elever skulle løse oppgavene i samarbeid på et annet rom. Disse elevene ble trukket ut tilfeldig, blant alle elevene som hadde samtykket til å delta på videoopptak. Samtykkeskjemaene ble brukt til dette.
Alle de 21 elevene som var til stede i klassen under datainnsamlingen hadde signert for at de ønsker å delta, enten på oppgaveløsning eller videoopptaket. Det var derfor ingen elever til stede, som ikke deltok i studien. De elevene som ikke deltok i gruppen, arbeidet med de samme oppgavene individuelt, i klasserommet.

3.2.2 Utvelgelse av oppgaver

Som nevnt over, ble det i datainnsamlingen brukt eksempeloppgaver laget til eksamen på 10. trinn. Disse oppgavene er tilpasset forventet kompetanse på klassetrinnet. I tillegg har det skjedd en endring ved at eksamensoppgavene er tilpasset læreplanen. Eksamensoppgavene er dermed utviklet for å teste elevers kunnskap opp mot læreplanens målsettinger. I og med at representasjoner og problemløsning er kjerneelementer i læreplanen, vil det være naturlig å anta at disse elementene er en del av eksamensoppgavene for 10. trinn.

Oppgavesettet jeg brukte, er hentet fra Udir.no og er utviklet av matematikksenteret. Hele oppgavesettet er beregnet på en hel skoledag. I prosjektet mitt hadde elevene en skoletime tilgjengelig. Dermed ble det viktig å velge problemløsningsoppgaver som kunne løses innenfor denne tidsrammen. I utvelgelsesprosessen ble det derfor viktig å se på oppgavenes egenskaper. Oppgavene måtte være egnet til å belyse hvorvidt elevene bruker overganger mellom ulike representasjoner, som verktøy i arbeidet med problemløsningsoppgaver. Det var avgjørende, at oppgavene som ble brukt, la opp til at elevene faktisk kunne bevege seg mellom forskjellige representasjoner i løsningsprosessen. Dette var en forutsetning for at besvarelsene til elevene skulle kunne brukes til å belyse forskningsspørsmålene mine og problemstillingen.

Representasjon og kommunikasjon er et eget kjerneelement i LK20. Jeg valgte derfor å ta utgangspunkt i at oppgavene i del 2 av eksempelsettet, la opp til at elevene skulle ha mulighet til å vise kunnskaper innenfor dette kjerneelementet. Jeg valgte deretter ut oppgaver, som jeg mener er egnet til at elevene kan benytte seg av overganger mellom forskjellige typer representasjoner gjennom løsningsprosessen. I tillegg prøvde jeg å velge oppgaver, hvor det vil være naturlig å bruke ulike former for representasjoner. Dette var ment å skulle sikre at elever som eventuelt ikke mestrer å gjøre overganger mellom ulike representasjonene i en oppgave, skulle ha muligheter for å mestre overganger til aktuelle representasjonene i en annen oppgave.

3.3 Oppgavene

3.3.1 Oppgave 1

Vi har likningen (4 − a) (4 + b) = 8
Det finnes flere tallpar som gjør at denne likningen blir gyldig.

Gi eksempler på tre slike tallpar.

Bilde 3.1 - Oppgave 1, hentet fra Udir.no

Den første oppgaven er en oppgave hvor elevene skal finne og gi tre eksempel på tallpar som gjør likningen gyldig. For å løse oppgaven kan en benytte flere forskjellige løsningsstrategier. En strategi kan være å sette inn ulike verdier for a og b, for å se hvilke tall som gjør likningen gyldig. Da vil behandlingen av det matematiske objektet skje i samme register som oppgaven er oppgitt i. En annen måte å løse oppgaven på, kan være å løse den ved hjelp av samme metode, men som en mental prosess. Det vil kreve en overgang fra startrepresentasjonen, en algebraisk representasjon, over til en mental representasjon av det matematiske objektet. Behandlingen gjort til det matematiske objektet vil være den samme som om en løser problemet i starterepresentasjonen.

3.3.2 Oppgave 2

Siden 2018 har pant på plastflasker vært 2 kr for små flasker og 3 kr for store flasker.

Ali har pantet flasker for 109 kr.

Til sammen pantet han 51 flasker.

2 PANT

3 PANT

Hvor mange små og store plastflasker pantet Ali?

Sett opp, forklar og løs et likningssett som beskriver den praktiske situasjonen.

Bilde 3.2 - Oppgave 2, hentet fra Udir.no

I oppgave to blir elevene bedt om å lage to likningssett. Målet med oppgaven er å finne ut hvor mange flasker Ali har pantet, av hver sort. For å løse oppgaven kan elevene sette opp et likningssett. Dette krever at det gjøres en overgang fra det naturlige språket, som er startrepresentasjonen til problemet, over til å representere det matematiske objektet ved hjelp av likninger. Ettersom likningssett er etterspurt i oppgaven, vil dette være den korrekte måten å løse oppgaven på. Videre må likningssettet løses, og elevene må, dersom de ikke ser løsningen direkte, gjøre en rekke behandlinger til det matematiske objektet. Da vil det være aktuelt for elevene å bruke flytte-bytte regelen, for å på denne måten finne de to ukjente. Som en konsekvens av at likningssett som representasjonsform er oppgitt i oppgaven, blir elevenes valg styrt av å gjøre behandling til det matematiske objektet i dette registeret. Muligheten til å kunne velge den representasjonsformen, som elevene selv mener er den mest hensiktsmessige for å løse problemet, er dermed begrenset i denne oppgaven.

3.3.3 Oppgave 3

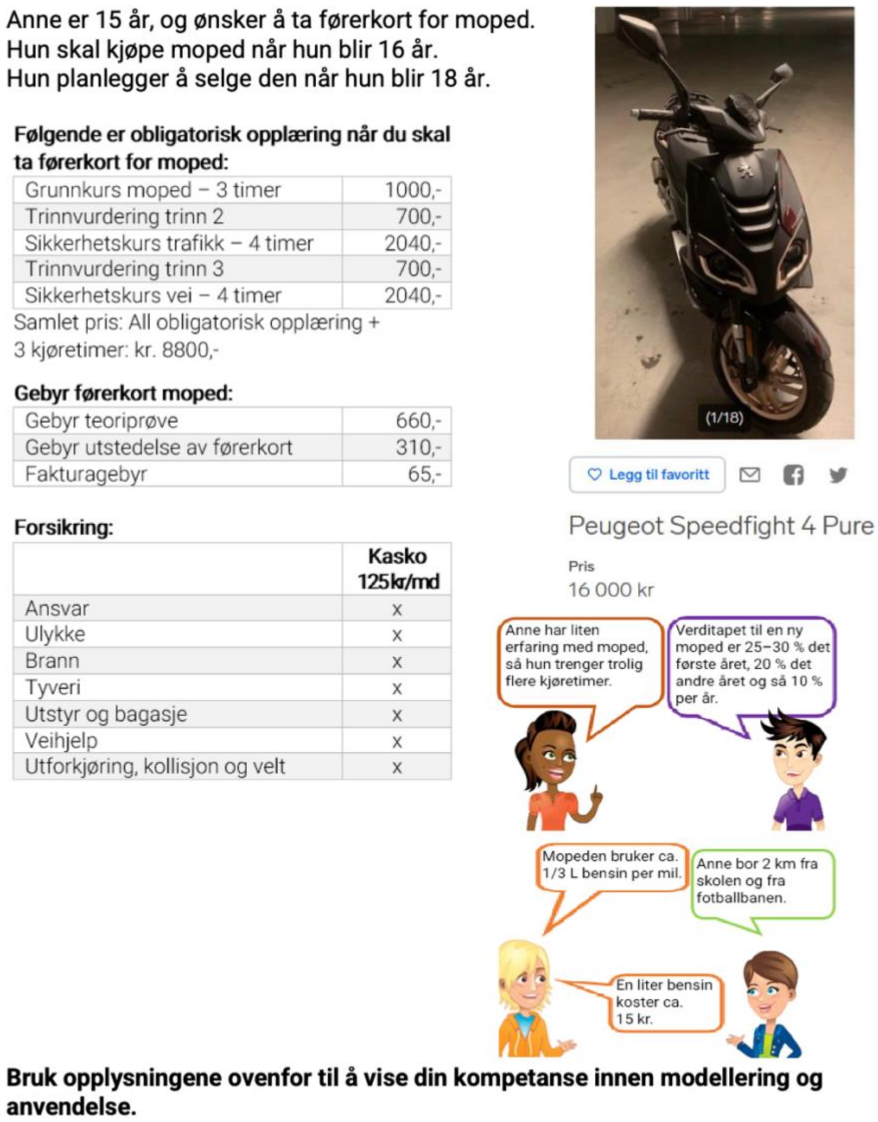
Formelen for figur *n* i et mønster er: $F_n = n^2 + 1$

Lag de tre første figurene i dette mønsteret.

Bilde 3.3 - Oppgave 3, hentet fra Udir.no

Denne oppgaven løses gjennom å lage de tre første figurene i mønsteret som er oppgitt i startrepresentasjonen til oppgaven. Gjennom det matematiske objektet, slik det blir representert i startrepresentasjonen, får problemløseren tilgang til en rekke egenskaper ved det matematiske objektet. Oppgaven vil derfor kreve, at problemløseren gjennom all matematisk aktivitet som gjøres til det matematiske objektet, klarer å ivareta dets egenskaper. Disse egenskapene forventes å bli representert i målrepresentasjonen i samme grad som i startrepresentasjonen. Oppgaven kan blir løst med ulik grad av nøyaktighet med tanke på å representere alle de ulike egenskapene ved det matematiske objektet. Det kan også diskuteres hvorvidt ulik vektlegging av ulike egenskaper, fører til korrekt løsning eller ikke.

3.3.4 Oppgave 4


Anne er 15 år, og ønsker å ta førerkort for moped.
Hun skal kjøpe moped når hun blir 16 år.
Hun planlegger å selge den når hun blir 18 år.

Følgende er obligatorisk opplæring når du skal ta førerkort for moped:

Grunnkurs moped – 3 timer	1000,-
Trinnvurdering trinn 2	700,-
Sikkerhetskurs trafikk – 4 timer	2040,-
Trinnvurdering trinn 3	700,-
Sikkerhetskurs vei – 4 timer	2040,-

Samlet pris: All obligatorisk opplæring + 3 kjøretimer: kr. 8800,-

Gebyr førerkort moped:

Gebyr teoriprøve	660,-
Gebyr utstedelse av førerkort	310,-
Fakturagebyr	65,-

Forsikring:

	Kasko 125kr/md
Ansvar	x
Ulykke	x
Brann	x
Tyveri	x
Utstyr og bagasje	x
Veihjelp	x
Utforkjøring, kollisjon og velt	x

Bruk opplysningene ovenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.

Bilde 3.4 - Oppgave 4, hentet fra Udir.no

Den siste oppgaven stiller krav til elevenes kunnskaper innenfor modellering og anvendelse. Gjennom løsning av oppgaven, skal elevene på valgt måte, legge en plan for hvilke utgifter Anne vil få i forbindelse med å ta moped-sertifikatet. Startrepresentasjonen i oppgaven består av ulike elementer, ved at det matematiske problemet er representert i tabeller og gjennom det naturlige språket, i form av tekst. Det faktum at oppgaven har flere former for startrepresentasjoner, krever at elevene i arbeid med denne oppgaver er nødt til å gjøre overganger. Det vil være en stor fordel for elevene hvis de klarer å representere hele det matematiske problemet i samme representasjonssystem. Det vil her være naturlig å lage et slags budsjett, hvor eventuelle utgifter og inntekter blir satt opp i en tabell. Dette for at problemløseren enkelt kan holde kontroll over alle utgifter som påløper gjennom den gitte perioden.

3.4 Datamaterialet

3.4.1 Registrering av data

Data i dette prosjektet ble registrert på tre ulike måter.

Noen av elevene i en klasse ble satt til å løse problemløsningsoppgaver individuelt. Besvarelsene, som ble skrevet for hånd, med blyant og papir, ble samlet inn så snart økten var ferdig. Det forelå ingen digitale filer fra dette arbeidet. Arkene med elevenes skiftelige arbeid, utgjorde denne delen av datamaterialet, brukt i prosjektet. Elevenes besvarelse ble senere analysert med utgangspunkt i denne oppgavens teoridel.

Fire elever fra den samme klassen løste de samme oppgavene i gruppe. Denne økten ble også tatt opp på video. Dette ble gjort for å sikre at språket var tilgjengelig som representasjon for disse elevene. Videoen ble filmet med et kamera fra Høgskolen på Vestlandet sin lærings-lab. Kameraet var egnet til å få med alle detaljer. Det ble også koblet en trådløs mikrofon til kameraet, for å sikre best mulig lyd til opptaket. Mikrofonen ble lagt ved enden av bordet hvor elevene satt, slik at denne ikke skulle bli et forstyrrende element i oppgaveløsingen. Kameraet ble satt opp med et stativ, og pekte ned på bordet elevene satt rundt, uten at elevenes ansikter kom med på videoen. Opptaket ble gjort for å sikre nødvendige data fra arbeidet. Det kan tenkes at kameraet kan ha vært et forstyrrende element for elevene, men ingen av de fire elevene uttrykte noe om dette, eller bar preg av at kameraet forstyrret i prosessen. Videoopptaket gjorde at jeg som forsker, kunne studere elevenes besvarelser, mens jeg så på videoopptaket og lyttet til deres samtaler rundt de aktuelle oppgavene.

I siste fase av datainnsamlingen, ble det gjennomført intervju med matematikklæreren for klassen. Intervjuet foregikk på et grupperom, hvor bare jeg og den aktuelle læreren var til stede. Intervjuet ble tatt opp på mobiltelefon, ved hjelp av en mikrofon som ble koblet til telefonen. Dette ble gjort i tråd med rådene fra de ansatte på Læringslabben på HVL som mente at denne metoden var den mest hensiktsmessige, ettersom at det ikke forelå personsensitive data i prosjektet. Det var dermed ikke nødvendig å lagre data på en enhet som ikke var koblet til internett eller tilsvarende.

3.4.2 Behandling av data

Etter at data var samlet inn, ble både intervju og video transkribert. I første omgang ble intervjuet og samtalene fra videoen skrevet ut ordrett. For å lettere kunne bruke elevenes og lærerens utsagn i analysedelen av oppgaven, ble noen utsagn justert, ved at svært muntlig språk ble gjort noe likere skriftspråket, uten at innholdet endret seg. Dette ble gjort for at utsagnene skulle bli noe mer leservennlig. Alle fyllord som hmm, eh, liksom og lignende, har i stor grad blitt fjernet i denne prosessen. I tillegg har det blitt satt punktum, hvor det i skiftelig språk ville være naturlig. Det ble også tatt et valg om å skrive alle matematiske uttalelser av symboler og tall, som semiotiske representasjoner. Dette ble gjort for å skille matematiske uttalelser fra mer dagligdagse tema. Hensikten var å gjøre empirien mer tilgjengelig og lettlest for leseren, slik at denne lettere skulle greie å skille elevenes representasjoner av det matematiske objektet, fra annen dialog.

3.4.3 Analysestrategier

Valg av metode, påvirker hvilke analysestrategier som vil være best egnet, når forskeren senere skal analysere datamaterialet. Ut fra hva forskeren vil ha svar på, må en analysestrategi velges for å systematisere og kategorisere datamaterialet (Christoffersen & Johannessen, 2012). For å kunne belyse problemstillingen min, må jeg som forsker, analysere datamaterialet jeg har samlet inn. En forutsetning for å kunne gjennomføre denne analysen, er at jeg vet hva jeg ser etter i forskningsprosjektet. Det kommer fram av problemstillingen min, at målet med prosjektet er å finne ut i hvilken grad elever bruker overganger mellom ulike registre aktivt, som et verktøy i arbeid med problemløsningsoppgaver. Dette innebærer at jeg som forsker ønsker å utforske og beskrive mine informanters erfaringer med og forståelse av bruk av ulike registre i arbeidet med problemløsningsoppgaver. En slik analysestrategi er typisk for kvalitativ forskning, hvor forskeren streber etter å finne ut meningen bak et fenomen, gjennom en gruppe menneskers øyne (Christoffersen & Johannessen, 2012).

I den delen av datamaterialet som har blitt analysert i form av dokumenter, vil jeg definere analysestrategien som semiotisk dokumentanalyse. Semiotikk er studien om tegn eller tegnsystemer. En semiotisk dokumentanalyse kan derfor brukes i analyse av både muntlig og skiftelig språk, sammen med tegnsystemer. Selv om semiotisk analyse først og fremst er en analyse av tegn, kan den innebefatte bilder, lyder, lys- og lydsignaler, symptomer m.m. i en bred forståelse. En semiotisk analyse er også en analyse av hvordan vi gjennom kommunikasjon, skaper mening og det er også en analyse av hvordan vi utrykker oss. Forskeren i denne typen analyse, er interessert i å forstå hvilke tegn som brukes for å fremstille et tema, i tillegg til hvordan fremstillingen blir gjort (Christoffersen & Johannessen, 2012).

En slik forståelse kan sees i sammenheng med problemstillingen min, hvor jeg som forsker ønsker å finne ut hvordan elever bruker ulike matematiske representasjoner i sitt arbeid med problemløsningsoppgaver. Gjennom en analyse av elevenes besvarelser, har målet vært å få en dypere forståelse for hvordan de bruker semiotikk for å fremstille det matematiske problemet (temaet), og hvilken representasjonsform de velger å bruke (hvordan de velger å fremstille det matematiske problemet). Det har også vært sentralt å undersøke hvordan elevene bruker ulike tegn. Dette er analysert opp mot relevant teori, hvor jeg har tatt utgangspunkt i Duvals (2006) teori om overganger mellom ulike registre, men også har trukket paralleller til andre forskeres teori innenfor samme felt.

Både videoopptaket av elevene i gruppe og lydopptaket av intervjuet med læreren, er analysert ut fra relevant teori på området. I analysen av videoopptaket, har jeg som forsker sett etter hvordan, hvorfor og når overganger og behandling brukes av elevene. Dette er gjort med utgangspunkt i Duvals (2006) definisjoner av de to begrepene.

I analysen av intervjuet med læreren, har jeg som forsker prøvd å finne ut mer om hvilke tanker og holdninger læreren har til representasjoner og overganger i matematikkundervisningen. Jeg har også prøvd å få et bilde av hvordan læreren bruker disse i praksis. Utgangspunktet for analysen av intervjuet har vært lærerens utsagn, sett i lys av de ulike momentene i Duvals (2006) teori.

3.5 Studiens troverdighet

3.5.1 Reliabilitet

Reliabilitet handler om datamaterialets troverdighet. Hvilke data som samles inn, måten de bli samlet inn på og hvordan de bearbeides, vil påvirke studiens reliabilitet (Christoffersen & Johannessen, 2012). I undervisningsforskning vil det være mange faktorer som påvirker studiens pålitelighet. Noen av disse faktorene er deltagernes form, innstilling, utholdenhet og eventuelle bekymringer. Dette er faktorer som er egnet til å påvirke deltagernes prestasjoner, og dermed også datamaterialet som blir produsert. Alle elevene vil ikke være like klare og fokuserte på et gitt tidspunkt, og besvarelsene vil derfor variere i kvalitet. Datamaterialet vil dermed heller ikke representere disse elevenes ferdigheter fullt ut, i det gitte tidsrommet der de ikke var klare og fokusert (Bryman, 2016). Det kan videre tenkes at elevene kan ha blitt kognitivt slitne utover timen, og at fokuset har avtatt utover økten, noe som kan ha påvirket elevenes prestasjoner og besvarelser på tidspunktet. En tredje faktor som kan ha vært med på å påvirke elevenes besvarelser, er eventuelle vanskeligheter i oppstartfasen. Det er en risiko for at slike vanskeligheter kan føre til manglende tro på egne ferdigheter og dermed også påvirke selvtilliten til elevene i arbeidet med problemløsningsoppgavene. Dette innebærer at forskeren, i prosjekter med små populasjoner, kan forvente noen grad av variasjon, dersom samme studie blir gjennomført i på ny i samme populasjon.

