Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGAVE

En studie av to læreverks tilrettelegging for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer, og elevers potensiale for å tilegne seg ulike matematiske kompetanser gjennom arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære

A study of two textbooks facilitating students´ learning of transitions between representations and students´ potential for acquiring different mathematical competencies through work with tasks within functional learning

Julie Kristine Engen

M120UND509-1 H20, Master i undervisningsvitenskap

Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett

Veileder: Tamsin Jillian Meaney

Innleveringsdato 01.06.2021

Forord

Fullføringen av denne masteroppgaven markerer slutten på min studietid og dermed også min rolle som student ved Høgskolen på Vestlandet, avdeling Bergen. Studietiden har totalt sett vært lang, lærerik, til tider utfordrende, men også veldig fin. Å skrive masteroppgave i et studieår preget av en global pandemi der formelle restriksjoner omkring Covid-19 har preget hverdagen har gjort skriveprosessen krevende, utfordrende og noe ensom. Likevel har skriveprosessen vært opplysende og lærerik. Til tross for at skriveprosessen er et individuelt arbeid og jeg selv er personlig ansvarlig for innholdet, er det flere mennesker som har hjulpet meg på veien til en ferdigstilt masteroppgave.

Først må jeg takke min veileder, Tamsin Jillian Meaney, for å aldri gi meg opp. Takk for gode faglige innspill, kloke ord og gode diskusjoner gjennom hele prosessen. Takk for at du har gitt meg tid, at du har vært tålmodig og for å ha hatt tillit til prosessen.

Jeg vil også takke min far Roy-Helge Olsen og familievenn Thor Haaversen for sine kritiske blikk og hjelp med korrekturlesing i oppgavens sluttspurt.

Avslutningsvis vil jeg rette en takk til familien min. Takk til mamma, pappa og mine to søstre for å alltid støtte meg. Spesielt takk til min mann, Fredrik, som har styrt skuta på hjemmebane slik at vi har fått hverdagen til å gå rundt med alt småbarnslivet innebærer, og for alltid å tro på meg.

Julie Kristine Engen

Mai, 2021

Sammendrag

Denne masteroppgaven sammenlikner to læreverk, et papirbasert læreverk og et digitalt læreverk, med tanke på oppgaver innenfor det matematiske emnet funksjonslære. Jeg har i lys av forskningsspørsmålene for oppgaven sett på læreverkenes tilretteleggelse for elevers læring av overganger mellom representasjoner innenfor funksjonslære. I tillegg har oppgaven undersøkt på hvilken måte elevene har potensiale til å tilegne seg kunnskap i Niss og Jensens (2002) fire matematiske kompetanser; *representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse, hjelpemiddelkompetanse* og *kommunikasjonskompetanse*, gjennom arbeid med nummererte oppgaver i to læreverk. Datamaterialet er undersøkt og analysert gjennom en kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ dokument- og lærebokanalyse. Datamaterialet er analysert med bakgrunn i teori omkring det didaktiske tetraederet (Rezat & Sträßer, 2012), matematiske kompetanser (Niss & Jensen, 2002), høye og lave kognitive krav i oppgaveformuleringer og Janviers (1978) tabell for overganger mellom representasjonsformer.

Til tross for at denne studien kun undersøkte to læreverk har resultatene likevel vist at det finnes tydelige trender felles for begge læreverkene innenfor funksjonslære. Undersøkelsen har vist at det ikke er signifikante forskjeller mellom læreverkene. Elevene får de samme mulighetene til å øve kompetansene sine innenfor både *representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse* og *kommunikasjonskompetanse* ved å arbeide med de nummererte oppgavene i begge læreverkene. Læreverkene legger opp til et potensiale for at elevene skal få øving i *representasjonskompetanse* på flere måter, eksempelvis gjennom flervalgsoppgaver og oppgaver som stiller elever like eller ulike krav til representasjonskompetanse i nivådelte oppgaver. Det eksisterer en mulighet for at elevene tilegner seg kunnskap om symbol- og formalismekompetanse innenfor funksjonslære i alle de nummererte oppgavene i læreverkene, men det mangler på generell basis oppgaveformuleringer med spørreordene *hvordan* og *hvorfor*. Den største forskjellen mellom læreverkene er uoverensstemmelsen med tanke på anbefaling av hjelpemidler vedrørende den digitale graftegneren GeoGebra. I tillegg kommer det frem av analysen at for å kunne oppfylle kjerneelementet i matematikk som handler om «representasjon og argumentasjon» er man avhengig av flere komponenter enn bare læreverkene. Dette er fordi ingen av de til sammen 124 oppgavene i læreverkene oppfordrer elevene til å samarbeide.

Summary

This master's thesis compares two textbooks, a paper-based textbook and a digital textbook, regarding assignments within the mathematical subject of functional learning. Considering the two research questions for the thesis, I have looked at how the two textbooks facilitate learning of transitions between representations in functional learning. In addition, the thesis has investigated the way in which students have the potential to acquire knowledge in Niss and Jensen's (2002) four mathematical competencies; representation competence, symbol and formalism competence, assistive technology competence and communication competence, through work with numbered tasks in two textbooks. The data material has been examined and analyzed through a combination of qualitative and quantitative document and textbook analysis. The data material has been analyzed based on theory considering the didactical tetrahedron (Rezat & Sträßer, 2012), mathematical competencies (Niss & Jensen, 2002), high and low cognitive requirements in task formulations and Janvier's table (1978) for transitions between forms of representation.

Even though this study only examined two textbooks, the results have nevertheless shown that there are clear trends common to both textbooks in functional theory, and that there are only smaller differences between the textbooks. The students get the same opportunities to practice their competencies in both representation competence, symbol and formalism competence and communication competence by working with the numbered tasks in both textbooks. Both textbooks offer a potential for the students to practice representation competence in several ways, for example through multiple-choice tasks and tasks that place students on equal or different requirements for representation competence in level-divided tasks. There is a possibility that students acquire knowledge of symbol and formalism competence in functional learning in all the numbered tasks in the teaching materials, but there is a general lack of task formulations with the question words how and why. The biggest difference between the teaching aids is the disagreement regarding the recommendation of aids regarding the digital graph designer GeoGebra. In addition, analyzes show that in order to be able to fulfil the core element in mathematics, which is about "representation and argumentation", one is dependent on more components than just the teaching materials. This is because none of the 124 assignments in the textbooks encourage students to collaborate.

Innholdsfortegnelse

Tabell- og figuroversikt

Tabeller

Figurer

4.5: Deloppgave 4 e) i kapittel 6.4 fra Campus Matte 8 (Thue et al., 2020, kapittel 6.4). Side 60

1 Innledning

«Å gå på skolen dominerer livet til de fleste barn rundt om i verden. [...] Imidlertid, [...] er det deler av skolemiljøet som er så vanlig at de er praktisk talt universelle. Lærebøker er et slikt element» (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002, s. 1). Det at lærebøker er en så sentral og universell del av skolegangen gjør «forståelse av lærebøker viktig for å forstå læringsmulighetene som tilbys i utdanningssystemer rundt om i verden» (Valverde et al., 2002, s. 1, egen oversettelse). Kilpatrick, Swafford og Findell (2001, s. 36) legger til at de tilgjengelige læreverkene de ulike skolene benytter er sterke påvirkere av hva som undervises i klasserommet. Å studere læremidlene i matematikk er interessant fordi lærebøkene er sentrale for matematikklæring og undervisning (Alkhateeb, 2019). Det vil i slike undersøkelser være naturlig å gjøre seg kjent med og sette seg inn i noen av mulighetene en lærer har når det kommer til valg av læremidler. Her kan man se på papirbaserte eller digitale læremidler hver for seg eller opp mot hverandre. Ifølge Anthony og Walshaw (2009) blir læringspotensialet i matematikk først gjort tilgjengelig for elevene gjennom oppgavene elevene møter i undervisningen. Slike oppgaver er gjerne hentet fra de matematiske ressursene læreren har tilgjengelig, slik som eksempelvis en lærebok eller et digitalt læremiddel. Videre hevder Anthony og Walshaw at elevene trenger å få arbeide med matematikk på ulike måter. Dette være seg enten gjennom individuelt- eller samarbeid, både med to eller flere personer eller med diskusjon i hel klasse, eller ved bruk av ulike læringsressurser.

De matematiske læremidlene i skolen inngår i skolens uformelle rammer som er med på å påvirke undervisningen (Repstad & Tallaksen, 2014). De uformelle rammene beskrives som «det som en trenger i det daglige undervisningsarbeidet, og som gjør undervisningen enkel eller vanskelig å få til, og som kanskje mer enn alle lover, planer og forskrifter er med på å bestemme hvordan opplæringa foregår» (Repstad & Tallaksen, 2014, s. 31). I tillegg legger Fan et al. (2013, s. 635) til at forskere generelt er enige om at lærebøker er en viktig formidler av læreplanen og at læreplanen spiller en dominerende rolle på tvers av skolefag.

I Norge legger Kunnskapsløftet for læreplanen føringer for hva fag og undervisning i skolen skal inneholde. Gjennom kompetansemål og retningslinjer skal læreplanen sikre at alle elever i Norges land lærer det samme. 1.august 2020 ble en ny læreplan innført for 1.- 9.trinn og Vg1, mens 10.trinn og Vg2 og Vg3 følger etter i 2021 og 2022. Læreplanen har blant annet fått en helt ny struktur og det er innført kompetansemål etter hvert klassetrinn samt kjerneelement for alle fag. Kjerneelementene i matematikk er knyttet opp mot og bygget opp rundt ulike forskeres forståelse av hva matematisk kompetanse er. I denne oppgaven vil trådmodellen til Kilpatrick et al. (2001) og de åtte matematiske kompetansene utformet av Niss og Jensen (2002) i det danske KOM-prosjektet spille en sentral rolle. Kjerneelementene tildeles en betydningsfull rolle i læreplanen og omtales som det mest sentrale og viktigste elevene skal lære i hvert fag (Utdanningsdirektoratet, 2017).

1.1 Lærebok eller læremiddel?

Kunnskapsdepartementet definerer ordet lærebok eller læremiddel, som «alle trykte, ikkje-trykte og digitale element som er utvikla til bruk i opplæringa. Dei kan vere enkeltståande eller gå inn i ein heilskap, og dekkjer aleine eller til saman kompetansemål i Læreplanverket for Kunnskapsløftet» (Kunnskapsdepartementet, 2006, §17-1). Det vil si at en lærebok eller et læremiddel er et virkemiddel som gir opplæring i et emne og er et hjelpemiddel for læring som inngår i en helhet. «I ei lærebok [...] blir det gjort avveininger om hva som skal fortelles den lærende direkte og hvordan en ellers skal legge til rette for en læringsprosess hvor den lærende får eierskap over stoffet» (Hana & Hansen, 2015, s. 42). Dette betyr at lærebøker skrevet av ulike forfattere kan variere i innhold og matematisk fokus. På bakgrunn av dette faller det seg naturlig å sammenlikne læremidler. Dette på grunn av at de som har forfattet læremidlet har ulik oppfatning av hva som er skal vektlegges og inkluderes fra læreplanen overfor den lærende.

Det engelske ordet «textbook» oversettes direkte til norsk som «lærebok.» På bakgrunn av dette kommer ordene «lærebok» og «læremiddel» til å brukes synonymt. Ordet læreverk vil brukes som samlebegrep for de ulike utgivelsene der eksempelvis grunnbok, oppgavebok og lærerveileder inkluderes.

1.2 Papirbasert versus digitalt læreverk i skolen

Tilbudet av digitale læremidler i tillegg til de papirbaserte har skapt et nytt landskap av læremidler både nasjonalt og internasjonalt de siste årene. Gilje et al. (2016) legger frem at digitaliseringen av lærebøker er med på å skape nye muligheter for arbeid med faglig kompetanse og kunnskap i skolens ulike fag. Blant forskningen gjennomført i Norge kommer det frem at den papirbaserte læreboka har en sentral rolle i undervisningen både på mellomtrinnet, ungdomstrinnet og i videregående skole (Juuhl, Hontvedt & Skjelbred, 2010;

Rønning et al., 2008; Skjelbred, Solstad & Aamotsbakken, 2005). IKT-senteret gjennomførte en undersøkelse av digitale læringsressurser. Der kom det frem at rundt 10 prosent av ungdomsskolelærerne oppgir at de bruker digitale læremidler daglig til sammenliknet med 60 prosent av lærere i videregående skole. Ut ifra dette ser det ut som at de papirbaserte lærebøkene har en sentral rolle som strukturerende element i undervisningen noe som også Gilje et al. (2016) hevder ut ifra sine forskningsresultater.

En undersøkelse gjort av Waagene og Gjerustad (2015) ser på lærernes bruk og valg av lærebøker. I studien kommer det frem at majoriteten av lærerne oppgir at de i hovedsak bruker papirbaserte læremidler i sin virksomhet, og at digitale læremidler blir brukt som et supplement til de papirbaserte læremidlene. I tillegg kommer det frem at «to av tre lærere ønsker å bruke digitale læremidler i større grad enn de gjør i dag» (Waagene & Gjerustad, 2015, s. 8), mens samtidig oppgis det at «godt over halvparten av lærere bruker IKT i gjennomføringen av undervisningen i stor eller svært stor grad» (Waagene & Gjerustad, 2015, s. 8).

Det er også verdt å merke seg at kommunene i Norge får 170 millioner kroner til å investere i nye læremidler til fagfornyelsen der 60 millioner er øremerket til innkjøp av digitale læremidler (Regjeringen.no, 2020). Det er derfor viktig å orientere seg i læreboklandskapet og få innsikt og kunnskap i en, av mange, digitalt læreverks formidling av et matematisk tema.

1.3 Tidligere forskning på læremidler

Matematiske lærebøker var og er fortsatt sett på som en av de viktigste resursene for å både undervisning og læring av matematikk (Valverde et al., 2002). Forskningen som er gjort på lærebøker i ulike land viser at lærebøkene som brukes i matematikk fungerer som (medierende) fartøy når elevene interagerer med matematikk (Haggarty & Pepin, 2002). «Det antas også ofte at lærebøker [med tilhørende lærerveiledninger] er en av hovedkildene for innholdet som dekkes og de pedagogiske stilene som brukes i klasserom» (Pepin & Haggarty, 2001, s. 159, egen oversettelse). Når lærere planlegger undervisningen eller gjør andre forberedelser bruker de læreboken (Chávez-López, 2003; Reys, Reys & Chavez, 2004). På samme måte blir det matematiske innholdet i klasserommet i stor grad påvirket av innholdet i lærebøkene (Johansson, 2006; Schmidt, Porter, Floden, Freeman & Schwille, 1987).

Gjennom forskning kommer det i tillegg frem at matematiske læreverk brukes av lærere på to dominerende måter. Enten som en kilde der lærerne finner oppgaver og/eller problemløsningsoppgaver (Pepin & Haggarty, 2001) eller som en rettleder for instruksjon og rekkefølge. Undervisning og rekkefølge forholder seg til beslutninger om hvordan man skal undervise, hvilken instruksjonsmetode en skal følge, og hvordan en skal presentere innholdet (Valverde et al., 2002). Forskningsmaterialet tilsier at lærebøkene har stor betydning for elevers skolehverdag, og det er derfor interessant å se nærmere på nettopp dette.

Noen forskere og forfattere betrakter elevene som de viktigste leserne av lærebøker (Kang & Kilpatrick, 1992; Love & Pimm, 1996), men forskningen på elevenes bruk av lærebøker er mindre representert i forskningsmiljøet. Forskning har vist at lærebøkene er bygget opp på en slik måte at de inviterer elevene til å engasjere seg i både oppgaver og andre aktiviteter (Remillard, 2000; Valverde et al., 2002). I tillegg blir matematiske begreper forklart på en måte som retter seg mot elevene som i hovedsak skal lese bøkene. «Lærere blir sett på som formidlere av teksten [i læreboka] og på den måten hjelper lærere elever med å lære ved å gi beskrivelse og forklaring av innholdet i teksten» (Love & Pimm, 1996, s. 398). Dette betyr at en lærer kan fungere som en medierende faktor av innholdet i læreboken selv om læreboken ikke er til stede eller ved rettledelse av en lærerveileder.

Lærebøkene skal formidle et sammensatt matematisk tema tilpasset ulike alderstrinn eller utdannelsesretninger. Innenfor forskningsfeltet har lærebøker på ulike trinn blitt studert for å undersøke hvordan læreplanreformen påvirker lærebøkenes oppbygging (Ball & Cohen, 1996; Otte, 1983; Rezat, 2006b) og i hvilken grad læreplanen følges. Et av forskningsfunnene som er gjort er at de fleste matematikkbøker er lukket ved at de «begrenser lesernes aktiviteter til meget smale muligheter» (Love & Pimm, 1996, s. 389, egen oversettelse). Dette betyr at de fleste lærebøkene som er undersøkt er utformet på en slik måte at elevene får få valgmuligheter i utførelse av oppgave- eller problemløsing. Otte (1983) har på samme måte kommet frem til samme forskningsresultat og skriver at matematiske lærebøker «sikter mot en presis fiksering av hvert enkelt trinn hos eleven» (s. 25). Weinberg et al.,(2012) fant ut at elever og studenter som velger å ikke lese lærebøkene kronologisk, men som eksempelvis hopper over lærebokkomponenter. Dermed underkaster de seg forfatterens intensjoner og kobler seg ikke nødvendigvis på bokas underforståtte intensjon.

1.4 Funksjonslære som matematisk tema

Forskning på lærebøker viser at det er viktig å fokusere på innhold og matematisk tema som analytisk fokus. Dette for å sikre at elever får samme utgangspunkt og muligheter i lærebøkene når det kommer til felles forståelse og prinsipper for matematikk (Resvoll, 2014, s. 12). Ut ifra det Resvoll formulerer kan det være hensiktsmessig å se på et spesifikt matematisk tema. Dette for å undersøke hvilke matematiske avgjørelser som blir gjort basert på om læremiddelet er digitalt eller fysisk.

> «Utdanningspraksis er ikke bare preget av dens verbale mønstre eller dens diskurs, men også av bruken av representasjoner. Representasjoner [...] er viktige ressurser i matematikkopplæringen og utgjør sammen med lærebøker en viktig del av den materielle kulturen i matematikklasserommet» (Seeger, 1998, s. 308-309).

Representasjoner spiller en sentral rolle i det matematiske emnet funksjonslære. Innenfor funksjonslære er det de fire representasjonene situasjon, verditabell, graf og funksjonsuttrykk som er dominerende (Nitsch et al., 2015, s. 660), og overgangen mellom disse symbolske representasjonene (Huinker, 2015) står sentralt.

1.5 Læreplanen i relasjon til funksjonslære

Den nye læreplanen i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 30-39) stiller krav til at elevene skal kunne konvertere mellom ulike matematiske representasjoner for å kunne drøfte virkelighetsnære fenomener. Ifølge Schmidt, McKnight, Valverde, Houang og Wiley (1997, s. 4, egen oversettelse) spiller læreplanen en rolle som «et slags underliggende «skjelett» som gir karakteristisk form og retning til matematikkundervisning i utdanningssystemer rundt om i verden.» Videre peker de på at læreplanen bidrar med en grunnleggende oversikt over ulike, planlagte rekkefølger undervisningen kan foregå i. Sett i lys av det matematiske emnet funksjonslære har National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2020) og National Research Council (NRC, 1996) begge uttrykt i sine dokumenter at elever fleksibelt skal kunne konvertere mellom representasjonsformer for å være i stand til å diskutere og undersøke virkelige fenomener. Til tross for at viktigheten av å kunne konvertere mellom forskjellige representasjonsformer i matematikk blir uttrykt i flere ulike dokumenter viser forskning likevel at elever kan ha store vanskeligheter med å oppnå flyt i den matematiske representasjonsbruken

(Pape & Tchoshanov, 2001, s. 123). Pape og Tchoshanov (2001) presenterer eksempelvis at når elevene skal lære funksjonslære består innlæringen blant annet av å lage grafiske fremstillinger av flere matematiske komponenter. Da må elevene først lære og beherske konvensjonene i den grafiske formelen, for deretter å kunne manipulere komponentene som inngår i datasettet. Dette er matematiske prosesser som ikke nødvendigvis er enkle for elever å lære seg og elevene opplever derfor vanskeligheter med å oppnå flyt i representasjonsbruken. Videre i samme studie viser Pape og Tchoshanov (2001) at bruken av matematiske representasjoner må implementeres som en del av klasseromskulturen for at elevene skal få en helhetlig forståelse av den konkrete matematikken og symbolikken som inngår i læringen av representasjoner. Med dette menes det at elevene må få erfare å løse virkelighetsnære matematikkoppgaver ved hjelp av ulike matematiske representasjonsformer både individuelt, men også i samarbeid med andre.

1.6 Forskningsfokus

Som nevnt innledningsvis ble det innført en ny læreplan for blant annet 8.trinn fra august 2020. Det falt seg derfor fornuftig å velge læreverk oppdatert i tråd med den nye læreplanen og dens oppsett. Etter et internettsøk fant jeg frem til to læreverk, henholdsvis det papirbaserte læreverket Matematikk 8 (2020a) og den digitale løsningen Campus Inkrement (2020). Begge læreverkene betraktes som fullverdige læreverk og kan derfor også sammenliknes. Jeg vil i denne oppgaven fokusere på 8. trinn, og har valgt å ikke inkludere 10.trinn (som også studerer emnet funksjonslære). Dette fordi den nye læreplanen ikke innføres på 10.trinn før i august 2021.

Hana (2013, s. 223) legger frem at «elever som fyker gjennom en mengde oppgaver og som tilsynelatende lærer seg det matematiske innholdet i dem får ikke nødvendigvis det optimale utbyttet av matematikkundervisningen». Med dette menes at det ikke nødvendigvis er antall oppgaver elever gjennomfører som utgjør læringsutbyttet elevene sitter igjen med. Med denne kunnskapen i mente vil det være fornuftig å ha kjennskap til hvordan ulike lærebøker legger opp og presenterer de ulike matematiske temaene i læreverkene. Det kan tenkes at ulike forfattere vektlegger antall oppgaver, nivådeling, oppgaveformulering og matematisk innhold forskjellig, og da vil også sluttresultatet i læreverkenes oppbygging bli ulik. Det vil derfor være fordelaktig å sammenlikne lærebøkers fremleggelse av et matematisk tema for å se om det finnes noen ulikheter. Denne kunnskapen kan benyttes for å gi elever et større utbytte av matematikkundervisningen ved at man kan variere oppgavetyper og læreverk.

I denne oppgaven analyserer jeg et digitalt og et papirbasert læreverk med hovedfokus på læreverkenes formidling av det matematiske temaet funksjonslære. Begrepet *analog(t)* er brukt om regnemetoder gjort for hånd eller som et generelt begrep for å beskrive det papirbaserte læreverket. Jeg vil fokusere på representasjonsformene *situasjon, verditabell, graf* og *funksjonsuttrykk* innenfor funksjonslære og læreverkenes ivaretakelse av overgangene mellom disse, noe man ut ifra litteraturen vet at er et viktig aspekt å studere (Ainsworth, Bibby & Wood, 2002; Swan, 1985; Thomas, Wilson, Corballis, Lim & Yoon, 2010). I tillegg vil jeg konsentrere meg om å undersøke flere av Niss og Jensen (2002) sine matematiske kompetanser med fokus på hvilke potensiale for læring de nummererte oppgavene i læreverkene fører med seg hovedsakelig for elevenes del. I oppgaven min vil jeg i tillegg se på lærerveilederen til de valgte læreverkene for å se på om disse kan være med på å berike det potensielle matematiske utbyttet for arbeid med de nummererte oppgavene for elevene.

Jeg vil som nevnt sentrere forskningsfokuset rundt det matematiske temaet funksjonslære. Og har laget to forskningsspørsmål knyttet til forskningsfokuset. Disse er:

1. *Hvordan legger to ulike matematiske læreverk til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer innenfor funksjonslære?*
2. *På hvilken måte har elevene potensial til å tilegne seg kunnskap innenfor matematiske kompetanser gjennom arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære?*

Forskningens fokus er å studere ulike nummererte oppgaver innenfor det matematiske temaet funksjonslære og knytte oppgavene opp mot både representasjonskompetanse, men også andre matematiske kompetanseområder. Dermed blir fokuset for oppgaven å *forstå* hvilke matematiske kompetanser og overganger mellom representasjonsformer oppgavene i læreverkene har potensiale til å lære bort, og *beskrive* i hvilke typer oppgaver disse kompetansene og overgangene forekommer, og i etterkant *tolke* hva utfallet av slike oppgaver kan bety for elevene.

