Høgskulen på Vestlandet

Masteroppgave i læring og undervisning

MAS3-307 - masteroppgåve

Predefinert informasjon

Startdato:	08-05-2020 14:00	**Termin:**	2020 VÅR
Sluttdato:	15-05-2020 14:00	**Vurderingsform:**	Norsk 6-trinns skala (A-F)
Eksamensform:	Masteroppgave	**Studiepoeng:**	45
SIS-kode:	203 MAS3-307 1 O 2020 VÅR		
Intern sensor:	Helene Hauge		

Deltaker

Navn:	Kjartan Grønhaug Ottemo
Kandidatnr.:	307
HVL-id:	151411@hvl.no

Informasjon fra deltaker

Egenerklæring *:	Ja	**Jeg bekrefter at jeg har registrert oppgavetittelen på norsk og engelsk i StudentWeb og vet at denne vil stå på vitnemålet mitt *:**	Ja

Jeg godkjenner avtalen om publisering av masteroppgaven min *

Ja

Er masteroppgaven skrevet som del av et større forskningsprosjekt ved HVL? *

Nei

Er masteroppgaven skrevet ved bedrift/virksomhet i næringsliv eller offentlig sektor? *

Nei

Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGAVE

Problemløsning i norske eksamensoppgaver i matematikk

En studie av fremstillingen av problemløsningsoppgaver i algebra basert på en analyse av norske eksamensoppgaver fra 2009 til 2019

Problem solving in Norwegian exams in mathematics

Students' expected engagement with problem solving in algebraic tasks based on an analysis of Norwegian exams from 2009 till 2019

Kjartan Grønhaug Ottemo

Master i Læring og undervisning

Fakultet for lærerutdanning, kultur og idrett

Institutt for pedagogikk, religion og samfunnsfag

Veiledere: Jon Ingulf Medbø og Tom Rune Kongelf

Innleveringsdato: 31.05.2020

Sammendrag

Denne masteroppgaven fokuserer på matematisk problemløsning i algebraoppgaver på nasjonale eksamen. Den overordnede problemstillingen er: *I hvilken grad vektlegger nasjonale eksamener problemløsning i ulike algebraoppgaver i perioden 2009-2019?* Målet med studien er å få innsikt om intensjonene i læreplanen samsvarer med eksamensoppgavenes innhold i matematikk. Læreplanen skriver at problemløsning er en del av matematikkompetansen, og at det er viktig at elevene løser matematiske problem gjennom utforsking av kreative strategier i problemløsningen.

Utvalget består av åtte skriftlige avgangsprøver fra 2009-2019 i matematikk basert på læreplanen, Kunnskapsløftet LK06. Algebraoppgavene i utvalget analyseres og kategoriserer i eksamenssettene ved å ta i bruk rammeverket til Third International Mathematics and Science Study. TIMSS deler algebra inn i fem temaer: formel, likning, funksjon, algebraiske uttrykk og mønster. En matematisk oppgave som krever problemløsnings, er her definert som en oppgave der løsningsmetoden(e) i utgangspunktet er ukjent for problemløseren (Björkqvist, 2003). Eleven må derfor resonnere seg frem til kreative metoder i problemløsningen.

Konklusjonen var at eksamensoppgavene inneholdt en liten andel av algebraoppgaver som krever problemløsning, til tross for at problemløsning i læreplanen i matematikk er sentralt. Flesteparten av eksamensoppgavene var oppgaver som tester om eleven behersker innlærte regneregler, gjenkjenner oppskrifter på ulike formler, eller kjente fremgangsmåter, som løser oppgaven. Eksamens innhold i algebra, slik innholdet fremstår i det analyserte utvalget, samsvarer i liten grad med læreplanens vektlegging av problemløsning (som et sentralt læringsmål).

Nøkkelord: problemløsning, algebra, eksamen, læreplanen LK06 og TIMSS.

Abstract

This master thesis focuses on the assessment of mathematical problem-solving in exams for primary school during the Norwegian curriculum, Læreplanverket for Kunnskapsløftet. The research question is: To what extent is problem solving emphasised as a learning objective in the algebraic tasks in the Norwegian exams between 2009-2019? The objective of the study is to gain insight into the connection between the intentions of the curriculum and the exam tasks in mathematics.

Using the definition of algebra from the Third International Mathematics and Science Study - framework, algebra questions were identified on a sample of eight Norwegian mathematics exams for 10th grade students from 2009 to 2019. The exam questions were analysed, applying a definition of problem solving, to choose if a task needed problem solving or not. A problem-solving task is here defined as a task where the problem solver does not know how to proceed in the solution process. In order to solve a problem, the pupils must master creative reasoning.

The conclusion was that the exams contained only a small proportion of problem-solving tasks in the algebraic questions relative to the weight given to problem solving as a learning objective in the curriculum. Most of the exam tasks are tasks where the pupils know a ritual algorithm, knows a formula or a solving procedure that completely solves the task. The Norwegian exams do not seem to reflect the focus on problem solving in the curriculum.

Keywords: problem solving, algebra, exams, curriculum LK06 and TIMSS.

Forord

I denne masteroppgaven har jeg fordypet meg i hvilken grad problemløsning i algebraoppgaver gjennom de siste ti årene har blitt uttrykt i matematikkeksamenene. I tillegg har det vært interessant å gjennomgå hva læreplanene sier om algebra og problemløsning i sine verk, både i L97, LK06 og Fagfornyelsen som trer i kraft nå til høsten. Jeg sitter igjen med viktig kunnskap om utfordringer i norsk matematikkundervisning i algebra, kunnskap som jeg tror kan hjelpe meg mot målet om å utvikle meg til en dyktig lærer med bred kunnskap og kreative ideer.

Det har vært svært lærerikt å erfare og reflektere rundt forskningsprosessen. Å kode datamaterialet selv, og deretter gjennomgå dataene i flere omganger har vært omfattende, men spennende og lærerikt. Det har vært interessant å evaluere og analysere det matematiske innholdet i eksamensoppgavene. Arbeidet har gitt meg stor respekt for de omfattende forskningsprosjektene som er gjort for å få mer kunnskap på algebrafeltet både her til lands og rundt om i verden. Mitt håp er at oppgaven kan være et nyttig bidrag til denne viktige forskningen og at andre arbeider videre med dette.

Dette prosjektet har naturligvis ikke blitt gjennomført uten hjelp og støtte, og i den anledning er det mange som fortjener en takk. Jeg vil takke veilederne mine, Jon Ingulf Medbø og Tom Rune Kongelf for kyndig veiledning og inspirasjon til dette forskningsprosjektet. Jeg vil også takke forelesere og ikke minst resten av studiegjengen ved Høgskolen i Vestlandet for et fantastisk godt fellesskap. Det har vært nyttig med gode samtaler, utveksling av tips og støtte i masterperioden. Jeg vil også sende en takk til Bjørn Smestad og Aina Fossum fra forskningsstiftelsen Fafo for utveksling av litteraturtips og for å ha delt erfaringer fra sine forskningsprosjekt.

Det er med stolthet og spenning jeg avslutter masteroppgaven og studietilværelsen for denne gang, og tar steget mot en yrkeskarriere i skolen.

Til slutt kan jeg ikke unngå å nevne coronasituasjonen som snudde opp ned på tilværelsen for de fleste, også for oss som er masterstudenter i innspurten av masterperioden. Da tilgangen til fasilitetene på høyskolen ble stengt, var det flere utfordrende faktorer som påvirket studiesituasjonen. Foreldrene mine gav meg uvurderlig hjelp med tilrettelegging av hjemmekontor i Lofoten og sammen med Kaja har de også bidratt til nyttige diskusjoner og korrekturlesing. Takk for deres innsats og uvurderlig oppmuntringer!

Sogndal, 31.05 2020

Kjartan Grønhaug Ottemo

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

1.1 Algebra og problemløsing

Algebra er et emne som mange elever sliter med i ungdomsskolen og videre i sin utdanning. Grønmo og Helgesen har i 20 år holdt oversikt over forskning i skolematematikk. I en kronikk i Aftenposten skriver de at norske elever sliter med grunnleggende algebramatematikk, og at her er Norge verdensledende i «nedprioriteringer»(Grønmo & Helgesen, 2018, 4. avsnitt). Grønmo (2013) skrev også i en artikkel for tidsskriftet Bedre Skole at algebra sammen med tall er motoren i matematikken, og kritiserer den norske grunnskolen for å ikke legge opp til nok læring av basiskunnskap i algebra.

Internasjonale undersøkelser som TIMSS[1] og PISA[2], viser at Norge fortsatt presterer svakt i matematikk sammenliknet med naboland som Danmark og Finland, og uttalelsene fra Grønmo og Helgesen er i tråd med dette (Jensen m.fl., 2018; Utdanningsdirektoratet, 2016). I tillegg ser man at landene i Øst-Asia er de landene som skårer høyest på testene hos ungdomstrinnet med Singapore på første plass, hvor Norge havner på 14. plass.

Undersøkelsene er trendstudier, og man kan derfor sammenlikne hvordan elevene har prestert over tid. TIMSS-testene fra 2015 viser en fremgang i realfagene hos norske elever siden forrige TIMSS-test i 2011 (Grønmo & Onstad, 2012). Likevel er det langt fra tilfredsstillende resultater for Norge, som er blant verdens rikeste land, og som investerer mye i skole og utdanning. TIMSS måler kunnskap og ferdigheter i matematikk og naturfag på 4. og 8. trinn. Studien viser at norske ungdomselever i flere år har prestert på et lavt nivå i matematikk, særlig i algebra.

Algebra er en generalisering av regning med tall, og det er et kraftfullt verktøy for all videre læring og bruk av matematikk (Grønmo, 2013). Spesielt regnes algebra som et av de områdene i matematikken som trenger modning over tid da emnet krever at elevene lærer seg abstrakt tenkning, som er en viktig del av algebralæringen (Grønmo m.fl., 2012, s.118). Grønmo (2013) skriver at gode kunnskaper i tall og tallregning trenger alle, men en stor del av befolkningen trenger også gode grunnleggende kunnskaper i algebra. Det er det de trenger i mange videreutdanninger og profesjoner for å bli ingeniører eller økonomer, eller innen datakunnskap, naturvitenskap og matematikk. «Det har vært mange ulike tiltak og kampanjer for å rekruttere elever til realfaglige utdanninger og profesjoner i Norge, men hvis ikke skolen legger opp til å gi elevene den

[1] TIMSS er en forkortelse for Third International Mathematics and Science Study og arrangeres I regi av International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). I 2015 var det 57 land med I TIMSS

2 PISA er en forkortelse for Programme for International Student Assessement og er en internasjonal komparativ undersøkelse av skolesystemene i regi av OECD.

basiskunnskapen de trenger for å gjennomføre slike studier, er dette nesten å lure elevene» (Grønmo, 2013, 20. avsnitt). I 2008 dokumenterte NOKUT at en hovedgrunn til frafall fra ingeniørstudier var elevenes manglende basiskunnskaper i algebra i matematikk (Stymne, Nygård, Borre, Lundsgaard, & Zarrabi, 2008). I tillegg til dette meldte regjeringen i 2017 at færre elever i Norge velger fysikk og matematikk i videregående skole (Kunnskapsdepartementet, 2017). Det er altså gode grunner til at ulike sider ved skolens opplæring i algebra bør undersøkes nærmere.