Et annet forhold som vil kunne påvirke reliabiliteten til studien min, er hvordan observasjonen av elevene i gruppe ble gjennomført. Ifølge Robson (2011) er observatøren selv, det standardiserte måleinstrumentet. Det innebærer at jeg som forsker har gjennomført denne undersøkelsen selv, og er da også da ansvarlig for fremstillingen av dataene. I prosessen kan det dermed ha forekommet ulike miljømessige distraksjoner, avbrytelser eller også feil i transkripsjonene. Dette vil være en risiko for transkripsjonene av både intervjuet og av videoen, som er en del av datagrunnlaget (Robson, 2011). For å redusere risikoen for slike feil, er det viktig at jeg er forsiktig og ærlig i analyseprosessen, og at jeg som forsker også kan vise at jeg har vært det. Ved å dokumentere og legge frem hele datamaterialet mitt, slik at det er tilgjengelig for andre, mener jeg at dette er godt ivaretatt i studien. Jeg har hatt fokus på å være åpen og ærlig gjennom hele prosjektet, ikke minst i presentasjonen av datamaterialet og i valg av analysestrategi. Disse faktorene vil være med på styrke reliabiliteten til studien.

3.5.2 Validitet

Validitet er et mål på hvorvidt resultater og funn som er gjort i studien, gir svar på det som undersøkes eller ikke. Målet med denne studien er å finne ut i hvilken grad elever på 10.trinn bruker overganger mellom ulike representasjoner som et verktøy i sitt arbeid med problemløsningsoppgaver. Dette ble undersøkt gjennom å samle inn konkrete data fra én 10.klasse på én norsk ungdomsskole, samt å gjennomføre ett intervju med matematikklæreren til den aktuelle klassen. Data ble samlet inn fra én økt, hvor elevene arbeidet med fire ulike problemløsningsoppgaver og fra ett intervju med læreren. Dette gjør at datamaterialet er begrenset. Det vil dermed være vanskelig å trekke noen allmenngyldige slutninger knyttet til problemstilling og forskningsspørsmål for studien, basert på de genererte dataene. Studien kan imidlertid gi et bilde av i hvilken grad elever i denne aktuelle klassen, bruker overganger mellom ulike representasjoner som et verktøy i arbeid med problemløsningsoppgaver. Det kan tenkes at overganger mellom ulike representasjoner vil kunne forekommer i tilsvarende grad i andre 10. klasser, både på denne og andre skoler, dersom studien hadde blitt gjennomført i en større populasjon. Hvorvidt det er slik, er det ikke mulig å si noe om i denne studien. Studien gir ett lite bilde av en større helhet, og er ett bidrag for å belyse representasjoners rolle i matematikkundervisningen på 10. trinn i den norske skolen.

En faktor som kan være med på å styrke validiteten til studien, er at det er brukt flere datainnsamlingsmetoder. Dette gjør at man kan se den aktuelle situasjonen fra flere synsvinkler, og dette kalles gjerne triangulering (Robson, 2011). I forskningsprosjektet har jeg brukt dokumentanalyse, observasjon og intervju, og på denne måten kan den aktuelle situasjonen belyses fra tre forskjellige synsvinkler. Observasjonen som ble gjennomført gav et innblikk i hvordan elevene i gruppe brukte det naturlige språket som register, når de gjorde overganger mellom ulike representasjoner. Analysen av alle elevenes skriftlige besvarelser, gav en oversikt over hvordan elever arbeidet med overganger mellom ulike representasjoner på papiret, både med og uten det naturlige språket tilgjengelig som register. Til slutt gav intervjuet med matematikklæreren til den aktuelle klassen, et innblikk i hvilke forutsetninger elevene hadde for arbeid med problemløsningsoppgaver, og da spesielt med tanke på å bruke overganger mellom ulike representasjoner aktivt, som et verktøy i dette arbeidet. Det at jeg tok opp intervjuet med læreren på lydopptak og filmet observasjonen av elevene i gruppe på video, gav meg muligheten til å se og lytte til disse flere ganger. Dette har gitt meg et bedre grunnlag for å presentere og gjennomføre de tolkninger som er gjort av datamaterialet.

Jeg gjennomførte intervjuet med læreren, rett etter at jeg hadde gjennomført observasjonen og samlet inn besvarelsene fra elevene i klassen. Dermed hadde jeg ikke hatt mulighet til å gjennomgå denne delen av datamaterialet før intervjuet. Hadde det vært gjort, kunne jeg kanskje ha justert intervjuguiden noe, med bakgrunn i innholdet i besvarelsene. Dette kunne muligens bidratt til å gi et enda bedre innblikk i elevenes erfaringer med, og deres forutsetninger for, de gitte overgangene som ble utført i arbeidet med problemløsningsoppgavene.

Validiteten på data i en studie, kan også påvirkes av når i studien data blir samlet inn (Jacobsen, 2000). I mitt prosjekt ble data samlet inn forholdsvis sent. Datainnsamlingen ble utsatt på grunn av pandemien, dermed fikk jeg ikke samlet inn data i tråd med planen. Det var utfordrende å finne en klasse som ville delta i prosjektet, og jeg kontaktet fire skoler uten å få svar. Fordelen med at data ble samlet inn relativt sent i prosjektet, var at jeg fikk god tid til å sette meg inn i teori og tidligere forskning på feltet, forut for innsamlingen. Dette kan bidra til styrke validiteten i studien. Ifølge forskning på området, kan det å samle inn data sent i forskningsprosjekter, føre til at forskeren er mer fokusert og har mer kunnskap om det fenomenet som undersøkes (Jacobsen, 2000).

3.6 Etiske betraktninger

I undersøkelser som involverer barn, er det særlig viktig å ta stilling til eventuelle etiske utfordringer knyttet til prosjektet. Allerede i arbeidet med utforming av problemstillingen bør det gjøres en vurdering av hvilke etiske konsekvenser problemstillingen får for de involverte. Formålet med studien bør ikke være å utvikle vitenskapelig kunnskap alene, forskeren bør også bidra positivt til elevenes læring, og kunne begrunne studien i elevenes utbytte av det som gjøres (Christoffersen & Johannessen, 2012). Som en del av forskningsprosjektet, løste elevene problemløsningsoppgaver. Dette er god trening for elevene i å få bruke sine matematiske kunnskaper til å løse kompliserte matematiske problemer. De aktuelle problemløsningsoppgavene var hentet fra eksempeloppgaver til eksamen for 10.trinn, noe som gjør at elevene også får trent seg på relevante eksamensoppgaver og det å være i en slags eksamenssituasjonen.

I forkant av datainnsamlingen ble det sendt søknad til NSD. Dette ble gjort for å sikre at prosjektet falt innenfor regelverket, og at data ble samlet inn på riktig og lovlig måte. Sammen med søknaden ble det lagt ved samtykkeskjema både for elevene og læreren som deltok i prosjektet. I tillegg ble det lagt ved en intervjuguide, som dannet rammene for intervjuet som skulle gjennomføres med læreren. Søknad ble godkjent, og ligger vedlagt. (Se vedlegg 1)

I Norge er det NESH (Den nasjonale forskningsetiske komité for samfunnsvitenskap og humaniora) som har utviklet forskningsetiske retningslinjer. Disse retningslinjene er inndelt i tre ulike kategorier. Den første av disse omhandler informantens rett til selvbestemmelse og autonomi. Deltakelsen i prosjektet var frivillig. I forkant av datainnsamlingen fikk både elever og lærer utdelt samtykkeskjema. Det var utarbeidet et eget skjema til læreren. Elevene fikk skjemaene med seg hjem, hvor de i samarbeid med foreldrene, fikk bestemme selv om de ønsket å delta i studien eller ikke. Alle informantene ble, i skjema, også gjort oppmerksomme på sine rettigheter til å trekke sin deltakelse når som helst i prosjektet. Alle fikk informasjon om hvordan data som ble samlet inn skulle behandles, og at de ved studiets slutt, skulle destrueres. I tillegg til å få informasjon om dette i samtykkeerklæringen, ble det også informert om muntlig, til alle involverte, den dagen datainnsamlingen fant sted. Dermed var alle deltakerne klar over denne muligheten.

Informanter som deltar i forskningsprosjekter, har rett til at forskeren respekterer deres privatliv. Den eneste personopplysningen som ble samlet inn i prosjektet var underskrifter på samtykke fra elevenes foreldre. Alle data ble transkribert anonymt, og ingen av informantene kan bli gjenkjent i prosjektet. I forkant av videoopptaket, ble det gjort tiltak for at elevenes ansikter ikke skulle vise på opptaket, noe som var vellykket.

Forskeren er videre ansvarlig for å unngå skade. Dette innebærer at informantene ikke skal komme til skade i datainnsamlingsprosessen. I og med at informasjonen som ble samlet inn i prosjektet, ikke anses å være sensitiv, samt at informantene satt i ro på stolene sine under oppgaveløsningen, og dermed vanskelig kunne komme til skade, som en konsekvens av datainnsamlingen, var dette lite relevant for mitt prosjekt.

4 Analyse

I dette kapitlet vil resultatene fra datainnsamlingen min bli presentert. Disse vil legges frem uten noen form for drøfting. For at denne delen av oppgaven skal være mest mulig oversiktlig, har jeg delt resultatene inn i fire kategorier, som hver presenterer relevante data for kategorien.

Dataene vil analyseres med utgangspunkt i Raymond Duvals teori, samt valgt metode brukt i datainnsamlingen. Dette vil forhåpentligvis gi et godt grunnlag til å belyse og besvare problemstillingen og forskningsspørsmålene mine.

4.1 Naturlig språk som register

4.1.1 Oppgave 1

Som nevnt tidligere, filmet jeg en økt, der fire elever sammen, skulle løse de samme oppgavene som resten av klassen var satt til å løse individuelt. De som løste oppgaver i gruppe kunne snakke sammen, det kunne ikke resten av klassen. Denne forskjellen ble gjort for å undersøke om språket som representasjon, kunne ha betydning for oppgaveløsningen. I matematikk brukes ofte språket aktivt i arbeidet. Det kunne dermed representert en svakhet i studien, dersom språket ikke var ivaretatt, som egen representasjon.

I den første oppgaven ble elevene bedt om å finne tre tallpar, som gjorde at den gitte likningen ble gyldig. I videoen fremkommer det at elevene i gruppe, raskt beveger seg fra det semiotiske registeret og over til det naturlige språket, som representasjon for å løse oppgaven. Nedenfor følger et lite utdrag fra elevenes dialog i gruppen, i arbeidet med oppgaven. Dette er ment å illustrere noe av problemløsingsprosessen:

1. Elev 2: 4 - 1 også 4 + 1. Hvis du bytter ut a med 1 og b med 1. Det er jo forskjellige tall, det er jo forskjellige bokstaver
2. Elev 4: Ja, det er jo forskjellige tall.
3. Elev 1: Men når det er sånne tallpar, er det sånn at det må være samme tallet da?
4. Elev 2: Jeg tror ikke det kan være det. Da kan det jo være 1 og 1, 2 og 2 og 3 og 3.
5. Elev 4: Men altså, man må jo gange der da. Men hvis det er fire, hvis både a og b er 1 da blir det jo 4-1=3 der også 4+1=5.
6. Elev 2: men ganger du de eller plusser du de?

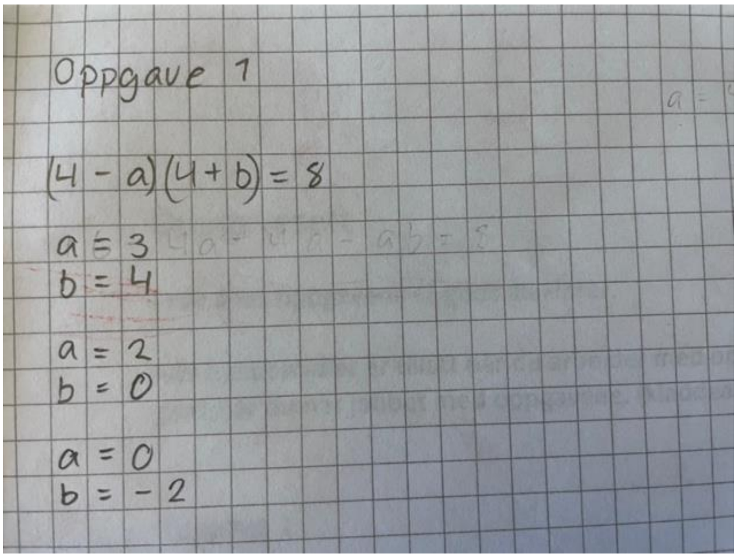
7. Elev 4: Ja, du må gange de. 3*5 er jo 15. Så da er det jo ikke 1, men må a og b være like?

Her ser vi at elevene beveger seg fra det monofunksjonelle registeret, hvor likningene befinner seg, og over til det multifunksjonelle registeret som språket utgjør (Duval, 2006). Denne overgangen krever at elevene klarer å flytte seg fra det matematiske objektet, her representert ved symboler, til å representere problemet med sitt naturlige språk. Slike overganger beskriver Janvier (1987) som en global aktivitet. Denne overgangen krever også det Duval (2006), betegner som global forståelse. Bossé med flere (2011) hevder at feil som gjøres i overganger til eller fra det naturlige språket, skiller seg fra feil som skjer i overganger mellom semiotiske registre, som grafiske representasjoner, symbolske representasjoner eller tabeller. Vanlige feil som gjøres i disse overgangene, vil være at elever ikke klarer å ta ut all nødvendig informasjon i prosessen. Dermed «mister» de essensiell informasjon, som er viktig for å klare å løse oppgaven riktig. Dette vil være typisk for ulike problemer, hvor det er behov for det Duval (2006) betegner som global forståelse.

I utdraget over, greier ikke elevene å identifisere det som egentlig var representert i den startrepresentasjonen. De begynner dermed å løse det matematiske problemet med utgangspunkt i at det er addisjon mellom de to parentesene i oppgaven, som ikke er den riktige regneformen her. Det kan tyde på at elevene i overgangen fra et matematisk objekt representert ved symboler, til det samme matematiske objektet, representert gjennom det naturlige språket, har oversett eller misforstått informasjonen i den opprinnelige representasjonen. Det opprinnelige matematiske objektet blir ikke direkte representert gjennom det naturlige språket, verken i utdraget, eller i det øvrige arbeidet med oppgaven. Elevene hopper over steget, hvor de faktisk representerer det matematiske objektet ved hjelp av det naturlige språket, og går heller direkte til behandlingen av objektet.

Til tross for at selve problemløsningen starter med en misforståelse, klarer elevene likevel å komme inn på at multiplisering er den riktige fremgangsmåten, for å løse oppgaven. Det er Elev 4 som først oppdager multiplikasjon som riktig regneform. Det er ingen av de andre elevene som stiller spørsmål ved dette, når det blir foreslått. En hypotese er at forslaget om å multiplisere, kommer mer som en konsekvens av at Elev 4 føler at oppgaven blir for enkel, dersom de kunne sette inne de samme tallene for a og b, og dermed få riktig svar. Hvorvidt elevene hadde oppdaget denne feilen, dersom de ikke hadde hatt hverandre å støtte seg på, er ikke mulig å si noe sikkert om. Det er også vanskelig å si med sikkerhet om misforståelsen i starten hadde funnet sted, uten det naturlige språket som tilgjengelig representasjon.

Slik det ser ut, har all behandling av det matematiske objektet i denne oppgaven, skjedd ved hjelp av det naturlige språket som representasjon. I disse elevenes skriftlige besvarelser, fremkommer det ikke at det er gjort noen form for behandling, ved hjelp av tegn som representasjon.



Bilde 4.1 - Elevbesvarelse, oppgave 1

Bildet viser besvarelsen til Elev 4. Alle elevene i gruppen hadde imidlertid like besvarelser på oppgaven. Som det fremgår av bildet over, blir det representert tre forskjellige tallpar, i tillegg til den opprinnelige representasjonen av oppgaven. Utover det, blir det ikke gjort videre behandling av det matematiske objektet i denne representasjonsformen/dette registeret. En forklaring kan være at all behandling av det matematiske objektet i oppgaven, ble gjort med det naturlige språket som register. En slik tilnærming, blir beskrevet av Hana (2012), når han illustrerer Duvals teori om hvordan et matematisk problem, løses mest effektivt. Problemløseren ser problemet, velger det registeret som han vurderer best egnet til å løse problemet i og gjør en rekke behandlinger av det matematiske objektet i registeret. Deretter går han tilbake til registeret det matematiske problemet først ble representert i, og oppgir løsningen i dette (Hana 2012).

I denne gruppen skjer det tilsynelatende ingen andre overganger mellom ulike registre, annet enn at elevene beveger seg fra, at likningen er representert med symboler, og flytter seg deretter over til det naturlige språket. Når de mener å ha løst oppgaven, gjør de en overgang tilbake til den symbolske representasjonen av oppgaven og oppgir svaret i den.

4.1.2 Oppgave 2

I arbeidet med oppgave 2 stopper det raskt opp for elevene i gruppen. De har ikke nødvendig kompetanse til å løse det matematiske problemet; hvordan løse oppgaver med to ukjente. Etter at de har diskutert litt sammen, ber de meg om hjelp. Elevene får informasjon om at de må lage to likninger, noe som kalles et ligningssett. Videre får de informasjon om at de ukjente må flyttes ved bruk av bytte-flytte regelen, slik at de bare har en ukjent å forholde seg til om gangen. Elevene strever med å huske fremgangsmåten, da undervisningen rundt temaet ligger tilbake i tid. Etter relativt kort tid, bestemmer de seg for å gå videre til neste oppgave. Planen er å gå tilbake til denne oppgaven, dersom de har tid på slutten av økten.

Etter å ha løst de andre oppgavene, beveger elevene seg tilbake til denne oppgaven. Nedenfor presenteres et utdrag av dialogen i gruppen.

1. Elev 1: 2-kroners flasker = 44 og 7, 3-kroners falsker.
2. Elev 2: Hva sa du nå?
3. Elev 1: 44, 2-kroners flasker og 7, 3-kroners flasker
4. Elev 2: Ja. Det blir 144, nei 42, jeg vet ikke hvordan vi regner ut det da, men det er i alle fall svaret.
5. Elev 4: Åja, vi måtte lage ligninger. 44, ja ok, men 44, hva sa du? 44 hva?
6. Elev 3: 2-kroners flasker
7. Elev 4: 44, 2-kroners flasker
8. Elev 3: Mhm
9. Elev 4: Og 7, 3-kr flasker?
10. Elev 3: Ja.
11. Elev 2: Hva var det det var, 44 eller 42?
12. Elev 3: 44.
13. Elev 2: Ok.
14. Elev 3: Hvordan blir ligningen da.
15. Elev 1: Jeg vet ikke, jeg vet bare det at da er a 44 og b er 7.

Når elevene i gruppen på ny starter arbeidet med oppgave 2, ser og representerer Elev 1 løsningen på det matematiske problemet til gruppen. Dette skaper usikkerhet og forvirring blant de andre elevene, som tilsynelatende ikke ser det Elev 1 har sett. De har ikke kommet frem til løsningen på oppgaven på tidspunktet. Elev 1 ser ut til å ha kommet frem til en løsning på det matematiske problemet, uten å ha gjort noen behandling av det matematiske objektet, verken i besvarelsen sin, eller i det naturlige språket. En slik konklusjon kan indikere at eleven har gjort en rekke behandlinger av det matematiske objektet, ved hjelp av indre representasjoner. Eleven gjør så en overgang fra sine indre representasjoner til det naturlige språket, idet eleven presenterer sine medelever løsningen på det matematiske problemet.

Etter å ha diskutert, litt frem og tilbake, hva som er det riktige svaret, kommer Elev 3 tilbake til det som egentlig var problemet gruppen skulle løse, nemlig å lage likningssett. Elev 3 lurer på hvordan likningene da blir. Elev 1, som har presentert løsningen, vet imidlertid ikke hvordan likningene ser ut. Elev 1 har funnet svaret, uten å gå veien via likningssettet, Hvilke indre representasjoner eleven faktisk har brukt, for å løse det matematiske problemet, er det ikke mulig å si noe sikkert om. Det blir dermed lite hensiktsmessig å forsøke å kartlegge hvilke interne overganger eleven har gjort i problemløsningen.