For å undersøke forskningsspørsmålene mine vil jeg i dette prosjektet undersøke om noen av de åtte matematiske kompetansene fra det danske KOM-prosjektet til Niss og Jensen (2002), presentert i kapittel 2.5, er mer eller mindre representert i de nummererte oppgavene gitt i et digitalt og et papirbasert læreverk. I tillegg vil jeg se på hvilket potensiale elevene har for å erverve de ulike kompetansene ved å arbeide med de nummererte oppgavene i læreverkene. Jeg vil også undersøke om det finnes forskjeller mellom læreverkene med tanke på de matematiske kompetansene og overganger mellom representasjonsformer i de nummererte oppgavene. Jeg vil også undersøke om lærerveilederen bidrar til å berike de nummererte oppgavene i læreverkene på en måte som danner et potensiale eller mulighet for øving av matematiske ferdigheter innenfor funksjonslære. Jeg vil også studere på hvilken måte læreverkene legger til rette for at oppgavene inneholder et potensial for at elever skal kunne lære å arbeide med overganger mellom representasjonsformer.

For å utforske forskningsspørsmålene mine har jeg benyttet meg av komparativ lærebokanalyse, Janviers tabell for representasjonsformer innenfor funksjonslære og lærebokas rolle i det didaktiske tetraedret. En komparativ lærebokanalyse ser på to eller flere lærebøker eller læreverk og sammenlikner dem basert på ulike kriterier for studien. Janviers tabell illustrerer hvilke representasjonsformer som benyttes i det matematiske temaet funksjonslære og overgangene mellom disse. Disse overgangene vil jeg undersøke om eksisterer i oppgavene læreverkene presenterer, og fokuserer en del av analysen min på disse. Læreverkenes rolle i det didaktiske tetraederet setter både lærer, elev og matematisk innhold i tilknytning til hverandre, der en komponent er avhengig av resten for å danne en helhet.

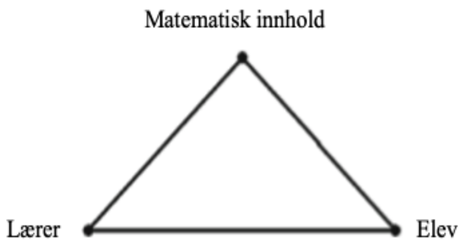
Videre følger kapittel 2 som er et teorikapittel med gjennomgang av blant annet det didaktiske tetraederet, kognitive krav i relasjon med ulike oppgavetyper, forskning på funksjonslære og representasjonskompetanse og de åtte matematiske kompetansene fra Niss og Jensen (2002). Deretter følger oppgavens metodekapittel som kapittel 3 som gjennomgår oppgavens kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ metode, kombinasjonen av dokument- og lærebokanalyse, samt valg av læreverk og gjennomføringen av datainnsamlingen og analysen. Helt til sist i kapittel 3 diskuteres oppgavens reliabilitet og etiske hensyn med tanke på studien. Kapittel 4 består av en kombinasjon av presentasjon av datamaterialet sammen med analysen. Kapittelet er bygget opp slik at *representasjonskompetanse* diskuteres først, deretter presenteres og diskuteres *symbol- og formalismekompetanse,* før *hjelpemiddelkompetanse* og *kommunikasjonskompetanse* presenteres og diskuteres avslutningsvis. I kapittel 5 diskuteres funnene i kapittel 4 opp mot de to forskningsspørsmålene for studien og kapittel 6 består av en oppsummering og frempek på videre arbeid innenfor forskningsfeltet.

2 Teori og relatert forskning

I dette kapittelet vil sentral teori for å studere og diskutere forskningens fokusområde og forskningsspørsmålene presenteres. Først beskrives læreverkenes rolle i det didaktiske tetraedret før denne forskningens og andres syn på læring gjennomgås. Læreverkenes rolle i det didaktiske tetraederet er viktig for å forstå hvordan lærer, elev og matematisk innhold alle er gjensidig avhengig av hverandre for at læreverkene skal få sitt fulle potensiale i undervisningssammenheng. Deretter presenteres forskning gjort på funksjonslære og representasjonsformer før matematisk kompetanse blir presentert. Innenfor beskrivelsen av de grunnleggende ferdighetene for matematikkopplæringen i den nye læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2020) er det de fire matematiske kompetansene til Niss & Jensen (2002) som hører til under hovedkategorien «Å kunne håndtere matematisk språk og redskaper» som er mest fremtredende. Disse fire matematiske kompetansene er *representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse*, *hjelpemiddelkompetanse* og *kommunikasjonskompetanse* og disse blir presentert helt til slutt i teorikapittelet da disse vil få betydning for videre analyse av datamaterialet.

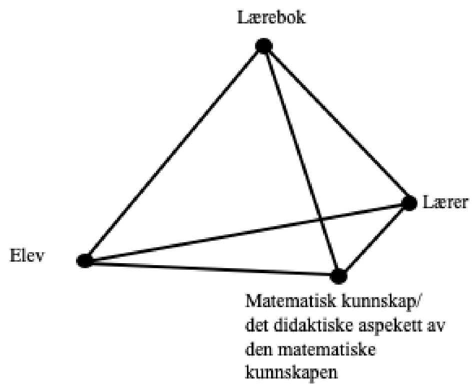
2.1 Læreboka som artefakt i undervisnings- og læringssituasjoner – det didaktiske tetraedret

Vygotsky (1980) var den første til å introdusere en modell som formidlet handling med tre komponenter; subjekt, objekt og medierende artefakt som individuelle hjørner i en trekant. Disse tre hjørnene utgjør henholdsvis lærer, elev og matematisk innhold i relasjon til hverandre i en undervisnings- eller læringsaktivitet, også kalt den didaktiske trekanten. På bakgrunn av at matematisk innhold brukes og deles av både lærere og elever må man se situasjonen som en didaktisk helhet. Dette betyr at lærer, elev og matematisk innhold står i relasjon til hverandre. Dette kan illustreres ved at hver av komponentene i den didaktiske situasjonen utgjør hvert sitt hjørne i en trekant.



Figur 2.1: illustrerer hvordan lærer, elev og matematisk innhold står i relasjon til hverandre i den didaktiske situasjonen (Rezat & Sträßer, 2012).

Rezat og Straßer (2012) gikk ut i fra at lærebøker og digital teknologi har spesielt strukturerende effekt på slike undervisnings- og læringsaktiviteter. Med utgangspunkt i den didaktiske trekanten utvidet de trekanten med å legge til læremidler som en fjerde komponent i en høyere dimensjon. Modellen illustrerer på denne måten en del av en læringsaktivitet i sin helhet. Læreverkene regnes i en slik situasjon som en artefakt som er et annet ord for «fysiske redskaper, hjelpemidler eller instrumenter» (Hinna et al., 2011, s. 904). Säljö (2000) legger til at artefaktbegrepet også inkluderer språket og gjenstandene vi bruker. Rezat (2006a) beskriver at læreboka/læreverkene fungerer som et instrument for å tilegne seg matematisk kunnskap innenfor en slik aktivitet. På samme måte har også Tall (1986), Olive et. al., (2009) og både Rezat (2006) og Sträßer (2009) gjort individuelle slutninger omkring læremidler som artefakter i tilknytning til undervisnings- og læringssituasjoner tidligere.



Figur 2.2: Det didaktiske tetraederet representerer bruken av lærebok i klasserommet (Rezat & Sträßer, 2012).

Ved å utvide den didaktiske trekanten med en ny dimensjon kan *bruken* av lærebøker inkluderes. På denne måten kan tetraedret tolkes som at aktiviteten omhandler en bestemt artefakt og læreboken blir på denne måten satt i sentrum av aktivitetssystemet (Rezat, 2006a, s.

414). Ved å plassere læreverket/læreboken i sentrum av den didaktiske aktiviteten vil lærerens bruk, elevenes bruk og formidlingen av det matematiske innholdet i læreboken/læreverket kunne studeres i relasjon til hverandre. Som nevnt innledningsvis er det forskere og forfattere som betrakter elevene som de viktigste leserne av lærebøker (Kang & Kilpatrick, 1992; Love & Pimm, 1996), og læreverkene er bygget slik at det inviteres til engasjerende oppgaver og aktiviteter for elevene (Remillard, 2000; Valverde et al., 2002). I tillegg blir matematiske begreper forklart på en måte som retter seg mot elevene som i hovedsak skal lese bøkene. Videre vil jeg gjøre rede for ulike teoretiske aspekter som gjør det interessant å se på hvordan ulike læreverk medierer det matematiske temaet funksjonslære i relasjonen mellom eleven, det matematiske innholdet og læreverket.

2.2 Læring er mediert

Et sentralt poeng i sosiokulturell læringsteori er at læring er mediert. «Mediering kan oversettes som *formidling*, og brukes om den støtte og hjelp elevene får i lærings- og utviklingsprosesser» (Hinna et al., 2011, s. 904). Det vil si at i sosiokulturell læringsteori skjer læring «gjennom hvordan kunnskap og innhold blir formulert gjennom sosial interaksjon og gjennom de gjenstandene vi bruker» (Gilje et al., 2016). Dette betyr videre at læring skjer både gjennom dialog med andre eller ved hjelp av eksempelvis lærebøker. Gilje et al. (2016) hevder også at læremidler kan ses på som artefakter som benyttes for at elevene skal kunne ta til seg og arbeide med hvert enkelt fags kompetanseområder. Sett i lys av læreverk skjer læringen gjennom hvordan de ulike matematiske temaene formidles. Læringen av eksempelvis funksjonslære skjer både gjennom arbeid med oppgaver i boken, men også gjennom sosial interaksjon som dialog med andre. I det matematiske temaet funksjonslære spiller representasjoner en sentral rolle og det er de matematiske objektene situasjon, tabell, graf og funksjonsuttrykk som er dominerende, og konverteringen mellom disse (Nitsch et al., 2015, s. 660).

Bruner (1966) beskriver et matematisk objekt som noe som kan representeres med symboler, naturlig språk, med tegning og praktisk med konkreter. Enge og Valenta (2013) skriver at et viktig tegn på at man har begrepsforståelse i matematikk er at man kan representere et matematisk objekt på flere ulike måter. Niss og Højgaard (2011) peker bant annet på viktigheten av å kunne bruke ulike representasjonsformer og kunne oversette mellom disse. Innenfor funksjonslære arbeider man med flere aktuelle matematiske representasjoner for å uttrykke matematiske objekt.

2.3 Forskning på funksjonslære og representasjoner

Funksjonsbegrepet blir beskrevet som det viktigste matematiske begrepet som studeres i skoleløpet og gis en kritisk rolle i hele utdanningsspekteret (Dubinsky & Harel, 1992). Det eksisterer en generell enighet om at bruken av ulike representasjoner innenfor matematikk og konvertering mellom representasjonene kan betraktes som grunnleggende ferdigheter (Ainsworth et al., 2002; Swan, 1985; Thomas et al., 2010). Innenfor matematisk fagdidaktikk spiller grunnleggende representasjonsformer og oversettelse mellom disse en sentral rolle (Goldin, 1998; Kaput, 1985). Dette gjenspeiles også eksempelvis i kjerneelementene for læreplanen i matematikk, samt i kompetansemålene for 8.trinn der ett av målene er å kunne «representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonene» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 37).

Forskningen gjort på funksjonslære og representasjoner kan indikere at noen elever angriper funksjonslære punktvis. Det betyr at elevene kan plotte og lese punkter, men at de eksempelvis ikke kan se for seg at en funksjon har egenskaper over et intervall (Bell & Janvier, 1981; Even, 1998). Even (1998) understreker i sitt forskningsarbeid at kunnskap om forskjellige matematiske representasjoner ikke er uavhengig, men sammenkoblet med ulike tilnærminger, kontekst og ulike forestillinger knyttet til de matematiske representasjonene. Greeno og Hall (1997) hevder at elever/de lærende må lære å bruke representasjoner i ulike situasjoner og at læringen også må skje i fellesskap i klasserommet. Pape og Tchoshanov (2001) trekker på samme måte frem viktigheten av at elevene gis mulighet til å samhandle med hverandre og læreren når målet er å representere matematiske begreper eller løse problemer som involverer matematiske representasjoner.

Innen funksjonslære regnes representasjonene grafer, tabeller, funksjonsuttrykk og situasjonsbeskrivelser som de sentrale representasjonene (Nitsch et al., 2015, s. 660). Thomas et al. (2010) gjennomførte et eksperiment der de så på studenters hjerneaktivitet samtidig som de arbeidet med ulike matematiske representasjoner. Resultatene som fremheves av studien er viktigheten av en representativ allsidighet i forbindelse med sømløs konvertering i og med ulike representasjonsformer innenfor matematikk. Ainsworth et al. (2002) peker på samme måte på at evnen til å sømløst kunne konvertere mellom representasjonsformer fører til en dypere matematisk forståelse, men at denne prosessen stiller høye kognitive krav til den lærende.

Den nye læreplanen stiller krav til at elevene skal kunne konvertere mellom ulike representasjoner i matematikk for å kunne drøfte virkelighetsnære fenomener. Dette gjøres også av andre. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2020) og National Research Council (NRC, 1996) har begge uttrykt i sine dokumenter at elever fleksibelt skal kunne konvertere mellom representasjonsformer for å være i stand til å diskutere og undersøke virkelige fenomener. Men selv om viktigheten av å kunne konvertere mellom ulike representasjonsformer blir uttrykt i flere ulike dokumenter viser forskning likevel at elever kan ha store vanskeligheter med å oppnå flyt i den matematiske representasjonsbruken (Pape & Tchoshanov, 2001, s. 123). Eksempelvis består innlæringen av å lage grafiske fremstillinger av flere matematiske komponenter. Først må de lære og beherske konvensjonene i den grafiske formelen, deretter må de kunne manipulere komponentene som inngår i datasettet. Forskning viser videre (Pape & Tchoshanov, 2001) at bruken av matematiske representasjoner må være en del av klasseromskulturen for at elevene skal få en forståelse av den konkrete matematikken og symbolikken som inngår. Med dette menes det at elevene må få erfare å løse virkelighetsnære matematikkoppgaver ved hjelp av ulike matematiske representasjonsformer.

2.4 Kognitive krav i relasjon med høyere- og lavere ordens oppgavetyper

Som nevnt over peker Ainsworth et al. (2002) på at evnen til å sømløst kunne konvertere mellom representasjonsformer stiller høye kognitive krav til den lærende. Kognitive krav kan eksempelvis komme til syne gjennom ulike oppgaveformuleringer og gjennom de ulike kravene oppgavene stiller den lærende i løsningsprosessen. Spesielt i inndelingen av oppgavetyper står poenget om kognitive krav sentralt. Stein, Grover og Henningsen (1996) presenterer fire kategorier innenfor oppgaveløsning med tanke på kognitive krav. Disse er henholdsvis;

1. «Memorering
2. Bruk av prosedyrer uten å bruke sammenhenger
3. Bruk av prosedyrer med bruk av en sammenheng
4. Å gjøre matematikk»

   (Stein et al., 1996, s. 461).

De kognitive kravene er presentert av Stein et al. i forbindelse med læreren som medierende faktor, men kategoriene kan like godt svare til at det er læreverket som er medierende faktor for matematikkoppgavene. Dette skiftet av medierende faktor kan gjøres på bakgrunn av det didaktiske tetraedret som setter lærer, elever og det matematiske innholdet i direkte relasjon med læreverket som benyttes i undervisningen.

Kategorien «memorering» dreier seg om å lære noe utenat. En slik memorering kan gå på bekostning av forståelsen da forståelse ikke nødvendigvis er hovedfokus. Kategori nummer to innebærer å bruke matematiske prosedyrer uten å se på sammenhengene. I slike tilfeller bruker man formler og algoritmer ukritisk og uten fokus på nødvendig forståelse eller om prosedyren gir mening. Den tredje kategorien bygger videre på den andre kategorien, men her inkluderes sammenhengen i oppgaveløsningen og på denne måten heves de kognitive kravene som stilles til den/de som løser oppgaven (Stein et al., 1996). Kategori fire beskrives som å inneholde den typen oppgaver elever kvier seg for å gå i gang med. Disse oppgavene kan være mindre strukturert, kreve lengre tid og er mer komplekse i løsningen enn det elever normalt er vant med fra før (Stein et al., 1996).

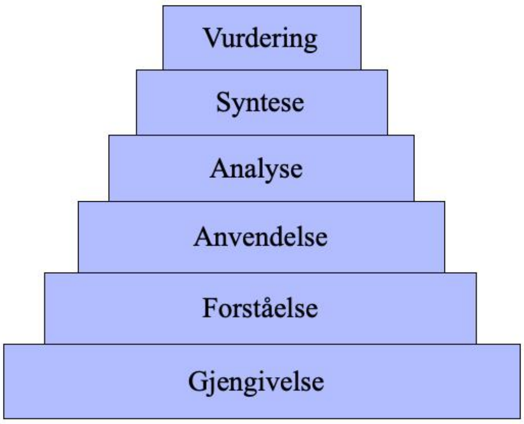
Videre kan man basert på de fire kategoriene til Stein et al. (1996) dele inn i oppgaver av høyere- eller lavere orden. Høyere ordens oppgaver er «oppgaver som er tenkt å innebære at elevene gjør matematikk når de arbeider med den» (Hana, 2013, s. 242). Ut ifra nummereringen av kategorier over kan det synes som at høyere ordens oppgaver er av kategori fire, og i noen tilfeller kategori tre, når det kommer til kognitive krav. Slike oppgaver kan tenkes å være utforskende, men at de ikke nødvendigvis er det i alle tilfeller. Høyere ordens oppgaver kan inneholde ord som; *vurder, tolk, forklar, lag situasjoner,* og *undersøk*. Lavere ordens oppgaver vil følgelig være oppgavetyper som fokuserer på memorering og forutsigbarhet. På denne måten stiller lavere ordens oppgaver lavere kognitive krav til elevene enn høyere ordens oppgaver. Ord som kan forekomme i slike oppgaver er eksempelvis *finn, bruk*, og *tegn*.

Kategoriene for kognitive krav og fordelingen av høyere- og lavere ordens oppgaver er relevant når man studerer de ulike matematiske kompetansene innenfor funksjonslære, og hvilket relasjonelt forhold det er mellom kompetansene og oppgavetypene. Dette fordi å arbeide med oppgaver som stiller høyere kognitive krav innebærer potensiale til å utfordre elevene i større grad. Elevene blir da utfordret til å se matematikk i større sammenhenger samt at elevene må benytte seg av mer ustrukturerte fremgangsmåter. Oppgaver innenfor kategori en og to av kognitive krav vil øve elevene i memorering og evnen til å utføre oppgitte fremgangsmåter. Det kan i slike sammenhenger tenkes at elevene mister noe av den matematiske sammenhengen elevene får ved å løse oppgaver som stiller større kognitive krav.

2.4.1 Kognitive krav og flervalgsoppgaver

Det hevdes at flervalgsoppgaver kan relateres til det første nivået i Blooms taksonomi (Haladyna, 2004). Blooms taksonomi er en modell bygget som en pyramide som lister opp en rekke kjennetegn for kunnskap. Pyramidekonstruksjonen er valgt for å illustrere at hvert kunnskapsnivå bygger på nivået under (Imsen, 2020). For hvert kunnskapsnivå opp mot toppen øker det kognitive nivået for læring og elevene blir i bedre stand til bruke egne ord, analysere, vurdere og anvende for å formulere kunnskap jo høyere opp i pyramiden de kommer (Sirnes, 2005, s. 23). I pyramiden starter man på det nederste nivået, og på dette nivået er kjennetegnet at elevene kan gjengi enkeltkunnskap. I følge Sirnes (2005) skal elevene på nivå 1 kunne gjengi kunnskapen i samme format som den ble undervist i. Dette innebærer at elevene har kjennskap til og evne til gjenkjennelse av spesifikke og enkle fakta. Slike oppgaver kan en tenke seg at skal teste om elevene har fått med seg sentrale punkter i en teorigjennomgang eller liknende.

Selv om flervalgsoppgaver er sagt å tilhøre nivå 1 i Blooms taksonomi betyr ikke det at det ikke er mulighet for å utfordre elevene på et høyere kunnskapsnivå enn gjengivelsesnivået (Haladyna, 2004, s. 137). I funksjonslære kan bruk av de ulike representasjonsformene i forbindelse med flervalgsoppgaver utfordre elevene til å benytte seg av og forstå de ulike representasjonene for å finne korrekte svaralternativer. Dette vil stille høyere kognitive krav til elevene på veien mot rett(e) svaralternativer.



Figur 2.3: Figuren illustrerer de ulike nivåene i Blooms taksonomi (Imsen, 2020). Fargen er kun illustrativ og har ingen sammenheng med nivåene.

Forskning på flervalgsoppgaver viser at elever bruker ulike resonnementstyper i møte med flervalgsoppgaver i motsetning til oppgaver uten oppgitte svaralternativer (Herman, 1994). I tillegg viser forskningen til Herman (1994) at elevene som deltok fant flervalgsoppgaver enklere enn oppgaver uten valgalternativer. Elevene begrunnet dette med at flervalgsoppgaver ga dem mulighet til å ikke tenke så mye. Forskningen til O´Neil Jr og Brown (1998, s. 333) viser at elever hadde større sannsynlighet for å benytte seg av en prøv-og-gjetningsmetode i arbeidet med flervalgsoppgaver enn ved oppgaver uten svaralternativer. Spesielt interessant i denne forskningen var elevers bemerkning om at oppgaver uten svaralternativer understrekte viktigheten av å kunne forklare matematiske representasjoners bruk. Denne betydningen ble sagt å ha spesiell betydning i arbeid med grafer og diagrammer, mens elevene opplevde på den andre siden at flervalgsoppgaver fokuserte på algoritmer og riktige svar.

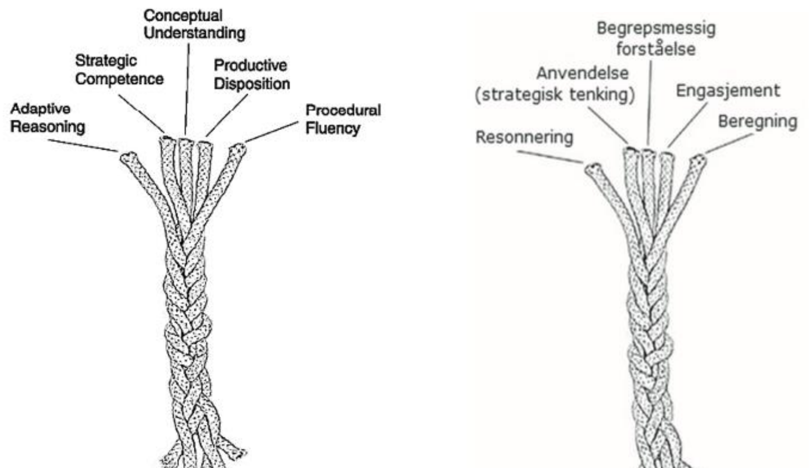
Flervalgsoppgaver bryter på en måte med ett av kjerneelementene i matematikk, nemlig *abstraksjon og generalisering*. «Generalisering i matematikk handlar om at elevane oppdagar samanhengar og strukturar og ikkje blir presenterte for ei ferdig løysing» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 31). Flervalgsoppgaver tilbyr elevene på en måte en ferdig løsning hvis de gjetter rett, og på en annen måte hvis elevene har ervervet tilstrekkelig kunnskap til å gjenkjenne eller regne seg frem til rett alternativ. I hver underveisvurderingsbeskrivelse i kompetansemålene (2020, s. 33-39) for matematikk er det spesifisert at elevene skal få mulighet til å prøve og feile, noe flervalgsoppgaver utvilsomt tilbyr mulighet til. På en annen side kan flervalgsoppgaver i funksjonslære være av en slik kvalitet at oppgaven stiller høyere kognitive krav enn nivå 1 i Blooms taksonomi. I slike tilfeller vil elevene måtte ha kunnskap og evne til å benytte seg av ulike representasjonsformer for å komme frem til hvilke svaralternativer som er rett.

2.5 Matematiske kompetanser fra et overordnet perspektiv

Som nevnt innledningsvis er kjerneelementene for matematikk å finne igjen hos flere teoretikere og forskere. Kjerneelementene inngår da gjerne som delkomponenter av det de ulike forskerne beskriver som matematisk kompetanse. «Matematisk kompetanse har de siste tiårene blitt et sentralt begrep når det gjelder å systematisere og analysere hva det vil si å være god eller flink i matematikk» (Botten, 2016, s. 59). Røsseland (2005, s. 14) beskriver matematisk kompetanse som evnen til «å ha viten om, å forstå, utøve, anvende og kunne ta stilling til matematikk og matematisk virksomhet i et mangfold av sammenhenger». I læreplanen for matematikk er de matematiske kjerneelementene henholdsvis «utforsking og problemløysing, modellering og anvendingar, resonnering og argumentasjon, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 30-31).

Disse kjerneelementene blir av Kilpatrick et al. (2001) omtalt som matematiske ferdigheter og av Niss og Jensen (2002) som en del av det som beskrives som matematiske kompetanseområder i det danske KOM-prosjektet (Kompetanser og matematikklæring). Niss og Jensens matematiske komponenter er sentralt for utforsking av forskningsfokuset i denne oppgaven. Komponentene presenteres individuelt før de knyttes opp mot deres innvirkning på læring av funksjonslære.