Flere forskere og lærere har uttalt at matematikkundervisningen består av mye pugging av regneregler for å komme frem til et svar, og for lite undervisning i dyp matematisk forståelse (Christiansen, 2020; Ertesvåg, 2015). I læreplanen LK06 slås det klart fast i formålet til faget at «problemløysing høyrer med til den matematiske kompetansen. Utdanningsdirektoratet i 2011 referert i Storeli (2011, s.21) begrunner arbeid med problemløsning med at det utvikler elevens evne mot til å prøve utradisjonelle metoder. Likevel fins det studier i Norge som peker på at problemløsning ikke blir utrykt i stor grad i norske lærebøker, undervisning eller eksamensoppgaver. Leer (2009) fant ut at det ble gitt svært få problemløsningsoppgaver på eksamen i tiende klasse. Reinhardtsen (2019) har i sin studie av klasseromsundervisning i matematikkfaget påpekt at elever må få vanskeligere matematikkoppgaver. Forskeren er klar over at hun provoserer når hun etterlyser vanskeligere oppgaver for elever, spesielt når det gjelder oppgaver i algebraemnet som er utfordrende for mange elever å forstå. Likevel hevder Reinhardtsen at mønsteret for løsningen for oppgavene er gitt, og oppgavene er altfor enkle, kommer ikke «kraften» og poenget med algebra frem (Christiansen, 2020, 8. avsnitt). Hun innser at en endring hos lærere, fra pugging og kalkulering, til mer problemløsning, vil bli utfordrende fordi utdanningstradisjonen har hatt pugging av regler i matematikkfaget sentralt i lang tid (Christiansen, 2020, 23. avsnitt). Reinhardtsen ser derfor frem mot fagfornyelsen da hun mener at dette for alvor innfører problemløsning. Fem av de seks kjerneelementene for matematikkfaget handlet om den matematiske prosessen: utforsking og problemløsning, modellering og anvendelser, resonnering og argumentering, representasjon og kommunikasjon, abstraksjon og generalisering (Kunnskapsdepartementet, 2018).

Hvert år gjennomfører over 50 000 grunnskoleelever på 10. trinn skriftlig matematikkeksamen. Eksamen har som rolle å måle elevens oppnådde kompetanse i faget. Eksamen kan også ha en rolle i å styre forståelsen og praktiseringen av læreplaner. Flere forskere viser at eksamen kan ha tilbakevirkende effekter på undervisningen, og årsaken til dette skyldes at eksamenssystemet anerkjennes tilsiktet eller utilsiktet hva som anses som viktig i læreplanen (Alseth, Breiteig, & Brekke, 2003; Nordenbo m.fl., 2009). Utdanningsdirektorat argumenterer at «dette trenger ikke være et problem så lenge eksamen gjenspeiler læreplanen» (2019b, s.37). Likevel skal man ikke dra langt tilbake i tid da avdelingsdirektør Skillinghaug i Utdanningsdirektoratet uttalte i 2015 til VG at det var behov for å undersøke eksamensoppgavene i matematikk nærmere med tanke på arbeidsmengde og vanskegrad (Ertesvåg, 2015, 8. avsnitt). En nylig studie gjort av Gray, Kleve og Tellefsen (2019) har gjennomgått eksamensoppgaver fra perioden 1995 til 2018. De beskriver en nedgående trend av antall algebraoppgaver som er mer sammensatt, der løsningsmetodene er ukjente som krever stor kognitiv innsats hos elevene på eksamen. I tillegg beskriver de et større omfang av algebraoppgaver som måler elevens rutineferdigheter i perioden 2010-2018 (Gray m.fl., 2019, s.6). Wæge (Andersen, Berg, Dahl, Ravlo, & Wæge, 2015), leder for det regjeringsinitierte Matematikksenteret, har med sin prosjektgruppe evaluert matematikkeksamener i perioden 2009-2014. Rapporten inneholder kritikk av oppgavene som har vært gitt med hensyn til språk, muligheten til å løse neste deloppgave når man ikke klarte «inngangsoppgaven», og samsvar mellom kompetansemålene i læreplanen, og hva eksamen måler (Andersen m.fl., 2015).

Wæge i VG (Ertesvåg, 2015) deler Reinhardtsens oppfatning om at matematikkundervisningen er mangelfull: «Matematikkundervisningen dreier seg ofte om at elevene lærer seg regneregler – og kommer frem til et svar. Det er en utfordring at mange norske lærere hverken har den matematikk-faglige kompetansen eller den matematikk-didaktiske kompetansen som skal til» (Ertesvåg, 2015, 8. avsnitt).

Etter at Matematikksenterets evaluering av eksamen, har det det ikke blitt publisert evalueringer av eksamen fra 2015 og 2016 fra Utdanningsdirektoratet, men det er gjort en ekstern evaluering av eksamener fra perioden 2017–2019 av forskningsstiftelsen FAFO. Det ble der konkludert med at eksamen fra 2017 og 2018 i grove trekk var «god og rettferdig» (Andresen, Fossum, Rogstad, & Smestad, 2017, s.7; Bjørnset m.fl., 2018, s.7)

1.2 Målet med studien og problemstilling

Som kommende matematikklærer syntes jeg debatten om at det at dårlig matematikkundervisning fører til skuffende eksamensresultater er interessant. Tanken om at faget består av for mye pugging av regneregler, som et resultat av dårlig faglig kompetanse hos matematikklærere, virker bekymringsverdig. Samtidig blir avgangseksamen i matematikk for 10. trinn holdt frem som dokumentasjon, eller kanskje til og med som et «bevis» på kompetansenivået til elevene. Fra mine egne erfaringer i praksis har lærere og skoleledere ofte diskutert og undret seg hvorvidt dette er en udiskutabel sannhet. Frafall er en stor utfordring på videregående og i videre utdanning. Dette er bekymringsfullt, særlig med tanke på at kvaliteten ved eksamenssettene i seg selv er blitt kritisert fra tidligere perioder og nyere perioder. Istedenfor å skylde på elevene bør kvaliteten på eksamensoppgavene evalueres jevnlig.

For det andre, som nevnt, hevder Alseth m.fl. (2003) at eksamen er styrende for innholdet i matematikkundervisningen, og at eksamen derfor har en tilbakevirkende effekt på undervisningen. Derfor er det viktig at eksamenen gjenspeiler læreplanen, som undervisningen også skal rette seg etter. Problemløsning som læringsmål står sentralt i læreplanen, så det er interessant å se i hvilken det bli uttrykt i eksamensoppgavene.

Jeg skal derfor undersøke innholdet i eksamen i matematikk i min studie. Jeg har mål å undersøke hvordan eksamensoppgavesettene fra Utdanningsdirektoratet fordeler sine matematikkoppgaver. Innenfor studiens rammer og begrensninger har jeg bestemt meg for å kun fokusere på oppgaver som er innenfor algebraområdet. Valget baseres delvis på at algebra er det emneområdet norske elever scorer dårligst på i TIMSS-testene. Fra min egen skolegang har jeg selv ansett algebra som et sett av regler. I grunnskolen var jeg god på å forstå reglene og mestret nivået, men kom til kort da jeg startet på videregående og innså jeg at jeg hadde arvet noen misoppfatninger fra opplæringen som det tok tid å rette opp. Som lærerstudent i matematikk ser jeg nå at algebra gir en grunnleggende forståelse som inngår i nesten all matematikk, og er derfor viktig å mestre. Målet mitt er å bli en dyktig matematikklærer som har god didaktisk kunnskap om hvordan man underviser algebra i grunnskolen. Med algebra som forskningstema gir det meg mulighet til å skaffe en dypere didaktisk forståelse rundt brobyggingen fra tallære til algebra, og hvilke misoppfatninger som er typiske underveis.

Min problemstilling blir da slik:

I hvilken grad vektlegger nasjonale eksamener problemløsning i ulike algebraoppgaver i perioden 2009-2019?

For å besvare problemstillingen vil jeg:

1. Undersøke innholdet av problemløsning i læreplanen og hva teorien sier om begrepet. Målet med problemstillingen er å få svar på om oppgavene som blir gitt på eksamen krever problemløsning, eller om elevene kan løse de ved å imitere en kjent løsningsprosedyre, eller et kjent svar. For å kunne vurdere om en matematikkoppgave krever problemløsning eller ikke, må det være definert hva det er som er et matematisk problem. Jeg definerer et problem som en oppgave hvor problemløseren ikke vet hvordan hen skal komme videre i løsningsprosessen, og ingen kjent løsningsmetode kan brukes. Problemløsning er å løse en slik oppgave. Dette vil bli klargjort mer i teorikapittelet.

2. Forsøke å sette opp kriterier for hva algebraoppgaver er, for på den måten å kunne selektere hvilke oppgaver som tilhører algebra, og hvilke oppgaver som ikke faller inn under algebra. Eksamenssettene deler nemlig ikke oppgaver inn etter separerte temaer. Jeg trenger også verktøy for å kunne klassifisere algebraoppgaver innunder sine underområder. Det krever klare definisjoner. For å definere algebraoppgaver på eksamenen har jeg tatt i bruk TIMSS sitt rammeverk av algebra. Fordelene med TIMSS sitt rammeverk er at de holder algebra som et isolert matematikkemne. TIMSS deler algebra i fem temaer: formler, likninger, funksjoner, algebraiske uttrykk og mønster. Oppgaveeksempler på de ulike kategoriene vil bli gitt i teorikapittelet og i drøftingskapittelet.

3. Gå igjennom oppgaver og deloppgaver i nasjonale eksamenssett laget av Utdanningsdirektoratet i perioden 2009—2019. For å gjennomgå eksamensdokumenter på en vitenskapelig måte vil jeg ta i bruk en stegvis deduktiv-induktiv kvalitativ metode for å identifisere alle deloppgaver innenfor algebraområdet. Disse algebraoppgavene i analysen vil deretter bli plassert innunder de nevnte temaene til TIMSS. Deretter vil jeg presentere resultatene statistisk for å kunne avgjøre om de forteller meg mer om eksamenssettenes vektlegginger av ymse algebraoppgaver. I tillegg vil temaene til TIMSS komme til uttrykk ved å vise eksamensoppgaver fra analysen, og det vil bli redegjort hvorfor oppgavene havner innenfor de ulike algebrakategoriene. Jeg skal forsøke å avdekke om det er visse typer av oppgaver det blir vektlagt lite av i eksamenssettene, og om det er andre typer algebra som vektes betydelig mer av.

4. Vurdere eventuelle funn opp imot beslektet forskning, styringsdokumenter og teori, og drøfte hvorvidt disse styrker eller svekker forklaringer rundt norske elevers vanskeligheter med algebra. Flere studier (Andersen m.fl., 2015; Gray m.fl., 2019) har samlet eksamensoppgaver innenfor liknende kategorier og deretter plassert sine kategorier innenfor ulike vanskegrader. Ved å vurdere mine funn opp mot beslektet forskning, gir dette en mulighet for studien min å si noe om vanskegraden i de oppgavene som er blitt identifisert.

2 Teori

I dette kapittelet av oppgaven vil jeg først se hva teori og læreplanen sier om begrepet problemløsning. Deretter vil det bli presentert hva algebra egentlig er ved å se på forskjellige definisjoner fra faglitteraturen. Videre vil jeg skissere et teoretisk rammeverk med utgangspunkt i TIMSS' underdeling av sentrale underområder og konsepter i algebraen som er relevant for eksamensoppgavene som er blitt analysert. Videre vil jeg omtale læreplanens tekster rundt algebra som kompetanseområde. I siste del av teorikapittelet vil norsk og internasjonal forskning rundt algebra i skolen bli redegjort. Evalueringer og styringsdokumenter rundt eksamensoppgavene er også lagt i dette kapittelet. Eksamensoppgavene vil senere, i drøftingskapittelet, bli diskutert i lys av læreplanene og faglitteratur som blir lagt frem i dette teorikapittelet.

2.1 Problemløsning og problem

Problemløsning[3] er et svært vidtfavnende begrep, og det har gjennom tidene figurert mange ulike definisjoner på både hva et problem er og hva som følgelig menes med problemløsning. I matematikken har problemer blitt assosiert med matematiske oppgaver som skal utføres (Björkqvist, 2003, s.54). En definisjon som er vanlig å ta i bruk, er at et problem er ikke bare en matematisk oppgave som skal utføres, det er en matematisk oppgave der løsningsmetoden(e) i utgangspunktet er ukjent for problemløseren (Schoenfeld, 1985). Metodebruken må derfor «søkes frem». Polyas (1981) definisjon av problemløsning er at et problem er ikke et problem dersom problemløseren vet hvordan problemet kan løses med en gang. Målet er ikke at eleven ser løsningen med en gang, men heller utforsker og prøver forskjellige løsningsmetoder (Polya, 2004). Om problemløseren møter en utfordring eller en oppgave som løses ved en gitt eller kjent algoritme eller fremgangsmåte, er det snakk om en rutineoppgave (Aaseth, 2016). Ut fra denne definisjonen er det å løse rutinepregede oppgaver ikke å regne som problemløsing. Björkqvist (2003) definerer et problem som en matematisk oppgave som skal utføres, hvor problemløseren ikke har en klar løsningsmetode i den innledende fasen. Dermed er definisjonen ikke absolutt, men må forstås i forhold til personen som står overfor oppgaven. Det som er et problem for én elev, kan oppleves som elementært for andre elever, avhengig av på hvilket nivå de befinner seg (Niss & Jensen, 2002).