I fortsettelsen forsøker elevene å finne tilbake til, og sette opp de likningene oppgaven etterspør.

1. Elev 1: Nei, a*44 nei, a*2 for a er liksom 44 flasker, sant?
2. Elev 4: Ok, så a er 44? a er flaskene? Eller a og b er flaskene?
3. Elev 3: Skal ikke det bare være panten?
4. Elev 4: Jo, det var det jeg også tenkte.
5. Elev 2: Jo, da blir det a*44.
6. Elev 4: Ja.
7. Elev 2: Det skal vi finne ut, uten å vite at det er 44 egentlig.
8. Elev 3: Ja.
9. Elev 4: Åja, det er et veldig godt poeng. Men da må det jo være a*2 + b*3.
10. Elev 3: Ja!

I dette utdraget diskuterer elevene, hva de ulike faktorene i likningen faktisk representerer. All behandling foregår i registeret med det naturlige språket. Det er tydelig, ut fra utdraget, at elevene er usikre på, hva de ulike faktorene i oppgaven representerer. Innledningsvis virker det å være enighet blant elevene om, at det i en av likningene til likningssettet skal stå a*44. Elevene ser ut til å mene at a er en representasjon på hvor mye pant Ali får for flaskene som har panteverdi på 2 kroner. Med dette utgangspunktet vil ikke elevene kunne løse oppgaven, som er å finne ut hvor mange flasker av hver type Ali har pantet. I linje 7 i utdraget har Elev 2 et innspill, som gjør at alle elevene i gruppen må tenke nytt. Eleven forstår ikke hvordan de kan finne ut at likningen skal være a*44 + b*7=109, dersom de ikke hadde visst at antall flasker var 44 og 7. Dette utsagnet fører til at elevene forstår hva som faktisk blir representert gjennom de ulike faktorene i oppgavens startrepresentasjon. Dermed kommer de også frem til at a*2+b*3 må være en av de riktige likningene i likningssettet, som er avgjørende for å løse oppgaven. I arbeidet med oppgaven gjøres ikke andre overganger enn overgangen fra den verbale beskrivelsen gitt i oppgaven, til det naturlige språket. Elevene bruker imidlertid hverandre, og de representasjonene de har fått frem i det meste av arbeidet, for å klare å løse det matematiske problemet. Både elevene og representasjonene ser ut til å ha en funksjon som den mer kunnskapsrike andre i arbeidet med denne oppgaven. I følge Abtahi et.al. (2017), har det vært diskusjon rundt, hvorvidt tegn og da representasjoner, kan fungere som en mer kunnskapsrik annen, når det arbeides i den proksimale utviklingssonen (Abtahi, et.al., 2017). Det kan diskuteres hvorvidt elever kan bruke ulike representasjoner som en mer kunnskapsrik annen.

I elevenes skriftlige besvarelser, fremgår det at tre av fire elever har klart å sette opp et korrekt likningssett, som løsning på oppgaven. De har også gjort en korrekt overgang fra det naturlige språket tilbake til det semiotiske registeret, hvor løsningen på oppgaven blir presentert. Gjennom de tre overgangene som blir gjort i oppgaven, har de fått med seg nødvendig informasjon om det matematiske objektet, tilstrekkelig til å løse det matematiske problemet. Dermed klarer de å sette opp likningssettet for å løse oppgaven. Elevene mangler i utgangspunktet kunnskap om hvordan de skal løse likningssettet. I besvarelsene får de derfor ikke vist hvordan de har gjennomført behandlingen av det matematiske objektet, og kommet frem til løsningen. Forskning viser at overganger til og fra det naturlige språket som register, gir større risiko for feil enn andre overganger. Det er også mulighet for at viktig informasjon går tapt i overgangene (Duval 2006). Elevene på sin side, gjør disse overgangene uten at det oppstår overgangsfeil, og de ser ikke ut til å tape nødvendig informasjon om det matematiske objektet, i en slik grad, at de ikke greier å løse oppgaven. Snarere klarer de i samarbeid, å komme frem til hva de forskjellige komponentene representerer, og får i stor grad løst problemet sammen.

4.1.3 Oppgave 3

Den tredje oppgaven elevene skulle løse, var en oppgave hvor de skulle lage de tre første figurene i mønsteret n^2+1. Innledningsvis utrykker elevene stor misnøye med det at oppgaven inneholder figurtall. Deretter starter de arbeidet og gjør en overgang fra en symbolsk representasjon av mønsteret og til det naturlige språket som dette:

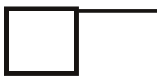
1. Elev 4: Ok. $n^2 + 1$
2. Elev 3: n^2 er det liksom sidene på en figur? Altså, at det er to sider på figuren?
3. Elev 2: Nei, altså, n er jo figurnummer, altså, hvis det er nummer 1 så er det 1, da er det 1^2 som er 1. Hvis det er figur nummer to så er det $2^2 = 4$
4. Elev 3: Ja.
5. Elev 1: Ja, men som oftest har det jo vært sånne fyrstikkfigurer.
6. Elev 2: Ja jeg vet. Det er det jeg husker også.
7. Elev 4: Ja er det det vi skal lage?
8. Elev 2: Da er det tre stykker sånn:
9. Elev 1: Hvis vi lager bare første figuren
10. Elev 2: Og det er 1, så kan vi ta to! Da blir det 2*2= 4, 5

Elev 4 gjør raskt en overgang til det naturlige språket, og ut fra dialogen i gruppen, fremkommer det at denne overgangen gjøres korrekt. Elev 4 får også med seg all den viktige informasjonen fra den opprinnelige representasjonen i overgangen. Elev 3 hevder at n^2 kan være en representasjon på sidene i figuren, som indikerer at det mest sannsynlig vil skje nok en overgang. Overgangen vil da være fra det naturlige språket som representasjon, til figur som representasjon for det samme matematiske objektet. Forslaget blir imidlertid raskt avfeid av Elev 2, som ikke utrykker direkte at elev 3 tar feil, men starter snarere på sin egen forklaring på hva uttrykket for mønsteret betyr. Elev 2 går ikke inn på hvordan den neste representasjonen for det matematiske objektet skal se ut. Når Elev 3 sitt forslag avfeies, resulterer det i at denne trekker seg tilbake og blir mer passiv i den matematiske samtalen.

Elevene går over til å diskutere hvordan de skal representere det gitte mønsteret i form av figurer. Det foreslås å lage figurer av fyrstikker, da det er dette elevene har erfaringer med fra tidligere. Elev 1, Elev 4 og Elev 2 blir relativt raskt enige om at det er denne representasjonen de vil bruke. Dermed setter Elev 2 i gang med å gjøre en overgang hvor det tegnes opp en fyrstikkfigur i Elev 2 sin besvarelse. Figuren ser ut som følger:

Figur 4.1 – Fyrstikkfigur, n1, rekonstruksjon av elevbesvarelse

Figuren illustrerer to fyrstikker lagt i vinkel. Det kan se ut som elevene, i behandlingen av det matematiske objektet, enten glemmer betydningen av at noe er opphøyet i andre, eller at de har mangelfulle kunnskaper om kvadrattall. Forventet løsning på oppgaven, i og med at det dreier seg om kvadrattall, er at n^2 blir representert ved hjelp av et kvadrat. Alle elevene, inkludert Elev 3, som i utgangspunktet hadde sitt eget forslag der n^2 var en representasjon av sidene i en figur, tegner den samme figuren som Elev 2. Deretter beveger de seg videre til figur 2, som blir tegnet med samme representasjon og de bruker samme fremgangsmåte:



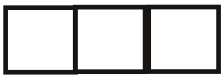
Figur 4.2 - Fyrstikkfigur, n2, rekonstruksjon av elevbesvarelse

Figuren viser fem fyrstikker som ligget i et vilkårlig mønster. Også på denne figuren har alle de fire elevene representert figuren likt, med noe variasjon i hvor den femte fyrstikken ligger. Fire av fyrstikkene utgjør da et kvadrat. Den femte fyrstikken er ikke en del av kvadratet. Gruppen fortsetter å representere kvadrattallet med fyrstikker og ikke kvadrat som oppgaven legger opp til. De viderefører dermed feilen fra forrige figur, til denne. Ingen av elevene stiller spørsmål ved representasjonen. Elevene setter inn gitte verdier for *n* i likningen, og regner ut likningen. Dermed viser de at de kan regne med potenser. De fanger ikke opp at *n* er et kvadrattall, og er ikke inne på tanken å representere et kvadrattall med et kvadrat. I figuren over har de satt *n* til to og kommer frem til riktig verdi 5, som blir representert i antall linjestykker/fyrstikker i figuren. Dialogen fortsetter nedenfor;

1. Elev 2: 10 er neste.
2. Elev 4: Ja 10!
   Alle tegner
3. Elev 2: Ja det blir vel det! 3 figurer, ja vi sier oss fornøyd med den.
4. Elev 4: Ja, altså vi ... ja. Vi kan ikke være så langt vekke fra ... ja.

Elev 2 foreslår umiddelbart at det er verdien 10 som skal representeres i figur 3. Ingen av de andre elevene utrykker noen innvendinger på dette. Alle elevene tegner representasjonen av

$n^2+1 = 10$ med fyrstikker.



Figur 4.3 - Fyrstikkfigur, n3, rekonstruksjon av elevbesvarelse

Etter at elevene har tegnet opp svarene sine, begynner Elev 4 å tvile på om de har løst oppgaven på riktig måte. Vedkommende utrykker sin tvil, men slår seg likevel til ro, med at de umulig kan være langt unna den riktige løsningen.

Det blir heller ikke i denne oppgaven gjort annen behandling av det matematiske objektet, enn i det naturlige språket, sammen med elevenes mentale representasjoner. Det er bare selve løsningen, eller målrepresentasjonen, som fremkommer i de skriftlige svarene elevene leverer fra seg. De gjør en overgang fra algebraisk fremstilling av det matematiske objektet, til en mental representasjon av det samme matematiske objektet. Deretter gjøres en overgang til bruk av fyrstikker i figurer, som er en ny representasjon for det matematiske objektet.

I denne oppgaven er målrepresentasjonen en annen enn startrepresentasjonen. Dette gjør det vanskeligere for elevene å gå gjennom svarene sine for å sjekke, at disse stemmer over ens med den opprinnelige oppgaven. Som Hana (2014) skriver i sin tolkning av Duvals teori, ønsker en som problemløser, alltid å bevege seg tilbake til startrepresentasjonen, etter at det er gjort en behandling av det matematiske problemet, i den representasjonen problemløseren ser som mest hensiktsmessig for å løse problemet. Stylianou (2011) presenterer representasjoners fire roller i matematisk problemløsning. En rolle representasjoner har, er å representere mentale prosesser hos problemløseren. Problemløseren kan dermed bruke ytre representasjoner som hjelpemiddel i problemløsningsprosessen, for å slippe å ha full kontroll på alle endringer som skjer med representasjonene av det matematiske objektet, under behandlingen. Da slipper problemløseren enhver tid å ha kontroll på all informasjon mentalt, og sjansen for å gå glipp av viktige elementer ved det matematiske objektet, blir redusert betraktelig (Newell & Simon, 1972).

4.1.4 Oppgave 4

I oppgave 4, skulle elevene, ut fra gitt informasjon, vise sin kompetanse innenfor modellering og anvendelse. De skulle da sette opp et budsjett for Anne, som skal kjøpe seg scooter og ta scootersertifikatet. Elevene setter i gang med oppgaveløsningen, men det kommer fort frem at de ikke er kjent med begrepene modellering og anvendelse. De beslutter imidlertid raskt at de vil sette opp en tabell.

1. Elev 2: Ja ok. Så lage en tabell eller noe greier.
2. Elev 3: Skal vi liksom plusse sammen alle eller? Ut fra ...
3. Elev 2: Vi kan jo lage en tabell eller et sånt budsjett, hvis vi lager det på regneark.
4. Elev 3: Finn chrome-booken, så kan vi bare skrive alt inn der. I Excel.
5. Elev 2: Vi skal gjøre på det ark.
6. Elev 3: Må vi?
7. Elev 4: Men altså, det står, grunnkurs moped også forsikring
8. Elev 2: Vi kan først skrive ting hun bruker på alt, da skriver vi inn alt det hun har brukt, så skal hun også selge den når hun blir 18, så hun kan jo få litt tilbake for mopeden.

Innledningsvis i oppgaveløsningen foreslår altså Elev 2 en konkret representasjonsform som elevene kan løse oppgaven i, en tabell. Denne representasjonsformen fordrer at elevene mestrer å gå fra opplistet informasjon, representert på fire ulike måter, til å sortere ut informasjonen de trenger, for å løse det matematiske problemet, i én tabell. Dette krever at elevene gjør overganger fra flere ulike representasjoner, til tabellen de vil bruke. De ulike representasjonene i oppgaven består av verbale representasjoner og tabeller.

I de tilfellene hvor informasjonen elevene trenger allerede er representert i tabell, vil det ikke være behov for å gjøre en overgang fra et register til et annet. Det matematiske objektet vil bli behandlet innenfor samme register. Enigheten om å bruke tabell, som register for å løse oppgaven, gjør at eleven kommer raskt i gang med behandlingen av det matematiske objektet, for å løse problemet.

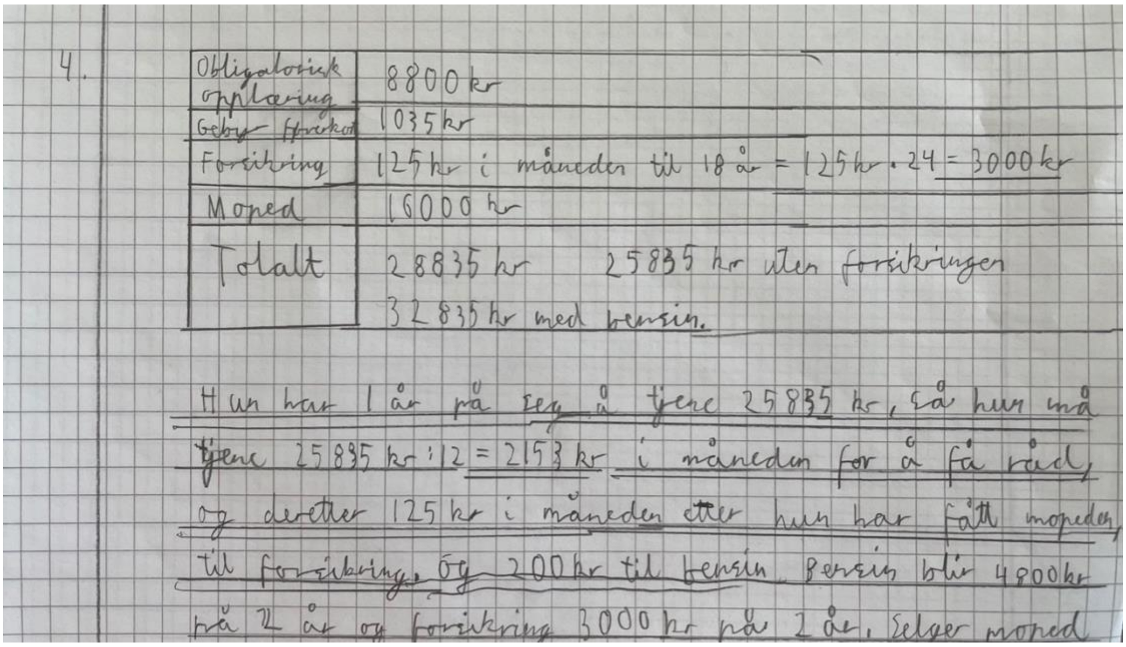
Den delen av oppgaven som innebærer overganger fra et register til et annet, gjør at elevene må mestre å gjøre en overgang fra de verbale beskrivelsene av det matematiske objektet, til å representere den samme informasjonen i en tabell. De må passe på å få med alle delene som utgjør hele det matematiske objektet. Denne typen overgang blir av Javier (1987) beskrevet som en global aktivitet, og det er en overgang hvor det er stor kognitiv avstand mellom de to representasjonene (Duval, 2006).

I dialogen mellom elevene, fremkommer det at diskusjonen rundt hvilken behandling som må til for å løse problemet, starter allerede i linje 2 i utdraget. Her forslår Elev 3, at de skal legge sammen de ulike komponentene i oppgaven. Når elevene bestemmer seg for å sette dette inn i en tabell som representasjonsform, kan de enkelt få oversikt over alle utgiftene Anne kommer til å ha. Utregning i form av summering vil dermed bli en lett operasjon for elevene.

Etter at elevene har snakket sammen om hvordan de skal representere svarene sine, og bestemt i hvilket register de skal gjøre behandlingen til det matematiske objektet, begynner alle å løse problemet. Elevene er stille under arbeidet, og på dette stadiet av problemløsningen, er det ingen av elevene bruker språket som register for å løse oppgaven. De tar imidlertid språket i bruk, når elevene skal regne ut hvor mye penger Anne bruker på bensin:

1. Elev 1: Jaa, men hun kjører fire ganger fra skolen, liksom frem – tilbake, også fra fotballbanen fram og tilbake, sånn ca. 8 km.
2. Elev 4: Hun kjører fire, ja.
3. Elev 2: Så kjører hun sånn fem ganger i uken da.
4. Elev 1 og 4: Ja.
5. Elev 1: Så hun trenger 1 liter bensin hver tredje dag og det koster 15 kr.
6. Elev 2: Ja.
7. Elev 1: Så hvis hun trenger 1 liter bensin hver tredje dag så er det 15 kr, så på en måned bruker hun ca. 150 kr.
8. Elev 2: ja. Altså sikkert litt andre ting også, vi tar 200kr i måneden også ganger vi det med 24 = 4800.

Her gjøres det en overgang fra individuelt arbeid, til det verbale språket, ved at de snakker sammen om hvordan de kan finne ut av, hvor mye penger Anne vil bruke på bensin. De prøver sammen å løse dette problemet, gjennom å bruke det naturlige språket som register. Ved å ta i bruk dette registeret, blir de i stand til å argumentere og drøfte ulike alternative løsninger. En slik måte å arbeide på, er også implementert i læreplanen under kjerneelementet utforskning og problemløsning. Her skal elevene skal kunne argumentere og drøfte sammen med medelever, for å kunne få flere synspunkter på det matematiske objektet og problemet, i tillegg til å skape en felles forståelse for problemet de står ovenfor (Utdanningsdirektoratet, 2020).


4.

Obligatorisk opplæring	8800 kr
Gebyr førerkort	1035 kr
Forsikring	125 kr i måneden til 18 år = 125 kr · 24 = 3000 kr
Moped	16000 kr
Totalt	28835 kr 25835 kr uten forsikringen 32835 kr med bensin.

Hun har 1 år på seg å tjene 25835 kr, så hun må tjene 25835 kr : 12 = 2153 kr i måneden for å få råd, og deretter 125 kr i måneden etter hun har fått mopeden, til forsikring, og 200 kr til bensin. Bensin blir 4800 kr på 2 år og forsikring 3000 kr på 2 år. Selger moped

Bilde 4.2 - Elevbesvarelse, oppgave 4

Bildet over viser en av de fire elevenes besvarelse på problemet. Besvarelsene til de fire elevene er relativt like, med noe variasjon i hvordan de har satt opp budsjettet. Innholdet i de fire besvarelsene, er i svært stor grad, det samme. I besvarelsene, fremgår det at det er gjort lite behandling av det matematiske objektet i det semiotiske registeret, for å finne ut hvor mye penger Anne vil bruke på bensin. Det kan indikere at elevene har gjort denne behandlingen ved hjelp av det naturlige språket og gjennom indre representasjoner (Goldin & Shteingold, 2001). Ut fra elevenes diskusjoner rundt hvor mye penger som vil gå med til bensin, gis det et relativt godt innblikk i det elevene har gjort i behandlingsprosessen, ved hjelp av der naturlige språket som register. Det blir mindre vesentlig at de ikke har skrevet behandlingen ned i besvarelsene sine, i og med at de har snakket om hvordan de har gjort behandlingen til det matematiske objektet.