Kilpatrick et al. (2001) visualiserer sine matematiske ferdigheter gjennom fem sammenflettede tråder. Disse komponentene ses på som essensielle for å lære matematikk på en suksessfull måte. Hver tråd er en del av en kompleks helhet og ferdighetene er gjensidig avhengige av hverandre i utviklingen av matematiske ferdigheter. Ferdighetene som beskrives er «begrepsforståelse, beregning, anvendelse, resonnering og engasjement» (Kilpatrick et al., 2001, s. 116, egen oversettelse). Ved å arbeide med alle de fem komponentene vil elevene kunne utvikle en fleksibel, varig, solid og relevant kompetanse i matematikk (Matematikksenteret, 2021). Kilpatricks fem komponenter for matematisk kompetanse kan settes i relasjon med alle kjerneelementene i matematikk i den nye læreplanen.



Figur 2.4: t.v: Illustrasjon av Kilpatrick et al.s (2001, s. 117) sammenflettede matematiske ferdigheter, t.h: Illustrasjon av de fem ferdighetene oversatt til norsk (Botten, 2016, s. 62).

I følge Kilpatrick et al. (2001) er det fem komponentene beskrevet slik; Begrepsmessig forståelse dreier seg om å kunne se matematiske sammenhenger mellom begreper og ideer samt å bygge opp strukturer rundt matematiske begrep. Beregning innenfor matematikk handler om å kunne utføre ulike prosedyrer nøyaktig, effektivt og ved hjelp av ulike metoder. Anvendelse som matematisk kompetanse dreier seg om å ha kunnskap om, formulere og gjenkjenne ulike matematiske problemstillinger og deretter kunne utvikle strategier for å løse problemene. Den matematiske komponenten resonnering består av å kunne begrunne og forklare strategiene en har brukt for å komme frem til løsninger på matematiske problemstillinger. Den siste matematiske komponenten engasjement omhandler elevenes evne til å se på matematikk som nyttig og verdifullt og som et nyttig verktøy dersom man er villig til å legge ned arbeidet som kreves.

Den nye læreplanen bygger fundamentalt på de åtte matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002). Dette kan man lese ut ifra hvilke kompetanser som vektlegges i kjerneelementene i matematikkfaget der alle de åtte kompetansene er inkludert i utformingen av de fem kjerneelementene. Tidligere forskning har vist at det fra tidligere av ble lagt minimal vekt på flere av delkompetansene i matematikkundervisningene. Eksempelvis, de matematiske kompetansene *tankegangskompetanse*, *representasjonskompetanse, kommunikasjonskompetanse* og *resonnementskompetanse* (Botten, 2016). Niss og Jensen (2002) beskriver åtte matematiske kompetanser i det danske KOM-prosjektet (Kompetanser og matematikklæring). Målet med denne rapporten var blant annet å presentere en helhetlig og utvidet måte å forstå og analysere elevers kompetanse innenfor matematikk (Botten, 2016). De åtte matematiske kompetansene deles inn i to hovedkategorier som anses som overordnede kompetanseområder, henholdsvis kompetanseområdene «*å kunne spørre og svare i og med matematikk*» og «*å kunne håndtere matematisk språk og redskaper*». Kompetanseområde «å kunne spørre og svare i og med matematikk» inkluderer fire matematiske kompetanser; matematisk tenking, problembehandlings-, modellerings- og resonneringskompetanse. Kompetanseområde «å kunne håndtere matematisk språk og redskaper» inkluderer de fire siste kompetanseområdene som er «hjelpemiddel-, kommunikasjons-, symbol- og formalisme- og representasjonskompetanse» (Niss & Jensen, 2002; M. A. Niss & Højgaard, 2011).

Arbeid med det matematiske temaet funksjonslære vil kunne knyttes til begge hovedkategoriene av matematisk kompetanse til Niss og Jensen (2002) i KOM-prosjektet alt ettersom hvilke typer oppgaver som undersøkes og hvilken innfallsvinkel som benyttes. Jeg vil videre fokusere det teoretiske blikket inn på disse åtte kategoriene for å kunne studere de allerede nevnte forskningsspørsmålene;

1. *Hvordan legger to ulike matematiske læreverk til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer innenfor funksjonslære?*

2. *På hvilken måte har elevene potensial til å tilegne seg kunnskap innenfor matematiske kompetanser gjennom arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære?*

2.6 Å kunne spørre og svare i matematikk

«Å kunne spørre og svare i matematikk» dreier seg om evnen til å kunne formulere, lese, tolke og forstå egne og andres spørsmål, problemformuleringer, resonnement og tankeprosesser innenfor matematikk. I tillegg handler kompetansene om å kunne konstruere matematiske modeller ut ifra hverdagslige situasjoner. De fire kompetansene innenfor denne kategorien er *tankegangskompetanse, resonnementskompetanse, problembehandlingskompetanse* og *anvendelse- og matematisk modelleringskompetanse*.

«Å kunne spørre og svare i matematikk» dreier seg om elevenes evne til å utføre matematiske prosesser og i dette prosjektet studeres ikke disse evnene. Det er på bakgrunn av at læreverkene studeres isolert fra bruken i klasserommet og det er derfor vanskelig å forutsi hvordan disse kompetansene vil opptre. De fire kompetansene vil likevel bli presentert og knyttet opp mot funksjonslære, men kompetansene vil ikke tas med i analysen av datamaterialet.

2.6.1 Tankegangskompetanse

Generelt handler tankegangskompetanse om å ha evnen til å kjenne, forstå og bruke ulike matematiske begrep, samt å kunne både abstrahere og generalisere matematiske situasjoner og uttrykk. I tillegg handler det om å kunne skille mellom hva som er matematiske antakelser, bevis og påstander (Niss & Jensen, 2002). For læreren handler tankegangskompetanse spesielt om å være bevisst på hvilke spørsmål som er karakteristiske for det gjeldende matematiske temaet, samt å ha oversikt over hvilke typer svar de ulike spørsmålene genererer (Røsseland, 2005). Innenfor det matematiske temaet funksjonslære handler tankegangskompetanse om å kunne forstå og bruke ulike matematiske begrep knyttet til funksjonslære. I tillegg vil tankegangskompetanse være nødvendig for å forstå konseptet rundt de fire ulike representasjonsformenes muligheter og begrensninger.

2.6.2 Problembehandlingskompetanse

Problembehandlingskompetanse består av flere komponenter. På den ene siden handler problembehandlingskompetanse om å kjenne til og forstå hva et matematisk bevis er og hvorfor dette skiller seg fra andre matematiske resonnement. For å kunne identifisere slike bevis må man ha evnen til å vite når et matematisk resonnement går over til å bli et matematisk bevis og når det ikke gjør det (M. A. Niss & Højgaard, 2011, s. 60, egen oversettelse). På den andre siden handler problembehandlingskompetanse om å kunne utføre og tenke ut uformelle og formelle argumenter basert på matematisk innsikt, samt å kunne omdanne heuristisk resonnement til gyldige matematiske bevis (M. A. Niss & Højgaard, 2011, s. 60, egen oversettelse). Innenfor funksjonslære vil problembehandlingskompetanse kunne komme til syne gjennom ulike oppgaveformuleringer og oppgavetyper som skal løses enten formulert av læreren eller læreverket som benyttes i undervisningen.

2.6.3 Resonnementskompetanse

Resonnementskompetanse er satt sammen av to komponenter. Den første komponenten handler om å kunne følge og bedømme et matematisk resonnement og deretter kunne avgrense, spesifisere og formulere ulike matematiske problemer. Dette være seg av formen ren matematikk eller anvendt matematikk, men også lukket så vel som åpen formulering (Niss & Jensen, 2002, s. 54). Den andre komponenten består av å kunne løse problemer av enten ren eller anvendt matematikk. Slike problemer skal kunne løses enten de er formulert av andre eller selv og på ulike måter (Niss & Jensen, 2002). Innenfor funksjonslære vil resonnementskompetanse kunne komme til syne ved at elever har evne til å følge andres argumenter for løsninger av oppgaver. Eksempelvis kan dette skje i dialog med andre eller i en klasseromssituasjon.

2.6.4 Anvendelse- og matematisk modelleringskompetanse

Modelleringskompetanse handler om å kunne identifisere egenskaper til allerede eksisterende matematiske modeller, samt å kunne vurdere rekkevidde og gyldighet for modellene. Kompetansen handler også om å kunne «plukke fra hverandre» og tolke modeller og resultat opp mot den aktuelle situasjonene som skal modelleres (M. A. Niss & Højgaard, 2011, s. 58, egen oversettelse). I tillegg handler modelleringskompetanse om å kunne matematisere og utføre aktiv modellering i gitte sammenhenger og gjerne utover matematikken selv. Innenfor funksjonslære vil anvendelse- og modelleringskompetanse komme til syne gjennom matematisering av ulike situasjoner og modellering av matematiske problemstillinger

2.7 Å kunne håndtere matematisk språk og redskaper

Som presentert innledningsvis er det gjennom ulik forskning i skolen vist at de fire følgende kompetansene til Niss og Jensen (2002) er sentrale i læringen av funksjonslære. Som nevnt i kapittel 2.3 eksisterer det en generell enighet om at bruken av ulike representasjoner innenfor matematikk og konvertering mellom representasjonene kan betraktes som grunnleggende ferdigheter (Ainsworth et al., 2002; Swan, 1985; Thomas et al., 2010). Innenfor beskrivelsen av de grunnleggende ferdighetene for matematikkopplæringen i den nye læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2020) er det de fire matematiske kompetansene til Niss & Jensen (2002) som hører til under hovedkategorien «Å kunne håndtere matematisk språk og redskaper» som kommer til syne. *Representasjonskompetanse* kommer til syne både gjennom at elevene skal lære seg å regne i matematikk, men også gjennom å kunne skrive og uttrykke matematikk. *Symbol- og formalismekompetanse* inngår i å kunne lese og å kunne regne, mens *hjelpemiddelkompetanse* inngår eksempelvis i elevenes utvikling av digitale ferdigheter. *Kommunikasjonskompetanse* kan komme til syne ved at elever skal øve på muntlige ferdigheter i matematikk.

Jeg har på bakgrunn av de presenterte argumentene besluttet å fokusere på de fire matematiske kompetanseområdene i kategorien «Å kunne håndtere matematisk språk og redsakper» til Niss og Jensen (2002) i datainnsamlingen og videre i analysen.

2.7.1 Representasjonskompetanse

Med tanke på forskningsfokuset og forskningsspørsmålene for oppgaven vil jeg legge ekstra vekt på *representasjonskompetanse* og de ulike representasjonene i funksjonslære. Dette vil jeg gjøre fordi denne typen matematisk kompetanse omhandler essensen i funksjonslære, nemlig ett av kompetansemålene etter 8.trinn. Dette kompetansemålet er at «elevane må kunne omsetje mellom matematiske representasjonar og daglegspråket og veksle mellom ulike representasjonar» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 31). For å undersøke hvordan lærebøkene legger opp til overganger mellom representasjoner har jeg valgt å benytte meg av Janviers tabell (1978) for representasjoner i funksjonslære. Representasjonsformene identifiserte Janvier (1978) allerede på 1970-tallet og tabellen illustrerer de ulike regneoperasjonene som må gjennomføres for å bevege seg fra en representasjon til en annen og overgangen denne regneoperasjonen representerer. Disse overgangene vil jeg undersøke om eksisterer i oppgavene læreverkene presenterer, og fokuserer en del av analysen min på disse. Tabellen er tilfeldig nok også referert til i lærerveilederen for Matematikk 8 fra Cappelen Damm (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 257) som har fått en sentral rolle i datainnsamlingen og analysen i denne studien. Jeg vil gå videre inn på tabellens utforming og hvordan denne er benyttet i kapittel 3.5.3.

2.7.1.1 Hva er en matematisk representasjon?

Duval (2006) definerer en matematisk representasjon på ulike måter. På den ene siden presenterer Duval en matematisk representasjon som at individets tro eller (mis)oppfattelse som man får tilgang på gjennom verbal eller skjematisk produksjon. På den andre siden beskriver Duval at matematiske representasjoner også kan være tegn og deres komplekse assosiasjoner som produseres i forbindelse med regler, samt tegn som tillater beskrivelse av et system, en prosess eller et sett med fenomener (Duval, 2006, s. 104). Kunnskapsdepartementet definerer matematiske representasjoner som «måtar å uttrykkje matematiske omgrep, samanhengar og problem på. Representasjonar kan være konkrete, konkekstuelle, visuelle, verbale og symbolske» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 31). I tillegg kan matematiske representasjoner betraktes som både interne og eksterne (Goldin & Kaput, 1996; Pape & Tchoshanov, 2001). I følge Janvier et al. (1993, s. 81) regnes interne representasjoner som abstraksjon av matematiske ideer eller kognitive skjema som utvikles av den lærende gjennom erfaring. De eksterne representasjonene virker som stimuli på sansene og er med på å øke den matematiske forståelsen. Eksterne representasjoner kan eksempelvis være grafer, tabeller, diagrammer eller funksjonsuttrykk. Det er disse representasjonene som er sentrale i funksjonslære og disse vil vektlegges i gjennomgangen av læreverkenes nummererte oppgaver. Representasjoner i matematikk refererer også til eksternaliseringen av intern, mental matematisk abstraksjon (Pape & Tchoshanov, 2001).

2.7.1.2 Representasjonskompetanse i relasjon med funksjonslære

Representasjonskompetanse i matematikk er evnen til å bruke representasjoner på en meningsfull måte for å kommunisere matematiske ideer og å løse problemer (Huinker, 2015). Representasjonskompetanse består av flere komponenter. I alle hovedsak handler det om evnen til å kunne representere matematiske objekter på ulike måter og ved hjelp av ulike metoder, redskaper og hjelpemidler (Niss & Jensen, 2002). Representasjonskompetanse handler om evnen til å kjenne til styrker og svakheter til de ulike representasjonsformene, samt å forstå relasjonene mellom representasjonsformene. I tillegg består kompetansen av evnen til å vurdere matematiske situasjoner og velge egnet representasjon for det gitte fenomenet. Representasjonskompetanse dreier seg også om evnen til å kunne bytte representasjonsform om det viser seg at en annen representasjon er mer egnet til formålet (Niss & Jensen, 2002).

Som forskningen til blant annet Even (1998) viser er det noen elever som angriper funksjonslære på en punktvis måte. Forskningen til Even (1998) understreker at kunnskap om forskjellige matematiske representasjoner ikke er uavhengig, men sammenkoblet med ulike tilnærminger, kontekst og ulike forestillinger knyttet til de matematiske representasjonene. Dette betyr at for å initiere til øving på representasjonskompetanse som stiller større kognitive krav til elevene kan læreverkene lage oppgaver som legger til rette for overganger mellom to eller flere representasjonsformer samtidig. Slike oppgaver vil kunne være med på å tvinge elevene til å tenke «utenfor boksen» da disse oppgavene krever mer matematisk kunnskap av elevene. Representasjonskompetanse kan også øves ved at oppgavene er av lavere orden samtidig som de stiller lave kognitive krav. Slike oppgaver kan inneholde ord som *finn, bruk, tegn* og *lag*.

2.7.2 Symbol- og formalismekompetanse

Symbol- og formalismekompetanse innebærer å ha evnen til å oversette mellom det naturlige språket og det matematiske og motsatt. Denne oversettingen kan skje gjennom dekoding av symboler og formelt språk som innebærer at man har kunnskap og evne til å bruke matematiske formler, uttrykk og utsagn (Niss & Jensen, 2002). I tillegg handler kompetansen om å ha innsikt i de matematiske «spillereglene» for ulike matematiske systemer (Niss & Jensen, 2002, s. 58). Øving på denne typen kompetanse vil eksempelvis gjøre seg synlig i oppgaver der elevene skal forklare en tabell, graf eller et funksjonsuttrykk. Elevene må da bruke det naturlige språket for å beskrive en matematisk sammenheng. På samme måte kan man bruke matematisk språk i form av tabeller, grafer eller funksjonsuttrykk for å beskrive en naturlig situasjon.

Oppgaver som inneholder potensial for øving av symbol- og formalismekompetanse vil kunne være av arten høyere ordens oppgaver som stiller store kognitive krav til eleven. Med dette menes oppgaver som inneholder spørreord som *vurder, tolk, forklar, lag situasjoner,* og *undersøk* som setter elevenes evne til å dekode symboler og formler på prøve. Slike oppgaver kan eksempelvis sette elevenes forklaringsevner på prøve ved at de skal forklare hvilke egenskaper en tabell har, og hvorfor disse egenskapene er nyttige i funksjonslære. På motsatt side kan det også tenkes at de nummererte oppgavene i læreverkene ikke evner å øve elevenes evne innenfor symbol- og formalismekompetanse, men at teorigjennomgangen i funksjonslære former et potensial for øving av denne matematiske kompetansen i stedet.

2.7.3 Hjelpemiddelkompetanse

I følge Niss og Jensen (2002) ligger det i hjelpemiddelkompetanse at elevene skal ha innsikt i og kunnskap om de ulike formene for verktøy som kan brukes i arbeidet med ulike matematiske tema. I tillegg dreier hjelpemiddelkompetanse seg om å ha kunnskap om hvilke muligheter og begrensninger ulike verktøy har. Kunnskapen om slike verktøy er viktig for å kunne ta reflekterte beslutninger om hvilke verktøy som er egnet for det matematiske fokusområdet (Niss & Jensen, 2002). Øving innenfor kompetansen vil komme til syne i alle typer oppgaver eller problemformuleringer som inviterer til å bruke hjelpemidler. Slike hjelpemidler kan eksempelvis være analoge hjelpemidler som *penn*, *papir*, *blyant* og *linjal* eller *digitale hjelpemidler* som eksempelvis kalkulator eller GeoGebra.

Forskning gjort av Waagene og Gjerustad (2015) og Gilje et al. (2016) viser at lærere allerede benytter seg av digitale løsninger i matematikkundervisningen, men at lærerne også ønsker å bruke digitale løsninger i større grad enn de gjør i dag. For at lærerne og elever skal kunne benytte seg av digitale løsninger er det viktig at læreverkene legger opp til oppgaver som det er mulig å løse ved eksempelvis en digital graftegner som GeoGebra. Slike oppgaver kan være av lavere orden og i tillegg stille lave kognitive krav til elevene slik som i oppgaver med ordlyden *bruk, finn, plott* og *les av*. Eller så kan oppgaver presenteres for elevene i teorigjennomgang i læreverkene med forklaringer og begrunnelser for hvorfor et digitalt hjelpemiddel er fordelaktig å benytte. På denne måten stilles det høyere kognitive krav til at elevene følger det matematiske resonnementet. Hjelpemiddelkompetanse kan også ses på som å være med på å øve inn digitale ferdigheter som er en av de fem grunnleggende ferdighetene elever skal lære seg i matematikk.

2.7.4 Kommunikasjonskompetanse

Kommunikasjonskompetanse består av evnen til å kunne uttrykke seg på ulike måter, både teknisk og teoretisk. Kompetansen innebærer også å kunne kommunisere enten skriftlig, muntlig eller visuelt, og i møte med ulike mottakere samt på ulike kompleksitetsnivåer. I tillegg skal man kunne tolke og studere andres matematiske utsagn eller tekster (Niss & Jensen, 2002). Denne kompetansen kan læreverkene legge opp til allerede i utformingen av oppgaver og innhold. Oppgavene kan deles inn i ulike nivåer basert på kompleksitet, men da avhenger utbyttet til elevene av at de velger å løse oppgaver tilhørende ulike nivåer og ikke bare holder seg på ett nivå. Å tolke og studere andres matematiske utsagn vil være aktuelt i mange oppgaver da det nettopp er noen andre enn elevene som har formulert læreboka.

Øving på kommunikasjonskompetanse vil også kunne trigges i dialog med andre der samtalene har matematisk innholdsfokus. Greeno og Hall (1997) hevder at elever må lære å kommunisere matematisk innhold i ulike situasjoner, og at slik læring godt kan skje i et klasseromsfellesskap. Pape og Tchoshanov (2001) trekker på samme måte frem viktigheten av samhandling med andre elever og med læreren for å kunne løse matematiske problemer eller å bedre forstå matematiske begreper.

3 Forskningsdesign og metode

I dette kapittelet vil jeg presentere de metodiske valgene gjort i dette forskningsprosjektet. Det vil gjøres rede for valg av forskningsdesign og tilnærmingen som er blitt gjort til datamaterialet i lys av forskningsspørsmål og studiens formål. Forskningsprosjektet tar for seg analyse av to læreverk som anses som oppgavens hovedkilder til empiri. Læreverkene utgjør oppgavens datamateriale og er gjenstand for analysen som gjøres med bakgrunn i forskningsspørsmålene

1. *Hvordan legger to ulike matematiske læreverk til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer innenfor funksjonslære?*
2. *På hvilken måte har elevene potensial til å tilegne seg kunnskap innenfor matematiske kompetanser gjennom arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære?*

Avslutningsvis trekkes utformingen av analyseverktøyene frem og refleksjoner rundt disse, samt at etiske hensyn omkring forskningen diskuteres.

3.1 Forskerrollen

"Forskeren må være seg bevisst om at han er en utvelgende aktør, og at data som brukes, ikke er uavhengige av hans forhåndsoppfatninger" (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 23). Jeg vil i denne oppgaven ikke konkludere om læreverkene er gode eller ei, men heller studere det faglige innholdet og fordelingen av dette i tilknytning til forskningsspørsmålet og det matematiske emnet funksjonslære. En av intensjonene med forskningen er å studere i hvilke tilfeller eksempelvis en lærer bør gripe inn i elevenes læringsprosess i funksjonslære. Slike situasjoner kan være situasjoner der elevene skal lære om funksjonslære, men læreverkene ikke støtter opp omkring oppnåelse av passende kompetanse. Muntlig kommunikasjonskompetanse kan for eksempel være vanskelig å tilegne seg gjennom individuelt arbeid med oppgaver. Det kan i slike tilfeller være interessant å se hvordan læreverkene støtter studentene til å gjøre dette med hensyn til funksjonslære.

For å oppnå en så reliabel datainnsamling og analyse som mulig vil jeg påpeke at det papirbaserte datamaterialet mitt et produsert og ferdig trykket. Datamaterialet kan på denne måten ikke endre seg før det kommer nye eller oppdaterte utgaver av læreverket. Det digitale datamaterialet er åpent for endringer og kan endres etter hvert som man finner ut av at noe eksempelvis ikke fungerer hensiktsmessig. Jeg vil derfor spesielt presisere at dataene er samlet inn i månedene februar, mars, april og mai 2021. Jeg vil i tillegg analysere bøkene uten påvirkning eller innflytelse fra andre, hverken lærere eller elever, og dette resulterer i en analyse av det matematiske innholdet slik datamaterialet fremkommer i læreverkene.

3.2 En kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ metode

I denne oppgaven er det benyttet en kombinasjon av to kvalitative analysemetoder, henholdsvis lærebok- og dokumentanalyse. Jeg har valgt å gjennomføre en kombinasjon av to datainnsamlingsmetoder fordi det ga størst potensiale for å undersøke hvordan overganger mellom representasjonsformer innenfor funksjonslære legges til rette for. Kombinasjonen av analysemetoder ga også muligheten til å studere hvilke matematiske kompetanser elevene har potensiale til å lære seg ved arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære i de to læreverkene. Dokumentene jeg har valgt for datainnsamling er representative ved at begge læreverkene er oppdatert etter fagfornyelsen i 2020, og begge læreverkene er skapt med en intensjon om å lære bort ulike matematiske tema gjennom blant annet oppgaver.

Datamaterialet vil i hovedsak undersøkes og presenteres kvalitativt, men noen av dataene vil likevel presenteres kvantitativt. Dette er gjort fordi det er studert 381 deloppgaver der disse dataene er mest fornuftige å presentere på en kvantitativ måte, for igjen å forstå helheten i trendene og fenomenene som oppsto i datainnsamlingen. Å presentere og analysere datamateriale kvalitativt innebærer å beskrive og å forstå handlinger spesifikke mennesker eller dokumenter utfører, og hvilken mening handlingene har for dem (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 95). Kvantitative data er numeriske data i presentert ved hjelp av tall (Pettersen, 2008, s. 89). Å presentere dataene på en kvantitativ måte er med på å gi et helhetlig bilde på om det finnes ulikheter og/eller likheter mellom de to læreverkene. I kvantitative datainnsamlingsmetoder måler man gjerne hyppighet eller omfang av ett eller flere fenomener eller trender. Det samme kan man gjøre i kvalitative dataanalyser. Kvalitativ datainnsamling kan gjennomføres på flere måter (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113), blant annet kan man benytte seg av observasjon, intervju eller, som i denne forskningsstudien, gjennom et dokumentstudie.