2.2 Problemløsning i lærerplanen LK6

Eksamen har som mål å vurdere elevenes måloppnåelse i forhold til læreplanmålene i læreplanverket. Derfor er det viktig å undersøke hvordan fokuset på problemløsning er i læreplanen i matematikkfaget. I LK06 finner man problemløsning som et viktig formål for faget. I læreplanen står det:

[3] Jeg bruker problem, problemløsning, problemorientert og problemløsningsoppgaver synonymt

> Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er (…) opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening. (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.1)

Matematikksenteret (Bergem m.fl., 2014) skriver at Kunnskapsløftet LK06 bygger sine definisjoner fra arbeidet til Niss og Jensen (2002). Her går det igjen at problemløsningskompetanse går ut på å kunne formulere og løse matematiske problem, der problem ikke kan løses med rutineferdigheter (Niss & Jensen, 2002, s.49). I et veiledningsdokument fra Utdanningsdirektoratet i 2011 referert i Storeli (2011, s.21) ble tidsbruk på problemløsningsoppgaver begrunnet ut i fra at det ville være med på å utvikle elevenes kreativitet og mot til å prøve utradisjonelle metoder. Dette dokumentet er ikke lenger å finne på Utdanningsdirektoratet sine nettsider.

Det er forekomst av problemløsning i to av de fem grunnleggende ferdighetene, å kunne regne og å kunne bruke digitale verktøy. Grunnleggende ferdigheter er felles for alle fag i skolen og skal være integrert i kompetansemålene der de er en del av og medvirker til å utvikle fagkompetansen (Utdanningsdirektoratet, 2013). I den grunnleggende kompetansen *å kunne regne* står det:

> Å kunne rekne i matematikk utgjer ei grunnstamme i matematikkfaget. Det handlar om problemløysing og utforsking som tek utgangspunkt i praktiske, daglegdagse situasjonar og matematiske problem. For å greie det må ein kjenne godt til og meistre rekneoperasjonane, ha evne til å bruke varierte strategiar, gjere overslag og vurdere kor rimelege svara er. (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.4)

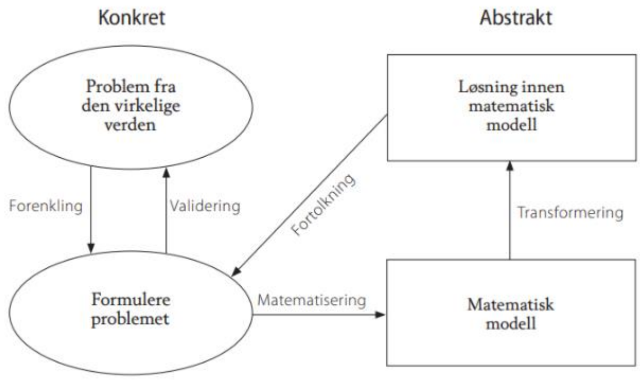
Kun en plass i læreplanen er problemløsning å finne i kompetansemålene. Det er i et kompetansemål under hovedområdet *Tall og algebra* etter tiende årstrinn:

> [eleven skal kunne] bruke, med og utan digitale hjelpemiddel, tal og variablar i utforsking, eksperimentering, praktisk og teoretisk problemløysing og i prosjekt med teknologi og design (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 8).

Fra dagens læreplan LK06 ser det ut til at problemløsning som ferdighet er svært sentralt i matematikkfaget og en del av læreplanen LK06s intensjoner.

2.3 Problemløsning som prosess

Man må også se på problemløsning som en ferdighet i matematikk. Modellering er en ferdighet som anses å ha mye til felles med problemløsning. Modellering handler om hvordan en elev klarer å oversette et problem, gjerne i en tekstoppgave eller en regnefortelling, til en matematisk modell (Nemirovsky, 1996, s.197). Ifølge Björkqvist (2003) blir matematisk modellering sett på som den mest fullstendige formen for matematisk problemløsning. Modellering er også, sammen med problemløsning, fremtredende i læreplanens formål og grunnleggende ferdigheter (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.1). Grønmos (2005) modell illustrerer matematisk modellering i en trinnvis prosess:



Figur 1: Matematisk modellering (Grønmo, 2005, 39)

Et problem tatt fra den virkelige verden er lagt frem foran eleven, og eleven må først gjøre en forenkling og formulere problemet klart. Det formulerte problemet må deretter oversettes fra tekst til en matematisk modell. Elevene har nå en rent matematisk modell som må løses, og de må deretter gjøre en utregning for å komme frem til en løsning. Når svaret er ferdig utregnet, må elevene evaluere om svaret stemmer i sammenheng med det formulerte problemet. Tekstoppgaver i algebra er vanligvis en standardoppgave der det er vanlig å bruke likningsløsning som verktøy for å løse oppgaven (Bjørnestad, Kongelf, & Myklebust, 2013, s.299). Likningen i oppgaven er ikke presentert eksplisitt, men det er informasjonen i oppgaveteksten som eleven må klare å modellere problemet ved å sette opp en likning som kan løses.

2.4 Forskning på problemløsning i Norden

Innenfor forskning på problemløsning i Norge har blant annet Harder (2013), Leer (2009), Leistad (2016), Aaseth (2016), Hansen (2014) og Yan (2018) skrevet masteroppgaver om problemløsning. Leer (2009) konkluderte med at det ble gitt svært få oppgaver som krever problemløsning på eksamen på 10. trinn. Jensen (2007) kom fram til eksamen var et hinder for problemløsning og modellering i Danmark. Grunnen til det var at eksamen ikke var tilrettelagt en slik undervisning, og dermed ikke egnet for å måle om eleven hadde oppnådd lav eller høy kompetanse i problemløsning og modellering. I Jensens masteroppgave med Gregersen (referert i Leer, 2009, s.88) kom de frem til at en typisk elev i en eksamenssituasjon vil nedprioritere fra å løse oppgaver hen ikke anser som kjente. Årsaken er at det ofte ikke er oppgitt hvordan eleven skal starte med oppgavene, kombinert med en stor risiko for at hen må gi opp. Harder (2013) fant at bruksområdet av problemløsningsstrategier i matematikkbøker på videregående trinn var veldig begrenset, lite variert og tydelig. Leistad (2016) undersøkte hvordan en høystpresterende og lavtpresterende gruppe med elever arbeidet med problemløsningsoppgaver. Funnene viste at den høystpresterende gruppen benyttet seg mest av problemløsningsstrategier. Aaseth (2016) sammenliknet russiske og norske lærerverk på videregående skole og konkluderte med at ingen av dem hadde noe generell innføring i problemløsning eller behandling av bestemte problemløsningsheuristikker[4]. Hansen (2014) undersøkte norske elevers besvarelser i TIMSS-oppgaver med fokus på feilsvar, og fant ut at norske elever hadde manglende kunnskap og slet med modellering- og problemløsningsoppgaver. Yan (2016) undersøkte sammenlikninger mellom norske og kinesiske læreverk på ungdomskolen, og fant ut at de kinesiske læreverkene hadde mer gjennomgående bruk av problemløsning. I doktorgraden til Kongelf (2011) fant han at de heuristiske[4] metodene i grunnskolebøkene hovedsakelig ikke var presentert bevisst, men heller var et resultat av ubevisst kulturell praksis. I tillegg var utvalget av metoder ensartet: enkelte metoder ble brukt mye, andre var nesten totalt fraværende. Kongelf (2011, s.14) peker også at land som gjør det godt i matematikk har et sterkt fokus på problemløsing. Rammeverket for læreplanen i Singapore anerkjenner problemløsing som kjernen i matematikkfaget, og læreverk i Singapore vier hele kapitler på problemløsing med fokus på heuristikk[4] - konkrete metoder for problemløsing. Til slutt skal det nevnes at Yan (2018), Harder (2013) og Aaseth (2016) tok i bruk det samme rammeverket som Kongelf (2011) utarbeidet i sin problemløsningsstudie.

2.5 Problemløsning – oppgaver som er mer kognitivt krevende

Man kan også tilegne problemløsning som en faktor som inviterer til kompleks tenkning. I Fafos (Andresen m.fl., 2017) evaluering av oppgaver på matematikkeksamen gikk skillet mellom oppgaver som krever problemløsning og hvilke som ikke gjorde det. Gjennomgående i deres studie var at kompetansen som beskrives for de laveste karakterene, ble knyttet til oppgaver med «algoritmisk løsning», mens kompetansen som kreves for de høyere karakterene, kan knyttes til oppgaver som krever problemløsning (Andresen m.fl., 2017, s. 75). Fafos studie har brukt samme definisjon av hva som er et matematisk problem som denne studien har valgt (Björkqvist, 2003).

Matematikksenterets rapport behandler også problemløsning i sin evaluering av eksamensoppgavene (Andersen m.fl., 2015). De tilegner problemløsning som et av flere kjennetegn til komplekse oppgaver som krever høy kognitiv innsats. I rapporten skriver de: «Oppgaver som har stor kompleksitet og høye krav til kognitive ferdigheter kjennetegnes ved å være sammensatt, må

[4] Heuristikk er en enkel fremgangsmåte eller strategi som en problemløser kan ta i bruk for å øke sjansen til å løse en oppgave (Teigen, 2019)

løses i flere trinn, krever tolking og analyser og kan løses ved ulike problemløsningsstrategier» (Andersen m.fl., 2015, s.12).

I deres evaluering av eksamensoppgaver har de utarbeidet en grad av vanskelighet fra en til seks som de klassifiserer oppgavene etter. Jo mer sammensatt oppgaven er, jo høyere er vanskegraden, og det «krever kompleks og kreativ tenking» (Andersen m.fl., 2015, s. 13). Her kommer det igjen at «det finnes ikke en forutsigbar og velkjent tilnærming, og det er ikke tydelig hvilke løsningsmetoder elevene kan bruke» (Andersen m.fl., 2015, s.13). Dette var oppgavebeskrivelser for oppgaver med høy vanskegrad. For den laveste vanskegraden, «ingen grad», bærer oppgavebeskrivelsen et preg av innlærte rutineferdigheter: «Involverer reproduksjon av lærte fakta, regler, formler eller definisjoner og kan løses ved å bruke en enkel prosedyre, og det er tydelig hvilken prosedyre eleven skal bruke. Det involverer reproduksjon noe eleven har sett tidligere, og hva eleven skal reprodusere er klart og tydelig uttrykt» (Andersen m.fl., 2015, s. 13). For den mellomste vanskegraden snakker man da om «enkle sammensatte og standardiserte oppgaver som kan løses ved hjelp av velkjente prosedyrer. Krever forklaring og begrunnelse som viser at eleven har en viss grad av forståelse» (Andersen m.fl., 2015, s. 13). Dette støtter igjen definisjonen om at rutineoppgaver ikke kan anses som problemløsende oppgaver.

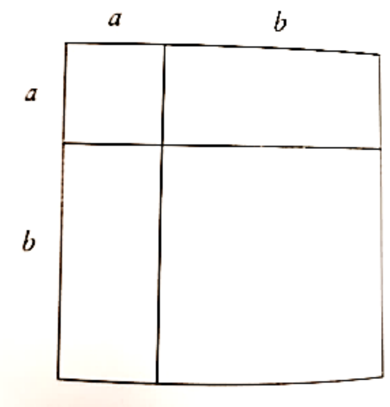
2.6 Algebra og skolealgebra

For å kunne ta fatt på algebra vil jeg redegjøre for hva som ligger i begrepet algebra. Det er ikke enkelt å gi en direkte forklaring på selve begrepet. På grunn av forskjellige tolkninger og vektlegginger av algebraens historie og algebraens store bruksområde, finnes det ikke en ensidig definisjon av algebra. Kongelf (2015) deler algebra inn i underområdet er som operasjonell symbolisme, tenkemåte og generalisert tallære.