Besvarelsen vist på bildet over, skiller seg fra de andre besvarelsene, fordi eleven har levert løsningen på det matematiske problemet, ved å gjøre en overgang til det naturlige språket. Ifølge Janvier (1987), krever en slik overgang at problemløseren bedriver global aktivitet, dersom han arbeider med funksjoner. Arbeidet vil da fordre nøyaktighet, og vil være relativt krevende for eleven. I denne oppgaven vil overgangen være enklere, da det ikke er nødvendig å gå veien om en annen representasjon for å gjøre en overgang fra tabell og over til det naturlige språket som register. Ut fra Javiers (1987) kriterier for global- og lokal aktivitet, vil denne overgangen være en lokal aktivitet.

Selv om store deler av denne oppgaven løses individuelt av elevene, gjør de hele tiden overganger over til det naturlige språket, og bruker dette som register for å løse problemet sammen, på den mest hensiktsmessige måten for dem. De støtter hverandre og diskuterer det matematiske problemet sammen, slik at de kommer frem til den beste løsningen for dem som gruppe.

4.2 Overganger mellom semiotiske register

I tillegg til at noen elever løste oppgavene i gruppe, var det også 17 elever som løste oppgavene individuelt. Disse hadde ikke muligheten til å bruke språket som representasjon. Alle elevene fikk utdelt de samme matematiske problemene, og de hadde også like lang tid på å løse oppgavene. Elevene som arbeidet individuelt, hadde ikke tilgang til det naturlige språket som register. Dermed hadde de bare mulighet til å bevege seg mellom register som ikke er avhengig av muntlig språk, for å kunne representere matematiske objekter.

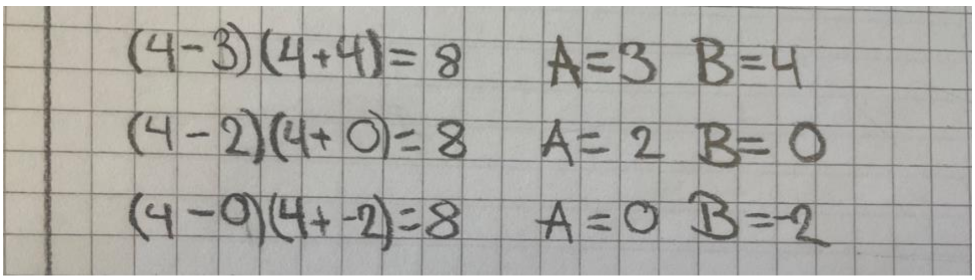
To av elevene som arbeidet individuelt med oppgavene, besvarte ikke noen av disse. En forklaring kan være at disse elevene har manglende problemløsningskompetanse. De klarer ikke å komme frem til den løsningsstrategien, som blir krevd av dem for å løse problemet. Elevene kan også ha manglende representasjonskompetanse. De vil da ikke være i stand til å representere det matematiske problemet i et register, som tilbyr de nødvendige egenskapene (Niss & Jensen, 2002). Dersom elevene hadde hatt tilstrekkelig representasjonskompetanse, kan det tenkes at de hadde klart å komme frem til den riktige løsningsstrategien, og fått utbytte av sin problemløsningskompetanse i tillegg.

4.2.1 Oppgave 1

I arbeidet med denne oppgaven har elevene som arbeidet individuelt, variert mellom tre måter å representere det matematiske objektet på. Fem elever har ikke besvart denne oppgaven, og vil ikke være med i presentasjonen av resultatene. Startrepresentasjonen for oppgaven er fortsatt en likning, og elevene blir i oppgaven bedt om å finne tre ulike tallpar, som gjøre at en får svaret 8 dersom en løser likningen for de gitte verdiene.

Alle elevene som har løst denne oppgaven har, etter min vurdering, gjort en del behandling til det matematiske objektet, ved hjelp av sine indre representasjoner, da alle besvarelsene viser det riktige svaret. En løsningsmetode for denne oppgaven, vil være å sette inn ulike tall i likningen, for å se hvilke tall som kan gi den riktige løsningen, nemlig 8. Ingen av elevene har vist hele eller deler av en slik prosess i sine besvarelser, men har skrevet inn de riktige verdiene direkte. Måten de har presentert svaret på varierer noe, men de aller fleste har skrevet opp likningen og fylt inn de riktige verdiene for a og b, regnet ut dette i likningene og fått 8. Det blir dermed umulig for meg som forsker, å se at de har gjort noen overganger mellom ulike registre, i sine besvarelser. Med tanke på at alle elevene faktisk har skrevet opp de riktige verdiene i svarene sine, vil det likevel være naturlig å tenke seg, at de har gjort noen former for behandling til det matematiske objektet, ved hjelp av indre representasjoner. De kan også ha gjort overganger fra en ytre representasjon til en indre representasjon, selv om det matematiske objektet kan være representert på samme måte både mentalt og fysisk. At alle elevene skal ha kommet frem til de riktige verdiene for a og b på første forsøk, vil være usannsynlig. Det er naturlig å konkludere med at det må ha foregått mentale prosesser, i form av indre representasjoner, hos elevene, selv om disse ikke fremkommer i de skriftlige besvarelsene.

Til tross for at samtlige elever har representert det matematiske objektet på denne måten, er det likevel fire elever som har gjort en overgang i oppgaveløsningen. Disse elevene har representert sin endelige løsning på det matematiske problemet, som en liste med verdier for a og b, hvor de opplistede verdiene gir riktig svar, 8. Overgangen fra å representere det matematiske objektet som en likning, til å representere det som en liste med tall, har alle fått til. Ingen av elevene har mistet informasjon eller viktige detaljer ved det matematiske objektet i denne overgangen.



Bilde 4.3 - Elevbesvarelse, oppgave 1

Hvordan elevene har valgt å representere det endelige svaret sitt, har liten betydning for besvarelsen, all den tid svarene er korrekte. Svarene blir dermed elevenes individuelle preferanse, av hva som er den mest hensiktsmessige måten å representere det matematiske objektet på, sett hen til oppgaven. Dette vil alltid variere fra elev til elev, ut fra deres kunnskaper og tidligere erfaringer (Ozgun-Koca, 1998).

4.2.2 Oppgave 2

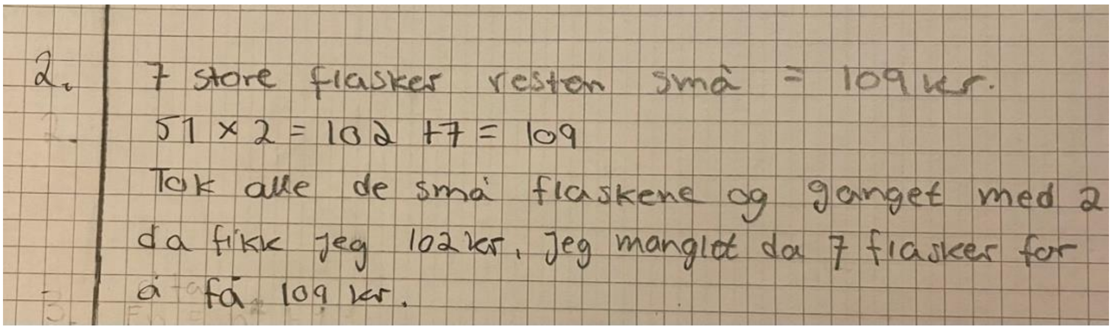
Oppgave 2 er en oppgave hvor elevene skal finne og løse et likningssett. Startrepresentasjonen for oppgaven er en verbal representasjon, som gir elevene en mengde informasjon, som er nødvendig for å løse problemet. Målrepresentasjonen for oppgaven vil da være en representasjon for hvor mange flakser av hver type Ali har pantet. For å kunne lage et likningssett, er elevene avhengige av å gjøre en overgang fra startrepresentasjonen, til en algebraisk representasjon med to likninger, som skal hjelpe dem å løse problemet. I denne overgangen er det en del viktig informasjon elevene må ha med seg videre til en neste representasjon. De er avhengig av å tolke det matematiske objektet riktig, for å klare å lage to korrekte likninger.

Tre av de individuelle elevene har ikke vist noe av behandlingen de har gjort til det matematiske objektet. Disse elevene har heller ikke gjort noen overganger i besvarelsene sine, da svarene er representert i samme register, som selve oppgaven. Det er likevel rimelig å anta at det har skjedd en form for behandling mentalt. Hvilke register disse elevene har brukt i behandlingen av det matematiske objektet, er dermed vanskelig å si noe sikkert om. De tre elevene har imidlertid kommet frem til korrekt svar, og de har dermed gjort de nødvendige mentale overgangene korrekt.

Fire elever har ikke besvart denne oppgaven. De viser heller ingen forsøk på behandling av det matematiske objektet i besvarelsen. Årsaken til dette er ikke kjent, men en alternativ forklaring kan være at de ikke hadde tid til å løse dette problemet. En annen forklaring, er at elevene ikke har hatt tilstrekkelig kunnskap, til å gjøre de nødvendige overgangene som kreves for å løse det. De har ikke gjort noen synlige overganger, som indikerer at de har forsøkt å løse oppgaven.

Fire elever har løst oppgaven ved å gjøre en overgang fra det en verbal bekrivelse, som var styrerepresentasjonen for oppgaven, til det algebraiske registeret, hvor de har representert det matematiske objektet som et likningssett. Videre har de gjort flere behandlinger til det matematiske objektet i form av flytte-bytte regelen. Deretter har de løst likningssettet slik algoritmen tilsier. Alle de fire elevene har kommet frem til riktig svar. Hvilket register de har valgt å representere svarene sine i varierer. Tre av de fire elevene har gjort nok en overgang, og representert svaret sitt ved hjelp av symboler og skrift. Disse elevene har gjort det Duval (2006) kaller for en kongruent overgang, som innebærer at elevene har gjort en direkte oversettelse av det matematiske objektet fra et register til et annet. I en slik overgang skjer det sjeldent feil. Dette gjenspeiles i elevenes svar, ettersom at alle tre har representert det matematiske objektet med de samme egenskapene i målrepresentasjonen, som i overgangsrepresentasjonen, hvor de gjorde behandlingen til det matematiske objektet. Den fjerde eleven har ikke gjort en overgang til en annen målrepresentasjon, men har valgt å representere det endelige svaret sitt i samme register, som eleven har gjort behandlingen i, det algebraiske registeret.

To elever har valgt å prøve seg frem med ulike tall for de to ukjente verdiene i likningssettet, og på denne måten kommet frem til riktig svar. En slik behandlingen til det matematiske objektet, har dermed vært vellykket. En av elevene har også klart å sette opp et likningssett, som de ble bedt om i oppgaven. Den andre eleven har ikke gjort dette. Årsaken til det er det vanskelig å si noe sikkert om, men det kan skyldes manglende kunnskap hos eleven, eller eleven kan ha glemt denne delen av det matematiske problemet. Ingen av de to elevene har brukt likningssett for løse problemet.



Bilde 4.4 - Elevbesvarelse - Oppgave 2

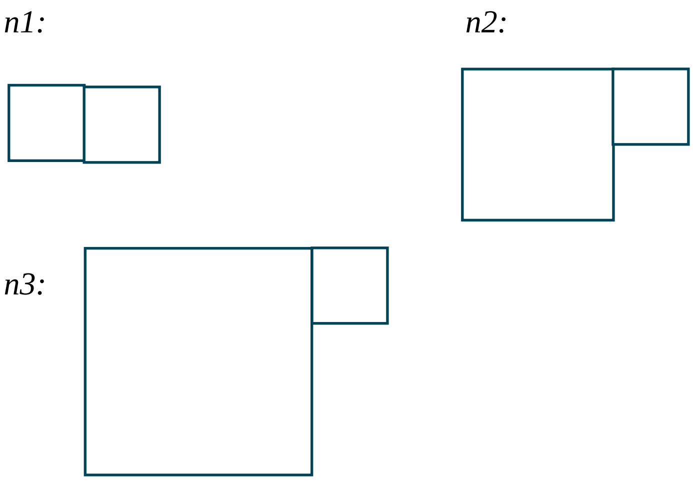
Besvarelsen over tilhører den siste av de individuelle elevene, som har forsøkt å løse oppgaven. Eleven skriver i besvarelsen, at det er 7 store flasker, dermed må resten av flaskene være små. Det fremgår ikke i besvarelsen, hvordan eleven har kommet frem til svaret. Videre gjør eleven en overgang fra en verbal beskrivelse, til en representasjon av det matematiske objektet bestående av tall og symboler. Deretter gir eleven en beskrivelse av egne tanker, i prosessen med å løse problemet. Eleven har ganget alle de 51 flaskene, som ble pantet, med 2, da 2 er panteverdien for de «små» flaskene. Gjennom denne behandlingen, har eleven kommet frem til at verdien av alle de små flaskene blir 102 kr. Eleven konkluderer videre med, at det da mangler 7 flasker med en panteverdi på 1 kr, for at den samlede panten skal ha en verdi på 109 kr.

Besvarelsen tyder på at eleven har oversett eller misforstått en god del av informasjonen om det matematiske objektet i overgangsprosessen. I startrepresentasjonen blir det informert om at det er 51 flasker totalt, med store og små flasker. Eleven har konkludert med, at det er 51 flakser med en panteverdi på 2 kr. Deretter har eleven lagt til 7 flasker med panteverdi på 1 kr, for å få den korrekte verdien til det matematiske objektet, som er 109. Dermed har ikke eleven 51 flasker, men 58 flasker, som ikke stemmer overens med den informasjonen elevene har fått om det matematiske objektet i startrepresentasjonen. Denne type feil kan enten betegnes enten som en tolkningsfeil, eller som en bevaringsfeil (Adu-Gyamfi et.al., 2012). Om eleven har gjort en tolkningsfeil eller en bevaringsfeil, vil være vanskelig å si noe sikkert om, uten å ha snakket med den aktuelle eleven. Med unntak av de feilene eleven gjør i overgangsprosessen, har eleven gjort den øvrige behandlingen av det matematiske objektet riktig.

4.2.3 Oppgave 3

For de elevene som ikke hadde det naturlige språket som register tilgjengelig, var det store variasjoner i hvordan de løste denne oppgaven. Det ble tatt i bruk en rekke ulike representasjonsformer for figurer. Det er tydelig, som det også ble sagt i gruppearbeidet, at elevene har arbeidet med fyrstikker tidligere, da dette er en representasjon som går igjen hos mange av elevene, også hos alle elevene i gruppen hvor språket var tilgjengelig som register. Blant de 14 elevene i klassen, som har prøvd å løse oppgaven individuelt, har seks elever brukt fyrstikker, for å representere verdiene de får når de løser formelen i oppgaven. I formelen er det oppgitt et kvadrattall. Når elevene representerer figuren ved hjelp av fyrstikker, tas det heller ikke her, hensyn til kvadrattallet i det opprinnelige registeret. Fyrstikker som representasjon for mengden de får når de regner ut formelen, representerer bare verdien formelen gir. De mister dermed en viktig egenskap ved det matematiske objektet i startrepresentasjonen, nemlig kvadrattallet. Janvier (1987) sier ingenting om hvilken form for matematisk aktivitet denne overgangen er, men det er naturlig å tenke at en slik form for overgang har noen fellestrekk med det Janvier omtaler som en global aktivitet, ved at det er få likheter mellom startrepresentasjonen og målrepresentasjonen. I tillegg må problemløseren ofte via en tredje representasjon for å løse det matematiske problemet. Det vil også være stor kognitiv avstand mellom start- og målrepresentasjonene. Ifølge Duval (2006), kan dette føre til at problemløseren i løsningsprosessen, glemmer viktige elementer ved det matematiske objektet, som oftere medfører feil i løsningen, sammenlignet med representasjoner med liten kognitiv avstand (Duval, 2006). Sammenholder vi dette med disse elevenes løsning på oppgaven, stemmer det godt over ens med det elevene har gjort når de har løst oppgaven på denne måten. De glemmer hva det matematiske objektet egentlig representerer, og får ikke med seg den viktige egenskapen, at det er et kvadrattall som skal representeres. De representerer dermed bare verdien formelen har for de gitte *n*-verdiene.

Fem av elevene har løst oppgaven ved å representere kvadrattallet som blir representert i oppgaven igjennom formen på figurene. Disse elevene har løst oppgaven som vist nedenfor:



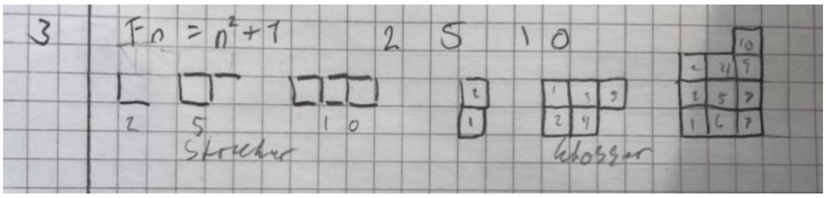
Figur 4.4 - Rekonstruksjon av elevbesvarelse, Oppgave 3

Denne representasjonsformen vil være mer egnet til å representere alle egenskapene ved det matematiske objektet og er dermed mer passende i denne oppgaven. Det at elevene har representert det matematiske objektet som kvadrater i besvarelsene sine, indikerer at de har forståelse for hva et kvadrattall er. De har dermed fått med seg de viktige egenskapene til det matematiske objektet, fra en representasjon til en annen. Som Niss og Jensen (2002) skriver i sin rapport, er det forventet av elever på 10. trinn, at de i noen grad skal mestre å se sammenhenger mellom forskjellige representasjoner av det samme matematiske objektet. De skal også i noen grad kunne representere matematiske objekter til et gitt formålet, på en hensiktsmessig måte. Det innebærer å kunne representere det matematiske objektet på en slik måte, at det matematiske problemet er løst (Niss & Jensen, 2002, s. 213).

Gjennom en representasjon, som vist over, får elevene vist at de har tilstrekkelig forståelse for kvadrattall og hvordan en gjennom figurer kan representere disse, i tillegg til å representere verdiene de får når de løser oppgaven.

Flere elever har valgt andre løsningsmetoder, og andre representasjoner. Noen har tegnet opp kvadrater på en rekke, for å representere verdien til likningen når de løser med de gitte verdiene for n. Da har de fått med seg at det dreier seg om et kvadrattall, men uten at representasjonen direkte viser dette. De har også fått vist verdiene de får når de løser oppgaven. Likevel er ikke alle egenskapene til det matematiske objektet fremvist.

Uansett hvilke representasjoner de individuelle elever har brukt i denne oppgaven, er det bare en elev som har gjennomført mer enn en overgang. Den ene overgangen, som alle har gjort, er helt nødvendig for å løse oppgaven, i og med at målrepresentasjonen er en annen enn startrepresentasjonen. Eleven, som har gjort mer enn denne ene overgangen, har representert svaret sitt på tre forskjellige måter, noe som da vil kreve tre forskjellige overganger. I tillegg til å representere svaret sitt på de to måtene, som er nevnt over, har eleven også representert svaret sitt i tall (se bilde under). Dette viser god forståelse for hvordan en kan bruke flere forskjellige representasjoner til det matematiske objektet, for å vise forskjellige egenskaper ved det.



Bilde 4.5 - Elevbesvarelse, Oppgave 3

Bildet over viser besvarelsen til eleven. Eleven starter med å skrive opp den originale formelen. Deretter tegner han de forskjellige representasjonene til det matematiske objektet som er etterspurt i det matematiske problemet. Det kan indikere at eleven har brukt representasjonsformen tall, for å holde styr på informasjonen, mens eleven arbeider med å utforme de forskjellige figurene etterspurt i oppgaven. Dette samsvarer i så fall godt med en av representasjonenes fire roller i problemløsningen, det å holde styr på informasjonen i arbeidet med å løse problemet. Hensikten er å unngå at viktige egenskaper går tapt i prosessen mot den endelige løsningen/målrepresentasjonen (Newell & Simon, 1972). I tillegg til å være en mellomrepresentasjon for å holde styr på all informasjon underveis i problemløsningsprosessen, representerer den også mengden som skal representeres i figurene. Tallrepresentasjonen, som er en slags hjelperepresentasjon, vil kunne være forvirrende i den videre prosessen med å lage figurer, i og med at tallene ikke viser de sammen egenskapene som formelen gjorde. Det ville være vanskelig utfra tallene alene, å gå tilbake til formelen gitt i oppgaven. I hvilken grad tall-representasjonen har vært til hjelp for eleven i løsningsprosessen er vanskelig å si.