Det var en liten skjevfordeling i antall oppgaver mellom de to læreverkene innenfor temaet funksjonslære. I læreverket Matematikk 8 var det totalt 70 oppgaver med til sammen 160 deloppgaver i kapittelet. I læreverket Campus Matte 8 var det totalt 54 oppgaver med til sammen 221 deloppgaver innenfor funksjonslære. Datamaterialet presenteres og analyseres derfor noen plasser kvantitativt ved å sammenlikne læreverkene prosentvis. Dette vil da illustrere helhetsbildet på en fornuftig og helhetlig måte fordi prosenten vil vise hvor stor del av helheten i den gjeldende boka som er representert.

Forskningens fokus er å studere ulike oppgaver innenfor det matematiske temaet funksjonslære og knytte oppgavene opp mot både representasjonskompetanse, men også andre matematiske kompetanseområder. Dermed blir fokuset for oppgaven å *forstå* hvilke matematiske kompetanser oppgavene har potensiale til å lære bort, og *beskrive* hvilke typer oppgaver disse kompetansene forekommer, og i etterkant *tolke* hva utfallet av slike oppgaver kan bety for elevene.

3.3 Dokument- og lærebokanalyse

Dokumentanalyse dreier seg om analyse av dokumenter som er relevant for forskerens undersøkelsesfokus og kan omfatte omtrent alle tenkte former for dokumenter. Å gjennomføre en dokumentanalyse er fordelaktig i dette tilfellet fordi «til forskjell fra tekstanalyse ... vil en analyse av faglige dokumenter i all hovedsak ha som formål å gi en så objektiv beskrivelse som mulig av hovedtrekkene i tekstens innhold» (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 88). Dokumentene «må derfor analyseres og tolkes ut i fra forskerens perspektiv, og forskerens mål er gjerne å få en helhetlig bilde av historien gjennom dokumentene» (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 92). Innenfor dokumentanalyse finnes en undergruppe med analysemetoder og en av disse undergruppene er lærebokanalyse. Lærebok- og dokumentanalyse kommer til å benyttes i en kombinasjon gjennom undersøkelsen av forskningsspørsmålene. En kvalitativ lærebokanalyse «omfatter analyse av en enkelt lærebok eller en rekke lærebøker, som ofte fokuserer på hvordan et emne eller emner behandles eller hvordan en bestemt ide eller aspekt av interesse reflekteres i lærebøkene» (Fan et al., 2013, s. 636-637). En lærebokanalyse kan også omfatte «analyse av ulike serier av lærebøker ... ofte med fokus på å identifisere likheter og forskjeller» (Fan et al., 2013, s. 637). Lærebokanalyse passer seg som metode i dette forskningsprosjektet da oppgaven er å undersøke om det finnes likheter og/ulikheter mellom læreverkene som er beregnet for 8.trinn i ungdomsskolen. Kombinasjonen med dokumentanalyse kan begrunnes med at «dokumenter kan gi data om sammenhengen der forskningsdeltakerne opererer» (Bowen, 2009) og læreverkene som skal undersøkes er relevant for å få svar på oppgavens forskningsspørsmål. Bowen hevder i tillegg at en dokumentanalyse både er stabil, ved at dokumentene er konstante, og at det er fordelaktig at dokumentene er lett tilgjengelige, eksempelvis ved at dokumentene er digitale (Bowen, 2009).

3.4 Valg av læreverk

For å oppnå en så nøytral inngang i forskerrollen som mulig gjorde jeg ingen research på hvilke læreverk som på gjeldende tidspunkt (høst 2020) var mest eller minst brukt i norske skoler. Jeg gjennomførte derimot et generelt Google-søk etter læreverk oppdatert etter læreplanfornyelsen i 2020 og kikket på listen over oppdaterte læreverk. Deretter valgte jeg meg to ulike læreverk, ett papirbasert og ett digitalt som jeg hadde mulighet til å skaffe tilgang til. Læreverkene som ble valgt var henholdsvis Matematikk 8 fra Cappelen Damm av Hjardar og Pedersen, samt Campus Matte 8 fra Campus Inkrement med Thue, Moldeklev og Røyland som forelesere.

Matematikk 8 fra Cappelen Damm og Campus Matte 8 vil fungere som mine førstehåndskilder til empiri i datainnsamlingen. At noe fungerer som en førstehåndskilde bygger på at «førstehåndskilden [er] den opprinnelige utgaven av en tekst eller senere opptrykk av den» (Dalland, 2007, s. 77). Dette betyr at empirien hentes direkte fra den originalkilden, enten i originalformat eller i redigerte utgaver. Kildene er ikke gjengitt av andre forfattere, forskere, bøker, materialer eller oppgaver. Læreverkene jeg studerer er utgitt hver for seg, en i papirformat og en digital læreplattform. Jeg som enkeltperson har ingen mulighet for å påvirke verken innhold eller utseende til læreverkene. Videre følger en presentasjon av de to ulike læreverkene og deres oppbygging.

3.4.1 Matematikk 8 fra Cappelen Damm

Læreverkene til Matematikk 8-10 fra Cappelen Damm presenteres (Cappelendamm, s.a.) som lærebøker som gir elevene anledning til å øve på evne til kritisk tenkning og anledning til å argumentere for egne løsninger. I tillegg er verkene beskrevet som tydelig strukturerte og progresjonsfokuserte, samt at elevene får utvikle sin matematiske forståelse gjennom bruk av ulike læringsstrategier, problemløsning og utforsking. Læreverket inneholder grunnbok, lærerveileder, oppgavebok, og en digital lærerressurs.

Om grunnboken (Hjardar & Pedersen, 2020a) blir det sagt at den har rolig progresjon og et enkelt språk, samt at den inneholder rikelig med oppgaver knyttet til teorien og eksemplene som presenteres (Cappelendamm, s.a.). Det er knyttet en lærerveileder til grunnboken og denne er beskrevet som å inneholde nyttig informasjon, forslag og tips til undervisningen samt veiledning til vurdering. Oppgaveboken (Hjardar & Pedersen, 2020b) beskrives som et godt verktøy for differensiering da alle oppgavene er nivådifferensiert i tre nivåer (Cappelendamm, s.a.). De nummererte oppgavene er differensiert i tre nivåer, symbolisert med henholdsvis • en, •• to eller ••• tre prikker. Noen av oppgavene i grunnboken er nivådelte, mens alle oppgavene i oppgaveboken er nivådelt. Heretter vil jeg betegne det samlede læreverket Matematikk 8 fra Cappelen Damm med kun Matematikk 8.

3.4.2 Campus Matte 8 fra Campus Inkrement

Campus Inkrement er et digitalt læreverk som baserer seg på fenomenet *omvendt undervisning* som går ut på å gi lærerne mulighet for å snu om på undervisningen. I dette ligger det at elevene får mulighet til å gå gjennom den matematiske teorien hjemme i forkant av timen ved hjelp av ulike videoinnslag i læreverket (Campus Inkrement as, 2018). Læreverket beskrives også som å inneholde gode læringsdata, og i dette ligger det at lærere får fullstendig oversikt og elever får tilpasset innhold til sitt nivå gjennom nivådelte oppgaver. Campus Matte beskrives også som et komplett læreverk oppdatert etter fagfornyelsen 2020 og inneholder teori, prøver, oppgaver og undervisningsaktiviteter.

Campus Matte 8 benytter seg av nivådifferensierte oppgaver i sine matematiske temabolker. Disse oppgavene er delt inn etter skiløypeprinsippet der grønn løype er den enkleste, rød løype er noe mer utfordrende og sort løype er den mest utfordrende veien å velge. Til hver oppgave anbefales det hvilke hjelpemidler som kan være passende å benytte i utførelsen av oppgaven. Oppgavene innenfor funksjonslære er en blanding mellom flervalgsoppgaver, «fyll-inn-svaret» oppgaver og oppgaver der elevene skal levere skjermbilde av arbeidet de har gjennomført.

For at elevene skal få fullstendig utbytte av oppgavene oppgis det at læreren har ansvar for at elevene bruker det anbefalte verktøyet i oppgavene før de løser oppgavene digitalt i plenum (Campus Inkrement as, 2018). Det er ofte oppgitt at elevene skal bruke penn og papir i løsningen, noe som peker mot at læreverket ønsket at elevene skal løse oppgaven analogt for hånd i tillegg til digitalt. Heretter vil jeg betegne det samlede læreverket Campus Matte 8 fra

Campus Inkrement med Campus Matte 8.

3.5 Gjennomføring av datainnsamling og analyse

Det er mange forskere som hevder at datainnsamling bør gjennomføres helt til forskeren ikke lenger klarer å hente ut ny informasjon fra datamaterialet (Christoffersen & Johannesen, 2012; Kvale & Brinkmann, 2015; Seidman, 2006). I slike tilfeller snakker man om et metningspunkt der det ikke lenger er hensiktsmessig å utføre videre datainnsamling. Det er i slike tilfeller vanlig å ta hensyn til homogeniteten eller heterogeniteten i datamaterialet. I dette tilfellet er det snakk om 124 oppgaver med 381 deloppgaver som alle omhandler det matematiske temaet funksjonslære på en eller annen måte. Dette samsvarer med Christoffersen og Johannesen (2012) beskrivelse av et homogent utvalg som et utvalg med svært liten variasjon ut i fra sentrale karakteristikker. Denne forskningens datamateriale kan også ses på som et homogent datamateriale da alle oppgavene innenfor det samme matematiske temaet og likner på hverandre i oppbygging, innhold og struktur. Videre legger Christoffersen og Johannessen (2012) fram at dersom datamaterialet er homogent behøver forskeren færre informanter enn ved et heterogent datamateriale. Oppgavene ble studert ved hjelp av observasjon på hvordan de nummererte oppgavene responderte på de fem spørsmålene (kapittel 3.5.2) utformet for datainnsamlingen.

Datainnsamlingen konsentrerte seg utelukkende om de nummererte oppgavene i læreverkene. Diskusjonsoppgaver og undringsoppgaver ble ikke grundigere studert. Dette ble gjort for å undersøke matematikkoppgavene elevene hovedsakelig arbeider med både i undervisningssituasjonen og i arbeid med lekser. Til forskjell fra de til sammen 381 nummererte deloppgavene var det totalt 29 undrings og diskusjonsoppgaver i de to læreverkene. Forskjellen mellom oppgavene var generelt at undrings- og diskusjonsoppgaver ble gitt i forbindelse med teorigjennomgang, mens de nummererte oppgavene har til hensikt at elevene skal arbeide med etter hver teoridel. Det var også en betydelig større andel av nummererte oppgaver enn undrings- og diskusjonsoppgaver, noe som gjorde datamaterialet bredere med tanke på om det eksisterte tydelige trender i oppgavene. Med å gjøre en slik avgrensning mister man det matematiske aspektet disse oppgavene bidrar med, men til gjengjeld får man et innblikk i majoriteten av oppgaver innenfor funksjonslære i det to læreverkene.

Som utgangspunkt i gjennomføringen av datainnsamlingen og analysen så jeg meg nødt til å forutsette at elevene som skulle løse oppgavene hadde en viss matematisk forkunnskap. Ideelt sett skulle alle elevene kunne oppfylle kompetansemålene for 7.trinn, men av erfaring er dette en ønskesituasjon. Det er likevel forutsatt at elevene befinner seg på en plass der de mer eller mindre oppfyller kompetansemålene for 7.trinn og at elevene har generelle grunnleggende kunnskaper i matematikk. Med grunnleggende kunnskaper menes at elevene kjenner til hva et tall er, at de kan lese matematiske tekstoppgaver og at elevene kjenner til de fire regneartene. En av grunnene for å ta utgangspunkt i disse ferdighetene og forkunnskapen til elevene før de gikk i gang med oppgaveløsningen var for å studere om det i det hele tatt var rimelig å forvente at en elev kunne utføre oppgaven på egenhånd.

Et sentralt poeng for analysen er at læreverkene studeres isolert fra omverden. Lærere og elevers bruk av læreverkene blir ikke undersøkt, men det gjøres rede for ulike potensialer eller manglende potensiale for hvordan de nummererte oppgavene i læreverkene *kan* bidra til elevers læring. Analysen studerer også hvordan lærerveilederne kan bidra til å berike innholdet i læreverkene, men det er vanskelig å forutsi hvordan veilederne faktisk blir brukt.

3.5.1 Etablering av trender i et homogent datamateriale

Postholm og Jacobsen (2018) legger frem at det i mange kvalitative dataanalyser handler om å lete etter mønster i datamaterialet for å deretter samle materialet i kategorier eller under ulike tema. Vaismoradi, Jones, Turunen og Snelgrove (2016) legger frem at å finne relevant svar på forskningsspørsmålene avhenger av å velge relevant del av datamateriale for å kunne kode og velge passende størrelse på datamateriale for å forhindre at finesser i oppgavens helhet mistes. På bakgrunn av disse argumentene ble først hver 10. oppgave i datamaterialet studert. I og med at det stadig oppsto nye fenomener i datamaterialet ble det besluttet å studere hver 5. oppgave. Etter dette steget var det oppstått tydelige trender i noen deler av datamaterialet, men det ble likevel besluttet å studere hver 3. oppgave for å bekrefte eller avkrefte trendene som var oppstått på det stadiet. Etter hver 3.oppgave var studert virket det som at datainnsamlingen nådde et metningspunkt og det ble besluttet å ikke studere flere oppgaver da dette ikke ville være hensiktsmessig. Trendene som oppsto er beskrevet og diskutert i analysekapittelet (kapittel 4), og er som følger:

1. Nivådeling
2. Flervalgsoppgaver
3. Samarbeid
4. Anbefaling av hjelpemidler

5. Like og ulike krav til representasjonskompetanse
6. Manglende oppfordring til øving av muntlig kommunikasjonskompetanse i oppgaveformuleringene

Datamaterialet i denne forskningsoppgaven består av notater og utregninger gjort både for hånd og digitalt. Da oppgavene ble studert i lys av de fem spørsmålene i kapittel 3.5.2 ble resultatene lagt inn i tabeller (kapittel 3.5.2.1) og organisert etter oppgavenummer og hvilket læreverk de tilhørte. Oppgaver innenfor hver trend ble telt og det ble regnet ut hvilken prosent av helheten oppgavene eller deloppgavene utgjorde. Gjennom analyseprosessen har jeg også studert hver enkelt oppgave og deloppgave, og sortert dem etter hva slags overganger mellom representasjonsformer de presenterer. Til dette har jeg undersøkt hvilke overganger som er vektlagt i oppgavene ved hjelp av Janviers tabell (kapittel 3.5.3) utviklet av Hjardar og Pedersen (Hjardar & Pedersen, 2020a).

3.5.2 Spørsmål benyttet i datainnsamlingen

I gjennomføringen av datainnsamlingen ble det benyttet fem ulike spørsmål alle oppgavene som ble studert måtte gjennom;

1. Hvilken forkunnskap må elevene ha for å forstå hva oppgaven spør om?
2. Hvilken kunnskap må elevene innenfor funksjonslære ha for å kunne løse oppgaven?
3. Hvilken representasjonskompetanse innenfor funksjonslære stilles til oppgaven?
4. Hvilke forskjeller er det til kunnskapen som forventes og representasjonene som brukes i nivådelingen av oppgavene?
5. Hvilken matematisk kompetanse inviterer oppgaven til øvelse av?

Spørsmål nummer en var relevant å stille oppgavene da spørsmålet skulle undersøke om oppgaven i det hele tatt var gjennomførbar for elevene. Som nevnt ble det forutsatt at elevene mer eller mindre oppfylte kompetansekravene for 7.trinn og i tillegg ble de foregående/tidligere kapitlene i læreverkene regnet som forkunnskap. Spørsmål nummer to dreier seg om selve funksjonslærebiten og de ulike komponentene som er sentrale her. Dette spørsmålet ble stilt for å undersøke om elevene i det hele tatt var i stand til å gå i gang med oppgaven basert på hva de allerede kunne om funksjonslære. Denne forkunnskapen endret seg underveis i kapittelet da elevene hadde vært gjennom stadig mer teori omkring funksjonslære. Spørsmål nummer tre inkluderer representasjonskompetanse og overganger mellom representasjoner. Dette spørsmålet var nødt til å være med for å inkludere det mest fundamentale elementet i funksjonslære. Spørsmål nummer fire ble valgt for å undersøke om oppgavene som var nivådelte stilte ulike kognitive krav til elevene, og om de forventet høyere/lavere/lik kunnskap innenfor representasjonskompetanse. Spørsmålet ble utformet med en forventning om at kravene som ble stilt til kognitive krav og representasjonskompetanse var ulike ut ifra nivå, og ble derfor regnet som et interessant og relevant spørsmål. Spørsmål nummer fem går direkte på de fire matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) som analysen vektlegger samt at spørsmålet er knyttet direkte til forskningsspørsmålene.

3.5.2.1 Eksempel på organisering av datamateriale

Oppgave 4.130 i oppgaveboken til Matematikk 8

(1) Hvilken forkunnskap må elevene ha for å forstå hva oppgaven spør om?	Kunnskap om ulike graftegnere og hvordan man bruker et slikt verktøy, kjenne til funksjonsuttrykk, generell algebrakunnskap, vite hva de ulike funksjonene til komponentene i et funksjonsuttrykk representerer, vite hvordan man tegner en graf, kjenne til x- og y-akse, kunne lese av en graf, ha et begrep på hva fart er og enhetene det måles i, kjenne til knop og hva enheten representerer
(2) Hvilken kunnskap må elevene ha innenfor funksjonslære for å kunne løse oppgaven?	Dette punktet faller sammen med spørsmålet over i denne oppgaven.
(3) Hvilken representasjonskompetanse innenfor funksjonslære stilles til oppgaven?	Situasjon→funksjonsuttrykk (SF), Funksjonsuttrykk→graf (FG)
(4) Hvilke forskjeller er det til kunnskapen som forventes og representasjonene som	Ingen med tanke på representasjonskompetanse, det stilles akkurat de samme kravene i alle nivåene med tanke på representasjoner, men det brukes ulike måleenheter og større tall oppover i nivåene.

brukes i nivådelingen av oppgavene?	
(5) Hvilken matematisk kompetanse inviterer oppgaven til øvelse av?	*Representasjonskompetanse:* Lærer å representere en matematisk situasjon som et funksjonsuttrykk for deretter å uttrykke situasjonen grafisk. Dette er tre ulike måter å fremstille samme situasjon på, noe man kan ta med seg videre i arbeidet med funksjonslære. Kunnskapen elevene opparbeider seg ved å arbeide med ulike representasjoner vil kunne hjelpe dem ved en senere anledning om de eksempelvis skal ta stilling til hvilken representasjonsform som egner seg best for løsning av en oppgave. *Symbolbruk- og formalismekompetanse:* I en slik oppgave vil symbolene brukt i situasjonen spille en rolle for funksjonsuttrykket som dannes som igjen spiller en rolle for hvordan grafen blir seende ut og hvilke faktorer som er essensielle i denne. Her vil man kunne oppleve at symbolene er i relasjon med hverandre på tvers av representasjonsformer. *Hjelpemiddelkompetanse:* I denne oppgaven blir det spesifikt bedt om bruk av graftegner, noe som er med på å øke kunnskapen om en eller flere graftegnere som hjelpemiddel i løsningen av oppgaven. *Kommunikasjonskompetanse:* I og med at oppgaven stiller krav til konvertering mellom tre ulike representasjonsformer har man allerede der tre ulike former for å uttrykke det samme matematiske problemet. Graftegneren løser problemet teknisk og fremstiller problemet visuelt, mens funksjonsuttrykket er teoretisk og teknisk.

3.5.3 Overganger mellom representasjonsformer

Claude Janvier (1978) utviklet en tabell med oversikt over hvilke overganger mellom representasjonsformer som var aktuelle innenfor funksjonslære. Her ble de ulike representasjonsformene *situasjon*, *verditabell*, *graf* og *funksjonsuttrykk* presentert, samt at overgangene mellom representasjonsformene ble satt i system. Janviers tabell er i utgangspunktet et analyseverktøy og tabellen er laget «for å få frem de mange mulige rekkefølgene» (Hinna et al., 2011, s. 370). Her betyr «rekkefølgene» de ulike overgangene mellom representasjonsformene. Hjardar og Pedersen utformet senere en tabell basert på Janviers tanker og denne tabellen (tabell 3.1) kan synes mer relevant i dagens matematikkbøker. I og med at tabellen til Hjardar og Pedersen (2020a, s. 257) er hentet fra lærerveilederen til Matematikk 8 ble det besluttet at tabellen var såpass relevant at den spiller en sentral rolle i datainnsamlingen og analysen av begge læreverkene.

Fra/til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon		Måling	Skisse	Modellering
Tabell	Avlesning		Plotting	Tilpassing
Graf	Tolking	Avlesing		Kurvetilpassing
Formel	Gjenkjenning	Beregning	Plotting	

Tabell 3.1: Tabellen illustrerer forfatterne av Matematikk 8 fra Cappelen Damms tolkning av regneoperasjoner som må gjennomføres for de ulike overgangene mellom representasjonsformer i funksjonslære (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 257).

I datainnsamlingen ble notasjonen til Hinna et al.(2011) benyttet for å beskrive hvilke overganger mellom representasjonsformer som er representert i oppgaveformuleringene. Denne notasjonen ble for oversiktens skyld ikke benyttet i fremleggelsen av analysen. For å kunne forklare hva de ulike symbolene i tabell 3.2 (under) betyr har Hinna et al. (2011) sagt blant annet dette: «Overgangen FS, fra formel til situajson, innebærer at eleven skal finne en praktisk situasjon til en oppgitt formel [...] Den motsatte overgangen, SF, fra situasjon tl formel, kalles *matematisk modellering*» (Hinna et al., 2011, s. 370). På samme måte vil overgangen TG innebære at elevene skal tegne en graf ut i fra verdiene i en tabell og motsatt vil overgangen GT innebære at elevene skal lage en verditabell ut i fra verdiene til en graf.

Fra/til	Situasjon	Tabell	Graf	Formel
Situasjon		TS	GS	FS
Tabell	ST		GT	FT
Graf	SG	TG		FG
Formel	SF	TF	GF	

Tabell 3.2: Tabellen er hentet fra (Hinna et al., 2011, s. 370) og illusterer hvilken benevning som ble benyttet i Janviers tabell for overganger mellom representasjonsformer.

Videre følger et eksempel på hvordan overganger mellom representasjoner i en nummerert oppgave fra ett av læreverkene ble studert og notert i datainnsamlingen.

3.5.3.1 Representasjonskompetanse og funksjonslære

En oppgave innenfor funksjonslære med fokus på representasjonskompetanse kan eksempelvis se slik ut:

> «Kristian kjøper druer til 50 kr per kg. Kjøpet kan beskrives med funksjonsuttrykket $f(x) = 50x$, hvor *x* er antall kilo han kjøper.
>
> a) Lag en tabell som viser hvor mye 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg og 5 kg druer koster.
>
> b) Tegn en graf som viser sammenhengen mellom antallet kilogram og det Kristian må betale»
>
> (Hjardar & Pedersen, 2020b, s. 179).

I denne oppgaven veksles det mellom alle de fire representasjonsformene som er karakteristisk for funksjonslære. Oppgaven starter med en situasjonsbeskrivelse og introduserer et funksjonsuttrykk (**SF**: overgangen situasjon til funksjonsuttrykk). Deretter bes den som skal løse oppgaven om å lage en tabell (**FT**: overgangen funksjonsuttrykk til verditabell) for deretter å tegne en graf (**TG**: overgangen verditabell til graf) ut ifra de verdiene som kommer frem i oppgaven.

3.6 Diskusjon av metode

Gjennomføringen av analysen har vist seg å være mer utfordrende enn på forhånd antatt. Dette fordi at jeg som forsker kan oppfatte de matematiske oppgavene på en annen måte enn hva en elev på 8.trinn gjør. Jeg har også funnet det utfordrende å skulle forutsette hvilke forkunnskaper elevene må ha for å kunne løse de ulike oppgavene og har til slutt måttet forutsette at elevene har et visst matematisk utgangspunkt og forforståelse. Jeg har vært opptatt av at oppgaven skal være reliabel og at analyseprosessen skal kunne gjennomføres av en hvilken som helst annen person. Denne personen skal kunne komme frem til de samme konklusjonene som meg. Dette går på oppgavens reliabilitet, eller troverdighet som det også kalles, som «knytter seg til nøyaktigheten av undersøkelsens data; hvilke data som brukes, den måten de samles inn på, og hvordan de bearbeides" (Christoffersen & Johannesen, 2012, s. 23). Hvis oppgaven er nøyaktig i alle ledd vil det dannes potensiale for at «flere forskningsassistenter som bruker samme metode kommer fram til samme resultat» (Thurén, 2015). I oppgaven min har jeg også vært opptatt av å svare på de forskningsspørsmålene jeg har stilt, og underveis utvide teorigrunnlaget for analysen hvis det var sentrale trender som dukket opp som trengte nøyere forklaring. Presentasjonen av datamateriale er gjort i henhold til hvilke trender som utpekte seg i det homogene datamaterialet, og er analysert på bakgrunn av teori og tidligere forskning innenfor det matematiske temaet funksjonslære. På denne måten er funnene valide og gyldige opp mot forskningsfokuset i oppgaven (Gustavsen, Hinna, Borge & Andersen, 2014). I de tilfellene det har vært naturlig å ta med flere synspunkt i relasjon med det didaktiske tetraederet er dette blitt gjort da noen av funnene knyttet seg til flere av komponentene i modellen.