2.6.1 Operasjonell symbolisme – algebra sett fra et historisk perspektiv

Førstnevnte, operasjonell symbolisme, dreier seg om hvordan symbolbruken i matematikken har blitt utviklet på ulike måter gjennom århundrene, hvor man finner de tre klassiske historiske periodene for symbolbruk i algebra: retorisk algebra, synkopert algebra og symbolsk algebra (Thorvaldsen, 2002). Den første perioden, *retorisk algebra,* som betraktes som perioden hvor alle løsninger på matematikkproblemer ble skrevet med vanlige ord, fulle språklige setninger, og ikke ved hjelp av matematiske symboler for å forklare sammenhengene (Selvik, Rinvold, & Johnsen-Høines, 2002). Et uttrykk som man i dag skriver som $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kunne på den tiden bli uttrykket noe i retning av:

For å finne kvadratet på summen av to linjestykker, ta først summen av kvadratet på det ene og kvadratet på det andre linjestykket og adder så to rektangler som har de to linjestykkene som sider (Selvik m.fl., 2002).



Figur 2 Hjelpefigur til kvadratsetningen. Utklipp fra (Selvik, Rinvold, & Johnsen-Høines, 2002, s.20)

Uttrykket ovenfor kjenner man i dag som den første kvadratsetningen. Måten kvadratsetning blir uttrykt gjennom ord, kaller man *for retorisk algebra* fordi de matematiske sammenhengene blir uttrykt retorisk uten noen symbolsk fremstilling. Symbolsk algebra kom først til syne på 1600-tallet hvor de retoriske fremstillinger av matematiske sammenhenger ble byttet ut med symboler (Selvik m.fl., 2002). Det er denne perioden hvor symbolbruken ble utviklet til det man i dag kjenner som moderne symbolbruk i algebra. Synkopert algebra blir gjerne sett på som en overgangsperiode mellom den gamle retoriske formen og den moderne symbolske formen. Grekeren Diofantos (250 e.Kr) ble ansett som den første som begynte å benytte seg for fullt av symboler og forkortelser i språklige fremstillinger. Forkortelsene ble ansett som en kompakt og forenklet måte å skrive ned en regnemetode, en algoritme, beregninger av geometriske størrelser som areal og lengder. Diofantos var en matematiker forut for sin tid. Fortsatt etter hans levetid ble retorisk algebra brukt i lang tid (Thorvaldsen, 2002).

2.6.2 Algebraisk tenking – generalisering

I likhet med algebra er det ikke noen felles enighet om hva algebraisk tenkemåte er. Likevel fremkommer det av Kieran (2007) at generalisering er den viktigste delen av algebraisk tenking. Dette mener også Mason (1996), som hevder at generalisering er selve kjernen i matematikkundervisning og at matematikkundervisningen trenger mye generaliseringsaktiviteter tidlig i skoleløpet. Mason hevder at dersom elevene blir drevne med å generalisere fra starten av, vil algebra opphøre å være et problem. Kongelf (2015, s. 85) skriver at generalisering handler om å repetere, utforske og oppdage likheter, klassifisere og kategorisere.

2.6.3 Generalisert tallære

Algebra som generalisert tallære er omfattende i læring og undervisning av elementær algebra i skolen (Lee, 2001). Ifølge Wu (2001) handler det om to ting, abstraksjon og generalisering. Abstraksjon kan være tenkemåter hvor en skiller ut enkeltelementer, og generaliseringen gjør det mulig å gi en beskrivelse av alle elementene. Mason (1996) forteller om hvor viktig generalisering er for læringsløpet i matematikken. Kortfattet består læringsløpet i matematikk av en tidlig fase hvor matematikken er veldig konkret, hvor den består av tall og regning med tall, før den går over i ny fase på eldre skoletrinn og deretter videregående hvor man introduseres for generalisering gjennom å bytte ut tall med bokstaver i algebraen. For de som velger å ta matematikk på universitetsnivå vil abstraksjonsnivået være høyt, hvor man knapt regner med tall men med generelle uttrykk hele tiden (Mason, 1996). I et sitat fra lærerplanen står det at «algebra generaliserer tallregning ved at bokstaver og andre symboler representerer tall»(Utdanningsdirektoratet, 2013, s.3).

Kieran (2004) behandler generalisering som en av fire grunnleggende aktiviteter i algebra som hun kaller «generational activity»: for eksempel generalisering av geometriske mønster eller tallsekvenser og det å utrykke med formler for numeriske sammenhenger. Rammeverket til TIMSS deler samme tilnærming som Kieran, hvor TIMSS beskriver generalisering som en av flere kognitive ferdigheter under den overordnede matematikkkompetansen. TIMSS definerer generalisering som "make statements that represent relationships in more general and more widely applicated term" (Grønmo, Lindquist, Arora, & Mullis, 2015, s.27). I delområdet "relationships and functions" ser man også at TIMSS gir en spissere definering av begrepet under hovedområdet algebra: «Generalize pattern relationships in a sequence (…) or between the sequence number of the term and the term, using numbers, words, or algebraic expressions» (Grønmo m.fl., 2015, s.21).

2.6.4 Forskning på mønstergeneralisering i algebra

Det er imidlertid flere studier som viser at elever har problemer med å generalisere mønstre (Becker & Rivera, 2005; Lee, 1996). Eksempelvis undersøkte Becker og Rivera (2005) hvordan elever på niende trinn klarte å generalisere ut fra voksende mønstre og fant at de fleste elevene greide å utvide mønstrene, men at få av dem klarte å generalisere ved å bruke et algebraisk uttrykk. Det samme viste resultatene til Lees (1996) elevene var gode til å finne mønstre, men de slet med å finne generelle uttrykk for mønstrene.

Samtidig fins det flere internasjonale forskere som mener at mønstergeneralisering er en god måte å innføre algebra på for elever, og at algebra må innføres tidlig i opplæring (Carraher, Martinez, & Schliemann, 2008; Cooper & Warren, 2011; Lannin, 2005; Radford, 2010). Ideen bak tidlig algebralæring er at aritmetikkens inneholder mange elementer fra algebra, for eksempel gjennom utforsking av mønsteraktiviteter (Carraher m.fl., 2008). Ved å jobbe med mønster vil elevene etterhvert oppdage behovet for å uttrykke seg generelt hvordan mønstrene utvikler seg, uten at de nødvendigvis har lært seg å benytte algebraisk notasjon, men heller at de uttrykker seg muntlig. Algebraisk notasjonen vil derfor senere bli ansett som et behov og et nyttig verktøy fra algebraen når man skal utrykke seg generelt.

Når elevene skal utvikle forståelse av algebra gjennom mønsteraktiviteter, må de skifte fokus fra en konkret til en generell tilnærming via figurer, tegninger eller konkretiseringsmateriell. Dette mener Lannin (2005) er god måte å trene elevenes algebraiske tenking, fra å klare å tenke fra de konkrete enkeltelement til det generelle for alle enkeltelementer. Ved å jobbe med mønsteroppgaver mener han at det blir en lettere overgangslæring fra tallteoriens konkrete tallregninger til mer generalisert tallregning, utvikle algebraiske ideer, begreper og prosesser. Cooper og Warren (2011) gjorde en studie med mønsteroppgaver som introduksjon for å jobbe med generalisering hos elever. De forsket på elever helt nede i andre- til femtetrinn som skulle utforske sammenhenger gjennom ulike konkretiserings-, visualiseringsoppgaver, eller såkalte figurmønstre. Forskningen deres viste at unge elever kunne gjenkjenne mønstre i mange ulike sammenhenger. De klarte blant annet å identifisere hvordan gjentagende mønstre utvikler seg, og at de klarte å finne generaliseringsuttrykk fra figurmønstre som vokser.

2.6.5 Forskning på algebra i Norge

I Norge finnes det mye interessant forskning om algebra også på masternivå. Reinhardtsen (2012) sammenliknet introduksjonsoppgaver i lærebøker for 6. og 7. trinn i Finland, Norge, Sverige og USA. Hun oppsummerte med at det kun var den finske læreboken som tilrettela forholdene for at elevene kunne få utforske behovet for algebraisk notasjon gjennom mønsteroppgaver med generaliseringer. Fra sin studie i 2019 (Reinhardtsen & Givvin) hvor hun undersøke undervisning av algebra i matematikkfaget på ungdomstrinnet, etterlyser hun at elever må bli utfordret med flere vanskeligere oppgaver i algebra som bidrar til mer problemløsning, og mindre «pugge-huske-løse oppgaver». Krovik (2013) studerte hvordan lærere introduserte algebra for elever og elevenes forståelse av algebra på ungdomstrinnet og videregående skole. Hun fant ut at elevene måtte anstrenge seg særlig med det semantiske aspektet, og at undervisningen hadde fokus på ferdiglagede løsningsprosedyrer og syntaks i læreboken. Karimzadeh (2014) sammenliknet algebraen i singaporske og norske lærebøker med utgangspunkt i tilgjengelige oppgaver fra TIMSS 2011. Resultatene hennes var at de singaporske lærebøkene gjorde elevene mer rustet til å kunne svare på TIMSS-oppgavene ved at de inneholdt flere temaer, og det var mer kognitivt krevende oppgaver enn blant de norske. Petersen (2015) forsøkte å måle algebraferdigheter til elever på 10. trinn, og konkluderte med at elevene hadde store utfordringer både med genererende og modellerende oppgaver. Hansen (2014) gjorde studier av oppgavebesvarelser i algebra fra TIMSS 2011 med fokus på feilsvar og fant ut at elevene hadde liten forståelse rundt algebraiske konsept som generalisering, modellering og problemløsning. Kongelf har i begge sine studier konkludert med at algebramanipulasjon er dominerende i lærebøker på ungdomstrinnet. Kongelf (2015, 2019) konkluderte med at variabelaspektet ikke kommer godt nok frem i introduksjonskapitlet i algebra. Kongelf (2019) viser at algebraoppgaver i hovedsak dreier seg om manipulasjon, altså om å regne med algebraiske uttrykk og å sette inn verdier for variabler i algebraiske uttrykk. Det var en overvekt av slike oppgaver i lærebøkene og tilsvarende få mønsteroppgaver som behandler generalisering. Dette tyder en sammenheng med betraktningen til Grønmo og Onstad (2012) om at de svake resultatene i algebra fra TIMSS-testen i 2011, ble begrunnet med at norske elever lærer algebra senere enn i andre land, og dermed kan de bli prøvd ut i stoff som de ikke har lært enda, blant annet mønstergeneralisering.

I neste delkapittel skal man se på læreplanen LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013) og innspill til Fagfornyelsen som trer i kraft nå i høst (Utdanningsdirektoratet, 2018), om hvordan de behandler algebrabegrepet som et skoleemne. I studien vil det bli lagt frem LK06s målsetninger for algebra i matematikkfaget, og se om læreplanens målsettinger gjenspeiler de faglige definisjonsforslagene til algebrabegrepet som er blitt presentert ovenfor.

2.6.6 Hva er algebra i lærerplanen

I dette delkapitlet vil jeg se på hva læreplanene skriver om algebra som emneområde i skolen i sine dokumenter, og tolkninger av den fra fagfeltet.

I LK06 er algebra under området *Tall og algebra*, og elever møter det først i 5. trinn. Hovedområdet Tall og algebra er beskrevet slik:

«Hovedområdet tall og algebra handler om å utvikle tallforståelse og innsikt i hvordan tall og tallbehandling inngår i system og mønster. Med tall kan man kvantifisere mengder og størrelser. Området tall omfatter både hele tall, brøk, desimaltall og prosent. Algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall. Det gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger. Algebra benyttes også i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner.» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.3)

I hovedområdet for *tall og algebra* i LK06 har Kongelf (2015) tolket læreplanens målsetting for introduksjon av algebra på to måter. Den første tolkningen er at man skal ta utgangspunkt i tallære og introdusere algebra gjennom å studere mønster og tallmessige sammenhenger, som en etterhvert ønsker å beskrive generelt ved hjelp av algebraiske uttrykk.