Videre tegner eleven de samme verdiene som skruer i besvarelsen sin. Denne representasjonsformen er tilsvarende fyrstikkene elevene i gruppe tegnet i sine besvarelser. Disse elevene hadde også det naturlige språket tilgjengelig som register. I denne representasjonen, blir også bare de forskjellige verdiene en får ved å løse likningen, representert. Tegningen gir ikke et fullstendig bilde av egenskapene til det opprinnelige matematiske objektet. Figuren vil dermed anses som noe ufullstendig, med tanke på å løse det matematiske problemet slik det er gitt. Til slutt, som en siste representasjon av det matematiske objektet, har eleven representert det matematiske objektet som kvadrater. Denne representasjonsformen vil, som nevnt tidligere, være den mest egnede formen, for å vise alle de ulike egenskapene til det matematiske objektet, og representasjonen vil være egnet til å gi andre problemløsere en god mulighet til å kunne finne tilbake til den originale formelen. Eleven har videre nummerert alle kvadratene i representasjonen, noe som er med på å tydeliggjøre både hvordan eleven har tenkt og hva de forskjellige kvadratene representerer.

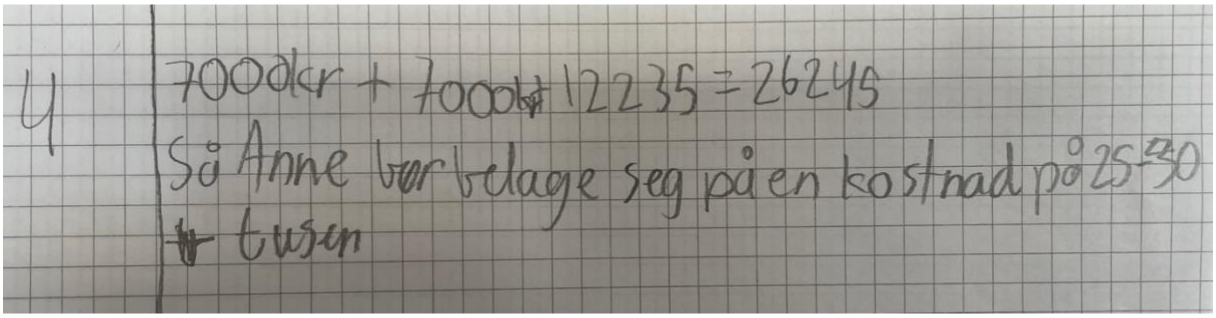
I besvarelsen, har ikke eleven gjort noen form for behandling til det matematiske objektet. Besvarelsen viser bare de ulike representasjonene av objektet, uten å gi større innblikk i hvordan eleven har kommet frem til de ulike representasjonene og verdiene. Dette indikerer at det har foregått en rekke mentale prosesser hos eleven. Det er imidlertid ikke mulig å få tilgang til disse prosessene utfra besvarelsen, slik den foreligger. Gjennom å se på hva som har blitt gjort av behandling og overganger i elevens arbeid med det matematiske problemet, og dens ytre representasjoner, er det likevel mulig å gjøre noen antagelser av hvordan disse mentale prosessene har vært (Goldin & Shteingold, 2001).

Det er ikke alle representasjonene eleven har brukt for å løse oppgaven, som egner seg like godt til å representere det matematiske objektet fullt ut. Likevel viser eleven god forståelse for hvordan en kan bruke ulike representasjoner, for å vise ulike egenskaper ved det matematiske objektet, og kunne bruke disse som et hjelpemiddel for å løse det matematiske problemet.

4.2.4 Oppgave 4

Blant elevene som var i klasserommet og løste oppgavene individuelt, var det bare 3 elever som forsøkte å løse denne oppgaven. Alle de tre elevene har prøvd å samle alle utgiftene, som Anne kommer til å ha i forbindelse med å ta sertifikatet og kjøpe seg moped. De tre har gjort overganger fra, at informasjon om det matematiske objektet er representert i tabeller og som verbal beskrivelse, til å representere det matematiske problemet som et regnestykke, representert gjennom symboler og tall. Denne overgangen kan betegnes som en lokal aktivitet, hvor elevene enkelt kan hente informasjon om det matematiske problemet i startrepresentasjonene (Janvier, 1987). De har heller ikke store vansker med å sette informasjonen inn i et regnestykke, for å finne ut hvor mye Anne må betale for det hele. Ingen av de tre elevene har løst oppgaven ved å sette informasjonen og beløpene i tabell eller laget et budsjett, som på mange måter vil vært mer oversiktlig for dem, og som også ville vært en mer hensiktsmessig måte å løse problemet på. Hvordan elevene foretrekker å representere det matematiske problemet vil imidlertid variere fra person til person.

En elev har både satt informasjonene opp i et regnestykke og deretter gjort en overgang fra symbolene og tallene, tilbake til språket. Elevens endelige svar, oppgis gjennom en verbal beskrivelse av Annes utgifter knyttet til å ta sertifikatet og å kjøpe moped (se under).



Bilde 4.6 - Elevbesvarelse, Oppgave 4

Eleven har, som nevnt, gjort en overgang fra, at det matematiske problemet var representert i tabeller og som verbale beskrivelser, til et regnestykke. Eleven har fått verdiene; 7000kr + 7000kr + 12235kr. Når disse verdiene sammenlignes med verdiene presentert i oppgaven, er det vanskelig å se hvilke verdier som inngår i elevens tall, da ingen av tallene eleven oppgir i sin besvarelse, stemmer over ens med verdier gitt i den opprinnelige oppgaven. Det at eleven ikke har satt opp et er budsjett, med forklaringer til hva de forskjellige utgiftene representerer, gjør at det blir vanskelig å sette seg inn i hva eleven har tenkt. Eleven har hoppet over det steget som representerer alle momentene i oppgaven, noe som gjør det vanskelig å få tilgang til hva de ulike samleverdiene skal representere. Dermed blir vanskelig å få grep om hva som har blitt gjort av behandling og overganger i elevens arbeid med oppgaven (Goldin & Shteingold, 2001).

Sammenlignes elevens besvarelse med de to elevene, som også forsøkte å løse oppgaven, har eleven kommet et godt stykke på vei i løsningen av det matematiske problemet, selv om det er vanskelig å sette seg inn i hva eleven har tenkt. De to andre elevene, har bare skrevet opp en rekke verdier i sine besvarelser og deretter lagt disse sammen, i sine forsøk på å løse oppgaven. De har de ikke skrevet opp et svar på hva de mener Anne vil komme til å bruke av penger, eller hvor mye hun eventuelt får tilbake når hun to år senere skal selge mopeden igjen. Det innebærer, at selv om elevene har forsøkt å løse oppgaven, så har de ikke klart å besvare den, eller løse det matematiske problemet.

4.3 En lærers tilnærminger til representasjoner

Som en del av datainnsamlingen til oppgaven, valgte jeg å intervjue matematikklæreren til den aktuelle klassen. Dette ble gjort, for å få et bedre innblikk i elevenes forutsetninger for å bruke overganger mellom ulike registre, som verktøy i arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikk.

Et tema i intervjuet var hvordan en typisk matematikktime så ut i den aktuelle klassen. Læreren beskrev en undervisningsform, som minnet mye om det som av mange kalles tradisjonell undervisning (Klette, et al., 2016). Undervisningen startet med en gjennomgang av nytt stoff, hvor elevene fulgte med på forelesningen og kunne stille spørsmål underveis. Deretter arbeidet elevene med oppgaveløsning. Elevene løste da oppgavene individuelt og læreren gikk rundt i klasserommet og veiledet elevene. Det kom også frem i intervjuet, at det for det meste er rutineoppgaver som blir brukt i undervisningen. Elevene i klassen har dermed liten erfaring med å arbeide med problemløsningsoppgaver. Da læreren ble spurt direkte, om de arbeidet med problemløsningsoppgaver i timene, fremkom det at de hittil ikke hadde gjort det. Læreren sier imidlertid noe om at den nye læreplanen fører til at lærer må tenke mer over hvor han finner oppgaver til elevene, i arbeidet med å planlegge undervisningen. Det blir ikke sagt noe om hvilken type oppgaver han tenker på. Det er naturlig å tenke seg, utfra settingen vi er i, at dette er oppgaver som i alle fall kan minne om problemløsningsoppgaver, da læreren vil bruke mer tid på å lete etter oppgaver som oppfyller kravene i den nye læreplanen LK

2020. Problemløsningsoppgaver inngår som en del av matematikkundervisningen i denne.

Både problemløsningsoppgaver og tradisjonell undervisning åpner opp for at elevene kan bruke overganger mellom ulike representasjoner, som et verktøy i deres arbeid med matematiske oppgaver. Læreren hadde også noen tanker rundt det å bruke overganger aktivt i undervisningen og lære elevene opp til å bruke overgangene som verktøy.

1. Meg: Har du noen spesielle områder eller faglige ting som du pleier å ha fokus på i timene?

   En pause i samtalen

2. Læreren: Ja, tenker du sånn generelt på alt? Altså?
3. Meg: Ja ... om det er noe du tenker at i denne timen skal vi ha fokus på, for eksempel kjerneelementene da, for å ta et eksempel.
4. Læreren: Nei.. jeg pleier jo ikke å ha fokus, altså, på en måte, noe som på en måte er generelt på alt, så er der vel det at de skal vise hva de har tenkt, også utregning. Og på en måte ha vist hva de har tenkt. For at selvfølgelig, jeg skal få tilbakemelding på hva de har tenkt, og sånn at de kan hjelpe seg videre, men og at de når de skal gå gjennom svarene, at de kan på en måte gjenfortelle hva de har tenkt og vise. Og det er nok, det er jo kravet i på, på gjerne på prøver og eksamen at de, at det på en måte ikke er svarene som er det viktigste, man hva de har tenkt, og hvordan de har funnet svaret.
5. Meg: Ja.
6. Læreren: Også har jeg kanskje litt, blitt litt mer opptatt av at de skal på en måte klare å vise muntlig også.
7. Meg: Ja.
8. Læreren: Ja. Og samarbeidsoppgaver har jeg kanskje økt fokuset på sammenlignet med tidligere.

I utdraget blir læreren spurt om hvorvidt han pleier å ha fokus på konkrete områder i matematikktimene. Først avviser han dette, fordi læreren ikke tenker at dette gjøres i timene. Så kommer han på at de, blant annet, har fokus på at elevene skal vise utregning, og vise hva de har gjort og tenkt i arbeid med å løse oppgaven. Et slikt fokus skal være en del av elevenes tilbakemelding på arbeidet sitt, ved en senere anledning. Dermed bruker læreren matematiske representasjoner fra elevene, i sin tilbakemelding og evaluering av arbeidet deres. Dette inngår i en av representasjoners fire roller i problemløsning, som er å bruke representasjoner til å evaluere fremgang og eget arbeid (Stylianou, 2011). Videre beskriver læreren, at det å vise hvordan eleven har tenkt og kommet frem til svaret sitt, er noe det er fokus på. Dette vil være det Duval (2006) omtaler som behandling, å gjøre endringer på representasjonen til det matematiske objektet, uten å bevege seg mellom ulike registre. Det kan videre trekkes linjer fra det å ha fokus på behandling til det Skemp (1976) kaller for instrumentell forståelse. Dette innebærer, at en som problemløser, kun har lært seg algoritmen, uten å forstå hvorfor ting er som de er. Problemløseren klarer dermed ikke å se sammenhenger og relasjoner, som kan være viktig for den matematiske forståelsen. Det å kun ha fokus på behandling vil i seg selv kunne bidra til at elevene får en instrumentell forståelse av matematikken (Skemp, 1976). Å gjøre en form for behandling til det matematiske objektet, vil ofte være nødvendig for å løse det matematiske problemet, med mindre problemløseren ser løsningen direkte. Det å trene på behandling er derfor viktig. Parallelt med å øve på å gjøre den riktige behandlingen til det matematiske objektet, vil det også være nyttig å øve på å finne det mest hensiktsmessige registeret å gjøre behandlingen i (Hana, 2014). Ifølge Duval (2006), vil det være avgjørende at problemløseren er i stand til å gjøre behandlingen i det mest hensiktsmessige registeret, og også klarer å gjøre disse overgangene på korrekt vis.

I intervjuet fremkommer det, at det også har vært fokus på at elevene skal trene seg på å «vise» muntlig i matematikktimene. Læreren bruker ordet vise flere ganger gjennom intervjuet, og hva som konkret legges i begrepet, er usikkert. En mulig tolkning av å «vise» for læreren, vil innebære at elevene viser hvordan de har løst konkrete oppgaver, ettersom han tidligere i intervjuet, bruker vise i en sammenheng hvor elevene skal vise utregning. Dersom fokuset på at elevene skal vise muntlig, blir gjennomført i praksis, vil dette innebære at elevene må gjøre overganger fra startrepresentasjonen og til det muntlige språket. Forskning på området viser imidlertid at denne overgangen oftere medfører feil, sammenlignet med overganger mellom semiotiske representasjoner (Bossé, et.al., 2011).

I tillegg til å ha mer fokus på at elevene skal være i stand til å forklare hvordan de løser en oppgave muntlig, har læreren også hatt økt fokus på at elevene skal arbeide med samarbeidsoppgaver. Dermed åpnes det opp for at elevene kan bruke språket som register i arbeid med matematikkoppgaver. Det kan virke som elevene, i relativt stor grad, får bruke det naturlige språket som register i matematikktimene. Dette kan kanskje bidra til å forklare resultatene fra elevene som arbeidet i gruppe, og dermed hadde dette registeret tilgjengelig. Elevene gjorde lite feil i overganger til og fra det naturlige språket, noe som kan ha sammenheng med at de har erfaring med å arbeide i dette registeret, fra timene. Nedenfor følger et sitat fra læreren:

> *Så du har på en måte den elevtypen som er veldig glad i klassiske matteoppgaver. Og når de på en måte ikke får de klassiske matteoppgavene, så blir de litt frustrert, fordi de har en ide om at i matte så skal de få utlevert en oppgave som kun har ett svar, og det er på en måte rett eller galt. Og dersom det ikke er slik, da sliter de litt, i tillegg til hvis det er en oppgave som har mange løsninger.*

Sitatet gir et innblikk i hvordan læreren oppfatter noen av elevenes tanker og holdninger, til det som på mange måter beskriver en problemløsningsoppgave; hvor det finnes mange fremgangsmåter og løsningsstrategier, i tillegg til flere mulige forskjellige svar. Læreren hevder at en elevtype i klassen, foretrekker de «klassiske matteoppgavene». Jeg velger å tolke klassiske matteoppgaver, som matematiske rutineoppgaver. I paradigmet står disse som en motsetning til problemløsningsoppgaver. Rutineoppgaver kjennetegnes ved at løsningsstrategien gjerne er en kjent algoritme, som elevene har kjennskap til, og som de har brukt tidligere (Kongelf, 2011). Det kan også trekkes linjer mellom rutineoppgaver og instrumentell forståelse, hvor elevenes forståelse for matematikk er bygd på innøvde algoritmer for å løse gitte problemer. Elevene mangler da en forståelse som setter de i stand til å løse oppgaver, som de ikke har løst tidligere og ikke har en gitt løsningsstrategi for. Det er elever med denne typen forståelse læreren beskriver i utdraget ovenfor, slik jeg oppfatter det.

Videre i intervjuet stilles læreren spørsmål om representasjoner og deres rolle i undervisningen;

1. Meg: Har du noen tanker rundt det å arbeide med overganger mellom ulike representasjoner i matematikk?
2. Læreren: Ja, vi prøver jo på det. Jeg prøver jo å være veldig fokusert på at dagligdagsspråket deres bli overført til det matematiske språket. At de på en måte får en sammenheng og får brukt de riktige fagbegrepene, og knytte det til begreper som de har fra før av i fra dagligtalen. Og at de blir litt mer bevisst på hvilke ord og begreper de bruker innenfor matematikk.

Læreren trekker igjen frem språket som representasjon. Denne representasjonsformen har de tydelig fokus på i timene, ved at elevene får øve på matematiske begreper og knytte disse opp mot begreper de bruker i dagligtalen. Dette bidra til å til å skape mening i matematikken for elevene og kan også knytte matematiske begreper til erfaringer elvene har fra før. Ifølge tidligere forskning, vil fokus på å danne seg ulike erfaringer med matematiske begreper, hjelpe elevene til å kunne bruke matematiske begreper riktig, i arbeid med matematikken. Elever har en tendens til å bruke representasjoner de har erfaring med og kunnskap om fra tidligere (Ozgun-Koca, 1998).

Det å skape mening rundt, og erfaringer med, matematiske begreper, kan også være fruktbart for elevenes matematiske forståelse. Matematikk skiller seg fra mange andre fagdisipliner, ved at matematikken er utilgjengelig for oss. Dette gjør det vanskelig, for alle som bedriver matematiske aktivitet, å få erfaringer på samme måte som i andre fag. Duval (2006) mener at dette er noe av grunnen til at matematikk for mange oppleves som utfordrende. Det vil derfor være nyttig for elevene, at læreren prøver å gi elevene disse erfaringene, gjennom å knytte dagligspråket opp mot matematiske begreper.

1. Meg: Hva er det som gjør at du tenker at det er viktig å arbeide med å bruke ulike representasjoner i matematikk?
2. Læreren: Ja, det er jo viktig fordi det ikke er alle elever som får en god forståelse gjennom en bestemt måte å representere noe på. Representasjonene kan være mer visuelle, for eksempel hvis man har en figur eller et diagram, eller mer abstrakte representasjoner. Det er viktig å bruke ulike representasjoner for å få alle elevene til å forstå. Og du vil også ved å bruke flere representasjoner få flere elever med deg. Så jeg tenker det er viktig.

Læreren uttrykker en forståelse for, at det å mestre ulike representasjoner, vil være med på å styrke elevenes matematiske forståelse og kompetanse. I følge Ainsworth et al. (2002), kan elever, som aktivt bruker representasjoner som verktøy, bli omtalt som eksperter, ved at de har en større matematisk kompetanse og forståelse, sammenlignet med elever som ikke bruker representasjoner på den måten. Læreren trekker også frem en flere ulike representasjonsformer, og hevder at elever som ikke forstår et konsept ved hjelp av en representasjon, kanskje vil dra nytte av å få det matematiske objektet representert gjennom en annen. Dette indikerer at matematikklæreren har en forståelse av at ulike representasjoner av det matematiske objektet, viser ulike egenskaper ved det (Duval, 2006).

5 Diskusjon/drøfting

Gjennom analysen av oppgavene, har eksempler på overganger blitt lagt frem og analysert. I denne delen vil resultatene fra analysen drøftes videre opp mot problemstillingen for oppgaven, i tillegg til tidligere forskning. Samlet vil drøftingen danne grunnlaget for å besvare problemstillingen for masteroppgaven. For å utdype problemstillingen min, formulerte jeg; innledningsvis, tre forskningsspørsmål, som jeg først vil prøve å utdype, før jeg går over til selve problemstillingen for oppgaven.