Gjennom hele prosessen har jeg undersøkt ferdig trykte og digitale kilder, som jeg ikke har hatt mulighet til å påvirke utformingen av. Jeg har heller ikke forholdt meg til informanter eller personer gjennom eksempelvis intervjuer eller observasjoner. På denne måten har jeg sluppet å ta stilling til etiske problemstillinger man forholder seg til når man forsker på mennesker. I og med at jeg har studert offentlig tilgjengelige kilder i form av læreverk har jeg forholdt meg til de lover og regler som er gjeldende med tanke på referering slik at forfatterne blir kreditert for arbeidet de har gjennomført.

Jeg har derimot syntes at det til tider har vært vanskelig å analysere datamaterialet med en 8.klassings tankesett i tilknytning til matematikk, da jeg selv er kommet et godt stykke lengre i min matematiske utvikling. I slike tilfeller har jeg måttet ta et skritt tilbake og studert hvilke kompetansemål elevene er forventet å ha nådd etter endt 8.trinn (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 37), og deretter forsøkt å studere de matematiske oppgavene på nytt. Det kunne vært interessant å studere hvordan de to læreverkene faktisk ble brukt ved et senere tidspunkt. Da kunne man ha undersøkt hvordan lærere, elever og det matematiske innholdet benytter og presenteres av læreverkene i eksempelvis en undervisningssituasjon. På denne måten ville man eksempelvis kunne få innsikt i hvilke grep lærere gjør med tanke på kommunikasjon omkring det matematiske innholdet i læreverkene, men også hvordan elevene arbeider med og kommuniserer omkring matematiske problemstillinger og temaer.

Det var en liten skjevfordeling i antall oppgaver mellom de to læreverkene innenfor temaet funksjonslære. I læreverket Matematikk 8 var det totalt 70 oppgaver med til sammen 160 deloppgaver i kapittelet. I læreverket Campus Matte 8 var det totalt 54 oppgaver med til sammen 221 deloppgaver innenfor funksjonslære. Datamaterialet presenteres og analyseres derfor noen plasser kvantitativt ved å sammenlikne læreverkene prosentvis. Dette vil da illustrere helhetsbildet på en fornuftig og helhetlig måte fordi prosenten vil vise hvor stor del av helheten i den gjeldende boka som er representert.

4 Datamateriale og analyse

Dette kapittelet består av beskrivelser og analyser av funnene gjort i datainnsamlingen. Funnene beskrives og diskuteres gjennom data- og analysemateriale og funnene diskuteres opp mot forskningsspørsmålene innenfor forskningsfokuset for oppgaven. Kapittelet er bygget opp slik at en matematisk kompetanse presenteres om gangen. Denne oppbyggingen er gjort for å skape en tydelig inndeling og struktur i analysen. Først presenteres funnene vedrørende *representasjonskompetanse*, der alle funnene er knyttet til begge forskningsspørsmålene;

1. *Hvordan legger to ulike matematiske læreverk til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer innenfor funksjonslære?*
2. *På hvilken måte har elevene potensial til å tilegne seg kunnskap innenfor matematiske kompetanser gjennom arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære?*

Deretter presenteres funnene innenfor *symbol- og formalismekompetanse, hjelpemiddelkompetanse* og *kommunikasjonskompetanse* som alle tre er i hovedrelasjon til forskningsspørsmål nummer to. I neste kapittel, kapittel 5, oppsummeres funnene innenfor de fire matematiske kompetansene til Niss og Jensen (Niss & Jensen, 2002) i tilknytning til forskningsspørsmålene, og det diskuteres også hvordan læreverkene legger til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer.

4.1 Representasjonskompetanse

Som nevnt innledningsvis og i teorikapittelet regnes representasjonene *grafer*, *tabeller*, *funksjonsuttrykk* og *situasjonsbeskrivelser* som de sentrale representasjonene innenfor funksjonslære (Hinna et al., 2011; Nitsch et al., 2015). Overgangen mellom representasjonsformene har gjennom forskning vist seg å være en utfordring for elever (Pape & Tchoshanov, 2001). Likevel peker Ainsworth et al. (2002) på at evnen til å kunne bevege seg mellom flere ulike representasjonsformer fører til en dypere matematisk forståelse. Det er derfor et viktig analytisk poeng å se etter om oppgavene oppfordrer elevene til å øve på slike overganger. Slike oppgaver som Ainsworth et al. (2002) presenterer stiller høyere kognitive krav til den lærende enn å arbeide med en representasjonsform av gangen. Basert på hvilke kompetanser elever finner utfordrende innenfor funksjonslære vil det være sannsynlig at læreverkene legger til rette for at oppgavene inneholder et potensial for elevene til å øve på ulike konverteringer mellom representasjonsformer. Dette gjelder i oppgaver med både lave kognitive krav, men også der det stiles høyere kognitive krav.

Alle de til sammen 124 oppgavene i begge læreverkene berører representasjonskompetanse på ulike måter. Det er ikke alle av de 381 deloppgavene som krever representasjonskompetanse, men i slike oppgaver kreves det eksempelvis forkunnskaper om algebra eller geometri.

4.1.1 Oppgave 4.20 i Matematikk 8, grunnbok

> «Lotte er 5 år eldre enn Hamir. Det kan vi uttrykke med funksjonsuttrykket $f(x) = x + 5$, der $f(x)$ er alderen til Lotte og x er alderen til Hamir.
>
> a) Sett opp en verditabell, og tegn grafen til $f(x)$.
> b) Bruk grafen til å finne Lottes alder når Hamir er 15 år.
> c) Bruk grafen til å finne Hamirs alder når Lotte er 14 år»
> (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 266).

I oppgave 4.20 møter elevene på de fire ulike representasjonsformene (Claude Janvier, 1978) innenfor funksjonslære. I denne oppgaven er det henholdsvis representasjonene *verditabell, funksjonsuttrykk* og *graf* beskrevet ved hjelp av en *situasjon*. Oppgaven er ikke nivådelt, men består av deloppgaver. Oppgave a) består av konvertering mellom de ulike representasjonsformene, mens deloppgave b) og c) består av avlesning av grafen som er sluttproduktet i deloppgave a).

Oppgave 4.20 er en oppgave som liknet mange av de andre oppgavene begge læreverkene hadde benyttet seg av innenfor funksjonslære. Typisk for slike oppgaver er at i deloppgave a) skal det benyttes ulike overganger mellom representasjonsformer, mens i deloppgave b), og c) skal resultatet av deloppgave a benyttes. I oppgave 4.20 sin deloppgave a) skal elevene konvertere mellom hele tre av Janviers (1978) representasjonsformer. Først skal det settes opp en verditabell ut i fra et funksjonsuttrykk, og deretter skal det tegnes en graf ut i fra verdiene i verditabellen. For å kunne løse en slik oppgave trenger elevene forkunnskap om algebraiske uttrykk, de bør kjenne til relasjonen mellom variablene i et funksjonsuttrykk, ha kjennskap til hva en verditabell er, og hvordan man lager en. De bør også ha kjennskap til hva en graf er samt dens funksjoner og komponenter. En slik oppgave er med på å gi elevene et rikere erfaringsrom som de kan ta med seg videre i arbeidet med funksjonslære. Erfaring med å konvertere mellom representasjonsformer har gjennom forskning vist seg å være en sentral operasjon som elever synes er vanskelig. Det som derimot skjer i denne oppgaven er at elevene får øvd seg på konverteringen, noe også Pape & Tchoshanov (2001) konkluderer med som essensielt for utvikling av matematisk representasjonskompetanse. De trekker særlig frem at elever må få muligheten til å øve seg på ulike representasjonsformer både gjennom internalisering av matematiske ideer og konsepter, men også gjennom sosiale aktiviteter omkring uttrykkelse av matematiske representasjoner. Ainsworth et al. (2002) peker også på at evnen til å kunne konvertere mellom representasjonsformer fører til en dypere matematisk forståelse, men at denne prosessen stiller høyere krav til den lærende enn eksempelvis ved arbeid med kun en representasjonsform.

I deloppgave b) og c) blir elevene bedt om å lese av grafen de har tegnet for å finne Lottes og Hamirs alder. For å løse disse deloppgavene må elevene ha kjennskap til hva en graf er, hvordan man tegner en graf og hvordan man leser av koordinater på aksene til grafen. Elevene må da ha kjennskap til hvilke formaliteter som gjelder for representasjonsformen *graf* og kjenne til symbolene som benyttes ved grafavlesning. På denne måten bidrar oppgaven både med et potensial for utvikling av matematisk representasjonskompetanse, men oppgaven bidrar også med et potensial for utvikling av kjennskap og relasjon til sentrale symboler og formaliteter innenfor funksjonslære. Elevene skal opprette en verditabell ved hjelp av å dekode funksjonsuttrykket og tildele de ulike komponentene roller tilhørende regnestykket. Videre spiller både funksjonsuttrykket og verditabellen inn i utformingen av grafen, og elevene erfarer «spillereglene innenfor funksjonslære» ved å plotte en graf inn i et koordinatsystem. Helt til slutt skal elevene benytte seg av kunnskap om koordinater for å lese av grafen på rett punkt.

På en annen side kan deloppgave b) og c) også løses selv om elevene ikke har nok matematiske ferdigheter til å kunne lese av en graf. Da faller potensialet omkring erverving av noe av kunnskapen om representasjonsformen *graf* bort. Oppgavens formulering ber elevene eksplisitt om å bruke grafen til å finne alderen til Lotte og Hamir på ulike tidspunkt, men det finnes likevel andre muligheter for å løse deloppgavene. Dersom elevene har forstått funksjonsuttrykket i den grad at elevene har benyttet denne til å lage en verditabell, for deretter å benytte seg av funksjonsuttrykket og verditabellen for å tegne grafen vil elevene også kunne ha en mulighet for å løse oppgaven uten å lese av grafen. Elevene vil da kunne benytte alderen til Hamir eller Lotte for å enten løse oppgaven ved hjelp av funksjonsuttrykket eller verditabellen de har laget.

Denne oppgaven er en typisk oppgave som fokuserer på overganger mellom representasjonsformer, men hver oppgave dreier seg kun om en overgang av gangen. I tillegg er ordlyden i oppgaven relativt «kommanderende», noe som kan tyde på at det ikke stilles høye kognitive krav til elevene i oppgaven. Dette betyr at elevene ikke trenger å se sammenhenger eller generalisere i slike oppgaver, men elevene blir bedt om å utføre oppgaven de får beskjed om uten å knytte inn kontekst eller reflektere rundt arbeidet de gjennomfører.

4.2 Representasjonskompetanse og nivådeling

Både Campus Matte 8 og Matematikk 8 benytter seg av nivådelte oppgaver. I løpet av datainnsamlingen ble nivådelte oppgaver undersøkt for å finne ut om nivådifferensieringen krevde ulike forkunnskaper og ulik *representasjonskompetanse* av elevene, eller om differensieringen berørte andre komponenter i oppgaveutformingen. Briseid (2006) hevder at for å gi et pedagogisk tilbud som er tilpasset forutsetningene og muligheter for utvikling hos den enkelte elev er det nødvendig med differensiering av opplæringen. Denne differensieringen kan skje på to måter, enten ved organisatorisk eller pedagogisk differensiering (NOU 2016:14), der pedagogisk differensiering er sentralt for nivådelingen læreverkene foretar seg. Pedagogisk differensiering representeres av tiltak knyttet til lærestoffinnhold i opplæringen som er tilpasset ulike elevers evner og forutsetninger, derav ulike nivåer av oppgaver. Matematikk 8 (Hjardar & Pedersen, 2020a) begrunner sin nivådeling med at «intensjonen er at eleven skal velge en oppgave på sitt nivå, og så ha lett tilgang til å prøve en ytterligere utfordring ved å velge en oppgave med høyere vanskelighetsgrad» (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 3). Dette utgangspunktet for nivådeling fordrer at elevene faktisk møter en høyere vanskelighetsgrad ved valg av mer utfordrende oppgave, men det er ikke spesifisert på hvilken måte oppgavene blir mer utfordrende.

I læreverket Matematikk 8 er det til sammen 45 av totalt 70 oppgaver som er nivådelte. Dette betyr at 64% av oppgavene er inndelt i tre ulike nivåer. Av disse 45 oppgavene er det 38 oppgaver som stiller like krav til *representasjonskompetanse* i oppgavens tre nivåer og bare 7 oppgaver som stiller ulike krav til *representasjonskompetanse*. Det vil si at det ikke er forskjell mellom nivåene med tanke på representasjonskompetanse i 82,5% av de nivådelte oppgavene.

I Campus Matte er alle de 54 oppgavene nivådelte. Her er det et skille mellom de oppgavene der alle deloppgavene i samme oppgave er av samme nivå, og de oppgavene der deloppgavene er av ulik nivådeling. I denne analysen er det oppgavene som er av ulik nivådeling innenfor samme oppgave som er blitt studert. Av de til sammen 54 oppgavene er det 35 oppgaver som inneholder ulik nivådifferensiering i deloppgavene, og dette utgjør omtrent 65% av oppgavene. Innenfor disse 35 oppgavene er det 26 av oppgavene som stiller samme krav til representasjonskompetanse i de tre nivåene, mens 9 oppgaver krever ulik kunnskap innenfor representasjonskompetanse. Dette betyr at det er 74% av oppgavene som ikke stiller ulike krav innenfor representasjonskompetanse i de tre nivåene oppgavene er delt inn i.

I Campus Matte 8 og Matematikk 8 blir nivådifferensieringen på generell basis gjort på andre komponenter enn det som er direkte knyttet til funksjonslære og *representasjonskompetanse*. Komponenter som endrer seg er eksempelvis størrelse på tall, enheter som skal benyttes på akser, og enheter eller tall som skal benyttes i utregninger er byttet ut. I tillegg kan enhetene på aksene endres til større, mindre, negative eller desimaltall. Oppgavene kan i mange tilfeller se omtrent identiske ut, men med ulike tallverdier og enheter. Som nevnt begrunner begge læreverkene nivådelingen av oppgaver med at elevene skal få mulighet til å arbeide med oppgaver på sitt matematiske nivå. Men i det matematiske temaet funksjonslære kan det se ut til at elevene i over 80% av de 35 nivådelte oppgavene i Matematikk 8 og over 70% av de 26 nivådelte oppgavene i Campus Matte 8 ikke blir utfordret på det matematikktekniske når det kommer til *representasjonskompetanse*, noe som er svært sentralt for funksjonslære.

Det er verdt å nevne at i de nivådelte deloppgavene som stiller ulike krav til *representasjonskompetanse* er det i stor grad nivå tre og i noen tilfeller nivå to som er representert. I Matematikk 8 er det 7 oppgaver som stiller høyere kognitive krav til representasjonskompetanse i nivå to og tre. I Campus Matte 8 er det 9 oppgaver der nivådifferensieringen stiller høyere kognitive krav til elevene i røde og sorte oppgaver med tanke på representasjonskompetanse. I slike oppgaver legges det gjerne til en ekstra overgang mellom representasjonsformene. Videre vil en representativ oppgave med tanke på ulike krav til *representasjonskompetanse* og en representativ oppgave med like krav til *representasjonskompetanse* presenteres og diskuteres.

4.2.1 Oppgave 4.130 Matematikk 8, **like** krav til representasjonskompetanse

• «Leon sykler med en fart på 19 km/h

a) Lag et funksjonsuttrykk $S(x)$ som viser sammenhengen mellom strekningen S og tiden x i timer.

b) Tegn grafen til funksjonen når x har verdier mellom 0 og 8.

c) Bestem grafisk hvor mange timer det har gått hvis Leon har syklet 47,5 km.

•• Et høyhastighetstog kjører med en fart på 300 km/h.

a) Lag et funksjonsuttrykk $S(x)$ som viser sammenhengen mellom strekningen S og tiden x i timer.

b) Tegn grafen til funksjonen når x har verdier mellom 0 og 8.

c) Bestem grafisk hvor lenge toget har kjørt når tilbakelagt strekning er 1350 km.

d) Bestem grafisk hvor langt toget har kjørt etter 2,5 timer.

••• En seilbåt seiler med en gjennomsnittsfart på 8 knop. En knop er 1852 meter per time eller en nautisk mil per time (nm/h).

a) Lag et funksjonsuttrykk $N(x)$ som viser sammenhengen mellom seildistansen N i nautiske mil når båten seiler i x timer.

b) Tegn grafen til funksjonen når x har verdier mellom 0 og 10.

c) Bestem grafisk hvor mange timer seilskuta vil bruke på å seile 100 nm.

d) Bestem grafisk hvor mange nautiske mil skuta har seilt på 8,5 timer»

(Hjardar & Pedersen, 2020b, s. 188).

Denne oppgaven hører til under kapittelet «Tegne grafer ved hjelp av digital graftegner» i oppgaveboken til Matematikk 8.. I oppgaveboken er alle oppgavene nivådelt. Oppgaven er delt i tre nivåer med tre individuelle oppgaver tilhørende hvert nivå der vanskeligheten i oppgavene er oppgitt til å skulle øke for hvert nivå. Alle oppgavene behandler enheter i tilknytning til hverandre, noe forskning har vist at elever syns er vanskelig ved at de angriper funksjonslære punktvis (Bell & Janvier, 1981; Even, 1998).

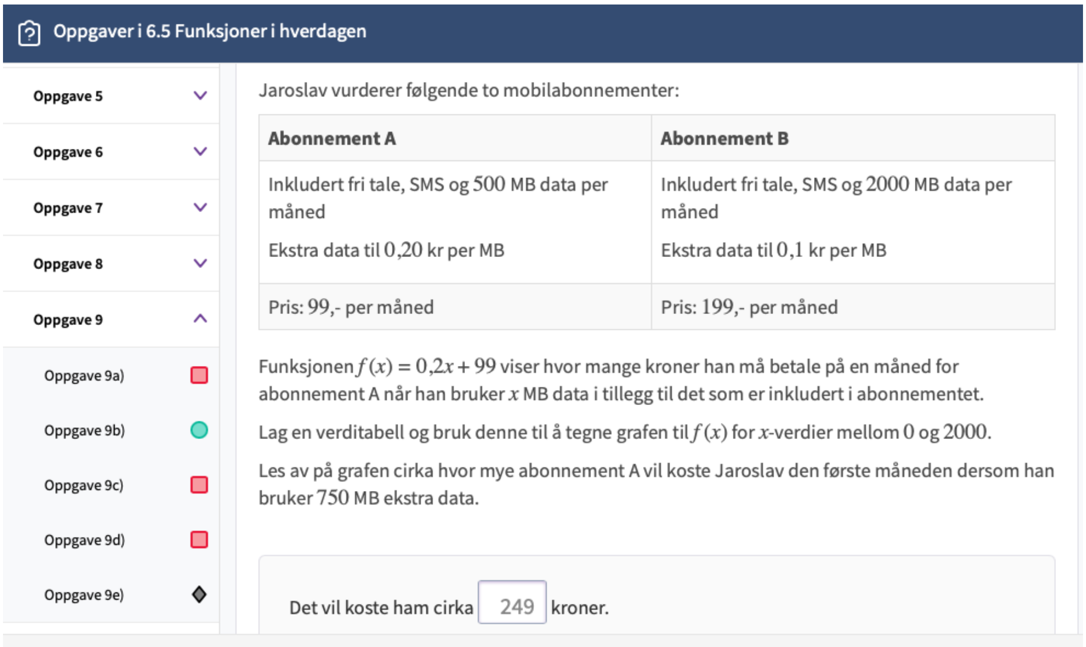
I alle tre nivåene stilles det krav til å oversette en situasjon fra «virkeligheten» til matematisk språk, som er en del av kjerneelementet «modellering og anvendingar» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 31). I tillegg møter elevene Janviers (1978) representasjonsformer og overgangen mellom disse som blant annet Greeno & Hall (1997), og Enge & Valenta (2013) beskriver i sin forskning som sentrale aspekter for matematisk forståelse. Det som er interessant i oppgave 4.130 er at deloppgave a), b) og c) stiller like krav til elevene når det kommer til representasjonskompetanse, forkunnskaper i funksjonslære og generelle matematiske forkunnskaper. I nivå to og tre stiller også deloppgave d) like krav til *representasjonskompetanse* og andre matematiske forkunnskaper. Forskjellen mellom nivåene er at oppgavene er ulike ved at forfatterne har byttet ut tall, enheter og størrelser på aksene som skal benyttes i oppgaveløsningen. Denne typen form for utskiftning i nivåene skilte seg ut som en tydelig trend og det kan synes som om en stor andel av nivåene i læreverkene var differensiert på nettopp denne måten. I og med at det kun er nummererte oppgaver i tilknytning til funksjonslære som er blitt undersøkt i denne oppgaven, er det vanskelig å si noe om hvordan nivådifferensieringen er gjort i andre kapitler i læreverkene. Det en derimot kan undres over er hva elevene egentlig lærer i funksjonslære av at de ulike nivåene inneholder mer ukjente enheter, større eller mer krevende tall og/eller større eller negative akser. Even (1998) understreker i sitt forskningsarbeid at kunnskap om forskjellige matematiske representasjoner ikke er uavhengig, men sammenkoblet med ulike tilnærminger, kontekst og ulike forestillinger knyttet til de matematiske representasjonene. I slike oppgaver kan det tenkes at elevene vil få en forestilling om at å arbeide med funksjonslære er mer krevende med større tall og ukjente enheter selv om oppgavene stiller identiske krav til elevene med tanke på kunnskap innenfor funksjonslære.

Selv om oppgavene kan se like ut for et trent øye, er hensikten å undersøke oppgavene med elevene og elevenes handlinger i tankene. En elev på 8.trinn vil kunne møte den matematiske oppgaven på en fullstendig annerledes måte enn en person med lang matematisk erfaring og kunnskap. Oppgavene i de tre ulike nivåene kan se ut til å ha samme oppbygging og intensjon om hvilke matematiske kunnskaper elevene skal erverve av å arbeide med oppgaven. Dette kan tydes ut ifra ordlyden i de ulike deloppgavene i nivåene. Men selv om ikke kravene om *representasjonskompetanse* og forkunnskaper i funksjonslære er ulikt, varierer nemlig enhetene og tallene som inngår i oppgavene. Denne variasjonen kan være med på å bidra til å stille elevene overfor høyere kognitive krav når det kommer til matematiske tenkemåter. Ikke med tanke på kunnskap om ulike overganger mellom representasjoner, men med tanke på hvordan elevene manøvrerer i det matematiske landskapet når enhetene de skal arbeide med ikke er kjent fra før. Spesielt viktig er det å legge merke til nivå tre som benytter seg av nautiske mil og fartsenheten knop. Definisjonen av en nautisk mil og en knop er oppgitt og elevene blir bedt om å ta dette med i beregningene sine. En elev på 8.trinn er kjent med begrepet å seile eller å kjøre båt og kan har erfaring med dette, men begrepet nautisk mil kan det tenkes at er ukjent for elevene. På denne måten blir elevene utfordret til å se matematikken i en større sammenheng i utførelsen av nivå tre, der matematikken blir satt inn i en virkelighet elevene nødvendigvis ikke er helt trygge på.

Nivåene i denne oppgaven er dermed nivådelt med stigende vanskelighetsgrad, men ikke med tanke på hvilke kunnskaper som kreves rent regneteknisk innenfor funksjonslære. *Representasjonskompetansen* som kreves i alle tre nivåene i oppgaven er delt opp i flere deler. Først må elevene evne å lage et matematisk funksjonsuttrykk ut ifra en situasjon, deretter må de ha evner til å kunne tegne en graf ut fra det funksjonsuttrykket elevene har kommet frem til. Til slutt må elevene evne å lese av grafen de har laget for å så bestemme og lese av ulike verdier i grafene elevene har tegnet. Slik som det i denne oppgaven er differensiert med tanke på innhold i oppgavene kan det synes som om det på generell basis innenfor funksjonslære er gjennomført i de to læreverkene. Denne differensieringen teller like fullt som differensiering, men kravet om *representasjonskompetanse* innenfor funksjonslære og overganger mellom representasjoner kan synes som om er det samme innenfor de tre ulike nivåene.

4.2.2 Deloppgave 9 d), kapittel 6.5 Campus Matte 8, **ulike** krav til representasjonskompetanse

Oppgaven er en del av en helhetlig oppgave som dreier seg om to mobilabonnement og ulike kostnader abonnementene kan føre med seg. Anbefalte hjelpemidler i denne oppgaven er papir og blyant.



Figur 4.1: Deloppgave 9 d) i kapittel 6.5 fra Campus Matte 8 (Thue et al., 2020, kapittel 6.5).