Den andre tolkningen er at man skal introdusere algebra som regning med bokstaver på lik linje som tallregning. Jobben med algebramanipulasjon kan da komme før man introduserer arbeid med mønsteroppgaver. Ser man nærmere på kompetansemålene innen hovedområdet «Tall og algebra» i læreplanen, finner man i kompetansemålene for 7. trinn at elevene skal kunne utforske og beskrive mønstre i geometriske mønstre og tallmønstre med figurer, ord og formler. Innen 10. trinn skal eleven kunne bruke tall og variabler i utforskning, eksperimentering og praktisk og teoretisk problemløsning (Utdanningsdirektoratet, 2013).

Disse to tolkningene utrykker Kongelf (2015, s. 87) som radikalt ulike i den betydningen av at den første tolkningen legger forholdene til rette for en utforskende tilnærming hvor behovet for bokstaver kommer som en naturlig konsekvens om et ønske av å uttrykke seg generelt. Bokstavene blir da introdusert som symbol for noe som varierer, også kjent som variabelbegrepet (Kongelf, 2015). Man kan si at det er selve variabelaspektet i variabelbegrepet som er i fokus. *Variabel* er i utgangspunktet en fellesbetegnelse for abstrakte bokstaver og et symbol for noe som *varierer* (Bjørnestad m.fl., 2013, s.212). Velger man å tilnærme seg den andre tolkningen, å introdusere variabelbegrepet gjennom algebramanipulering, er det ikke like naturlig å rette søkelyset på variabelaspektet fordi man er mest fokusert på å manipulere uttrykk. Kongelf (2015) mener at det er den første tolkingen av læreplanen som bør ligge til grunn for opplæringen i algebra, og han mener at klassisk algebramanipulasjon må komme etter at man har jobbet med å skape mening til bokstavene gjennom generaliseringer. Demby (1997) påpeker derimot at generalisert tallregning som en brobygging fra tall til algebralære er for komplisert og for abstrakt for de fleste elever. Han referer til Lee og Wheeler (1997, s. 47) som har samlet data fra testintervjuer med elever, og som viste at en slik tilnærming ble møtt med pedagogiske vansker. «It was found that for many students (…) that algebra and arithmetic were two dissociated worlds; when these students were confronted with both, their arithmetic appeared disturbed by algebra" (Demby, 1996, s. 47). Som et motargument til Dembys mening hevder Zwetzschler og Prediger (2013, s.559) det er derfor viktig at slike generaliserende aktiviteter involveres fra *starten av* introduksjonen til algebralære. De ønsker at algebraiske uttrykk blir knyttet til generalisert tallregning og geometriske mønsteroppgaver og ikke bare blir assosiert, som de selv utrykker som «meningsløse» symboler som blir manipulert uten videre begrunnelse (Zwetzschler & Prediger, 2013, s.559).

Den nye læreplanen kalt Fagfornyelsen som vil ha virkning fra høsten 2020, har lagt ut et offentlig forslag til hvilke hovedområder matematikkfaget i grunnskolen skal bestå av (Utdanningsdirektoratet, 2018). Dette er basert på innspill fra ansatte i skolesektoren. Man ser i forslaget til Fagfornyelsen (Utdanningsdirektoratet, 2018, s.3), at matematikkfaget skal bli mer undersøkende og oppdagende av elevene selv. De skriver at elevene ikke skal bli «presentert for en ferdig løsning», men heller utforske tall, figurer og likheter mellom enkeltelementer for så å formalisere ved bruk av algebra og hensiktsmessige representasjoner. Fagfornyelsen kaller det en «økende abstraksjonsgrad». Sitatene er hentet fra «Abstraksjon og generalisering» (Utdanningsdirektoratet, 2018, s. 3), som er blitt et av fem kjerneelement i matematikkfaget.

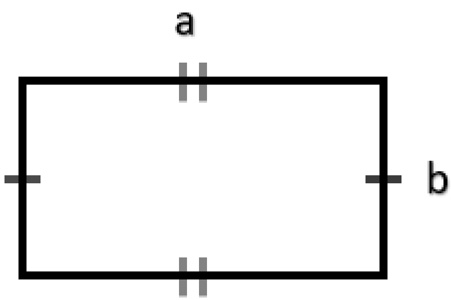
2.7 Teoretisk rammeverk: Fem kompetanser i algebra

Når man skal se på algebraoppgavene i eksamenssettene, er det viktig vite at algebra fremkommer i ulike kompetanseformer. Kongelf (2016) sammenlikner algebra med en ball. Selv om det finnes en rekke ballsport, ser ballen ulik ut i fotball, golf og håndball. Og hvordan man bruker ballen – eller algebraen – er i høyeste grad avhengig av hva du vil spille – eller av den matematiske konteksten (Husabø, 2016, 3.avsnitt).

En generell folkelig oppfatning av algebra kan være at algebra er bokstavregning. Det er riktignok sant, men i matematisk sammenheng bruker man bokstaver i matematikken på forskjellige måter, derfor har man ulike navn på dem (Bjørnestad m.fl., 2013). Det at «bokstavenes roller er kontekstavhengige, som uavhengig eller og avhengig variabler i funksjonssammenheng, $y = 2x + 8$, som ukjente i likninger, $2x + 6 = 0$, og som generaliserte tall i generaliseringer, $2, 4, 6, 8, \dots\ 2n \dots$ (Kongelf, 2015, s.87)», gjør det nødvendig med en tydelig oversikt over hvilke algebraoppgaver som havner under ulike matematikkompetanser ut fra hvilken kontekst de er i. I tillegg til at kompetansene er kontekstavhengige (Kongelf, 2015, s. 87), har de også varierende ulikheter i algebraisk notasjon.

Derfor har det vært et behov i denne studien å klare å identifisere algebraoppgavene i eksamenen og også å skille fra hverandre ulike typer algebrakompetanser som kommer frem. Algebra er et tema som ikke er entydig, og algebraens kompetanseområder kan gå over i hverandre fordi de har mange likheter. Det er viktig at konseptene kan støttes av teori fordi det er konseptene som formidler forskningen som *funn.* Kan de empiriske funnene støttes av teori, blir funnene mer verdifulle. Dette studiearbeidet har støttet seg på det teoretiske rammeverk til TIMSS som definerer algebra som et selvstendig emne og deler algebra inn i fem temaer. De fem temaene som er under algebra er formel, likninger, algebraiske utrykk, funksjoner og mønster. Det skal nevnes at den fyldige versjonen av TIMSS` rammeverk er på engelsk, og det norske versjonen er kun utgitt som en kortversjon som ramser opp temaene. Derfor har det i tillegg vært behov for å ta i bruk annen faglitteratur for å gi hver kompetanse en tilstrekkelig definisjon.

Beskrivelser (og dermed sitater og tekstutdrag fra eksamensoppgavene) har mindre betydning i presentasjonen av forskningen dersom man kommer frem til gode konsepter. Det er dermed disse konseptene som reduserer det anekdotiske inntrykket som hefter ved en del kvalitative studier. Konseptutvikling gir studiene en mer generisk verdi, altså overførbarhet (Tjora, 2017, s.223). Dette studiearbeidet vil gi en fyldig begrepsavklaring til de fem konseptene under algebra. I avklaringene av konseptene skal jeg bruke et eksempel som vil bli brukt i alle temaene bortsett fra temaet mønster. Eksempelet er et rektangel med en omkrets av to sider a og to sider *b*.



Figur 3: Rektangel med side a og b

2.7.1 Likninger

Likninger forteller oss at to uttrykk er like (Bjørnestad m.fl., 2013). Denne definisjonen indikerer at likninger kan løses. Man kjenner likninger igjen ved at alle likninger inneholder likhetstegnet ($=$), og har en eller flere variabler (Bjørnestad m.fl., 2013). En variabel eller flere variabler i forbindelse med likninger blir assosiert med betegnelsen *ukjent*, som er et symbol eller en bokstav som står for et bestemt, men et *ukjent* tall (Selvik m.fl., 2002). Som oftest står bokstavene x eller y for de *ukjente*. Det er helt uten betydning hva de kalles. Å løse en likning betyr å bestemme hva den eller de *ukjente* er. For å finne ut hva den *ukjente* er, må man få den *ukjente* alene, som regel til venstre for likhets-tegnet, for så å få et talluttrykk på den andre side av likhetstegnet. For løse dette må man manipulere uttrykkene slik at den ukjente blir alene. Når man manipulerer likningsuttrykket er det viktig at man manipulerer likt på begge sider av likhetstegnet for å ivareta likevekt mellom uttrykket. Hvis ikke blir svaret likningsløsningen feil. Dette er kjente prinsipper i likningsløsning for elever i undervisningen, og de vil senere i undervisningen bli introdusert for «flytte-bytte-fortegn»-regelen som er en forenklet regnemåte når man skal løse likninger.

Til eksempelet ovenfor: La oss si at arealet av rektangelet må være $100\ m^2$. La lengden *l* være $25\ m$. Man ønsker å finne ut hvor lang bredden *b* er. Man løser oppgaven som en likning:

$$A = l \cdot b$$
$$100 = 25 \cdot b$$
$$-25b = -100$$
$$\frac{\cancel{-25}b}{\cancel{-25}} = \frac{-100}{-25}$$
$$b = 4$$

Som løsningsforslaget illustrerer, så observerer man at når 100 og $25b$ bytter plass, på hver sin side av likhetstegnet, bytter de også fortegn. I dette eksempelet hadde man ikke nødvendigvis trengt å skifte fortegn siden begge, siden hele utrykkene byttet plass og slutt ville fortsatt blitt at $b = 4$. Likevel illustrerer dette eksempelet «flytte-bytte-regelen» godt, og hvis man imitere fremgangsmåten «slavisk» vil en elev alltid kommet frem til riktig løsning i likningen. I dette eksempelet ser man på den siste mellomregningen før sluttsvaret, at eleven må skjønne at et negativt tall dividert på et negativt tall, blir et positivt tall i sluttsvaret.

2.7.2 Algebraisk uttrykk

Algebraiske uttrykk er en samling av bokstaver og tall i et matematisk utrykk. Et algebraisk uttrykk har også operasjoner av variabler i utrykkene, men i motsetning til likninger kan ikke algebraisk uttrykk løses (FuseSchool - Global Education, 2017, 0:27). I matematikkdidaktikken skal algebraiske uttrykk ofte forenkles til enklere uttrykk. Man kan forenkle utrykkene så mye som mulig, men utrykkene kan ikke bli løst med mindre variablene får en gitt verdi. Hvis man skulle skrive et algebraisk uttrykk for omkrets av rektangelet, kan det skrives slik: $O = a + a + b + b$. Man kan også forenkle utrykket til $2a + 2b$. Eller man kan faktorisere uttrykket av omkretsen slik: $O = 2(a + b)$. Man adderer siden a med siden b for så å doble den.

2.7.3 Formel

Formel viser et fast forhold mellom forskjellige type størrelse, uttrykk ved variabler (Selvik m.fl., 2002). En formel er en spesiell type likning. Begrepet formel brukes ofte synonymt med likning. Etter matematisk syntaks blir termene med algebraisk notasjon veldig like. Begge inneholder likhetstegnet med et uttrykk på hver sin og begge *kan* ha flere variabler i utrykkene sine. Likevel fins det forklaringer som skiller termene fra hverandre. Til forskjell fra likninger *må* en formel forbinde to eller flere variabler i uttrykket sitt, ifølge algebraisk notasjon. Hvis uttrykket bare inneholder én variabel, kan den betraktes som en vanlig likning (FuseSchool - Global Education, 2017, 0:50).