5.1 Hvordan bruker elever overganger mellom ulike registre som et verktøy i arbeid med problemløsningsoppgaver?

5.1.1 Det naturlige språket

Elevene som hadde mulighet til å benytte språket som register i arbeidet med oppgavene, valgte i stor grad å benytte seg av det. Elevene diskuterte alle oppgavene og brukte hverandre aktivt for å klare å løse de matematiske problemene. Denne type diskusjoner tilfører mer til oppgaveløsningen, enn det å bruke det naturlige språket som register i seg selv. Elevene får hjelp fra hverandre gjennom diskusjonene, til å løse oppgavene. De bruker dermed hverandre som den mer kunnskapsrike andre, hvor de hele tiden arbeider innenfor den proksimale utviklingssonen. En konsekvens av at den mer kunnskapsrike andre, alltid er tilgjengelig for elevene, er at de tilsynelatende klarer å løse mer av oppgavene, enn de ville klart, dersom de ikke hadde hverandre å støtte seg på (Abtahi, et.al., 2017). Det kan kanskje diskuteres, i hvilken grad elevene faktisk bruker hverandre som den mer kunnskapsrike andre. Mye tyder imidlertid på at de finner god hjelp i hverandre i arbeidet med oppgavene. Det faktum at språket som register er tilgjengelig for elevene, er en sentral faktor for at de sammen arbeider i den proksimale utviklingssonen og tilsynelatende mestrer større deler av oppgaven, enn det hver og en ville gjort individuelt. Elevene selv er nok også klare over, at de sammen vil være i stand til å klare mer, noe som gjerne stimulerer og motiverer elevene til å gjøre flere overganger til og fra det naturlige språket.

Elevene i gruppen gjorde også mesteparten av behandlingen til det matematiske objektet i registeret hvor det naturlige språket befinner seg. Det ble gjort overganger fra startrepresentasjonen til det naturlige språket i samtlige oppgaver. I oppgave 1, 2 og 3 blir all behandling, som elevene i gruppen gjør av de matematiske objektene, gjennomført med det naturlige språket som representasjonsform eller i form av indre representasjoner. Behandling i dette registeret kan tenkes å kreve høy kognitiv kapasitet hos elevene. Simon og Newell (1972) mener at en av representasjonenes rolle i problemløsningen, er å holde kontroll på nødvendig informasjon, gjennom å skrive eller tegne ned den informasjonen som er nødvendig å huske. Når behandling blir gjort i det naturlige språket, kombinert med mentale prosesser, har ikke problemløseren mulighet til å skrive ned eller tegne opp det matematiske objektet, og blir dermed nødt til å holde kontroll på all informasjonen gjennom mentale representasjoner. Oppgaven med å ha kontroll på all nødvendig informasjon om det matematiske objektet mentalt, gjennom hele behandlingen, kan være krevende, og informasjon kan fort gå tapt i prosessen (Bossé, et.al., 2011; Duval, 2006). Det ville kanskje vært fornuftig av elevene å notere litt underveis, i tillegg til å gjøre behandlingen i det naturlige språket. Da ville de lettere hatt full kontroll på alle momentene i oppgaven til enhver tid.

I oppgave 1, hvor elevene skulle finne tre ulike tallpar, som gjorde likningen gyldig, klarer de ikke å få med seg all den informasjonen om det matematiske objektet, som de trenger for å klare å løse det matematiske problemet korrekt. Som nevnt tidligere får ikke elvene med seg at de skal multiplisere de to leddene i likningen. Dette kan henge sammen med at elevene aldri representerer det matematiske objektet direkte gjennom det naturlige språket. I stedet for å representere objektet, går elevene direkte til behandling av det, noe som kan være en del av årsaken til at elevene ikke får med seg all nødvendig informasjon. En av elevene i gruppen oppdager imidlertid feilen og gruppen får rettet opp i den. Hvorvidt elevene hadde oppdaget denne feilen, dersom de ikke hadde hatt hverandre, som mer kunnskapsrike andre, vil være vanskelig å si noe sikkert om. Det kan også diskuteres hvorvidt elevene hadde slurvet med overgangen, hvis de ikke hadde hatt det naturlige språket tilgjengelig som register. Dersom elevene hadde arbeidet individuelt, er det en mulighet for at de hadde gjort en overgang til et annet semiotisk register. Da kan det også tenkes at de hadde representert det matematiske objektet i det gitte registeret før de startet behandlingen. Denne feilen, var den eneste feilen som ble gjort, knyttet til overgangsprosesser i alle oppgavene elevene løste i gruppe. Dette skiller seg fra tidligere forskning på overganger til og fra det naturlige språket som register. Forskningen peker nemlig på at feil forekommer hyppigere i slike overganger enn i overganger mellom semiotiske representasjoner (Bossé, et.al., 2011; Duval, 2006). Det kan tenkes at elevene i arbeid med denne oppgaven ubevisst brukte deler av bekreftelsesmodellen. Modellen beskriver tre ulike strategier for å oppdage ulike feil som blir gjort i overganger mellom representasjoner i matematikken. En av de tre bekreftelsene som blir beskrevet i modellen er implementasjonsbekreftelsen. Denne dreier seg om å utføre algoritmen korrekt, og forsikre seg om at alle komponenter i algoritmen er ivaretatt (Adu-Gyamfi, 2012). Det kan tenkes at elevene har brukt denne formen for bekreftels i arbeidet med denne oppgaven. På denne måten klarer elevene å rette opp i egne feil, og løse det matematiske problemet korrekt.

Det vil være rimelig å tenke at overgangene til det naturlige språket blir gjort, som en konsekvens av at elevene opplever denne representasjonsformen, som den mest hensiktsmessige for å løse de matematiske problemene. Elevene bruker overganger aktivt gjennom arbeidet med oppgavene. Det kan tenkes at dette gjøres for å belyse det enkelte matematiske objektets egenskaper, som er essensielle for å klare å løse problemene. Det vil være rimelig å forvente at elever i denne aldersgruppen skal kunne bevege seg mellom ulike representasjoner, i tillegg til at de skal kunne representere det matematiske objektet i det mest hensiktsmessige registeret, for å løse oppgaven (Niss & Jensen, 2002). Hva som vil være det mest hensiktsmessige registeret for den enkelte elev vil kunne variere. Det vil være individuelle forskjeller i hvilke register elevene har tilgjengelig, både med tanke på deres kunnskaper om ulike registre, og hvilke rammefaktorer som er satt for arbeidet deres (Ozgun-Koca, 1998).

Et annet moment som påvirker elevers bruk av overganger mellom ulike registre, i arbeid med problemløsningsoppgaver, er heuristikken. Elevene har en tendens til å bevege seg innenfor registre som er kjent for dem (Polya, 2014). I oppgave 3, hvor elevene skulle lage de tre første figurene til en formel, kan dette kanskje stå litt i veien for elevenes løsning av oppgaven. Valget av målrepresentasjon påvirker i stor grad, hvilke egenskaper ved det matematiske objektet elevene fremhever i besvarelsen sin. Det kan tenkes at deres besvarelser i noen grad er mangelfulle, fordi det matematiske objektet ikke er representert med alle de egenskapene som er etterspurt eller oppgitt i startrepresentasjonen. Elevene velger å representere det matematiske objektet gjennom fyrstikker, og lage en figur med disse. Etter å ha regnet ut verdiene for likningen for de ulike n-verdiene, tegner de opp samme antall fyrstikker i noe som fremstår som et tilfeldig mønster. Gjennom denne representasjonen vises ikke kvadrattallet som er representert i startrepresentasjonen, og på grunn av dette blir elevenes besvarelser mangelfulle. I elevenes diskusjon om oppgaven, kommer det frem at fyrstikker blir brukt som representasjon for det matematiske objektet, fordi det er denne representasjonsformen de har brukt i tidligere arbeid med figurer. Elevene bruker representasjonsformer de er kjent med fra tidligere uten å reflektere rundt om fyrstikker er egnet til å representere de egenskapene ved det matematiske objektet, som blir etterspurt i oppgaven. Dette kan også samsvare med tidligere forskning som viser at elever i mange tilfeller sliter med å bruke representasjoner på en fruktbar og hensiktsmessig måte (Stylianou, 2011).

5.1.2 Semiotiske representasjoner

Elevene som arbeidet med oppgavene individuelt hadde, som nevnt, ikke språket tilgjengelig som representasjon for det matematiske objektet. De har dermed kun brukt semiotiske representasjoner i oppgaveløsningen. Det forekommer overganger fra startrepresentasjonen til overgangsrepresentasjoner og/eller målrepresentasjonen i alle oppgavene. Elevene gjør overganger fra startrepresentasjonen over til en representasjonsform de selv opplever som hensiktsmessig for å løse problemene. Det er vanskelig å vite om elevene er bevisste på hvilke representasjoner de velger og hvorfor. Elevene ser ut til å gjøre overganger til andre registre, uten å tenke over hva de faktisk gjør, eller reflektere rundt alternative registre de eventuelt kunne brukt. Som problemløser vil det være nyttig å gjøre overganger til andre registre i problemløsningen, dersom problemløseren anser et annet register som mer hensiktsmessig for å løse problemet. Videre gjøres behandlingen av det matematiske objektet i det valgte registeret, før en overgang til målrepresentasjonen blir gjort for å representere den endelige løsningen (Hana, 2012). Elevene gjør slike overganger i noen grad i arbeidet med oppgavene. Selv om de ikke er bevisst på representasjonsvalget, gjør de overganger fra startrepresentasjonen, over til en representasjonsform som fremstår hensiktsmessig for løse problemet, før de eventuelt gjør nok en overgang til den målrepresentasjonen de velger å oppgi løsningen i.

En representasjon kan i seg selv fungere som den mer kunnskapsrike andre i arbeid med problemløsningsoppgaver. Abtahi, et.al. (2017) hevder at også ulike matematiske verktøy kan ha denne rollen. Konkreter, som et eksempel, kan brukes som verktøy i matematikken, og kan opptre som en mer kunnskapsrik annen. Tegn ansees å være internt orientert og er således et verktøy for menneske til å mestre seg selv, heller enn naturen og da også matematikken. Dette innebærer at konkreter som representasjon for det matematiske objektet kan være elevens mer kunnskapsrike andre, mens en representasjon bestående av tegn, ikke anses som et verktøy som elevene kan bruke for å arbeide i den proksimale utviklingssonen. Når elevene beveger seg mellom ulike representasjoner av det matematiske objektet, vil det åpenbare seg nye egenskaper ved det. Disse egenskapene kan hjelpe elevene til å se veien videre for å løse problemet. I tillegg kan en annen representasjon, enn startrepresentasjonen, bidra til at elevene ser løsningen på det matematiske problemet. Det kan derfor diskuteres hvorvidt elever som mestrer å gjøre hensiktsmessige overganger til mer effektive register, kan fungere som en salgs mer kunnskapsrik annen for seg selv. Ettersom det er elevene selv som gjør overgangen, vil det være en kombinasjon av elevens kunnskap og den nye representasjonen, som sammen kan fungere som en mer kunnskapsrik annen. Dersom dette er tilfellet, vil det være til stor nytte for elever å mestre og bevege seg mellom ulike representasjoner av det matematiske objektet, for å løse det matematiske problemet. Ut fra det som fremkommer i analysen, hvor elevene i gruppe bruker språket som representasjonssystem, i alle de fire oppgavene for å løse problemet, kan det tyde på at elevene ser løsningen på det matematiske problemet gjennom å representere det matematiske objektet i dette registeret.

Problemløsningsteam, er team som arbeider sammen, med problemløsningsoppgaver. Målet med et slikt team, vil alltid være å løse et gitt problem, på en best mulig og mest mulig effektiv måte. I forskning på samhandlingsteori, finnes det støtte for, at det i mange tilfeller, vil være mer effektivt å arbeide alene, enn i team. Deltakerne i teamet kan imidlertid ofte løse mer kompliserte problemer, enn om de arbeider individuelt (Hackman, 1990; Steiner, 1972). I analysen fremkommer det, at de elevene som arbeider i gruppe, i stor grad klarer å løse alle oppgavene de får utdelt. Unntaket er en elev, som ikke skriver opp den siste likningen i oppgave 2. Blant elevene som arbeidet individuelt, er det langt flere elever som ikke har løst oppgavene. Selv om gruppearbeid kan være lite effektivt i noen tilfeller, kan det tyde på at det kan gi noen synergieffekter når oppgavene er komplekse og vanskelige, som er tilfelle i problemløsningsoppgaver. Da kan gruppearbeid bli mer effektivt enn individuelt arbeid. Ifølge Steiner (1972) finnes det flere forskere som hevder at det ikke kan oppstå synergieffekter i teamarbeid. Et slikt syn er i strid med det som kommer frem i analysen, og det strider også med Vygotskys teori om at arbeid i den proksimale utviklingssonen, skjer i samhandling med den mer kunnskapsrike andre. Det vil dermed være rimelig å anta, at arbeid i den proksimale utviklingssonen, med støtte fra en eller flere mer kunnskapsrike andre, vil være mer effektivt, i arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver, enn å arbeide individuelt. Dette vil også kunne bety at å bruke representasjoner som den mer kunnskapsrike andre alene, ikke vil være like effektivt, som å ha en eller flere personer, som den mer kunnskapsrike andre i problemløsningsprosessen. Det er grunn til å anta at det naturlige språket som register, er avgjørende for å få til gode diskusjoner i gruppen.

5.2 Hvilke feil forekommer i overganger mellom ulike registre?

I oppgave tre, der elevene skulle tegne de tre første figurene tilhørende en formel var det mange elever som brukte overgangsrepresentasjoner i behandlingen av det matematiske objektet. I prosessen ble det gjort overganger fra startrepresentasjonen, en formel, til å representere det matematiske objektet gjennom tall. Flere av elevene gjorde denne overgangen. Denne representasjonsformen kan ha bidratt til at elevene har fått nyttig informasjon om mengden som skulle representeres. De av elevene som ikke har representert kvadrattallet fra startrepresentasjonen, vil få hjelp av en slik overgangsrepresentasjon til å komme frem til hvor mange fyrstikker, eksempelvis, som skal tegnes opp.

Å tegne fyrstikker, som en representasjon for det matematiske objektet i denne oppgaven, er ikke fullt ut dekkende for det matematiske objektet, og har dermed noen svakheter. Det kan stilles spørsmål ved hvorvidt fyrstikker kan betegnes som en figur. I ytterste konsekvens kunne elevene også representert n^2+1 som:

Figur 5.1 - Mulig elevbesvarelse, Oppgave 3

Teoretisk sett, vil representasjonen av det matematiske objektet over, representere det samme som elevene har representert i sin besvarelse. Representasjonen viser også 10 fyrstikker, bare at de her er plassert på rekke heller enn i ruter og streker. Kanskje er det også mer naturlig å betegne fyrstikker som et konkret, eller på papiret, som en tegning. Mye tyder på at elevene ikke helt har forstått hva en figur er, de har heller ikke et tydelig bilde av hvordan figurer vanligvis fremstilles i matematikken. Ved å representere den gitte ligningen gjennom fyrstikker, får elevene ikke frem alle de riktige egenskapene ved det matematiske objektet. Representasjonen vil bare representere mengden du får, om du setter inn gitte verdier i likningen. En kan gjennom denne besvarelse trekke linjer til Ozgun-Kocas (1998) forskning. Elevene har i denne oppgaven valgt de representasjonene som for dem er kjente fra tidligere. Dette vil ofte være lettere enn å begi seg ut i det ukjente (Ozgun-Koca, 1998). En slik feil, vil betegnes som en bevaringsfeil av Adu-Gyamfi et.al. (2012). Elevene identifiserer ikke viktige egenskaper ved det matematiske objektet i startrepresentasjonen og får dermed ikke representert disse egenskapene verken i overgangsrepresentasjonen eller målrepresentasjonen. Det er altså kvadrattallet som er representert i startrepresentasjonen, elevene ikke greier å identifisere, dermed får de det heller ikke med seg videre til målrepresentasjonen. Denne feilen kunne, ifølge Adu-Gyamfi et.al (2012), vært unngått dersom elevene hadde brukt bekreftelsesmodellen aktivt i sitt arbeid. Modellen er utformet for å kunne bekrefte at overganger mellom ulike representasjoner er gjort riktig. Det ville i arbeid med denne oppgaver vært aktuelt for elevene å bruke attributtbekreftelse, for å bekrefte at de samme egenskapene ved det matematiske objektet er representert i start- og målrepresentasjonen (Adu-Gyamfi et.al., 2012).

I oppgave 2, hvor elevene skulle å finne ut hvor mange flasker Ali hadde pantet av hver sort, var det en besvarelse som skilte seg ut (jf. analysedelen s. 61-62). Eleven hadde tilsynelatende oversett en del av informasjonen, han fikk om det matematiske problemet i oppgaveteksten. Som nevnt i analysen, tar eleven med seg en del misoppfatninger rundt egenskapene til det matematiske objektet, inn i målrepresentasjonen. Eleven ender dermed opp med feil løsnings på problemet.

I denne oppgaven blir det krevd at elevene går fra en verbal representasjon av det matematiske problemet, til en algebraisk representasjon. Tidligere forskning, gjort på feil i overganger mellom ulike representasjoner av lineære funksjoner, viser at det i overganger fra verbale representasjoner av det matematiske problemet, til algebraiske representasjoner, blir gjort merkbart færrest feil (Jacobsen, 2019, s. 81). I denne typen overganger blir det i gjennomsnitt gjort 3 feil, mens det i andre overgangsprosesser, kan bli gjort inntil 23 feil. Dersom elevene har tilstrekkelig matematisk kunnskap til å løse problemet, vil sannsynligheten for at det skal skje feil, være liten i slike overganger, sammenlignet med om problemet hadde krevd andre overganger. Det kan være hensiktsmessig å legge til, at elevenes kunnskap og kompetanse i problemløsningen, er påvirket av elevenes tidligere kunnskaper og erfaringer i slikt arbeid. I tillegg kommer hvilket fokus den aktuelle klassen har hatt i forkant av problemløsningen (Ozgun-Koca, 1998). Blant alle elevene som har løst denne oppgaven, var det bare denne eleven som hadde gjort en overgangsfeil. Dette får støtte fra Jacobsen (2019, s. 81), som hevder at det gjøres få feil i denne typen overganger.

Forskning på elevers vanskeligheter med tekstoppgaver, på sin side, viser at det i mange tilfeller forekommer feil, som en konsekvens av at elevene kan ha manglende kunnskap om løsningsstrategier, for å klare og løse det matematiske problemet. Det kan imidlertid også være at elevene har vansker med å oppfatte all informasjonen som ligger i oppgaveteksten. Dette medfører at elevene overser viktige detaljer ved det matematiske problemet (Stordrange, 2018, s. 43). Dette får også støtte fra Adu-Gyamfi et.al. (2012) sin beskrivelse av bevaringsfeil, hvor elever i arbeid med overganger feiler i å få med seg viktige egenskaper ved det matematiske objektet, fra en representasjon til en annen.

Overganger fra verbale beskrivelser av det matematiske problemet til å representere det matematiske problemet gjennom det naturlige språket, kan ifølge Duval (2006) være en kongruent overgang. I slike overganger vil det i liten grad forkomme feil, da dette er en slags direkte oversettelse av det matematiske problemet. Det kan tenkes, at eleven som svarte feil på denne oppgaven, ville unngått denne overgangsfeilen, dersom han hadde tilgang til det naturlige språket som representasjonsform. Ifølge læreren til den aktuelle klassen, har de hatt fokus på å bruke det naturlige språket som register, i forkant av datainnsamlingen. Dersom eleven kunne brukt dette registeret, som var kjent for eleven, og som eleven hadde erfaring med å bruke i behandlingen av matematiske problemer, kunne feilen muligens vært unngått. Det kunne vært nyttig for eleven å bruke bekreftelsesmodellen, da i form av implementasjonsbekreftelse (Adu-Gyamfi et.al., 2012). Da kunne eleven lettere unngått å ta med seg misoppfatninger fra startrepresentasjonen, og muligens ha lyktes med å løse oppgaven korrekt.