I deloppgave d) sier oppgaveteksten eksplisitt at elevene skal lage en verditabell og deretter bruke tabellen til å tegne grafen. Dette er en regneoperasjon som krever at elevene har evner og kunnskap om hvordan man kommer seg fra en representasjon til en annen. Deloppgaven er en typisk oppgave der elevene blir stilt overfor høyere kognitive krav med tanke på antall representasjoner de må arbeide seg gjennom før de kommer frem til et svar. Dette er en slik oppgave som Ainsworth et al. (2002) påpeker at elever har nytte av å arbeide med for å utvikle den matematiske kompetansen sin innenfor representasjoner og funksjonslære. For elevene sin del kan denne oppgaven muligens by på utfordringer. Oppgaven skiller seg fra de andre deloppgavene i oppgave 9 ved at den stiller krav til at elevene ikke angriper en og en representasjon, men at elevene skal manøvrere seg gjennom flere ulike overganger mellom representasjonsformer.

I og med at det bare er 9 oppgaver innenfor funksjonslære som stiller ulike krav til representasjonskompetanse i Campus Matte 8, bidrar denne deloppgaven til å skille seg ut fra mengden. Oppgaven krever at elevene klarer å opprettholde kontroll over hvilke formaliteter som gjelder for de ulike representasjonene og overgangen mellom disse for å komme frem til et resultat i oppgaven. Dersom dette er første gangen elevene møter en slik oppgave innenfor funksjonslære i et læreverk kan det tenkes at elevene vil finne oppgaven vanskelig. Det vil være et potensiale til at det oppstår spontane samarbeid med medelever selv om oppgaven ikke eksplisitt ber elevene om å gjøre dette. Det vil også være sannsynlig at elevene henvender seg til læreren for å diskutere oppgaven.

Hele oppgave 9 fra kapittel 6.5 i Campus Matte 8 består av fem deloppgaver som er nivådelt. Representasjonskompetansen som kreves med tanke på overganger for å løse denne oppgaven er:

a) Rød: Situasjon → funksjonsuttrykk
b) Grønn: Situasjon → funksjonsuttrykk
c) Rød: Situasjon → funksjonsuttrykk
d) Rød: Funksjonsuttrykk→tabell, tabell→graf
e) Sort: Funksjonsuttrykk → graf (flervalgsoppgave)

Oppgaven består av en flervalgsoppgave og fire oppgaver der svaret plottes inn i oppgaveteksten. I alle deloppgavene blir elevene oppfordret til å bruke «papir og blyant» i regneprosessen.

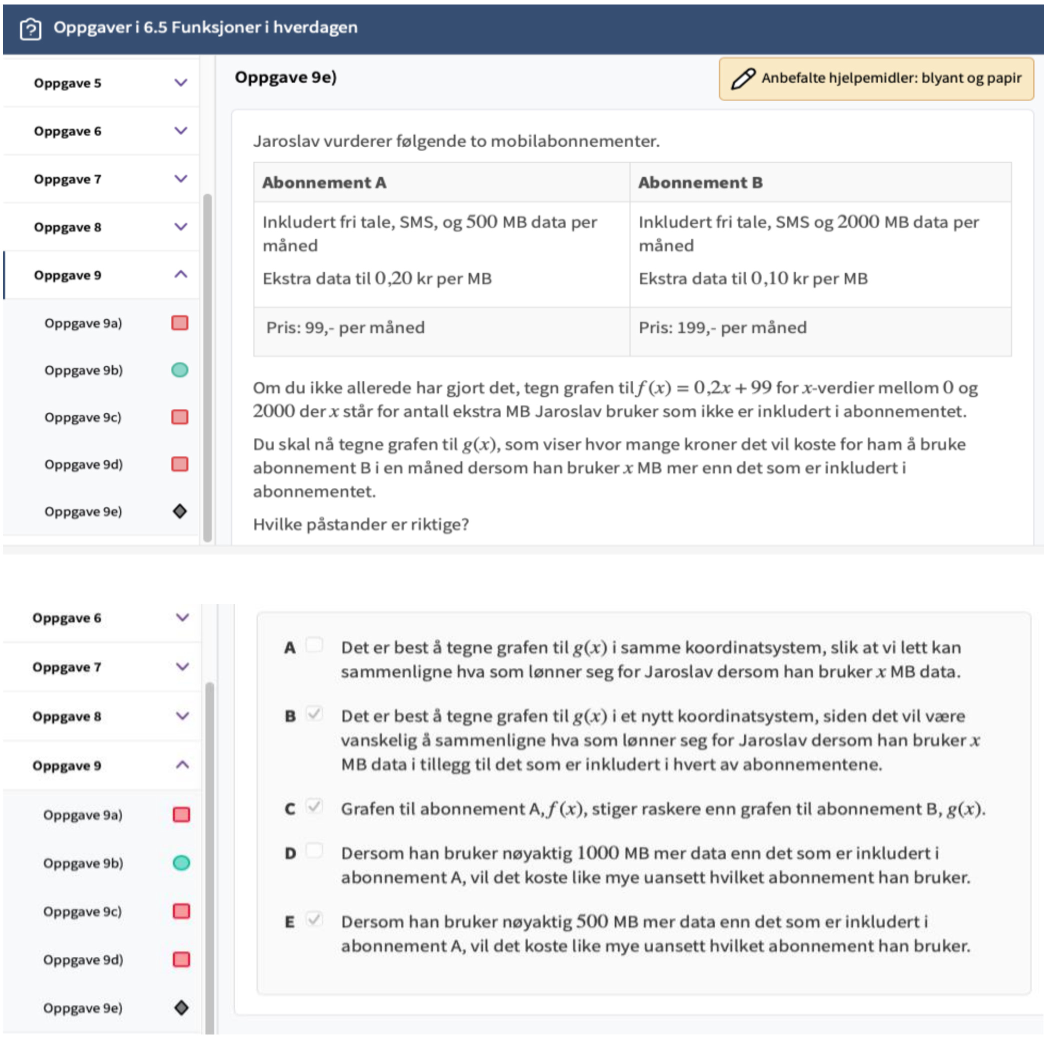
Ut i fra oppsettet på oppgaven, og hvis elevene løser alle deloppgavene i oppgave 9, vil elevene få prøvd seg på alle de fire ulike overgangene mellom representasjonsformene Janvier (1978) listet opp som sentralt for funksjonslære. I denne oppgaven ligger det derfor et potensiale for at elevene får et bedre innblikk i hvordan man på ulike måter kan uttrykke samme matematiske problem ved hjelp av ulike representasjonsformer innenfor funksjonslære. I tillegg vil det være et potensial for at elevene skal kunne erfare hvor mye informasjon et funksjonsuttrykk kan romme. Videre følger et nærmere blikk på oppgave 9 d) fra kapittel 6.5 som initierer til to ulike overganger mellom representasjonsformer før svaret skal fylles inn i en svarboks.

4.3 Representasjonskompetanse og flervalgsoppgaver

Flervalgsoppgaver forekommer ikke i det papirbaserte læreverket, men i det digitale læreverket Campus Matte 8 er en tredjedel av deloppgavene flervalgsoppgaver. 64 av de 157 deloppgavene i kapittelet om funksjonslære er flervalgsoppgaver. Ut ifra slik som flervalgsoppgavene er utformet i kapittelet om funksjonslære i Campus Matte 8, er en flervalgsoppgave en oppgave som består av flere svaralternativer der ett eller flere av alternativene er å regne som riktige. Denne formen for oppbygging samsvarer med den tradisjonelle definisjonen av en flervalgsoppgave (kapittel 2.4.1). Ifølge Haladyna (2004, s. 68) består av en flervalgsoppgave med et spørsmål eller et ikke-avsluttet utsagn med flere svaralternativer der kun ett av alternativene er korrekt. I slike oppgaver skal elevene enten benytte seg av kunnskap de har ervervet i introduksjonsfilmene til emnet, eller av matematisk kunnskap fra tidligere gjennomgåtte kapitler for å vurdere ulike utsagn som er riktige knyttet til problemet oppgaven formulerer. Videre presenteres teori og forskning omkring flervalgsoppgaver for å kunne diskutere funnene i datamaterialet.

Videre diskuteres oppgave 9 e) fra kapittel 6.5 i Campus Matte 8 som er en flervalgsoppgave. Denne oppgaven kan synes som om den stiller høye kognitive krav til elevene på veien mot et eller flere riktig(e) svaralternativ(er).

4.3.1.1 Oppgave 9 e) fra kapittel 6.5 i Campus Matte 8

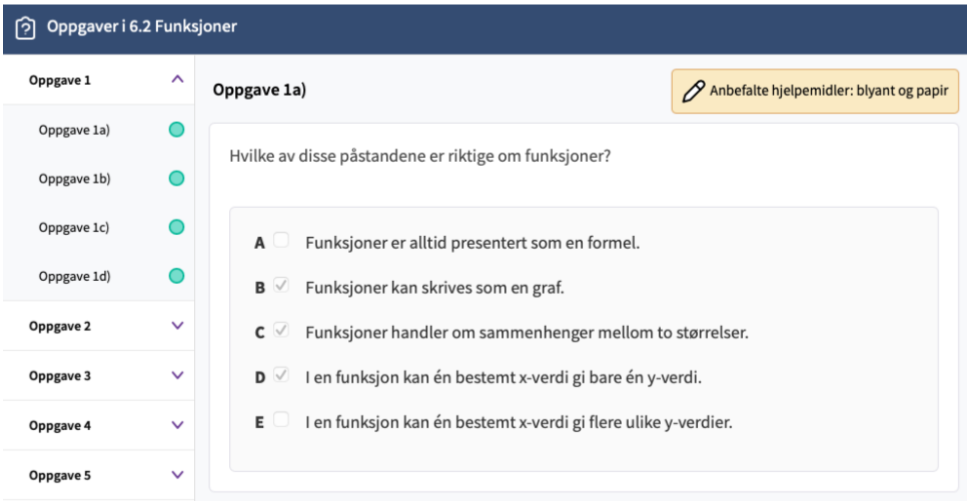


Figur 4.2: Utforming av deloppgave 9 e) fra kapittel 6.5 i Campus Matte 8. Oppgaven er en flervalgsoppgave med flere rette svaralternativer (Thue et al., 2020, kapittel 6.5).

I denne deloppgaven kan det synes som om elevene vil dra fordel av å ha en del forkunnskaper innenfor funksjonslære, og derfor stiller oppgaven høye kognitive krav til elevene. De må kunne tegne en graf og lese av denne. De må kjenne til hvordan de fordeler komponentene i oppgaven på første- og andreaksen, samt at de må ha kontroll på hvilke komponenter som er hva i et funksjonsuttrykk for å kunne komme frem til hvilke svaralternativer som er de korrekte. Deloppgaven er den aller siste oppgaven i kapittelet om funksjonslære, så i denne oppgaven vil det være naturlig å tenke at oppgaven har potensiale for å utfordre elevene på alle de foregående kunnskapene som er gjennomgått i funksjonslære. Denne typen flervalgsoppgaver er ikke en oppgave av nivå 1 *gjengivelse* i Blooms taksonomi, men kan potensielt være av nivå 3 *anvendelse*. Dette er fordi elevene må lage et koordinatsystem med akser i store proporsjoner, tegne inn en graf for abonnement A før de tegner inn grafen for abonnement B. Det er først når begge grafene er tegnet inn i samme koordinatsystem elevene kan starte prosessen med å finne ut hvilke påstander som stemmer. På denne måten sikrer flervalgsoppgaven seg potensialet for at elevene benytter seg av kunnskapen de allerede har ervervet gjennom kapittelet. Et annet positivt poeng med flervalgsoppgaver er at svaralternativene kan være med på å bidra til å bekrefte at elevene er på rett spor i utregningsprosessen hvis plutselig et svaralternativ passer.

På den andre siden, og basert på elevberetningene O´Neil Jr og Brown (O'Neil Jr & Brown, 1998) presenterte, finnes det et potensiale for at elevene kan gjette seg frem til svaret i oppgaven. Dette kan begrunnes med at elever blir frustrert når de må løse oppgaver med mer enn ett rett svar (Herman, 1994). I den samme undersøkelsen kommer det også frem at elever har en tendens til å mislike flervalgsoppgaver og denne faktoren kan også påvirke elevers løsningsmetode.

Til sammenlikning med deloppgave 9 e) fra kapittel 6.5 i Campus Matte 8 vil jeg trekke frem deloppgave 1 a) fra kapittel 6.2 i Campus Matte 8. Denne deloppgaven kan synes som å tilhøre nivå 1 i Blooms Taksonomi. Dette fordi elevene får i oppgave å oppgi hvilke påstander som er riktige angående funksjonslære, noe elevene nettopp er informert om dersom de har fulgt læreverkets naturlige oppbygging og arbeidsmåte med å se introduksjonsvideo først. Da vil denne oppgaven fungere som repetisjon der elevene skal gjengi kunnskap på samme måte som kunnskapen ble lært bort på.



Figur 4.3: Deloppgave 1 a) fra kapittel 6.2 i Campus Matte 8 (Thue et al., 2020, kapittel 6.2).

4.4 Symbol- og formalismekompetanse

I teoridelens kapittel 2.7.2 ble det presentert at *symbol- og formalismekompetanse* innebærer at elevene kan oversette mellom matematisk språk og det naturlige, hverdagslige språket (Niss & Jensen, 2002). En slik kompetanse handler om at elevene har evne til å håndtere og manipulere påstander og utsagn som inneholder symboler og formaliteter knyttet til det matematiske temaet det arbeides med. I funksjonslære innebærer denne kompetansen at elevene har innsikt i de ulike «spillereglene» som gjør seg gjeldende innenfor de ulike representasjonene *situasjon, verditabell, graf* og *funksjonsuttrykk* og overgangene mellom disse.

Kompetansen viste seg å være vanskelig å undersøke i de nummererte oppgavenes oppgaveformulering. Dette fordi absolutt alle de til sammen 124 oppgavene i læreverkene omhandlet symboler og formaliteter knyttet til funksjonslære på en eller annen måte. Ved å arbeide med oppgavene i funksjonslære vil det være et stort potensial for at elevene blir kjent med og får erfaring med å navigere innenfor funksjonslæres matematiske landskap med symboler og formaliteter. En trend pekte seg likevel ut, de nummererte oppgavene benyttet seg sjeldent av ordene *hvorfor, hvordan*, eller liknende spørreord for å oppfordre elevene til å forklare et matematisk fenomen, eller hvorfor en representasjonsform var mer fordelaktig å benytte fremfor en annen. Det kan likevel synes som om at oppgavene absolutt innehar et potensial for at elevene kan tilegne seg *symbol- og formalismekompetanse* ved å arbeide med de nummererte oppgavene innenfor funksjonslære kapitlene i de to læreverkene. I de to læreverkene var det 3 oppgaver som benyttet seg av spørreordene hvordan eller hvorfor av de totalt 381 deloppgavene. Det kan derfor på generell basis synes som om de nummererte oppgavene i læreverkene stiller lave kognitive krav til elevene. i motsetning til om oppgavene inneholdt spørreordene *hvordan* og *hvorfor* som ville gitt elevene mulighet til å se matematikken i en større sammenheng.

Til tross for at oppgaven i hovedsak dreier seg om å studere de nummererte oppgavene innenfor funksjonslære i de to læreverkene tok nysgjerrigheten min overhånd. Nysgjerrigheten dreide seg om potensialet for at det eksisterte en mulighet for at elevene ble oppfordret til øving av *symbol- og formalismekompetanse* i teorigjennomgangen i læreverkene eller gjennom lærerveilederen til grunnboken i Matematikk 8. Ble det derfor besluttet i samråd med veileder at teorigjennomgangen til de to læreverkene og lærerveilederen til grunnboken i Matematikk 8 skulle undersøkes. Materialet ble undersøkt i lys av om læreverkenes teorigjennomgang la opp til eksempelvis forklaringer til hvorfor en representasjonsform var mer anvendelig eller egnet enn andre i ulike matematiske problemstillinger. I følge Huinker (2015) bør diskusjoner omkring representasjoner omfatte det å be elevene om å identifisere likheter og forskjeller mellom representasjonsformer. Disse diskusjonene er med på å rette elevenes oppmerksomhet mot viktige karakteristikker og trekk ved den underliggende strukturen til matematiske ideer. I tillegg støtter slike diskusjoner opp om elevers evner til å gjenkjenne og bruke strukturene i matematisk problemløsning. På bakgrunn av Huinker sine påstander var det interessant å undersøke om læreverkene oppfordret elevene til å identifisere forskjeller og/eller likheter mellom representasjonsformer i teorigjennomgangen, eller å oppdage at læreverkene selv fungerte som medierende faktor for slike identifiseringer.

Oppgaveboken til Matematikk 8 består kun av nummererte oppgaver, undringsoppgaver og anbefalinger til hjelpemidler i oppgavearbeidet. I grunnboken til Matematikk 8 er det derimot gjennomgang av teori knyttet til funksjonslære og det er i tillegg en tilhørende lærerveileder. I denne lærerveilederen er det som nevnt tidligere (kapittel 3.5.3) presentert en tabell som setter representasjonsformene i system med hverandre og legger frem hvilke regneprosesser som initierer de ulike overganger mellom representasjonsformene. Tabellen er kun oppgitt i lærerveilederen og dette betyr at elevene ikke har tilgang på denne med mindre læreren deler tabellen med elevene. Om læreren ønsker at elevene skal få innsikt og oversikt over hvilke regneprosesser som er karakteristisk for de ulike overgangene vil være opp til lærere. Ved å dele og forklare hensikten vedrørende tabellen med elevene vil læreren kunne legge til rette for at elevene får en mulighet til å kunne se sammenhenger i funksjonslære de ellers ikke ville oppdaget. For at elevene skal få utbytte av tabellen ligger det en forutsetning om at elevene er kjent med begrepene og regneprosessene oppgitt i tabellen. Dette kan enten skje via læreverkene, tidligere matematisk kunnskap eller gjennom lærerens beretninger. Likevel vil den matematiske kunnskapen en slik tabell kunne være med på å berike elevenes forståelse av funksjonslære og sammenhengen mellom de ulike representasjonsformene *situasjon, verditabell, graf* og *funksjonsuttrykk.*

I læreplanen for matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020) er det oppgitt at elevene eksplisitt skal arbeide med funksjonslære på to trinn, henholdsvis 8. trinn og 10. trinn. I kompetansemålene for 8. trinn skal elevene lære å «representere funksjonar på ulike måtar og vise samanhengar mellom representasjonane» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 37). Selv om de nummererte oppgavene på generell basis ikke formulerer de nummererte oppgavene ved hjelp av spørreordene *hvordan* og *hvorfor* ligger det utvilsomt et potensiale for at elevene skal kunne erverve kunnskap om å representere funksjoner på ulike måter i læreverkene. De nummererte oppgavene kan likevel ikke eksplisitt sies å oppfordre til å argumentere for eller vise sammenhenger mellom representasjonene alene. For å eksemplifisere dette diskuteres nivå 1 i oppgave 4.130 fra kapittel 4.2.1 igjen.

Oppgave 4.130 fra oppgaveboken til Matematikk 8

- «Leon sykler med en fart på 19 km/h

  a) Lag et funksjonsuttrykk S(x) som viser sammenhengen mellom strekningen S og tiden x i timer.

  b) Tegn grafen til funksjonen når x har verdier mellom 0 og 8.

  c) Bestem grafisk hvor mange timer det har gått hvis Leon har syklet 47,5 km»

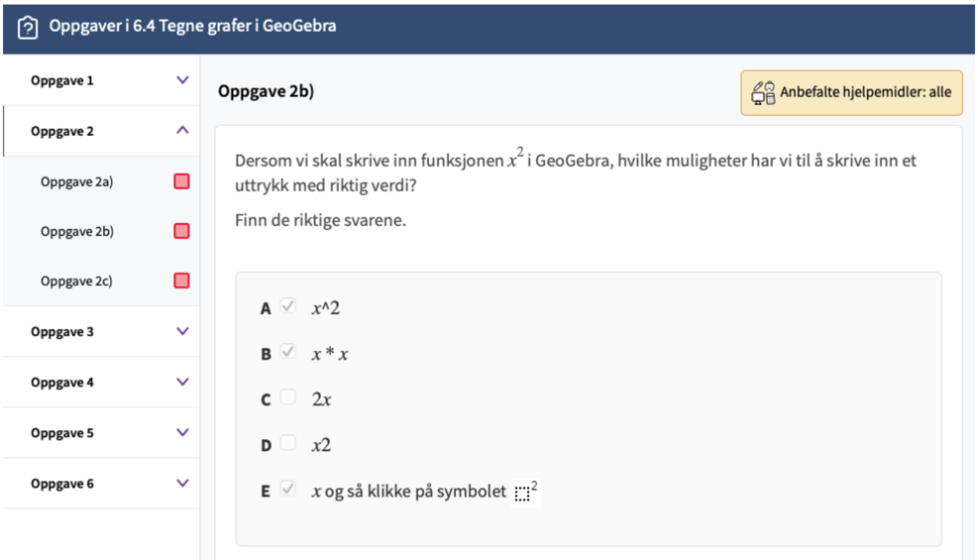
  (Hjardar & Pedersen, 2020b, s. 188).

Oppgaven har en tydelig struktur med deloppgaver som er av lavere orden med tanke på at ordlyden er «kommanderende». Ordene *lag, tegn* og *bestem* krever lav kognitiv aktivitet fra elevene da disse deloppgavene kan utføres uten videre ettertanke. Denne oppgaven kan tenkes å befinne seg en plass mellom nivå 1 og 2 i Blooms taksonomi. Dette fordi oppgaven ber elevene om å utføre bestemte handlinger uten å forklare hvorfor, men det faktum at elevene må benytte seg av ulike overganger mellom representasjonsformer forutsetter at elevene har forståelse for de ulike representasjonsformenes formaliteter. Oppgaven har likevel en klar hensikt, der alle de tre deloppgavene representerer ulike måter å uttrykke at Leon sykler med en fart på 19 km/h. Denne sammenhengen mellom deloppgavene er det ikke sikkert at elever klarer å se uten hjelp utenfra. Her kunne det med fordel vært lagt opp til en siste deloppgave. Denne deloppgaven kunne utfordret elevene til å sette egne ord på hvilken representasjonsform de mente uttrykte situasjonen på best måte og hvorfor. Dette ved enten at den fiktive oppgaven var skrevet inn i læreverket eller ved at læreren tok initiativ til en slik samtale med diskusjon i plenum. Dette kunne ført til et potensiale for at elevene ervervet dypere kunnskap om hvorfor de ulike representasjonsformene egner seg til å uttrykke ulike matematiske situasjoner. Dette samtidig som de ulike representasjonsformene kan uttrykke samme matematisk situasjon. Med dette sagt kan det vise seg at læreverkene for 10.trinn fokuserer mer på sammenhenger mellom representasjoner og argumentene knyttet til dette. Ett av kompetansemålene etter 10.trinn er nemlig at elever skal kunne «bruke funksjonar i modellering og argumentere for framgangsmåtar og resultat» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 38). I dette ligger det en mulighet for læreverkene å implementere argumentasjon i oppgaveformuleringene i læreverkene for 10. trinn.

Videre vil jeg presentere en av deloppgavene i læreverket Campus Matte 8 som utfordret elevene på *symbol- og formalismekompetanse* på et lavere ordens og kognitivt nivå. Deretter presenteres en av de tre oppgavene som benyttet ordet *hvorfor* i oppgaveformuleringen som har potensiale for å utfordre elvene på et høyere ordens- og kognitivt nivå.

4.4.1 Deloppgave 2b) fra kapittel 6.4 i Campus Matte 8

Deloppgaven er en typisk oppgave fra læreverket Campus Matte 8 som omhandler både *symbol- og formalismekompetanse* i funksjonslære.



Figur 4.4: Deloppgave 2 b) i kapittel 6.4 fra Campus Matte 8 (Thue et al., 2020, kapittel 6.4). En typisk oppgave som inneholder potensiale til at elever kan erverve kunnskap om *symbol- og formalismekompetanse* knyttet til det digitale graftegningsprogrammet GeoGebra.

Oppgaven utfordrer elevene til å bestemme hvilke formaliteter som er korrekte når det kommer til å representere symbolet x^2 i den digitale graftegneren GeoGebra. Dette gjøres ved hjelp av en flervalgsoppgave, men i dette tilfellet kan det synes som om det er tre svaralternativer som kan være korrekt, noe som har potensiale til å utfordre elevene til å se sammenhengen mellom formalitetene bak uttrykket x^2 i den digitale graftegneren. I likhet med denne flervalgsoppgaven har de resterende flervalgsoppgavene i kapittelet om funksjonslære i læreverket et potensiale til å utfordre elevene i ulike formaliteter og symboler knyttet til det matematiske temaet. Dette kan eksempelvis være oppgaver der eleven skal vurdere hvilke påstander som er korrekte basert på ulike representasjonsformer, eller bestemme hvilke(t) funksjonsuttrykk som passer til ferdig tegnede grafer.