Formler etter algebraisk notasjon fremstilles generelt ved at det er én variabel på venstresiden av likhetstegnet, uttrykt som et produkt, sum, differanse eller kvotient av et lengre uttrykk med flere variabler som er på høyre sin av likhetstegnet. Aanensen og Kristensen (2018) skriver at den enkleste bruken av en formel er å sette inn tall for de kjente variablene og regne ut svaret direkte. Hvis man i rektangeleksemelet ovenfor skal finne ut arealet av rektangelet, og man får verdier for lengden og bredden av rektangel som er 25 meter og 10 meter, får man da at:

$$A = l \cdot b$$

$$A = 25 \cdot 10 = 250$$

Dette kaller Aanensen og Kristensen (2018) den enkleste formen for formelregning. Man setter inn verdier for de kjente variablene på *høyre* side av likhetstegnet og regner svaret ut direkte. Men av og til gir innsettingen av tall oss en likning man må løse (Aanensen & Kristensen, 2018). Med det mener de at skilnaden fra en formel som skal utregnes til en likningsløsing er helt kontekstavhengig for hvilke verdier som innsettes hvor i uttrykkene av likhetstegnet. Aanensen og Kristensen (2018) eksemplifiserer i sin fagartikkel når de fremstiller hvordan en formel går over til å bli en likning som må løses. Det poenget kan en få frem ved å ta utgangspunkt i eksempelet fra likningsavsnittet over:

$$A = l \cdot b$$
$$100 = 25 \cdot b$$
$$-25b = -100$$
$$\frac{\cancel{-25}b}{\cancel{-25}} = \frac{-100}{-25}$$
$$b = 4$$

Hvis et areal av et rektangel er $100\ \mathrm{m}^2$ og lengden er 25 m, vil man finne ut hvor lang bredden av rektangelet er ved å løse formelen. Man setter inn de kjente verdiene for variablene i formelen for arealet til et rektangel og ser at for å løse formelen, må man behandle den som en likning. Man ser at bredden, b, på høyre side av det lengre utrykket av likhetstegnet blir da en ukjent. For å finne ut hva b i formelen er, må man behandle formelen som en likning ved å ta i bruk løsningsmetoder og prinsipper fra likningsløsning.

For å oppsummere, det handler om hvilke verdier som skal innsettes *hvor* i en generell formel som skiller en likningsløsning og en vanlig utregning av en formel. Hvis innsetting av verdier for de respektive variablene gjør at man ender opp med en ukjent variabel, som er en del av et større uttrykk, må man behandle formelen som en likningsløsning. Hvis innsetting av verdier går til variablene i den oppstilte formelen, og uttrykket så kan regnes ut direkte, betrakter man det som formelregning (Aanensen & Kristensen, 2018). I praktisk matematikk møter man på formler i kontekst av geometrioppgaver hvor ulike figurers geometriske egenskaper som omkrets, areal og volumer blir uttrykt generelt ved kompakte formler (Selvik m.fl., 2002). Likning som egen kompetansegren i algebra har ikke noen åpenbar praktisk anvendelsesmulighet (Onstad, 1994).

Likninger fremstår da kun som rene matematiske regnestykker, og formler ofte dukker oftere opp i oppgavekontekster fra dagligverden. Likningsløsning kan da bli ansett som et verktøy for å løse formler i en konkret sammenheng. Ved å forholde seg til disse skilnadene har man da mulighet til å skille de aktuelle kompetansene i analysen.

2.7.4 Funksjon

Når man snakker om funksjoner snakker man om «størrelser» som avhenger av hverandre på en bestemt måte (Bjørnestad m.fl., 2013, s.321). Språkbruken blir at man da ofte snakker om en *avhengig* og en *uavhengig* variabel og forbindelsen mellom dem (Bjørnestad m.fl., 2013, s.322). Selvik m.fl. (2002, s. 58) gir en formell definisjon på funksjonsbegrepet slikt: Dersom en variabel y er knyttet med en variabel x etter en regel slik at enhver verdi av x vil gi utslag til en bestemt verdi av y, sies y å være en *funksjon* av den uavhengige variabelen x. Bjørnestad m.fl. (2013) skriver at hvis noe er påfallende i virkeligheten rundt oss, så er det at man har bevegelse og forandring. Slike fenomener har man ofte lyst å forstå og kontrollere. Læren om funksjoner gir oss et redskap for å studere sammenhengen mellom variable størrelser, og en måte å beskrive endringer. Mer konkret kan funksjoner beskrive forholdet mellom pris og vekt, eller temperatur og tid som er variabler og som avhenger av hverandre. Læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.3) skriver at funksjoner kan uttrykkes på flere måter, for eksempel med formler, tabeller og grafer. Analyse av funksjoner går ut på å lete etter spesielle egenskaper som hvor raskt en utvikling går, og når utviklingen får spesielle verdier. I rammeverket til TIMSS skal elevene (Grønmo m.fl., 2015, etter min oversettelse) tolke, relatere og generere representasjoner av funksjoner i tabeller, grafer eller i tekst.

Om en bruker denne definisjonen på rektangel-eksempelet, gir det: Hvis man får vite at omkretsen er $2a + 2b = 10$. Man kunne da omskrevet uttrykket til $a + b = 5$ og deretter $a = 5 - b$. Dette uttrykket kan også omtales som en formel fordi den binder sammen to variabler. Men hvis man kaller verdien a som en *funksjon* av b, skriver man ofte slik: $a = f(b)$. Det betyr at verdien av a avhenger verdien til b (Bjørnestad m.fl., 2013, s.327). Man kan dermed omskrive uttrykket over slik: $f(b) = 5 - b$. Hvis b i funksjonsuttrykket får verdien $= 3$ vil $a = 2$. Får man gitt en verdi på den ene variabelen, kan man løse den andre. Siden man her har funnet ut verdien av a og b blir da omkretsen av rektangelet $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$.

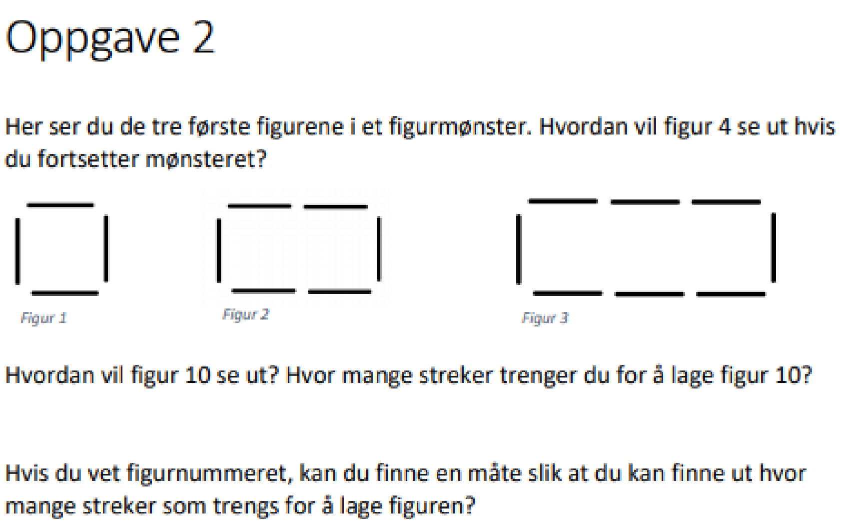
2.7.5 Mønster

I testene til TIMSS` og i deres rammeverk har de som formål å teste elevenes kunnskap om generalisering gjennom mønsteroppgaver i forbindelse med algebra (Grønmo m.fl., 2015; TIMSS, 2015). Mønster handler om en form for gjentakelser eller regelmessighet. I rammeverket til TIMSS omtales mønster både i form av geometriske mønstre og av tallmønster (Grønmo m.fl., 2015).

Denne studien vil derfor tilegne oppgaver med et slikt matematisk innhold under hovedtemaet «Mønster». Dette er oppgaver med geometriske figurer eller tall som er satt opp i et bestemt system. I praktisk matematikk kan elever møte på oppgaver av typen «Hva er det neste tallet i tallsekvensen» eller «hvor mange firkanter er det i den neste figuren» der elevene skal identifisere et tallmønster eller et geometrisk mønster (Hansen, 2014). Dette er som ofte den første deloppgaven hvor eleven finner frem til et konkret svar med kun tall å forholde seg til.

Når elevene så videre introduseres for algebra, utvides slike oppgaver til å spørre etter et generelt uttrykk for den n-te figuren eller det n-te elementet i sekvensen (Hansen, 2014). Dette konseptet blir belyst i studien til Lee (1996). Den viste at elever var veldig gode til å løse varianter av oppgaver som handlet om å finne antall prikker i rektangelmønstre. De var nokså gode på å finne mønstre, men de slet med å finne generelle uttrykk for mønstrene, både fordi generaliseringskonseptet var vanskelig for dem, og fordi mange slet med å forstå generalisert tallregning.

Dette er oppgaver som ifølge Hansen (2014, s.12) tester grunnleggende elementer av generalisering. Kriterier for forståelse av generaliseringskonseptet vil da for eksempel være at eleven får i oppgave å lage et uttrykk n som skal være en generelt utrykk for *alle* ledd i figurmønster eller tallmønster. Dette er slike oppgavetyper studien ser etter i kategoriseringen av mønsteroppgaver på eksamen. Her et eksempel på en oppgave som bygger på generalisering gjennom et geometrisk mønster.


Oppgave 2

Her ser du de tre første figurene i et figurmønster. Hvordan vil figur 4 se ut hvis du fortsetter mønsteret?

Hvordan vil figur 10 se ut? Hvor mange streker trenger du for å lage figur 10?

Hvis du vet figurnummeret, kan du finne en måte slik at du kan finne ut hvor mange streker som trengs for å lage figuren?

Figur 4. Eksempel på en mønsteroppgaver som går fra det konkrete til generelle

2.8 Algebra som en hovedkompetanse i matematikk

Man har nå prøvd å definere hva algebra handler om gjennom generelle definisjoner og prøvd å si hva algebra inneholder av ulike av underområder. Siden masteren har valgt å definere algebraens innhold gjennom en bred liste av ulike underområder, er det viktig å påpeke at algebra i en oppgavesammenheng ikke nødvendigvis klarer holde seg atskilt fra andre hovedkompetanser i matematikk. Underområdene som er nevnt over, kan også tolkes som å tilhøre andre matematikkemner ut fra andre matematiske forståelser og rammeverk en støtter seg til. Likevel er det ikke uvanlig at man kan finne algebraisk kompetanse innenfor andre hovedområder. Grønmo gir algebraen stor forrang ved å hevde at «Algebra er en generalisering av regning med tall, og et kraftfullt verktøy for *all* videre læring og bruk av matematikk» (2013, 2. avsnitt). Læreplanen reflekterer også rundt dette ved skrive under hovedområdet for «Tall og algebra» at «Algebra benyttes *også* i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.3). Bjørnestad m.fl. (2013) går enda lenger ved å hevde at selv om algebra sammen med tall er et eget emne i læreplanen, bør de også integreres i alle de andre emnene i læreplanen. Niss og Jensen (2002) skriver at man må betrakte matematikkens hovedkompetanser som rimelig atskilte, fordi hver kompetanse bunner i bestemte matematiske utfordringer med sine bestemte ferdigheter. Men man kan ikke skille de ulike kompetansene skarpt fra hverandre uten en overlapp. De beskriver en kompetanse som et tau i et knutepunkt i en klynge av andre tau. Tauene i midten er delvis flettet eller vevd inn i hverandre i forskjellige klynger, men som atskilles fra hverandre ut mot kanten. Dette betyr også at én matematisk kompetanse generelt kan ikke tilegnes eller besettes isolert fra andre, men at denne heller overlapper med andre kompetanser på noen områder.

3 Eksamensoppgavene

For å få nok kunnskap rundt eksamenen i matematikk har det vært viktig å etablere nok informasjon som ligger ute om eksamenens oppbygging og utforming. Eksamen blir utformet og utgitt av Utdanningsdirektoratet. Hvert år legger Utdanningsdirektoratet ut en eksamensveiledning som alle skoler nasjonalt kan benytte seg av i forkant av eksamenen. Der står det blant annet viktig informasjon rundt tanker som ligger bak utformingen av eksamensoppgaver og hvordan de vurderer elevbesvarelser. I dette kapittelet blir det redegjort forhold i eksamensveiledningen som anses relevant til denne masteroppgaven. Etter at man har gått igjennom eksamensveiledningen, vil det bli presentert tre eksterne studier som evaluerer innholdet av matematikkeksamenene.