5.3 Hvordan kan lærerens tanker og holdninger til overganger mellom ulike registre påvirke elevenes bruk av det?

I intervjuet med læreren til elevene, kom det frem hvilke tanker og holdninger læreren har til å bruke representasjoner aktivt, i arbeid med problemløsnings oppgaver. Læreren gir ikke utrykk for at dette er noe som står sentralt i undervisningen hans. Til tross for relativt lav bevissthet rundt det å bruke representasjoner som verktøy i timene, har læreren fokus på at elevene skal bruke det naturlige språket, som register for å arbeide med matematiske problemet. Han legger også opp til en del samarbeidsoppgaver, hvor elevene skal løse matematiske oppgaver i grupper. På den måten legger han til rette for at elevene skal gjøre overganger fra startrepresentasjonen, til det naturlige språket gjennom samarbeidet. Lærerens fokus på denne type prosesser kan være med på å forklare hvorfor elevene, som i problemløsningsprosessen hadde det naturlige språket tilgjengelig som register, gjorde få feil i disse overgangsprosessene. Dette funnet står i kontrast til en del forskning på området, som viser at det hyppigere forkommer feil, nettopp i denne typen overganger. Dette skyldes gjerne at den den kognitive avstanden mellom representasjonene ofte vil være større (Bossé, et.al., 2011).

Et annet funn, er at elevene gruppe, i stor grad klarer å holde kontroll på informasjonen om det matematiske objektet mentalt, gjennom oppgaveløsningen. De har i liten grad skriftlige representasjoner underveis. Likevel klarer elevene å få med seg mye viktig informasjon til og fra det naturlige språket som representasjon. Ser vi på tidligere forskning, gir den i stor grad støtte til det faktum at elever i arbeid med problemløsningsoppgaver, lettere bruker representasjoner som de har erfaring med fra tidligere, og representasjoner som er kjent for dem (Stylianou, 2011). Det er grunn til å anta at lærerens fokus på å bruke det naturlige språket som representasjon i oppgaveløsningen, har minsket terskelen for elevene, til å bruke det naturlige språket som register, i arbeid med problemløsningsoppgaver. Også heuristikken, slår fast at elever i stor grad velger representasjoner de er kjent med og har erfaring med å bruke, fremfor representasjoner de har hatt lite befatning med (Polya, 2014).
Hvordan læreren legger opp undervisningen, og hva han legger vekt på i matematikktimene vil således virke direkte inn på hvilke representasjoner elevene er i stand til å bruke når de skal løse matematiske problemer. Elevene er trygge på det å arbeide i gruppe, dermed lykkes elevene i gruppe relativt godt med oppgaveløsningen, når de har det naturlige språket tilgjengelig som representasjon.

Læreren forteller at han er opptatt av at elevene skal kunne begrunne og forklare svarene sine muntlig. Ut fra intervjuet, gis det inntrykk av at disse begrunnelsene og forklaringene skjer i etterkant av selve problemløsningen, noe som også virker naturlig. Det innebærer at elevene bruker denne representasjonen i etterkant av selve løsningsprosessen, noe som tyder på at læreren, ser på representasjoner som et produkt av problemløsningen, og ikke som en del av selve problemløsningsprosessen. Ifølge Stylianou, er ikke dette uvanlig for lærere (Stylianou, 2011).

Det kommer også frem at læreren ikke har hatt særlig fokus på at elevene skal arbeide med problemløsningsoppgaver i matematikktimene sine. Hvorfor det er slik, blir ikke uttrykt direkte, utover at noen av elevene foretrekker rutineoppgaver, fremfor denne typen oppgaver. Det kan tenkes at læreren på grunn av dette, ikke implementerer problemløsningsoppgaver som en del av undervisningen. Bekymring for at enkelte elever ikke klarer å henge med faglig, kan være styrende for hva læreren setter fokus på i undervisningen. Når elevene ikke får arbeidet med problemløsningsoppgaver, får de heller ikke trent på å løse slike oppgaver, og de blir dermed ikke trygge på prosessen. Ifølge Polya (2014) kan problemløsning ses på som en ferdighet som må øves på, på lik linje med andre ferdigheter. Han sammenligner det med å svømme eller sykle. Polya (2014) påpeker, at dersom man først mestrer problemløsning, så kan man det. Dersom elevene derimot ikke får trent på problemløsningsoppgaver i matematikkundervisningen, vil de heller ikke ha samme forutsetninger for å mestre det.

Som nevnt, redegjør ikke læreren nærmere for hvorfor det ikke arbeides med problemløsningsoppgaver i undervisningen i intervjuet. En forklaring kan imidlertid være manglende læreverk tilhørende LK20, da disse fortsatt er under utvikling sentralt. Læreren kan føle på en usikkerhet, ved at utvalget av slike oppgaver er begrenset i dagens læreverk. Dermed blir det også litt vanskeligere å ta denne typen oppgaver i bruk i undervisningen. Niss og Jensen (2002) på sin side, hevder at en lærer, gjennom sin problemløsningskompetanse, skal være i stand til å oppdage, formulere, avgrense og presisere ulike matematiske problemer. I tillegg skal læreren kunne tilby alle elever å arbeide med problemløsningsoppgaver tilpasset deres nivå (Niss & Jensen, 2002). I Norge, legger også LK20 opp til en slik kompetanse hos læreren (Utdanningsdirektoratet, 2020). Lærerens holdninger til og bruk av problemløsningsoppgaver, kan imidlertid tyde på at læreren ikke selv opplever å ha tilstrekkelig problemløsningskompetanse, til at denne typen oppgaver inngår i undervisningen i særlig grad i dag. En forklaring på dette, kan være at LK20 er en relativt ny og ukjent læreplan, med mange nye krav og mål som skal implementeres. Læreren må også, i likhet med elevene, trene opp sin problemløsningskompetanse for å bli tilstrekkelig trygg på denne arbeidsmåten (Polya, 2014).

I intervjuet trekker læreren i liten grad frem andre representasjoner enn det naturlige språket. Han kommer likevel innpå andre representasjoner en gang, og da betegner han to representasjoner; figur og diagram. Læreren har erfart at det å representere et matematisk problem på ulike måter, kan føre til at flere elever får en forståelse av problemet. Dette samsvarer med Duvals tenkning rundt representasjoner, hvor også han hevder, at en viktig funksjon ved å bruke representasjoner i matematikken, er å gi elever en større forståelse av det matematiske problemet (Duval 2006). Læreren bruker altså representasjoner i undervisningen, men bruken virker å være tilknyttet rutineoppgaver, heller enn problemløsningsoppgaver. Det kan videre se ut som at læreren i noen grad ser på semiotiske representasjoner som et eget register og det naturlige språket som et annet. Realiteten er at det finnes mange ulike representasjoner innenfor det semiotiske representasjonssystemet. Dette tyder på at lærerens representasjonskompetanse i noen grad et mangelfull, noe som ikke er uvanlig ifølge Niss og Jensen (2002). Da det ikke blir arbeidet med problemløsningsoppgaver i timene, er det også lite sannsynlig at representasjonskompetansen til læreren, forbedres gjennom forberedelse, øvelse og praksis.

5.4 I hvilken grad bruker elever på 10.trinnn overganger mellom ulike registre som et verktøy i arbeid med problemløsningsoppgaver?

Gjennom analysen ble datamaterialet lagt frem for å belyse problemstillingen og forskningsspørsmålene for studien. Datamaterialet har blitt diskutert og drøftet opp mot forskningsspørsmålene og relevant forskning og teori. Til slutt vil dette bli knyttet opp mot oppgavens problemstilling.

Et viktig moment som fremkommer gjennom analysen, er at elevene som har det naturlige språket tilgjengelig som register, bruker dette aktivt gjennom hele problemløsningsprosessen. I arbeid med alle oppgavene, blir det gjort overganger til det naturlige språket i gruppen. Her blir det gjort en rekke behandlinger til det matematiske objektet, før elevene gjør nok en overgang til den aktuelle målrepresentasjonen. Gjennom behandlingen, er det også viktig å påpeke, at elevene gjør overganger, frem og tilbake mellom det naturlige språket og den aktuelle skriftlige behandlingsrepresentasjonen, for det gitte matematiske problemet. Dette innebærer at det er adskillig flere overganger som blir gjort, bare gjennom behandlingen av det matematiske objektet, sett opp mot overganger gjort blant elevene som ikke hadde det naturlige språket tilgjengelig som register. Gjennom intervjuet med matematikklæreren til elevene, kom det også frem at elevene i stor grad har arbeidet med oppgaver, ved hjelp av det naturlige språket som register. Dette gjenspeiles i elevenes prestasjoner i gruppen, da det gjøres mange overganger til og fra det naturlige språket som register i gruppearbeidet. Forskning på området støtter opp under dette, hvor det viser seg at elever bruker de registrene de er kjent med, og vil bruke disse så sant de er tilgjengelige for elevene (Ozgun-Koca, 1998).

Sammenlignes elevene i gruppen, med de elevene som løste problemene individuelt, har gruppen som hadde språket tilgjengelig som representasjonsform, løst flere av de matematiske problemene. Dette kan tyde på at deres økte bruk av overganger mellom ulike registre, har hatt en positiv innvirkning på deres besvarelser. Dette får også støtte i forskning på området, hvor det viser seg at elever i arbeid med problemløsningsoppgaver, kan dra stor nytte av å gjøre ulike overganger mellom forskjellige representasjonsformer (Ainsworth et.al. 2017; Duval, 2006; Stylianou, 2011). Ettersom bruk av overganger vil tjene elevene i deres arbeid med oppgavene, vil det også være naturlig, at de elevene som mestrer overganger, også får bedre resultater i problemløsningen sin. Ainsworth et.al. (2017) betegner da også elever som mestrer slike overganger, som eksperter.

Forskning viser at overganger har størst effekt, når de blir gjort på hensiktsmessige måter (Ainsworth et.al. 2017). Det kan tenkes at elever trenger en katalyserende faktor, for at de skal gjøre overganger, som ikke er strengt nødvendige for å løse matematiske problemer. I dette tilfellet vil medelevers kunnskap, kunne fungere som en slik katalysator, for at elevene skal gjøre overganger til det naturlige språket. Dette kan være en forklaring på at overganger ble gjort relativt hyppig, i denne elevgruppen. Det kan også her trekkes linjer til Vygotskys (1978) teori om den proksimale utviklingssonen og den mer kunnskapsrike andre.

Blant elevene som arbeidet individuelt, blir det hovedsakelig gjort overganger, der det er stengt nødvendig for å kunne løse det matematiske problemet. I de oppgavene der det ble krevd at elevene gjorde overganger til andre representasjonsformer, for å løse det matematiske problemet, ble overgangene i stor grad gjort. Videre ble det også gjort overganger til en eventuell annen målrepresentasjon. I oppgaver hvor det matematiske problemet derimot ikke krevde at elevene gjorde overganger, ble problemet løst og behandling gjort i samme representasjonsform som startrepresentasjonen. Det vil derfor være naturlig å anta at elevene som arbeidet individuelt, brukte overganger i liten grad, for å løse de matematiske problemene de ble satt til å løse. Dette kan også være med på å forklare resultatene til denne elevgruppen, hvor vesentlig færre elever har klart å løse alle de matematiske problemene, sammenlignet med gruppen som gjorde overganger til det naturlige språket.

Det vil også være nødvendig å kommentere på det forholdet at elevene ikke har hatt særlig fokus på problemløsningsoppgaver i matematikktimene. Dette gjør at elevene i stor grad bare har kjennskap til rutineoppgaver, hvor løsningen blir gitt i form av innlærte algoritmer. Dette skiller seg fra problemløsningsoppgaver, hvor løsningsstrategien i stor grad vil være ukjent for elevene, og de blir nødt til å bruke sine eksisterende kunnskaper på nye måter, for å løse det matematiske problemet (Kongelf, 2011).

Analysen viser at elevene i noen grad bruker overganger mellom ulike representasjoner for å belyse ulike egenskaper ved det matematiske objektet. Spesielt i oppgave 3, hvor elevene skulle tegne de tre første figurene tilhørende en formel. I denne oppgaven representerte mange av elevene det matematiske objektet på flere forskjellige måter, og mange av elevene gjorde flere overganger, enn det som faktisk var nødvendig for å løse oppgaven. I tillegg til å bruke overganger som et verktøy, for å få tilgang til ulike egenskaper ved det matematiske objektet, kan det også tyde på at elevene i oppgave 3 bruker ulike representasjoner, for å holde styr på vesentlig informasjon om det matematiske objektet. Dette fremkommer, ved at flere av elevene har skrevet opp de ulike verdiene de får fra formelen, når de setter inn ulike verdier for *n*, under arbeidet med oppgaven. Her vises også to viktige funksjoner representasjoner har i arbeidet med problemløsning, det å være et verktøy for å få tilgang til ulike egenskaper ved det matematiske objektet og å holde styr på informasjonen om dette (Newell & Simon, 1972; Stylianou & Silver, 2004).

Det som også er viktig å merke seg ut fra analysen, er at elevene i svært liten grad utfører behandling til det matematiske objektet, i sine besvarelser. Dette kan tyde på at elevene i de fleste oppgavene, gjør overganger fra ytre representasjoner, over til mentale representasjoner. De gjør så en rekke behandlinger til det matematiske objektet i denne representasjonsformen, før det gjøres overganger tilbake til målrepresentasjonen, som elevene oppgir løsningen i. Duval (2017) påpeker at prosesser i form av tenking og forståelse, kun baseres på mentale representasjoner. Det er naturlig å anta at elevenes behandling, faller inn under tenking, noe som innebærer at elevene i stor grad bruker mentale representasjoner, for å gjøre behandling til det matematiske objektet.

Videre mener Goldin og Shteingold (2001) at elevers indre mentale representasjoner, aldri vil være tilgjengelige for en andrepart. Vedkommende kan kun forsøke å tolke elevenes skriftlige arbeid, og ut fra dette danne seg et bilde av hvilke mentale prosesser som har foregått i elevene. Det blir dermed viktig gjennom denne studien, å være oppmerksom på at elevers mentale representasjoner, ikke vil være tilgjengelige for meg som forsker. Elevene kan gjennom sine mentale representasjoner, ha gjort mange overganger eller behandlinger til det matematiske objektet, som jeg ikke har fått tilgang til.

6 Avsluttende refleksjoner og veien videre

6.1 Avsluttende refleksjoner

Forskning viser at elevers mestring av å bruke ulike representasjoner aktivt i arbeid med problemløsningsoppgaver påvirker deres prestasjoner positivt. Dersom elever mestrer å representere det matematiske objektet i hensiktsmessige registre gjennom sitt arbeid, vil dette føre til at de i større grad klarer å løse matematiske problemer (Mulligan & Mitchelmore, 2013; Ozgun-Koca, 1998; Stylianou, 2012).

Gjennom studien har jeg, ved hjelp av flere ulike kvalitative forskningsmetoder, samlet inn data. Hensikten har vært å prøve og belyse problemstillingen min, med tilhørende forskningsspørsmål. Sistnevnte ble utformet for å gi en dypere forståelse av, og da også innblikk i, problemstillingen. Gjennom prosessen, med datainnhenting, analyse og drøfting, har jeg dannet et bilde av hvordan elevene i en 10. klasse, på en skole, i en norsk kommune, bruker overganger mellom ulike registre i sitt arbeid med problemløsningsoppgaver i matematikken.

Et av funnene som ble gjort, var at elevene i stor grad brukte og hadde nytte av det naturlige språket som register, når dette var tilgjengelig for dem. Disse elevene beveget seg til og fra det naturlige språket gjennom hele problemløsningsprosessen. Elevene gjorde også få feil i overgangene til og fra det naturlige språket. Dette var overraskende, ettersom forskning på området trekker i retning av at disse overgangene oftere medfører feil, sammenlignet med overganger mellom andre registre. En forklaring på elevenes evne til å arbeide i dette registeret uten å gjøre store feil, kan henge sammen med deres tidligere erfaringer med å arbeide aktivt med det naturlige språket som register. Dette er noe læreren har hatt fokus på at de skal mestre, og noe elevene har trent på i matematikktimene.

Et annet funn var, at de elevene som ikke hadde språket tilgjengelig som register, i liten grad brukte overganger som et verktøy. Blant disse elevene, ble overganger hovedsakelig gjort, i de tilfellene der dette var strengt nødvendig, for å klare og gjøre behandling til det matematiske objektet, ved bruk av representasjoner. Disse overgangene ble da gjort til registre, hvor elevene brukte kjente algoritmer for å løse det matematiske problemet. Ifølge læreren, bestod undervisningen også i stor grad av arbeid med det som kan kalles rutineoppgaver, hvor elevene bruker kjente algoritmer for å løse oppgavene. I elevenes besvarelser, fremkom det ingen synlige forsøk på at elevene hadde prøvd å representere det matematiske objektet i et annet register, når de ikke så løsningsstrategien umiddelbart. I disse besvarelsene har det verken blitt gjort noen synlige overganger eller behandling til det matematiske objektet, og oppgavene var ikke besvart. At elevene ikke forsøker å representere det matematiske objektet i et annet register for å prøve å finne løsningen når de står fast, kan henge sammen med elevenes manglende erfaring i å arbeide med problemløsningsoppgaver på denne måten.

Forskjellen i besvarelsene til de elevene som arbeidet i gruppe og de som arbeidet individuelt, tyder på at elevene i gruppe hadde god nytte av det naturlige språket som register, og at gruppearbeid kan gi noen synergieffekter i arbeid med problemløsningsoppgaver. Det fremkommer i intervjuet med læreren, at klassen har god erfaring med gruppearbeid og muntlige representasjoner i matematikktimene. Elevene hadde også arbeidet med det naturlige språket som register forut for datainnsamlingen. Det kan se ut som at det er sammenheng mellom elevenes valg av representasjonsform i oppgaveløsningen og deres tidligere erfaringer fra undervisningen. Dette kan også gi en indikasjon på at lærerens fokus i timene, hans holdninger og tilnærminger til ulike matematiske strategier og ferdigheter, i noen grad gjenspeiles i elevenes prestasjoner og besvarelser.

Forskning på området viser at elever som mestrer å gjøre overganger på effektive og hensiktsmessige måter, også presterer høyere, sammenlignet med elever som ikke mestrer dette like godt (Ainsworth et.al. 2002; Mulligan & Mitchelmore, 2013; Stylianou, 2011). Det eneste funnet, som støtter opp under denne forskningen i datamaterialet er resultatene til de elevene som arbeidet i gruppe med problemløsningen. Disse elevene besvarte alle oppgavene, og gjorde også merkbart flere overganger mellom ulike registre, sammenlignet med de elevene som løste oppgavene individuelt. Det kan likevel ikke trekkes noen allmenngyldig slutning rundt dette, da det vil være usikkert hvorvidt det er overgangene i seg selv, eller det faktum at elevene har hverandre som sine mer kunnskapsrike andre, og oppnår noen positive synergieffekter av det.

Kort oppsummert, tyder resultatene fra denne studien på, at i hvilken grad elevene i denne 10. klassen bruker overganger som verktøy i arbeidet med problemløsningsoppgaver, ser ut til å påvirkes av hvilke registre som er tilgjengelige for elevene der og da. Dette påvirkes av hvilke registre og representasjoner de har erfaringer med og kunnskap om fra tidligere arbeid i matematikk. Dette igjen, ser ut til å påvirkes av lærerens kunnskap om, holdninger til og bruk av representasjoner i matematikkundervisningen.

6.2 Veien videre

Avslutningsvis ønsker jeg å komme med noen innspill til videre forskning på området, som kan bidra til å belyse både problemstillingen min og forskningsfeltet ytterligere i fortsettelsen.

Slik jeg vurderer det, ville det vært interessant å sett nærmere på hvorvidt det er en sammenheng mellom elevers bruk av overganger og deres prestasjoner i matematikk. Det foreligger mange utenlandske studier på dette, men norsk forskning på feltet, virker å være mer begrenset. I og med at representasjoner og kommunikasjon er et eget kjerneelement i LK20, er det naturlig å tenke seg at emnet vil bli viet større oppmerksomhet både i undervisningen og også på forskningsfeltet i fortsettelsen.

Gjennom arbeidet med denne oppgaven, har jeg fattet interesse for hvilken rolle læreres holdninger, tanker og kunnskaper rundt ulike matematiske tema, påvirker elevenes kunnskaper, ferdigheter og prestasjoner. Å se nærmere på, hvilken rolle læreren spiller for elevers bruk av representasjoner i arbeid med problemløsningsoppgaver er spennende. Slik forskning burde vært av interesse for fremtidens skoleeiere, lærere og elever.