4.4.2 Oppgave 4.131 nivå 3 fra oppgaveboken i Matematikk 8

Oppgave 4.131 nivå 3 deloppgave c) er en av tre deloppgaver i læreverkene som utfordrer elevene til å forklare *hvorfor* en operasjon i matematikk ikke er mulig å gjøre. Oppgaven utfordrer nemlig elevene til å begrunne hvorfor det ikke er mulig å sette inn verdien 0 for x i funksjonsuttrykket.

Oppgave 4.131 nivå tre fra oppgaveboken i Matematikk 8

••• «Bruk graftegner når du løser oppgaven

a) Tegn grafen til funksjonen $f(x) = \frac{4}{x} + 3$ når x er mellom 1 og 8.

b) Hvilken verdi har x når $f(x) = 3.5$?

c) Hvorfor kan vi ikke sette $x = 0$ inn i funksjonsuttrykket?»

(Hjardar & Pedersen, 2020b, s. 189)

Denne deloppgaven utfordrer elevene på flere matematiske formaliteter. For det første må elevene forklare hva som skjer med en brøk der nevneren er lik null. Dette krever at eleven har forkunnskaper innenfor det matematiske emnet brøk og at de har arbeidet med liknende problemstillinger i fortiden. Videre bør elevene kjenne til og kunne forklare hva formaliteten med at nevneren er lik 0 utgjør for en brøk og deretter for funksjonsuttrykket. Dette er en deloppgave som krever at elevene *anvender* den matematiske kunnskapen de har tilegnet seg ved et tidligere tidspunkt for å kunne benytte denne kunnskapen i et nytt emne. En slik form for anvendelse kan synes som om plasserer deloppgaven innenfor nivå 3 i Blooms taksonomi, og at deloppgaven i tillegg stiller høye kognitive krav til elevene.

4.5 Hjelpemiddelkompetanse

Som nevnt i teorien ligger det ifølge Niss og Jensen (2002) i *hjelpemiddelkompetanse* at elevene skal ha innsikt i og kunnskap om de ulike formene for verktøy som kan brukes i arbeidet med ulike matematiske tema. I tillegg viser forskning at lærer ønsker å benytte seg av digitale løsninger i matematikkundervisningen i større grad enn de gjør for øyeblikket. *Hjelpemiddelkompetanse* kan også ses på som å være med på å øve inn digitale ferdigheter som er en av de fem grunnleggende ferdighetene elever skal lære seg i matematikk.

For at elevene skal ha potensiale til å erverve kunnskap omkring ulike matematiske hjelpemidler, vil læreverkene kunne tenkes å være en naturlig bidragsyter til å initiere, oppfordre og legge til rette for bruk av slike hjelpemiddel. Slike oppgaver kan oppfordre til bruk av ulike matematiske hjelpemidler i oppgaver av lavere orden, og i tillegg stille lave kognitive krav til elevene slik som i oppgaver med ordlyden *bruk*, *finn, plott* og *les av*. Eller så kan oppgaver presenteres for elevene i teorigjennomgang i læreverkene med forklaringer og begrunnelser for hvorfor et digitalt hjelpemiddel er fordelaktig å benytte. På denne måten stilles det høyere kognitive krav til at elevene følger det matematiske resonnementet. Imidlertid er det allerede presentert fra kapittelet vedrørende *symbol- og formalismekompetanse* (kapittel 4.4) at læreverkene i liten grad presenterer hvorfor en representasjonsform er bedre enn en annen. Dette gjelder også for eksempelvis en digital graftegner som GeoGebra.

Delkapittelet *«Tegne grafer ved hjelp av digital graftegner»* innen funksjonslære i grunnboken til Matematikk 8 blir innledet med setningen «Når du skal tegne grafer, er det best å bruke en digital graftegner. Du skal nå lære å tegne grafer ved hjelp av programmet GeoGebra» (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 268). Læreverket begrunner ikke hvorfor det er best å bruke en digital graftegner, men lærerveilederen oppfordrer læreren til å lede elevene gjennom programmets oppbygging og gjennomgå et par oppgaver med elevene i fellesskap. På denne måten legger læreverket opp til at det er lærerens ansvar å informere elevene om fordelene og ulempene, samt i hvilke matematiske situasjoner det er fordelaktig å benytte seg av en digital graftegner som GeoGebra. Ved at læreverket legger ansvaret for denne typen forklaring over på noen utenfor boka kan det synes som om at hvis elevene kun benytter seg av læreverket vil denne kunnskapen kunne falle bort. Det samme gjelder for læreverket Campus Matte 8 der læreverket anbefaler å benytte «papir og blyant» i deloppgaver som hører til under kapittelet *«Tegne grafer i GeoGebra»*. Læreverket oppfordrer elevene til å benytte blyant og papir som hjelpemiddel i de fleste oppgavene, mens de deretter oppfordrer lærerne til å gå gjennom oppgavene digitalt med elevene. Dette diskuteres videre i kapittel 4.5.2.

4.5.1 Oppgave 4.23 Matematikk 8 grunnbok

Oppgave 4.23 er hentet fra grunnboken i Matematikk 8 og er ikke en nivådelt oppgave. Oppgaven tilhører delkapittelet «Tegne grafer ved hjelp av digital graftegner.»

Oppgave 4.23 fra grunnboken i Matematikk 8

> «Raketten Saturn V brakte mennesket til månen for første gang 20. juli 1969. Den kunne oppnå en hastighet på 20 000 km/h.
>
> a) Lag et funksjonsuttrykk f(x) som viser hvor mange kilometer den tilbakela på x timer.
> b) Tegn grafen til f(x).
> c) Bruk grafen til å finne ut hvor mange kilometer raketten hadde tilbakelagt etter 3 timer.
> d) Månen er omkring 400 000 km unna jorda. Bruk grafen til å finne ut hvor lang tid raketten brukte på turen til månen»
> (Hjardar & Pedersen, 2020a, s. 272).

I dette kapittelet skal elevene lære å tegne grafer i det digitale hjelpemiddelet GeoGebra og det er presisert i delkapittelets innledning. Likevel er det ingenting i denne oppgavens formulering som indikerer at det skal brukes digital graftegner. Om man tar oppgaven ut av kontekst kan man tenke seg at elever som ikke er kjent med digitale hjelpemidler ville startet å tegne for hånd. Dette er i og for seg ikke feil, men når hensikten til oppgaven er å løse den i GeoGebra kan «vinningen gå opp i spinningen» med tanke på læringen om man ikke bruker og blir kjent med det digitale hjelpemiddelet som er ment for formålet. Det samme gjelder for formuleringen av de tre andre oppgavene som hører til delkapittelet.

Selv om oppgaven i og for seg ikke er helt tydelig i formuleringen av løsningsmetode, er det likevel en oppgave som har potensiale til å utfordre elevene innenfor både *representasjonskompetanse* og *symbolbruk- og formalismekompetanse*. I denne oppgaven ligger det et potensiale om at elevene får bryne seg på alle de fire representasjonene Janvier (1978) organiserte i representasjonstabellen som er sentrale for funksjonslære. I oppgave a) skal elevene konvertere matematiske verdier fra en situasjon til et funksjonsuttrykk, og i b) skal elevene tegne en graf ut ifra funksjonsuttrykket. I oppgave c) og d) skal elevene lese av grafen de har tegnet for å finne ulike verdier. På denne måten legger oppgaven til rette for et potensiale til at elevene, selv om det er en konvertering av gangen, får øvet på ulike overganger i funksjonslære. I tillegg legger oppgaven opp til et potensiale for erfaring innenfor hvilke formaliteter og symboler som tilhører det ulike representasjonene.

4.5.2 Oppgave 4 e) Campus Matte 8, kapittel 6.4

Denne oppgaven tilhører kapittel 6.4 «Tegne grafer i GeoGebra». I dette kapittelet skal elevene få en innføring i den digitale graftegneren GeoGebra hvor det i hovedsak er lagt opp til at elevene skal benytte seg av dette programmet i løsningen av oppgaven.

Figur 4.5: oppgave 4 e) i kapittel 6.4 fra Campus Matte 8 (Thue et al., 2020, kapittel 6.4) der kapittelet dreier seg om den digitale graftegneren GeoGebra, men likevel anbefaler å benytte «blyant og papir» som hjelpemidler i løsningen av oppgaven.

I denne oppgaveformuleringen er det muligheter for at det oppstår misforståelser. Oppgaveteksten er klar og tydelig «Skriv ... inn i GeoGebra», men deretter er det potensiale for misforståelser i oppgaveløsningen. Denne muligheten for misforståelse bunner i at anbefalte hjelpemidler oppgis til å være papir og blyant, mens oppgaveteksten ber elevene om å benytte seg av GeoGebra. Dette skaper en mulighet for at elevene benytter seg av et analogt hjelpemiddel for å løse oppgaven selv om oppgaveteksten ber elevene om å løse oppgaven digitalt. Det samme gjelder for alternativene elevene har for å svare på oppgaven. Her legger oppgaven opp til at elevene kan løse oppgaven på ulike måter, noe som er selvmotsigende med tanke på oppgavetekstens formulering. Til tross for et potensiale for misforståelser omkring løsnings- og innleveringsmetode vil elevene likevel ha muligheten til å erverve kunnskap om hvordan papir og blyant eller GeoGebra virker som hjelpemiddel på problemet. Begge løsningsmetodene har potensiale til å gi elevene innsikt i *hjelpemiddelkompetanse* innenfor funksjonslære. Det være seg enten ved hjelp av analogt eller digitalt hjelpemiddel.

En siste trend som dukket opp innenfor *hjelpemiddelkompetanse* i datainnsamlingen var læreverkenes måte å oppfordre til anbefalte hjelpemidler i løsningen av funksjonslæreoppgaver. Trenden var gjennomgående i læreverket Matematikk 8 og med noen unntak i Campus Matte 8. I Matematikk 8 ble det utelukkende anbefalt å benytte seg av digital graftegner i de tilfellene dette var aktuelt for elevene. I Campus Matte 8 ble det i oppgavene som hørte til i kapittelet omkring digital graftegner likevel anbefalt å løse oppgavene ved hjelp av papir og blyant. Campus Matte 8 begrunner denne typen anbefaling av hjelpemidler med at selv om læreverket er digitalt, ønsker de å unngå at elevene mister sentrale poeng i regneprosessen ved å anbefale elevene å ikke løse oppgaven analogt. Det var 5 oppgaver som oppfordret til bruk av *alle* ***eller*** *digital graftegner (GeoGebra)* som hjelpemidler. Dette utgjør 9 % av helheten med 54 oppgaver. 4 av oppgavene oppfordret i tillegg til bruk av kalkulator. I sin helhet er disse oppgavene med på å danne et potensiale for at elevene kan erverve både *kommunikasjonskompetanse, symbol og formalismekompetanse, hjelpemiddelkompetanse* og *representasjonskompetanse*. I Matematikk 8 var det 10 oppgaver som eksplisitt oppfordret elevene til å benytte digital graftegner i løsningen av oppgaver, noe som utgjør 14 % av totalt 70 oppgaver i læreverket. Lærerveilederen tilhørende grunnboken i Matematikk 8 oppfordret til at alle oppgaven innenfor temaet «koordinater som danner en graf» egner seg godt til løsning ved hjelp av digital graftegner. Dette er i og for seg positivt, men læreverket legger oppgaven hos læreren for å få læreren til å initiere denne aktiviteten. I noen tilfeller oppfordrer lærerveilederen til å initiere til bruk av digital graftegner i oppgaver der elevene skal diskutere eksempler i teorigjennomgangen.

4.6 Kommunikasjonskompetanse

Som nevnt i kapittel 2.7.4 dreier *kommunikasjonskompetanse* om at elevene evner å uttrykke seg matematisk på ulike måter, både teknisk og teoretisk. Den matematiske kommunikasjonen kan foregå enten skriftlig, muntlig eller visuelt, og i møte med ulike mottakere samt på ulike kompleksitetsnivåer (Niss & Jensen, 2002). Sari, Kusnansi og Suhendra (2017) presenterer at *kommunikasjonskompetanse* i matematikk er en sentral del av matematisk kompetanse, og begrunner dette med at kommunikasjon i matematikk ikke bare består av å tenke, finne mønstre eller løse problemer. De mener også at *kommunikasjonskompetanse* er et verktøy for at elever skal ha mulighet til å kunne kommunisere ulike ideer på en tydelig, presis og helhetlig måte.

På samme måte som med *symbol- og formalismekompetanse* var det utfordrende å studere *kommunikasjonskompetanse* i de nummererte oppgavene i læreverkene. Dette fordi alle de 124 oppgavene på en eller annen måte inneholder muligheter for at elevene kan erverve kunnskap om hvordan ulike representasjonsformer innenfor funksjonslære kan kommuniseres. Alle oppgavene som er presentert i den helhetlige analysen i denne oppgaven inneholder potensial for at elevene lærer å kommunisere matematikk. Oppgavene er alle formidlet i tekstformat, og løsningene formuleres enten på papir eller digitalt i en digital graftegner. I denne oppgaven betyr det de tre allerede presenterte matematiske kompetansene *representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse* og *hjelpemiddelkompetanse*. *Kommunikasjonskompetanse* kan inkluderes i *representasjonskompetanse* i funksjonslære ved at elevene får mulighet til å arbeide med og presentere ulike matematiske problemer ved hjelp av Janviers (1978) representasjoner. *Hjelpemiddelkompetanse* har potensiale til å bygge opp under elevenes evne til å kommunisere matematiske problemstillinger både teknisk, skriftlig og visuelt eksempelvis gjennom den digitale graftegneren GeoGebra. Hjelpemidler som papir og blyant har potensiale til å lære elevene å kommunisere matematikk ved hjelp av symboler formaliteter til en potensiell leser. I slike tilfeller er det hensiktsmessig at elevene har evnen til å kommunisere matematiske tankeprosesser og ideer for at en leser skal kunne følge elevenes resonnement og vei mot oppgavens ende. *Kommunikasjonskompetanse* innenfor *symbol- og formalismekompetanse* vil kunne implementeres i situasjoner der elevene skal uttrykke seg enten skriftlig, muntlig eller visuelt ved hjelp av symboler tilhørende det matematiske temaet funksjonslære. Det er også en mulighet for at elevene øver på kommunikasjon i arbeid med ulike formaliteter og «spilleregler» i ulike typer matematikkoppgaver.

I gjennomgangen av de nummererte oppgavene i læreverkene var det likevel en kontinuerlig/uavbrutt trend som er verdt å diskutere med tanke på kommunikasjonskompetanse i funksjonslære. Som tidligere nevnt (kapittel 2.2) er et sentralt poeng i sosiokulturell læringsteori at læring er mediert. Oppsummert handler dette om at «kunnskap og innhold blir formulert gjennom sosial interaksjon og gjennom de gjenstandene vi bruker» (Gilje et al., 2016). Dette vil si at det ikke bare er læreverkene som spiller inn på elevenes potensiale for læring, men også læreren, den matematiske kunnskapen og de andre elevene (figur 2.2). I datainnsamlingen for gjennomgangen av læreverkene kommer det frem at ikke en eneste nummerert oppgave oppfordrer til samarbeid. Det kan synes som om at oppgavene i lærebøkene alene ikke klarer å tilfredsstille et av kravene fra læreplanen for matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 30-39). Kjerneelementet handler om «representasjon og argumentasjon», og dette kjerneelementet legges det frem forventninger til at læreverkene skal oppfordre elevene til å bruke matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnement. Det kan synes fornuftig at samtale i dette tilfellet inkluderer mer enn en person, slik at det opprettes en dialog der elevene kan argumentere for sin forståelse og resonnere seg frem til ulike løsninger i fellesskap. Viktigheten av fellesskap kommer også frem gjennom Greeno og Hall (1997) sin forskning. Greeno og Hall understreker at representasjoner må brukes i ulike situasjoner for at læringspotensialet skal kunne utnyttes maksimalt. Pape og Tchoshanov (2001) presenterer at når målet med instruksjonen er å lære å representere matematiske begreper eller løse problemer som involverer matematiske representasjoner, må elevene gis muligheten til å samtale med hverandre og læreren.

Læreverket Matematikk 8 med grunnbok og oppgavebok inneholder ingen oppgaver som oppfordrer til samarbeid eller diskusjon. Lærerveilederen oppfordrer derimot til at 7 av de nummererte oppgavene i funksjonslærekapittelet passer til samarbeid eller diskusjon i klassen, men her er det ene og alene opp til læreren å iverksette samarbeid. Det er dog lagt opp til undringsoppgaver i grunnboken som er symbolisert med ? og disse 11 oppgavene befinner seg vilkårlig spredt i kapittelet. Det er ingen lærerveileder for oppgavesamlingen eller for CampusMatte8. Dette medfører at dersom læreren skal oppfordre til samarbeid ved arbeid i disse verkene vil læreren måtte sette seg inn i oppgavene, og identifisere hvilke oppgaver som egner seg for samarbeid.

Et poeng det er verdt å merke seg er at oppgavene ikke eksplisitt oppfordrer elevene til å samarbeide med andre for å finne løsninger. I en slik situasjon vil det være et potensiale for lærere å sette seg inn i oppgavene læreverkene presenterer, og deretter ta initiativ til å sette i gang samarbeid. Det blir i slike tilfeller tydelig hvordan lærer, elev og matematisk innhold står i relasjon til hverandre og læreverkene. Selv om oppgavene oppfordrer til kommunikasjon gjennom samarbeid betyr ikke dette at muligheten for andre typer *kommunikasjonskompetanser* ikke er til stedet.

4.7 Oppsummerende analyse

I løpet av dette analysekapittelet har det kommet frem en del sentrale poeng som jeg ønsker å oppsummere før disse poengene knyttes videre opp mot forskningsspørsmålene i kapittel 5. *Representasjonskompetanse* er fremtredende i store deler av oppgavene og det legges opp til arbeide med denne kompetansen gjennom flere ulike oppgavetyper slik som oppgaver uten nivådeling, oppgaver med nivådeling og flervalgsoppgaver. I læreverket Matematikk 8 er det 38 oppgaver som stiller **like** krav til *representasjonskompetanse* i oppgavens tre nivåer der oppgavene er nivådelt og bare 7 oppgaver som stiller **ulike** krav til *representasjonskompetanse*. I Campus Matte er det 35 av oppgavene som inneholder ulik nivådifferensiering i deloppgavene. Innenfor disse 35 oppgavene er det 26 av oppgavene som stiller samme krav til *representasjonskompetanse* i de tre nivåene, mens 9 oppgaver krever ulik kunnskap innenfor *representasjonskompetanse*. Nivådelingen kan synes som om baserer seg på å bytte ut tallene og det blir også benyttet mer ukjente enheter for elevene oppover i nivåene. *Representasjonskompetanse* er også fremtredende i flervalgsoppgaver, men disse forekommer kun i det digitale læreverket Campus Matte 8 og utgjør omtrent en tredjedel av oppgavene i kapittelet om funksjonslære. Disse oppgavene havner ofte innenfor nivå 1 i Blooms taksonomi da elevene får oppgitt svaralternativer og dette danner en mulighet for at elevene benytter seg av «prøv-og-feil» metoden eller gjetter. Slike oppgaver kan også betraktes som lavere ordens oppgaver som også stiller lave kognitive krav til elevene da mange av oppgavene legger opp til at elevene skal gjengi hva den foregående teorivideoen gjennomgikk.

Symbol- og formalismekompetanse viste seg vanskelig å undersøke da denne kompetansen synes som å være en del av alle oppgavene innenfor funksjonslære i begge læreverkene. Trenden som derimot pekte seg ut var mangelen på oppgaveformuleringens bruk av ordene *hvordan* og *hvorfor*. Tre deloppgaver av totalt 381 utfordret derimot elevene til å benytte seg av tidligere matematisk kunnskap og forklare hvorfor ulike matematiske fenomen var mulig/ikke mulig å gjennomføre.

I begge læreverkene er det store muligheter for å øve på *hjelpemiddelkompetanse* både analogt og digitalt. Det som derimot var verdt å merke seg var oppgaveformuleringen og de anbefalte hjelpemidlenes uoverensstemmelse. Her viste det seg i flere tilfeller at det var muligheter for at det oppstår misforståelser i valg av løsningsmåte med tanke på hjelpemidler i motsetning til hvilket hjelpemiddel som opprinnelig var ment for oppgaven.

Kommunikasjonskompetanse var på samme måte som *symbol-og formalismekompetanse* vanskelig å undersøke. Dette fordi alle de tre overnevnte kompetansene har potensiale for å danne elevenes *kommunikasjonskompetanse* i matematikk på ulike måter. *Representasjonskompetanse* har potensiale til å lære elevene å kommunisere samme matematiske problemstilling på ulike måter. *Symbol- og formalismekompetanse* har mulighet for å hjelpe elevene å kommunisere matematikken ved hjelp av de symbolene og formalitetene som tilhører eksempelvis de ulike overgangene mellom representasjonsformene. I tillegg har elevene mulighet for å kommunisere matematikk gjennom å kjenne til de ulike «spillereglene» som hører til de ulike matematiske formalitetene. Gjennom å ha kunnskaper innenfor *hjelpemiddelkompetanse* vil elevene kunne ha mulighet for å vurdere hvilke hjelpemidler som er egent for å løse ulike matematiske problemstillinger, samt kunnskap om fordeler og ulemper med ulike hjelpemidler.

5 Oppsummering av analysen i lys av forskningsspørsmålene

I dette kapittelet oppsummeres funnene fra undersøkelsens datamateriale og analysekapittel knyttet til forskningsspørsmålene:

1. *Hvordan legger to ulike matematiske læreverk til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer innenfor funksjonslære?*
2. *På hvilken måte har elevene potensial til å tilegne seg kunnskap innenfor matematiske kompetanser gjennom arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære?*

Funnene knyttet til forskningsspørsmålene vil også diskuteres i lys av funnenes betydning for videre forskning på læreverk. Som nevnt innledningsvis (kapittel 1.6) har forskningens fokus vært å *forstå* hvilke matematiske kompetanser og overganger mellom representasjonsformer oppgavene i læreverkene har potensiale til å lære bort, *beskrive* i hvilke typer oppgaver disse kompetansene og overgangene forekommer, og i etterkant *tolke* hva utfallet av slike oppgaver kan bety for elevene.

Med tanke på at denne oppgaven kun undersøker to læreverk blir det ikke mulig å generalisere funnene til å gjelde for alle læreverk. Likevel vil funnene kunne være interessante for videre forskning innenfor feltet og kanskje også for videreutvikling av læreverk i fremtiden. Under følger en diskusjon av funnene i analysen koblet opp mot forskningsspørsmålene for oppgaven.

5.1 *Hvordan legger to ulike matematiske læreverk til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer innenfor funksjonslære?*

Dette forskningsspørsmålet handler i hovedsak om den matematiske kompetansen *representasjonskompetanse* og derfor vil dette kapittelet diskutere både forskningsspørsmål en og to i relasjon med *representasjonskompetanse*. Denne kompetansen utelates derfor fra kapittel 5.2.

Gjennom analysen av de to læreverkene Matematikk 8 og Campus Matte 8, har det kommet frem at begge læreverkenes nummererte oppgaver inneholder potensiale for at elevene skal lære ulike overganger mellom representasjonene *situasjon*, *verditabell*, *graf* og *funksjonsuttrykk*. *Representasjonskompetanse* er fremtredende i store deler av oppgavene og det legges opp til arbeide med denne kompetansen gjennom flere ulike oppgavetyper slik som oppgaver uten nivådeling, oppgaver med nivådeling og flervalgsoppgaver. Generelt for de to læreverkene er at deloppgavene legger opp til at elevene arbeider med en overgang av gangen mellom representasjonsformene. Likevel finnes det eksempler på at elever må arbeide gjennom flere overganger for å komme frem til løsningen i oppgaven, slik som i oppgave 9 fra kapittel 6.5 i Campus Matte 8 (kapittel 4.2.2).

I tillegg legger begge læreverkene opp til nivådeling av de nummererte oppgavene. I nivådelingen representerer nivå 1 (Matematikk 8) eller grønn løype (Campus Matte 8) oppgaver læreverkene betegner som enklest, nivå 2 (Matematikk 8) eller rød løype (Campus Matte 8) som læreverkene betegner som litt mer utfordrende, og nivå 3 (Matematikk 8) eller sort løype (Campus Matte 8) som læreverkene betegner som mest utfordrende. I læreverket Matematikk 8 er det 38 av 45 nivådelte oppgaver som stiller **like** krav til *representasjonskompetanse* i alle oppgavens tre nivåer. Det vil si at elevene vil ha mulighet til å få det samme matematiske utbyttet med tanke på *representasjonskompetanse* ved å arbeide seg gjennom ett tilfeldig nivå av de tre nivåene i oppgavene i læreverket Matematikk 8. 7 oppgaver av 45 som stiller **ulike** krav til *representasjonskompetanse*. I disse oppgavene vil ikke elevene ha mulighet til å tilegne seg det samme matematiske utbyttet med tanke på representasjonskompetanse ved å velge ett tilfeldig nivå av oppgavens tre nivåer. I Campus Matte er det 35 av 54 oppgaver som inneholder ulik nivådifferensiering i deloppgavene. Innenfor disse 35 oppgavene er det 26 av oppgavene som stiller samme krav til *representasjonskompetanse* i de tre nivåene, mens 9 oppgaver krever ulik kunnskap innenfor *representasjonskompetanse*. Innenfor disse nivåene viste det seg at differensieringen i store deler av oppgavene ikke stiller ulike krav til representasjonskompetanse, men at differensieringen berører andre komponenter i oppgavene. På denne måten steg også potensielt de kognitive kravene i oppgavene med nivåøkingen, men ikke ved at kravet til elevers *representasjonskompetanse* økte.