3.1 Eksamensveiledning fra Utdanningsdirektoratet

Eksamensdokumentene i perioden fra 2009 til 2019 blir utformet og utgitt av Utdanningsdirektoratet. Eksamen blir laget på bakgrunn av kompetansemålene i læreplanen for faget, og det legges opp til at dette er en individuell test av elevenes kompetanse i matematikk. Hver eksamen består av to deler som blir delt ut samtidig. Oppgavene i Del 1 skal løses uten hjelpemidler, bortsett fra skrivesaker, gradskive, linjal og passer, og elevene har to timer til rådighet. Del 2 må leveres i løpet av de fem timene elevene har til rådighet, og på denne delen er alle hjelpemidler (utenom internett og andre kommunikasjonsmidler) tillatt. Oppgavesettet inneholder elementer av ulik vanskegrad i både Del 1 og Del 2 av eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2019a). Alle deloppgavene ved eksamen gir uttelling på enten 0 poeng, 1 poeng eller 2 poeng (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.17)

3.1.1 Innhold Del 1

I Del 1 på eksamen vil oppgavene dukke opp i tre ulike former, kortsvarsoppgaver, flervalgsoppgaver og regneruter. De to første svarformatene er det kun sluttsvaret som elevene blir målt på, ikke prosedyren bak oppgaven. Disse oppgavene krever kun at elevene fører inn korrekt svar, eller krysser av for det rette alternativet. I regneruteoppgaver blir elevene målt både på fremgangsmåte og svar for å få full poenguttelling.

3.1.2 Innhold Del 2

I Del 2 består av en del oppgaver som er delt inn i flere delspørsmål. Oppgavene og de fleste delspørsmålene vil kunne løses uavhengig av hverandre. Del 2 inneholder oppgaver som prøver både bredden og dybden i elevenes matematiske kompetanse (Utdanningsdirektoratet, 2019a). I motsetning til Del 1 skal Del 2 ikke føres inn direkte på oppgavedokumentet, men føres inn med penn på innføringsark. Del 2 krever mer enn del 1 både når det gjelder arbeidsmengde og vanskegrad (Bjørnset m.fl., 2018).

Del 2 tar utgangspunkt i flere dagligdagse situasjoner og eventuelt matematikkfaglige temaer. Oppgavene vil derfor være mer tekstpreget og tar i bruk hverdagslige problemstillinger som elever må gjøre om slik at de kan løses matematisk. Nødvendig mellomregning og forklaring må tas med i rimelig omfang for å vise hva man har gjort, akkurat som for regneruter i Del 1. I opplæringen bør elevene øve seg på å vise fremgangsmåter og reflektere rundt svar og løsningsmetoder. Veiledningen presiserer at elever bør unngå å bare oppgi et svar uten fremgangsmåte (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s. 8).

3.1.3 Kompetanser som måler elevene på tvers av alle Del 1 og Del 2

Utdanningsdirektoratet skriver at gjennom hele eksamenen vil eleven bli vurdert på tre kategorier for matematikkkompetanse som går på tvers av læreplanmålene. Den ene kategorien er *begreper, forståelse og ferdigheter* som er helt grunnleggende i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.13). Den går kort utpå at elever kjenner igjen, forstår og håndterer matematiske begreper. «Videre forventes det at eleven kan avkode, oversette og behandle blant annet symboler og formler» (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s. 13). Innenfor måloppnåelse for karakteren 2 når det gjelder kompetansen *begreper, forståelse og ferdigheter*, står det at eleven skal kunne «noe fag- og begrepsforståelse og kan bruke den i enkel ferdighetsregning», og «kan bruke enkle, oppstilte og standardiserte metoder, fremgangsmåter og formler» (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.15). Termen formel/formler blir omtalt eksplisitt 19 ganger i eksamensveiledningen.

Det neste er *problemløsning* som går utpå hvordan eleven bruker kunnskaper og ferdigheter på ulike matematiske problemstillinger og ser sammenhenger i faget og mellom læreplanens hovedområder. Ifølge Utdanningsdirektoratet (2019, s.14), er kategorien *problemløsning* av tre kategorier, den mest sentrale kategorien for sensors vurderingsgrunnlag. Ifølge eksamensveiledningen fra Utdanningsdirektoratet (2019a, s.6) skal eksamen teste elevens evne til problemløsning og resonnement både i Del 1 og Del 2. Eksamensveiledning skriver at «Problem» kan også forstås relativt. Det som er et problem for én elev, kan oppleves som elementært for andre elever, avhengig av på hvilket nivå de befinner seg (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.13). Det skriver også at problemløsning går også ut på hvordan eleven bruker kunnskaper og ferdigheter på ulike matematiske problemstillinger og ser sammenhenger i faget og mellom læreplanens hovedområder. I eksamensveiledningers står at det vil forekomme oppgaver hvor det er «full metodefrihet» (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.8), og man kan anta at slike vil oppgaver ikke vil ha en forutsigbar og velkjent tilnærming, og det er utydelig hvilke løsningsmetoder eleven kan bruke. Til slutt vil problemløsning også beskrive elevens evne når det gjelder å lage en matematisk modeller ut ifra en oppgavetekst.

Det siste er kategorien *kommunikasjon*. Denne kategorien beskriver blant annet i hvilken grad eleven klarer å sette seg inn i en matematisk tekst og kan uttrykke seg skriftlig ved hjelp av det matematiske symbolspråket. Det er viktig at eleven viser fremgangsmåter, argumenterer og forklarer den matematiske løsningen. Disse kompetansene kan ikke forstås adskilt, fordi de flyter over i hverandre. I hvilken grad elevene mestrer disse kompetansene, skal ligge til grunn når sensorene skal bruke faglige skjønn til å vurdere elevens prestasjon.

Eksamensveiledningen (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.15) har matrise som beskriver kjennetegn på måloppnåelse. For hvert område beskrives hva som kjennetegner måloppnåelse tilsvarende karakteren 2, karakterene 3 og 4 og karakterene 5 og 6. Gjennomgående i denne matrisen er at kompetansen som beskrives for de laveste karakterene, kan knyttes til algoritmiske løsninger, mens kompetansen som kreves for de høyere karakterene, kan knyttes oppgaver som krever problemløsningsheuristikker[4] (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.15).

3.2 Evalueringer av matematikkeksamener

Dette delkapittelet vil ta for seg tre eksterne evalueringer av matematikkeksamener på flere ulike aspekter. To av studiene evaluerer matematikkeksamener i bred skala, mens den tredje studien undersøker mer spisset mot algebraeksempler i eksamen. Likevel er alle rapportene innom evaluering av algebraområdet, og alle undersøker eksamens vanskegrad basert ulike tilnærminger. Jeg skal nå forsøke å redegjøre for delene av rapportene som er relevant for masteroppgaven.

3.2.1 Matematikksenterets eksamensrapport – Klassifisering ut fra kompetansemål og vanskegrad

Matematikksenteret gjorde en bred evaluering på alle matematikkeksamener fra perioden 2009 til 2014 gjennom flere problemstillinger. Jeg tar bare for meg enkelte spørsmål i rapporten som kan være relevant for arbeidet mitt.

- Spørsmål 1. Er eksamensoppgavene forankret i kompetansemålene i læreplanen?
- Spørsmål 2. Har oppgaver knyttet til enkelte kompetansemål større vanskegrad enn andre?

I tilknytning første spørsmål ble alle deloppgaver fra de seks eksamenssettene klassifisert ut fra tilhørighet til ett eller flere kompetansemål for 10. trinn i læreplanen. I figur 5 ser man et utdrag for hvordan klassifiseringen ut fra kompetansemål ble knyttet til deloppgavene på eksamen i 2014. Kulepunktene i kompetansemålene er nummerert og blir brukt som referanse i dette avsnittet (se vedlegg 2).

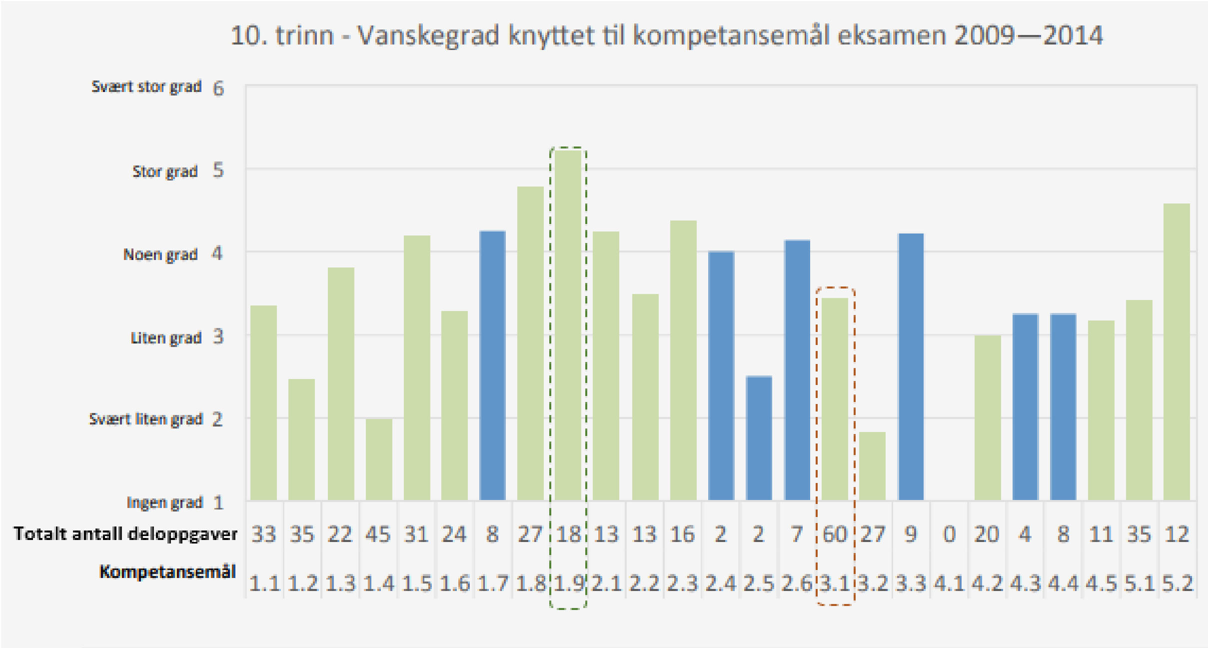
Klassifisering 10. trinn våren 2014																						
Del 1																						
Oppgave	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	4a	4b	4c	4d	5a	5b	6	7a	7b	8a	8b	9
Poeng	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	0,5	0,5	1,0	0,5	1,0	1,0
Kompetansemål	1.4	1.4	1.4	1.4	3.2	3.2	3.2	3.2	1.1	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2	1.6	1.5	1.1	1.2	1.2	4.4	4.4	1.6
																1.6	1.4	1.3	1.3		4.5	1.8

10	11	12a	12b	13a	13b	13c	14	15a	15b	16	SUM
0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	3,0	1,0	1,0	1,0	24
3.1	1.4	1.5	1.5	5.1	5.1	5.1	2.2	2.3	2.3	1.5	
	3.1		1.6		5.2	5.2				3.1	

Figur 5: Klassifisering ut ifra kompetansemål for eksamen 10. trinn 2014 (Andersen, 2015, s.5)

I tilknytning til problemstillingen,” Har oppgaver knyttet til enkelte kompetansemål større vanskegrad enn andre?», har matematikksenteret rangert de kompetansemålene inn ulike vanskegrader innenfor seks rangeringer, fra «ingen grad» til «svært høy grad» av kompleksitet og kognitiv innsats. Hver rangering hadde kjennetegn med typiske oppgavebeskrivelser. Dette er de samme vanskegradene som knyttes til problemløsning som ble nevnt og beskrevet i teorikapitlet *2.5 Problemløsning – oppgave som er mer kognitivt krevende*. Der ble det lagt frem at oppgaver med problemløsning var mer kognitivt krevende (Andersen m.fl., 2015, s. 12). Hvert kompetansemål ble vurdert og plassert innenfor de seks ulike rankene av vanskegrad.