Slik jeg ser det, ville det vært interessant med flere studier på, hvorvidt elevers erfaringer med og kunnskap om overganger, påvirker deres prestasjoner i arbeidet med problemløsnigsoppgaver. Det hadde vært spennende å gjøre tilsvarende studier i klasser hvor elevene i større grad har erfaring med å arbeide med problemløsningsoppgaver. Da gjerne også mer erfaring i å arbeide aktivt med representasjoner som et verktøy i problemløsningsprosessen.

7 Litteraturliste

Abtahi, Y., Graven, M., Lerman, S. (2017). Conceptualizing the more knowledgeable other within a multi-directional ZPD? *Educational Studies in Mathematics*. 96(3), p 275–287. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9768-1

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V. & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. School science and mathematics, 112(3), 159-170.

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002) Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The journal of the Learning Sciences, 11(1), 25-61.*

Bang, H. (2008, 1. mars). Effektivitet i lederteam – hva er det, og hvilke faktorer påvirker det? *Tidsskrift for Norsk psykologforening.* *https://psykologtidsskriftet.no/fagartikkel/2008/03/effektivitet-i-lederteam-hva-er-det-og-hvilke-faktorer-pavirker-det*

Bloom, L., & Lahey, M. (1978). *Language development and language disorders*. New York: Wiley.

Blomhøj, M. (2021,). *Undersøgende matematikkundervisning - fra teori til praksis*. Håndbog for matematikkvejledere. København: Dansk Psykologisk Forlag.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Meredith R. (2011). Assessing the Difficulty of Mathematical Translations: Synthesizing the Literature and Novel Findings: https://www.researchgate.net/profile/Kwaku_Adu-Gyamfi2/publication/267920348_Assessing_the_Difficulty_of_Mathematical_Translations_Synthesizi ng_the_Literature_and_Novel_Findings/links/54bcd3100cf24e50e9409638.pdf

Bryman, A. (2016). *Social research methods*. Oxford: Oxford University Press.

Bulmer, M., (red.) (1982) Social Research Ethics, London: The Macmillan Press

Christoffersen, L & Johannessen, A. (2012) *Forskningsmetode for lærerutdanningene* (1. utg.) Abstrakt forlag.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1), 103-131. Doi: 10.1007/s10649-006- 0400-z

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. New York: Springer. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-56910-9.pdf

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development og mathematical concepts. I A. A. Cuoco & F.R. Curcio (Red.), *The roles of representation in school mathematics* (s. 1-23). Reston, Virginia: National council of teachers of mathematics.

Hackman, J. R., (1990). *Groups that work (and those that don't)*. San Fransisco: Jossey-Bass.

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tankemåter: Matematikk for lærerutdanningen.* Caspar forlag AS

Iori, M. (2017). Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. Educational Studies in Mathematics, 94(3), 275–291. doi: 10.1007/s10649-016-9726-3

Jacobsen, D. I. (2000). Hvordan gjennomføre undersøkelser? Høyskoleforlaget AS.

Jacobsen, N. (2019). *Tittel: Smertelig Enkelt: Studie med fokus på elevenes utfordringer som manifesterer seg gjennom rasjonelle feil ved konvertering mellom ulike semiotiske representasjoner av lineære funksjoner*. [Masteroppgave]. Universitet i Agder.

Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.

Klette, K., Bergem, O. K., & Roe, A. (2015). *Teaching and learning in lower secondary schools in the era of PISA and TIMSS*. Dordrecht: Springer.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16(4)*, 5–44.

Kunnskapsdepartementet (2017). *Overordnet del – verdier og prinsipper for grunnopplæringen*. Fastsatt som forskrift ved kongelig resolusjon. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Kunnskapsdepartementet (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Mulligan, J. T., Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In Reconceptualizing early mathematics learning (s. 29 - 45). Springer Netherlands.

Newell, A., & Simon, H. (1972). Human problem solving. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Niss, M. & Jensen T. H. (2002). *Kompetencer og Matematiklæring*. Uddannelsestyrelsens temahæfteserie. https://www.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Kompetencer%20og%20matematiklæring.pdf

Ozgun-Koca, S. A. (1998, 31. november) *Students' Use of Representations in Mathematics Education.* The Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Raleigh, NC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED425937.pdf

Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. New York: John Wiley & sons, Inc.

Polya, G. (2014). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2021) *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanningen.* Cappelen Damm Akademisk.

Robson, C. (2011). Real World Research (3. utg.): John Wiley & Sons Ltd.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics

Teaching, 77, (s. 20-26).

Steiner, I. D. (1972). *Group process and productivity*. New York: Academic Press.

Stordrange, K., K. (2018). *Forståelse av matematiske tekstoppgaver: Hva bør man som lærer ha tenkt gjennom når man ønsker at elevene skal jobbe med tekstoppgaver i matematikk? [Masteroppgave, Universitetet i Bergen].* *https://bora.uib.no/bora-xmlui/bitstream/handle/1956/18234/Master-Kjetil-Kjellesvik-Stordrange.pdf?sequence=1&isAllowed=y*

Stylianou, D.A. (2010) Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *J Math Teacher Educ* 13, 325–343 (2010). https://doi.org/10.1007/s10857-010-9143-y

Stylianou, D. A., (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*. 76. s. 265-280. Doi: 10.1007/s10649-010-9273-2.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. Journal of Mathematical Thinking and Learning, 6(4), 353–387.

Svendsen, L. F. H., (2022) Semiotikk. I Erik Bolstad (red.) *Store norske leksikon.* Hentet 29. mai 2022 fra https://snl.no/semiotikk

Vygotsky, L. L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge: Harvard University Press.

Vedlegg 1: Godkjent søknad fra NSD

Meldeskjema / Overganger som verktøy i problemløsning / Vurdering

Vurdering

Referansenummer
408278

Prosjekttittel
Overganger som verktøy i problemløsning

Behandlingsansvarlig institusjon
Høgskulen på Vestlandet / Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett / Institutt for språk, litteratur, matematikk og tolkning

Prosjektperiode
17.08.2021 - 16.05.2022

Meldeskjema

Dato	**Type**
14.12.2021	Standard

Kommentar
Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet med vedlegg den 14.12.2021, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige kategorier av personopplysninger frem til 16.05.2022

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de registrerte til behandlingen av personopplysninger. Der de resgitrerte er under 15år vil samtykke også innhetes fra deres foresatte. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i personvernforordningen om:

· lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at de registrerte/de foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
· formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke behandles til nye, uforenlige formål
· dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
· lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18), og dataportabilitet (art. 20).

NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte/de foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Vi minner om at hvis en registrert tar kontakt om sine rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).
Ved bruk av databehandler (spørreskjemaleverandør, skylagring eller videosamtale) må behandlingen oppfylle kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29. Bruk leverandører som din institusjon har avtale med.
For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og/eller rådføre dere med behandlingsansvarlig institusjon.

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema
Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.
Lykke til med prosjektet!

Vedlegg 2: Samtykkeerklæring for elever

Vil du delta i forskningsprosjektet:

Overganger mellom ulike representasjoner i matematisk problemløsning

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se nærmere på hvordan overganger mellom ulike matematiske registre kan være et hjelpemiddel/verktøy for elever i arbeid med problemløsning. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å finne ut av hvordan overganger mellom ulike matematiske registre kan være et nyttig verktøy for elever på 10.trinn når de arbeider med problemløsningsoppgaver i matematikk. Jeg ønsker å se nærmere på hvordan elevene bruker ulike register når de arbeider med problemløsningsoppgaver og hvordan disse registrene kan være nyttige i den gitte oppgaven. Oppgavene som vil bli gitt er eksempel oppgaver utarbeidet at Matematikksenteret i sammenheng med eksamen som gjennomføres i slutten av 10. klasse. Prosjektet blir gjennomført som del av min masteroppgave i matematikkdidaktikk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Høgskolen på Vestlandet, Institutt for språk, litteratur, matematikk og er ansvarlig for prosjektet.

Masteroppgaven blir skrevet av Sofie Bjørnevik Totland, i samarbeid med veiledere Mona Røsseland og Erik Eikeland.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du/ditt barn får spørsmål om å delta i prosjektet ettersom at jeg skal gjennomføre datainnsamling i en 10. klasse på en norsk skole. Jeg har vært i praksis på Fjell Ungdomsskole og det var derfor naturlig for meg å spørre om å få lov til å samle inn data der.

Hva innebærer det for deg å delta?
Dersom du/ditt barn ønsker å delta i prosjektet innebærer det at ditt barn vil svare på noen matematiske problemløsningsoppgaver. Jeg ønsker gjennom mitt prosjekt å se på elevenes besvarelser. Det vil ikke bli brukt noen personopplysninger i prosjektet og alle besvarelsene vil anonymiseres. Elevene vil få en skoletime (60 minutter) på å løse problemløsningsoppgavene.

Jeg ønsker også å ta med noen elever ut på et grupperom hvor de sammen kan løse et par oppgaver. Denne delen vil bli tatt opp som et videoopptak. Elevenes ansikt vil ikke være med på videoen, og alt av datamateriale vil anonymiseres fortløpende. Dette gjøres fordi språket vårt er en av de viktigste representasjonsformene vi bruker i matematikk, og ved at elevene får samarbeide om å løse oppgavene legges det opp til at språket også kan brukes som en representasjon.

Ønsker du å se oppgavene som vil bli gitt til elevene/ditt barn i forkant av opplegget kan du kontakte meg, Sofie Bjørnevik Totland.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

1

For de elevene som eventuelt velger å ikke delta på forskningsprosjektet vil det bli satt om et alternativt opplegg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

Det vil i behandlingen av data kun være meg og mine veiledere som vil ha tilgang på elevenes besvarelser. Personopplysninger som kan være med på å indentifisere deltakerne vil fortløpende bli fjernet for å sikre at besvarelsene ikke kan blir knyttet til den enkelte eleven.

Ingen av deltakerne i prosjektet skal kunne bli gjenkjent ut fra oppgaven da den er ferdigstilt.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 16. mai 2022. Alt av datamateriale vil da bli destruert.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Høgskulen på Vestlandet, Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett / institutt for språk, litteratur, matematikk og tolkning* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- *Høgskulen på Vestlandet, Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett / institutt for språk, litteratur, matematikk og tolkning* ved:

Veileder, Mona Røsseland
E-post: Mona.rosseland@hvl.no
Tlf: 55585809

Veileder, Erik Eikeland
E-post: erik.eikeland@hvl.no
tlf: 55587544

Student, Sofie Bjørnevik Totland
E-post: sof_bjo@hotmail.no
Tlf: 97503841

- Vårt personvernombud:
  Trine Anikken Larsen

Tlf: 55587682
E-post: trine.anikken.larsen@hvl.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Mona Røsseland og Erik Eikeland (veiledere)

Sofie Bjørnevik Totland (student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Overganger mellom ulike registre i arbeid med matematisk problemløsning*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta på å løse problemløsningsoppgaver
- ☐ å delta på å løse problemløsningsoppgaver i gruppe

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vil du delta i forskningsprosjektet

Overganger mellom ulike register i matematisk problemløsning

Dette er et spørsmål til deg om å delta i et forskningsprosjekt hvor formålet er å se nærmere på hvordan overganger mellom ulike matematiske registre kan være et hjelpemiddel/verktøy for elever i arbeid med problemløsning. I dette skrivet gir vi deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for deg.

Formål
Formålet med prosjektet er å finne ut av hvordan overganger mellom ulike matematiske registre kan være et nyttig verktøy for elever på 10.trinn når de arbeider med problemløsningsoppgaver i matematikk. Jeg ønsker å se nærmere på hvordan elevene bruker ulike register når de arbeider med problemløsningsoppgaver og hvordan disse registrene kan være nyttige i den gitte oppgaven. Oppgavene som vil bli gitt er eksempel oppgaver utarbeidet at Matematikksenteret i sammenheng med eksamen som gjennomføres i slutten av 10. klasse. Prosjektet blir gjennomført som del av min masteroppgave i matematikkdidaktikk.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?
Høgskulen på Vestlandet, Institutt for språk, litteratur, matematikk og er ansvarlig for prosjektet.

Masteroppgaven er skrevet av Sofie Bjørnevik Totland, i samarbeid med veiledere Mona Røsseland og Erik Eikeland..

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Du får spørsmål om å delta i mitt prosjekt ettersom at du er matematikklærer i den klassen jeg har smalet inn data fra. På grunn av dette er jeg interessert i å høre mer om dine tanker rundt min problemstilling og din matematikkundervisning generelt. Dette er interessant for mitt prosjekt ettersom at det mest sannsynlig vil være sammenheng mellom dine tanker om tema og elevenes bruk av overganger i matematisk problemløsning.

Jeg har fått dine kontaktopplysninger fra Nina Zandstra, rektor på Fjell Ungdomsskole, og kontakter deg på bakgrunn av det.

Hva innebærer det for deg å delta?
Hvis du velger å delta i prosjektet, innebærer det at du deltar på et intervju. Det vil ta deg ca. 20-30 minutter. Spørreskjemaet inneholder spørsmål om din undervisning, dine taker rundt det å bruke overganger aktivt i arbeid med problemløsningsoppgaver og noe om dine tanker rundt eksamen i matematikk. Dine svar fra intervjuet vil bli tatt lydopptak av og dette vil bli transkribert og anonymisert fortløpende etter intervjuet.

Det er frivillig å delta
Det er frivillig å delta i prosjektet. Hvis du velger å delta, kan du når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle dine personopplysninger vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for deg hvis du ikke vil delta eller senere velger å trekke deg.

Ditt personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker dine opplysninger
Vi vil bare bruke opplysningene om deg til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

1

Det vil i behandlingen av data kun være meg og mine veiledere som vil ha tilgang på dine svar fra intervjuet. Personopplysninger som kan være med på å indentifisere deg vil fortløpende bli fjernet for å sikre at besvarelsene ikke kan blir knyttes til deg.

Ingen av deltakerne i prosjektet skal kunne bli gjenkjent ut fra oppgaven da den er ferdigstilt.

Hva skjer med opplysningene dine når vi avslutter forskningsprosjektet?
Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes/oppgaven er godkjent, noe som etter planen er 16. mai 2022. Alt av datamateriale bil da bli destruert.

Dine rettigheter
Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:
- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg, og å få utlevert en kopi av opplysningene,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- å få slettet personopplysninger om deg, og
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av dine personopplysninger.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?
Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra *Høgskulen på Vestlandet, Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett / institutt for språk, litteratur, matematikk og tolkning* har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Hvis du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:
- *Høgskulen på Vestlandet, Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett / institutt for språk, litteratur, matematikk og tolkning* ved:

Veileder, Mona Røsseland
E-post: Mona.rosseland@hvl.no
Tlf: 55585809

Veileder, Erik Eikeland
E-post: erik.eikeland@hvl.no
Tlf: 55587544

Student, Sofie Bjørnevik Totland
E-post: sof_bjo@hotmail.no
Tlf: 97503841

Vårt personvernombud:
Trine Anikken Larsen
Tlf: 55587682
E-post: trine.anikken.larsen@hvl.no

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på e-post (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Mona Røsseland og Erik Eikeland
(Veiledere)

Sofie Bjørnevik Totland
(Student)

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *[sett inn tittel]*, og har fått anledning til å stille spørsmål. Jeg samtykker til:

- ☐ å delta i personlig intervju

Jeg samtykker til at mine opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet

----
(Signert av prosjektdeltaker, dato)

Vedlegg 4: Oppgavehefte

Oppgavesett

Prøv å løs oppgavene så godt du klarer.

Alle hjelpemidler er tillatt når du arbeider med oppgavene, bare husk å levere inn alt du har gjort når du har jobbet med oppgavene. (kladdeark, notater, dokumenter på PC, osv.).

Oppgave 1

Vi har likningen (4 − a) (4 + b) = 8

Det finnes flere tallpar som gjør at denne likningen blir gyldig.

Gi eksempler på tre slike tallpar.

Oppgave 2

Siden 2018 har pant på plastflasker vært 2 kr for små flasker og 3 kr for store flasker.

Ali har pantet flasker for 109 kr.

Til sammen pantet han 51 flasker.

Hvor mange små og store plastflasker pantet Ali?

Sett opp, forklar og løs et likningssett som beskriver den praktiske situasjonen.

Oppgave 3

Formelen for figur n i et mønster er: $F_n = n^2 + 1$

Lag de tre første figurene i dette mønsteret.

Oppgave 4

**Anne er 15 år, og ønsker å ta førerkort for moped.
Hun skal kjøpe moped når hun blir 16 år.
Hun planlegger å selge den når hun blir 18 år.**

Følgende er obligatorisk opplæring når du skal ta førerkort for moped:

Grunnkurs moped – 3 timer	1000,-
Trinnvurdering trinn 2	700,-
Sikkerhetskurs trafikk – 4 timer	2040,-
Trinnvurdering trinn 3	700,-
Sikkerhetskurs vei – 4 timer	2040,-

Samlet pris: All obligatorisk opplæring + 3 kjøretimer: kr. 8800,-

Gebyr førerkort moped:

Gebyr teoriprøve	660,-
Gebyr utstedelse av førerkort	310,-
Fakturagebyr	65,-

Forsikring:

	Kasko 125kr/md
Ansvar	x
Ulykke	x
Brann	x
Tyveri	x
Utstyr og bagasje	x
Veihjelp	x
Utforkjøring, kollisjon og velt	x

Legg til favoritt

Peugeot Speedfight 4 Pure

Pris
16 000 kr

Bruk opplysningene ovenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.

Oppgavene er hentet fra Utdanningsdirektoratet sine sider.
https://www.udir.no/contentassets/a97119d8db0f476eb6f7e9d4adb51e41/eksamen-del-med-hjelpemidler.pdf

Vedlegg 5: Intervjuguide

Intervjuguide – I hvilken grad bruker 10. trinns elever overganger mellom ulike registre som et verktøy i deres arbeid med matematiske problemløsningsoppgaver?

Intervjuet vil bli gjennomført som er semi-strukturert intervju hvor noen spørsmål er utformet i forkant av intervjuet, mens jeg i løpet av intervju vil stille spontane oppfølgingsspørsmål der det føles naturlig og passende.

Du kan når som helst gjennom prosjektet og intervjuet velge og trekke din deltagelse eller velge å ikke svare på spørsmål dersom du skulle ønske det.

Spørsmål 1:

Hvordan legger du opp en typisk matematikk time? Hva inneholder timen?

Spørsmål 2

Hvilke fokus områder har du i dine timer? Noe spesielt du pleier å ha fokus på i timene?

- Hvordan arbeider du med kjerneelementene i matematikk i dine matematikktimer?

Spørsmål 3

Har den nye læreplanen gjort at din undervisning har endret seg? I så fall, hvordan?

Spørsmål 4

Når du arbeider med kjerneelementene, merker du noen forskjeller mellom de forskjellige når du/dere arbeider med disse?

- Er det noen kjerneelementer som skiller seg ut, og som er spesielt lette/vanskelige å arbeide med?

Spørsmål 5

Har du noen tanker rundt det å arbeide med overganger mellom ulike registre/representasjoner i matematikk?

a) Hvorfor tenker du at dette er viktig/ikke viktig?
b) Hvordan arbeider du med dette i undervisningen din?
c) Hvordan oppfatter du kjerneelementet om representasjoner og kommunikasjon?

Spørsmål 6

Når du tenker på overganger mellom ulike representasjoner i matematikk, hva tenker du på da?

- Hva er en representasjon i dine øyne?

Spørsmål 7

I hvilke situasjoner tror du elever kunne dratt nytte av det å ha øvd på å gå mellom ulike representasjoner i matematikk?

Spørsmål 8
Hva mener du er viktigheten av det å mestre å gå mellom ulike representasjoner i matematikk?

Spørsmål 9
Hva gjør du når elever ikke forstår noe i dine timer i matematikk?

Spørsmål 10
Syns du det burde vært mer fokus på overganger i matematikk?

- Hvorfor/hvorfor ikke?

Spørsmål 11
På hvilke måter tror du det å bruke overganger aktivt i arbeid med matematikkoppgaver/problemløsningsoppgaver kunne vært et nyttig verktøy for elevene?