I Campus Matte 8 ble det benyttet flervalgsoppgaver i en tredjedel av deloppgavene innenfor kapittelet om funksjonslære. Disse oppgavene kan kategoriseres innenfor Blooms taksonomi og stilte ulike kognitive krav til elevene. Det finnes eksempler som tilhører nivå 1 av taksonomien i oppgavene, og det finnes oppgaver som hører til høyere nivåer i taksonomien. Dette gjør at elevenes kognitive egenskaper i matematikk har potensial til å bli utfordret ved å arbeide med slike flervalgsoppgaver. Det viser seg også at noe forskning (Herman, 1994; O'Neil Jr & Brown, 1998) poengterer at en risikofaktor ved flervalgsoppgaver er at elever benytter seg av gjetting eller «prøv-og-feil» metoden. Flervalgsoppgaver har også en mulighet for å virke som bekreftende elementer i elever arbeidsprosess da disse kan geleide elevene inn på rett spor.

Oppsummerende legger begge læreverkene til rette for elevers læring av overganger mellom representasjonsformer gjennom å benytte ulik type oppgaveformulering og ved å utfordre elevene med ulike kognitive krav som stilles til oppgavene. Dette gjøres gjennom oppgaver med nivådeling, flervalgsoppgaver og oppgaver uten nivådeling.

5.2 På hvilken måte har elevene potensial til å tilegne seg kunnskap innenfor matematiske kompetanser gjennom arbeid med oppgaver innenfor funksjonslære?

Som nevnt i kapittel 2.7 har jeg valgt å studere fire matematiske kompetanser utformet av Niss og Jensen (2002) for å belyse forskningsspørsmål nummer to. Disse matematiske kompetansene er analysert i kapittel 4 og er *representasjonskompetanse*, *symbol- og formalismekompetanse*, *hjelpemiddelkompetanse* og *kommunikasjonskompetanse*. Alle fire kompetansene tilhører klassifiseringen *Å kunne håndtere matematisk språk og redskaper*. Alle de til sammen 124 oppgavene og 381 deloppgavene berørte *representasjonskompetanse* på en eller annen måte. *Symbol- og formalismekompetanse* og *kommunikasjonskompetanse* var de vanskeligste kompetansene å studere, mens *hjelpemiddelkompetanse* var mer eksplisitt uttrykt i oppgaveformuleringene. Som nevnt utelates *representasjonskompetanse* fra dette forskningsspørsmålet da disse resultatene er inkludert i kapittel 5.1.

Den tydeligste trenden innenfor *symbol- og formalismekompetanse* var at store deler av oppgavene var med «kommanderende» ordlyd og stilte lave kognitive krav til elevene. Oppgave 4.131 fra nivå 3 i oppgaveboken til Matematikk 8 (kapittel 4.4.2) er derimot et eksempel på det motsatte. Der ber deloppgave c) elevene om å forklare en formalitet innenfor funksjonslære. Denne oppgaven har et potensiale for å utfordre elevene til å klare å se en matematisk sammenheng ut i fra den kunnskapen elevene skal ha ervervet gjennom ulike matematiske temaer gjennom skoleløpet, men også gjennom arbeid med funksjonslære. Selv om trenden med manglende bruk av ordene *hvordan* og *hvorfor* i læreverkenes oppgaveformuleringer pekte seg ut kan det likevel synes som om at elever har mulighet til å erverve kunnskap om ulike symboler og formaliteter gjennom arbeid med nummererte oppgaver innenfor funksjonslære i begge læreverkene. Store deler av oppgavene er utformet med å stille lave kognitive krav til elevene og med en «kommanderende» ordlyd. Jopperud (2015) kom i sin masteroppgave frem til at ulike læreverk for 8.trinn hadde en tendens til å vektlegge instrumentell matematisk forståelse innenfor emnet algebra. Det kom i tillegg frem at læreren ble tillagt mye ansvar for at elevene skulle få en mer relasjonell matematikkforståelse innenfor algebra, og at lærerens bruk av læreverkene spilte en stor rolle for elevers potensielle erverving av instrumentell eller relasjonell matematikkforståelse. Dette kan synes som de to læreverkene i denne studien også legger noe av ansvaret for elevers læring over på læreren. Dette kommer eksempelvis frem i at læreren kan være med på å berike elevenes læringsprosess ved å introdusere elevene for tabell 3.1 som er presentert i lærerveilederen og regneoperasjonene for de ulike overgangene mellom representasjonsformene i funksjonslære. Funnene innenfor *symbol- og formalismekompetanse* understreker Love og Pimm (1996, s. 398) sitt funn der «lærere blir sett på som formidlere av teksten [i læreboka] og på den måten hjelper lærere elever med å lære ved å gi beskrivelse og forklaring av innholdet i teksten.» Men i og med at elevene også skal arbeide med funksjonslære på 10.trinn vil det være potensiale for at læreverkene tar opp igjen tråden fra 8.trinn. Dette kan gjøres ved at læreverkene legger opp til at oppgavene stiller høyere kognitive krav til elevene for at elevene skal kunne utfordres til å se matematiske sammenhenger og helheter. Dette kunne vært en interessant videreutvikling av denne studien for å undersøke i hvilken grad læreverkene bygger hverandre opp og henger sammen over flere klassetrinn.

Den tydeligste trenden innenfor *hjelpemiddelkompetanse* var læreverkenes tvetydige anbefaling av hjelpemidler i oppgaver som handlet om den digitale graftegneren GeoGebra. Matematikk 8 grunnbok og oppgavebok oppfordret til å tegne grafer og lese av i 10 av de 70 oppgavene, mens lærerveilederen oppfordret til å benytte GeoGebra i 13 oppgaver. Campus Matte 8 oppfordret på generell basis at elevene skulle benytte seg av blyant og papir i oppgaveløsningen, men oppfordret læreren til å løse egnede oppgaver med elevene i fellesskap ved et senere tidspunkt. 5 oppgaver av 54 oppfordret eksplisitt til bruk av GeoGebra i Campus Matte 8. I disse oppgaveformuleringene viste det seg i flere tilfeller at det var muligheter for misforståelser i valg av løsningsmåte med tanke på hjelpemidler i motsetning til hvilket hjelpemiddel som opprinnelig var ment for oppgaven. I slike tilfeller der misforståelse av oppgaveteksten var en mulighet ble de tre komponentene i det didaktiske tetraederet *elev, lærer* og *matematisk innhold* spesielt tydelig i relasjon med læreverket. Slik som Elevene kan i arbeid med matematiske hjelpemidler behøve rettledning da hjelp fra en lærer har potensiale til å hjelpe med forståelsen av det matematiske innholdet i læreverket og den digitale graftegneren.

Gjennom datainnsamlingen og analysen ble det tydelig at *kommunikasjonskompetanse* innenfor matematikk inkluderte alle de tre andre matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) innenfor klassifiseringen *Å kunne håndtere matematisk språk og redskaper*.

Kommunikasjonskompetanse var på samme måte som *symbol-og formalismekompetanse* vanskelig å undersøke. Dette fordi alle de tre overnevnte kompetansene har potensiale for å være med på å danne elevenes *kommunikasjonskompetanse* i matematikk på ulike måter. *Representasjonskompetanse* har potensiale til å lære elevene å kommunisere samme matematiske problemstilling på ulike måter. *Symbol- og formalismekompetanse* har mulighet for å hjelpe elevene å kommunisere matematikken ved hjelp av de symbolene og formalitetene som tilhører eksempelvis de ulike overgangene mellom representasjonsformene. I tillegg har elevene mulighet for å kommunisere matematikk gjennom å kjenne til de ulike «spillereglene» som hører til de ulike matematiske formalitetene. Gjennom å ha kunnskaper innenfor *hjelpemiddelkompetanse* vil elevene kunne ha mulighet for å vurdere hvilke hjelpemidler som er egent for å løse ulike matematiske problemstillinger, samt kunnskap om fordeler og ulemper med ulike hjelpemidler. Derfor vil alle oppgavene inkludert deloppgavene i læreverkene være med på å danne en mulighet for at elevene erverver kunnskap om *kommunikasjonskompetanse*.

Den tydeligste trenden som dukket opp under datainnsamlingen og analysen av *kommunikasjonskompetanse* var at ingen av oppgavene eksplisitt oppfordret elevene til å samarbeide. Dette ble det oppfordret til i 13 tilfeller i lærerveilederen til Matematikk 8 grunnbok, men i de resterende delene av læreverkene manglet det en slik oppfordring. Skriftlig kommunikasjonskompetanse er det likevel et potensiale for at elevene erverver ved å arbeide med alle de 381 deloppgavene i læreverkene. Som tidligere nevnt (kapittel 2.2) er et sentralt poeng i sosiokulturell læringsteori at læring er mediert. Oppsummert handler dette om at «kunnskap og innhold blir formulert gjennom sosial interaksjon og gjennom de gjenstandene vi bruker» (Gilje et al., 2016). Flere forskere (Greeno & Hall, 1997; Pape & Tchoshanov, 2001) understreker viktigheten av å benytte de ulike matematiske representasjonene i ulike situasjoner og å kunne uttrykke disse både muntlig og skriftlig. Det kan synes som om at oppgavene i lærebøkene alene ikke klarer å tilfredsstille et av kravene fra læreplanen for matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 30-39). Kjerneelementet handler om «representasjon og argumentasjon», og dette kjerneelementet legges det frem forventninger til at læreverkene skal bidra til å oppfordre elevene til å bruke matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnement.

6 Oppsummering og avslutning

I løpet av denne oppgaven har jeg sammenliknet to læreverk med tanke på oppgaver innenfor det matematiske emnet funksjonslære. Jeg har i lys av forskningsspørsmålene sett på læreverkenes tilretteleggelse for elevers læring av overganger mellom representasjoner innenfor funksjonslære, samt undersøkt på hvilken måte elevene har potensiale til å tilegne seg kunnskap i fire matematiske kompetanser gjennom arbeid med nummererte oppgaver i to læreverk. Jeg har undersøkt forskningsspørsmålene i lys av en kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ dokument- og lærebokanalyse og har analysert datamaterialet opp mot teori og tidligere forskning innenfor funksjonslære.

Undersøkelsen har vist at det ikke er signifikante forskjeller mellom læreverkene. Begge læreverkene legger til rette for både elevers tilegning av kunnskap rundt overganger mellom representasjonsformer, og det er i tillegg et potensial for at elevene tilegner seg kunnskap knyttet til de fire ulike matematiske kompetansene til Niss og Jensen (2002) gjennom arbeidet med de nummererte oppgavene i læreverkene. Dette understreker Resvoll (2014, s. 12) sitt utsagn om at «studiene [av lærebøker] viser viktigheten av å analysere lærebøker med hensyn på innhold og et matematisk tema. Hvis vi skal etablere en felles forståelse og felles prinsipper for matematikk, må også elevene ha samme utgangspunkt og muligheter.» Elevene får de samme mulighetene til å øve kompetansene sine innenfor både *representasjonskompetanse, symbol- og formalismekompetanse* og *kommunikasjonskompetanse* ved å arbeide med de nummererte oppgavene i begge læreverkene. Den største forskjellen mellom læreverkene er likevel uoverensstemmelsen med tanke på anbefaling av hjelpemidler vedrørende den digitale graftegneren GeoGebra. Her kan det synes som om det digitale læreverket Campus Matte 8 i de aller fleste tilfeller anbefaler elevene å benytte «blyant og papir» i oppgaveløsingen og overlater arbeidet med den digitale graftegneren til læreren. På den andre siden kan det synes som det papirbaserte læreverket Matematikk 8 anbefaler å benytte den digitale graftegneren GeoGebra i oppgaveløsningen. Dette resultatet strider mot min egen forutanelse angående læreverkene da jeg personlig hadde dannet meg en forestilling om at resultatet skulle være motsatt. I videre arbeid innenfor dette feltet ville det vært interessant å studere om det fantes en mulighet for å inkludere en digital løsning eller link til GeoGebra i oppgaveformuleringen til Campus Matte 8, slik at elevene og lærerne kunne løse oppgavene direkte i læreverket uten å måtte forholde seg til et sekundært program.

I tillegg til uoverensstemmelsen med tanke på anbefalte hjelpemidler og tenkte hjelpemidler for oppgaver, er poenget som handler om manglende oppfordring til samarbeid i tilknytning til muntlig *kommunikasjonskompetanse* verdt å merke seg, spesielt for lærere. Å være klar over at de nummererte oppgavene i læreverkene alene ikke klarer å tilfredsstille et av kravene fra læreplanen for matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 30-39) vil kunne gi lærere en mulighet for å legge opp undervisningen med hensyn til nettopp dette faktum. Å vite at å kunne oppfylle kjerneelementet som handler om «representasjon og argumentasjon» er avhengig av flere komponenter enn bare læreverkene vil være verdifullt for lærerne i form av muligheten dette gir i utformingen av planlegging, gjennomføring og vurdering i matematikk. I dette tilfellet kunne det vært interessant å studere flere læreverk for å se om mangelen på oppfordring til samarbeid er en trend som går igjen flere plasser, eller om dette er tilfeldig for nettopp denne studiens læreverk. På en annen side ville det også vært interessant å studere hvordan læreverkene faktisk blir brukt i en undervisningssituasjon. I en slik studie vil man for alvor kunne utforske hvordan samspillet mellom komponentene *lærer, elev, matematisk innhold* og *læreverk* i det didaktiske tetraederet er.

Til tross for at denne studien kun undersøkte to læreverk har resultatene likevel vist at det finnes tydelige trender felles for begge læreverkene innenfor funksjonslære. Likevel danner ikke to læreverk grunnlag for å kunne generalisere funnene til å gjelde generelt for lærebøker innenfor funksjonslære, men det kunne derfor vært interessant å studere flere læreverk innenfor det samme matematiske temaet og klassetrinnet. Det kan også tenkes at trendene som ble funnet i emnet funksjonslære gikk igjen i andre matematiske temaer i de respektive læreverkene, men dette ville kreve mye tid og arbeid, noe det ikke var tid til i denne masterstudien, men som kunne egnet seg som eksempelvis en doktorgrad.

7 Litteraturliste

Ainsworth, S., Bibby, P. & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(1), 25-61.

Alkhateeb, M. A. (2019). The Language Used in the 8th Grade Mathematics Textbook. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(7), em1719.

Anthony, G. & Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics* International Academy of Education Belley, France.

Ball, D. L. & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational researcher, 25*(9), 6-14.

Bell, A. & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the learning of mathematics, 2*(1), 34-42.

Botten, G. (2016). *Matematikk med mening : mening for alle*. Bergen: Caspar forl.

Bowen, G. A. (2009). Document analysis as a qualitative research method. *Qualitative research journal, 9*(2), 27-40.

Briseid, L. G. (2006). *Tilpasset opplæring og flerfaglig samarbeid: fra lov til praksis* Høyskoleforl.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction* Harvard University Press.

Campus Inkrement as. (2018). Om Campus Inkrement. Hentet fra https://campus.inkrement.no/Home/About

Campus Inkrement AS. (2020). Campus Matte 8-10. Hentet fra https://campus.inkrement.no/Home/CampusMatte_8_10

Cappelendamm. (s.a.). Matematikk 8-10 fra Cappelen Damm. Hentet 03.05.21 fra https://www.cappelendammundervisning.no/verk/Matematikk%208-10%20fra%20Cappelen%20Damm-153429#omtale

Christoffersen, L. & Johannesen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Chávez-López, Ó. (2003). *From the textbook to the enacted curriculum: Textbook use in the middle school mathematics classroom* University of Missouri--Columbia.

Council, N. R. (1996). *National science education standards* National Academies Press.

Dalland, O. (2007). *Metode og oppgaveskriving for studenter* (4. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The concept of function. *Aspects of epistemology and*.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Enge, O. & Valenta, A. (2013). Varierte representasjoner. *Tangenten, 1*, 8-12.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 105-121.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM, 45*(5), 633-646.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., … Granum, K. (2016). Med ARK&APP. *Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer. Sluttrapport. Universitetet i Oslo*.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Goldin, G. A. & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning, 397*.

Greeno, J. G. & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367.

Gustavsen, T. S., Hinna, K. R. C., Borge, I. C. & Andersen, P. S. (2014). *QED 5-10: matematikk for grunnskoleutdanningen, bind 2*. Oslo: Cappelen Damm.

Haggarty, L. & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British educational research journal*, *28*(4), 567-590.

Haladyna, T. M. (2004). *Developing and validating multiple-choice test items* Routledge.

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Bergen: Caspar Forlag AS.

Hana, G. M. & Hansen, R. (2015). *Matematiske horisonter 1*. Bergen: Caspar Forlag.

Herman, J. L. (1994). A First Look: Are Claims for Alternative Assessment Holding Up? Project 3.2: State Accountability Models in Action.

Hinna, K. R. C., Rinvold, R. A. & Gustavsen, T. S. (2011). *QED 5-10: Matematikk for grunnskolelærerutdanningen. Bind 1* (1. utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2020a). *Matematikk 8 fra Cappelen Damm - Lærerens bok*. Oslo: Cappelen Damm AS.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2020b). *Matematikk 8 fra Cappelen Damm- oppgavebok*. Oslo: Cappelen Damm AS.

Huinker, D. (2015). Representational competence: a renewed focus for classroom practice in mathematics. *Wisconsin Teacher of Mathematics, 67*(2), 4-8.

Imsen, G. (2020). *Lærerens verden : innføring i generell didaktikk* (6. utgave. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments* Nottingham University.

Janvier, C., Girardon, C. & Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. I P. S. Wilson (Red.), *Research for the classroom: High school mathematics* (s. 79-102). Reston: VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments: Three teachers' ways to organize their mathematics lessons. *Nordic studies in mathematics education, 11*(3), 5-30.

Jopperud, R. (2015). *To læreverks presentasjon av algebra på 8. trinn En analyse og sammenligning* Universitetet i Agder; University of Agder.

Juuhl, G. K., Hontvedt, M. & Skjelbred, D. (2010). Læremiddelforsking etter LK06: eit kunnskapsoversyn.

Kang, W. & Kilpatrick, J. (1992). Didactic transposition in mathematics textbooks. *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 2-7.

Kaput, J. J. (1985). Representation and problem solving, methodological issues related to modeling. I E. A. Silver (Red.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (s. 381-398). Hillsdale: Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kathe Rasch, C., Cruz-White, I., Ramirez, N., Bay-Williams, J., Lynch, M., Roy, G. J. & Barnes, D. (2020). *Standards of the Preparation of Secondary Mathematics Teachers*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics. Hentet fra https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/NCTM_Secondary_2020_Final.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics* (National Research Council). Washington, DC.

Kunnskapsdepartementet. (2006). Forskrift til opplæringslova. §17-1. Elevens rett til læremiddel på eiga målform Hentet fra https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplanverket for kunnskapsløftet 2020 - Grunnskolen* (6. utg.). Oslo: Pedlex.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg., T. M. Anderssen & J. Rygge, Overs.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Love, E. & Pimm, D. (1996). 'This is so': A text on texts. I *International handbook of mathematics education* (s. 371-409). Springer.

Matematikksenteret. (2021). Fra læreplan til praksis. Hentet 30.04.21 fra https://www.matematikksenteret.no/læreplan-i-matematikk/fra-læreplan-til-praksis

Niss, M. & Jensen, T. H. (Red.). (2002). *Kompetencer og matematikklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikkundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag. Hentet fra http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf

Niss, M. A. & Højgaard, T. (2011). Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, A., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2015). Students´ competencies in working with functions in secondary mathematics education - empirical elimination of a competence structure model. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(3), 657-682.

NOU 2016:14. (2016). *Mer å hente - bedre læring for elever med stort læringspotensial*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/15542e6ffc5f4159ac5e47b91db91bc0/no/pdfs/nou201620160014000dddpdfs.pdf

O'Neil Jr, H. F. & Brown, R. S. (1998). Differential effects of question formats in math assessment on metacognition and affect. *Applied measurement in Education*, *11*(4), 331-351.

Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L. K., Kosheleva, O. & Sträßer, R. (2009). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. I *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (s. 133-177). Springer.

Otte, M. (1983). Textual strategies. *For the Learning of Mathematics*, *3*(3), 15-28.

Pape, S. J. & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40*(2), 118-127.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *33*(5), 158-175.

Pettersen, R. C. (2008). *Oppgaveskrivingens ABC: Veileder og førstehjelp for høgskolestudenter* (3. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Postholm, M. B. & Jacobsen, D. I. (2018). *Forskningsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Regjeringen.no. (2020, 02.04). Tilskudd til innkjøp av nye læremidler. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/tilskudd-til-innkjop-av-nye-laremidler/id2696392/

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal, 100*(4), 331-350.

Repstad, K. & Tallaksen, I. M. (2014). *Variert undervisning - mer læring. Lærerens metodebok* (2. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Resvoll, E. (2014). *Lærebøker i matematikk og læreres bruk av dem: en analyse av karakteristiske trekk ved de mest brukte lærebøkene på ungdomstrinnet og hvordan de blir brukt av tre lærere til palnlegging og gjennomføring av undervisning*.

Reys, B. J., Reys, R. E. & Chavez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership, 61*(5), 61-66.

Rezat, S. (2006a). A model of textbook use. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 409-416): Citeseer.

Rezat, S. (2006b). The structures of German mathematics textbooks. *ZDM, 38*(6), 482-487.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM, 44*(5), 641-651.

Rønning, W., Fiva, T., Henriksen, E., Krogtoft, M., Nilsen, N. O., Skogvold, A. S. & Solstad, A. G. (2008). Læreplan, læreverk og tilrettelegging for læring. *Analyse av læreplan og et utvalg læreverk i naturfag, norsk og samfunnsfag. NF-rapport, 2*.

Røsseland, M. (2005). Hva er matematisk kompetanse. *Hentet fra http://www. caspar. no/artikkel_pdf/12c_t2005-1. pdf.*

Sari, D., Kusnandi, K. & Suhendra, S. (2017). A cognitive analysis of students' mathematical communication ability on geometry. *Journal of Physics: Conference Series* (s. 012083): IOP Publishing.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G., Houang, R. T. & Wiley, D. E. (1997). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics* Springer Science & Business Media.

Schmidt, W. H., Porter, A. C., Floden, R. E., Freeman, D. J. & Schwille, J. R. (1987). Four patterns of teacher content decision-making. *Journal of Curriculum Studies, 19*(5), 439-455.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematics classroom: Reflections and constructions. I F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Red.), *The Culture of the Mathematics classroom* (s. 308-343). Cambridge: Cambridge University Press.

Seidman, I. (2006). *Interviewing as qualitative research: A guide for researchers in education and the social sciences* Teachers college press.

Sirnes, S. M. (2005). *Flervalgsoppgaver - konstruksjon og analyse*. Bergen: Fagbokforl.

Skjelbred, D., Solstad, T. & Aamotsbakken, B. (2005). *Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis* Høgskolen i Vestfold Tønsberg.

Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal, 33*(2), 455-488.

Swan, M. (1985). The language of functions and graphs. *Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham*.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken : ett sociokulturellt perspektiv*. Stockholm: Prisma.

Tall, D. (1986). Using the computer as an environment for building and testing mathematical concepts: A tribute to Richard Skemp. *Papers in Honour of Richard Skemp*, 21-36.

Thomas, M. O., Wilson, A. J., Corballis, M. C., Lim, V. K. & Yoon, C. (2010). Evidence from cognitive neuroscience for the role of graphical and algebraic representations in understanding function. *ZDM, 42*(6), 607-619.

Thue, B. O., Moldeklev, R.-A. & Røyland, O. T. (2020). Campus Matte 8. Hentet fra https://campus.inkrement.no/EducationTeacher/Subchapter/36610?chapterId=4022324

Thurén, T. (2015). *Vitenskapsteori for nybegynnere* (2. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

Utdanningsdirektoratet. (2017, 15. september). Kjerneelementer - fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgo. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/

Vaismoradi, M., Jones, J., Turunen, H. & Snelgrove, S. (2016). Theme development in qualitative content analysis and thematic analysis.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks* Springer Science & Business Media.

Vygotsky, L. S. (1980). *Mind in society: The development of higher psychological processes* Harvard university press.

Waagene, E. & Gjerustad, C. (2015). Valg og bruk av læremidler: Innledende analyser av en spørreundersøkelse til lærere.

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B. & Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *Primus*, *22*(2), 152-175.