Av alle oppgavene i eksamenssettene som ble plassert innenfor læreplanens kompetansemål ble det plassert flest oppgaver innenfor kompetansemål 3.1. I figur 6 nedenfor ser man at det var observert 60 deloppgaver knyttet til kompetansemål 3.1 i eksamenssettene fra 2009 til 2014. Dette er oppgaver der «eleven skal kunne gjere overslag over og berekne lengd, omkrins, vinkel, areal, overflate, volum, tid, fart og massetettleik og bruke og endre målestokk» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 9). Av oppgavene som ble plassert innenfor kompetansemål 3.1 ble de generelt rangert som «liten grad» av kompleksitet og har lavere krav til kognitive ferdigheter. Kjennetegn for oppgaver innenfor liten vanskegrad er at de er enkle sammensatte og standardisert oppgaver, som kan løses ved hjelp av velkjente løsningsprosedyrer (Andersen m.fl., 2015, s. 13). Slike oppgavekriterier vil ifølge Björkqvist (2003), ikke være oppgaver knyttet til problemløsning. Det betyr at oppgavene knyttet til kompetansemål 3.1 er lite problemorienterte og er dermed mindre kognitivt krevende.



Figur 6: Her er vanskegrad knyttet til kompetansemål i eksamen 10. trinn presentert i perioden 2009-2014. Søyler for kompetansemål med frekvens ti og høyere har grønn farge, mens søyler for kompetansemål med lavere frekvens enn ti har blå farge. Det er markert ut to kompetansemål hvor den ene hadde høyest rangering av vanskegrad, og den andre hadde høyest totalt antall deloppgaver innenfor sitt kompetansemål. Kompetansemål 1.9 som innholder problemløsning i kompetansebeskrivelsen har den høyeste rangering av vanskegrad av alle kompetansemål, mens majoriteten av alle deloppgavene som hadde tilhørighet kompetansemål 3.1 under «måling» ble rangert innenfor vanskegrad 3 (Andersen m.fl., 2015, s. 15)

Figur 6 viser videre at den høyeste klassifiseringsverdien av vanskegrad er gitt knyttet til kompetansemål 1.9. Det er det eneste kompetansemålet som inneholder problemløsning i sin kompetansebeskrivelse. Det betyr at deloppgaver som er knyttet til problemløsning i stor grad har stor kompleksitet og stiller høye krav til kognitive ferdigheter (Andersen m.fl., 2015, s.15).

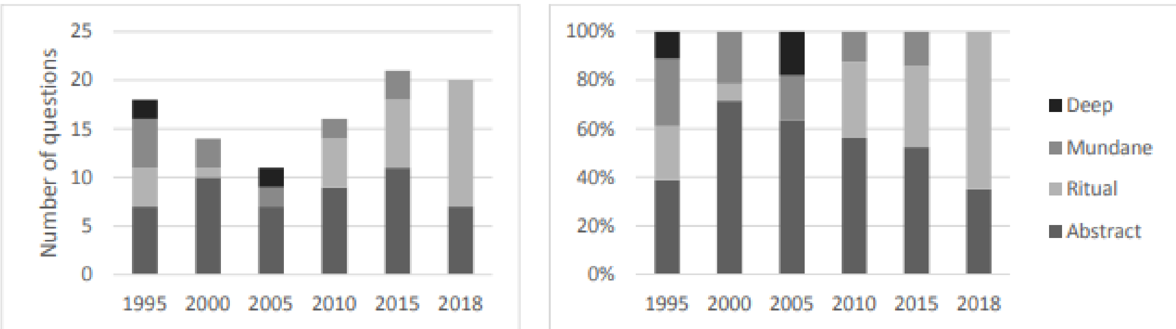
3.2.2 Studie av algebraoppgaver på eksamener fra 1995-2018

I en studie gjort av Gray m.fl. (2019), har de gjennomgått norske matematikkeksamener fra perioden 1995 til 2018. Ved bruk av definisjonen av algebra fra TIMSS sitt rammeverk har de klart å identifisere algebraoppgaver i hvert eksamenssett. Algebraoppgavene har blitt analysert i et rammeverk som er tatt fra Morgan og Tangs (2016) studie som fordeler oppgavene innenfor fire ulike oppgavetyper som *abstrakte, rutinepregede, dagligdagse* og *dype*[5] (Gray m.fl., 2019s. 4). Den første typen er abstrakte algebraoppgaver. Dette var oppgaver som ikke involverte en matematisk kontekst, men var mer rene regne- og manipulasjonsoppgaver. Den andre typen er oppgaver som er betegnet som rutinepreget, var tekstoppgaver som krever fremgangsmåter og løsningsregler som

[5] Oversetter de engelske kategoriene som Morgan og Tang (2016) kaller for *abstract, ritual, mundane og deep til: abstrakte, rutinepregede, dagligdagse, og dype.*

bør være innlært hos elevene. Den neste typen er oppgaver som inneholder ukjente elementer, i form av tekstoppgaver med bredere dagligdags kontekst, men som likevel er lette å løse. Den siste oppgavetypen er oppgaver som er mer krevende å løse. Oppgaver som ble kodet som *dype* var mer sammensatte oppgaver og krever engasjement hos eleven for å klare å løse oppgaven. Dette er fordi konteksten i oppgaveproblemet er seg selv lite kjent fra en normal matematisk diskurs, og skiller seg vekk fra andre oppgavekontekster der elevene er vant med å bruke velkjente rutineferdigheter for å løse oppgaven. Her er det lagt opp til at eleven ikke skal ta i bruk ferdigpuggede løsningsmetoder for å klare oppgaven, men heller må ta i bruk ikke-rutinemessige metoder for å løse oppgaven (Morgan & Tang, 2016, s.155, min oversettelse). Selv om oppgavene innenfor kategorien *dype* ikke blir direkte blir koblet til problemløsning i studiene til Morgan og Tang (2016) eller Gray m.fl. (2019) virker karakteristikken rundt disse oppgavene veldig like til Björkqvists (2003) definisjon av oppgaver som krever problemløsning.

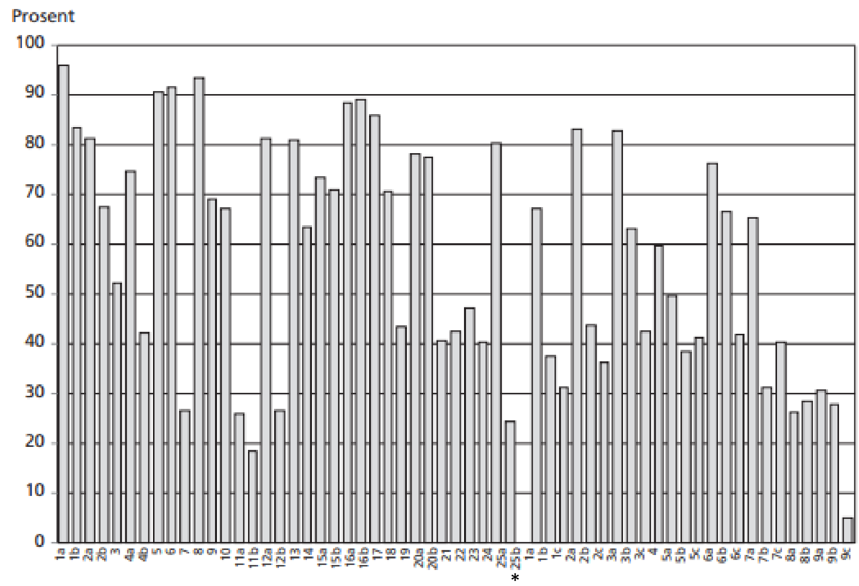
I figur 7 vises en trend av nedgang av andel *dype* algebra-oppgaver. Fra 2005 og utover var det ingen algebraoppgaver innenfor denne oppgavetypen. Man ser også en større opphoping av rutinepregede algebraoppgaver fra perioden 2010 til 2018.



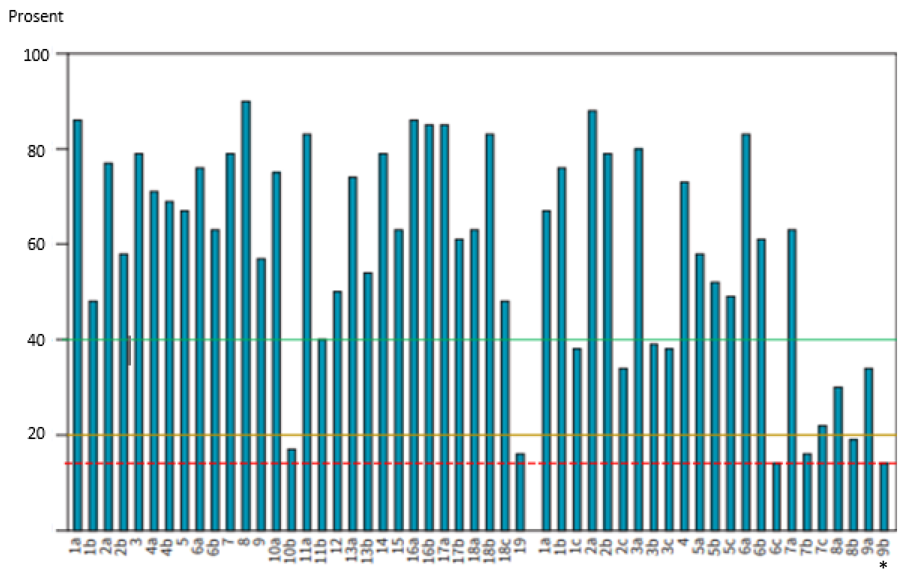
Figur 7: Andel ulike typer av algebraoppgaver vist frem (til venstre) i form av antall og (til høyre) prosentandel (Gray m.fl., 2019, s.6)

3.2.3 Fafos evalueringer av eksamenen i 2017 og 2018

Fafo er en forskningsorganisasjon som har fått i oppdrag av Utdanningsdirektoratet å gjøre en ekstern evaluering av kvaliteten rundt eksamenen i matematikk fra 2017 til 2019. De evaluerer eksamen i en bred skala, så jeg viser bare de resultatene som jeg mener er mest relvante for arbeidet mitt. Fafo har tilnærmet vanskegraden på eksamensoppgavene ved å se på gjennomsnittskåren hos elever på hver deloppgave både i 2017 og i 2018 etter en samlet sensorvurdering av eksamensbesvarelser. Tabellene nedenfor viser gjennomsnittet av elevenes poengskår for eksamen i 2017 og 2018. 2017-materialet er samlet inn fra sensorer i Oslo og Akershus. 2018-materialet er innsamlet av Utdanningsdirektoratet i forbindelse med deres IRT-analyse. Tabellene gir et godt bilde på hvilke oppgaver som er mer krevende enn andre.



Figur 8. Vanskegrad: elevenes gjennomsnittlige poengskår på oppgavene i eksamenssettet i 2017 (Andresen m.fl., 2017, s.52).



Figur 9. Vanskegrad: elevenes gjennomsnittlige poengskår på oppgavene i eksamenssettet 2018 (Bjørnset, Fossum , Rogstad , Smestad , & Talberg, 2018, s.83)

Innholdet i oppgave 25b) i 2017-settet (Del 1) og oppgave 9b i 2018-settet (Del 2) beskrev de som mønsteroppgaver som arbeidet med generalisering, der eleven må finne frem et generelt utrykk for mønstrene. I begge tabellene ser man mønsteroppgave 25b) og 9b) var et av de vanskeligste på eksamenen. Andresen m.fl. (2017, s.67) hevdet at de fleste lærebøkene på 10. trinn som de gikk igjennom ikke behandler figurtall og tallmønstre. Liknende oppgaver fantes heller ikke på de siste forlagsprøvene eller eksamensoppgavene som de gikk igjennom. Derfor ble mønsteroppgaver i Fafos rapporter (Andresen m.fl., 2017; Bjørnset m.fl., 2018) vurdert som problemløsende.

4 Metode

Dette studiearbeidet har som formål å se på hvordan ulike deler av algebrapensum blir testet gjennom oppgavene til avsluttende på eksamen på ungdomsskolen. Studien har også vært interessert i skille mellom algebraoppgaver som krever problemløsning, og hvilke som ikke krever problemløsning. I dette kapittelet vil metodiske valg, fremgangsmåter og gjennomføring av datainnsamling bli presentert og begrunnet gjennom et hermeneutisk vitenskapssyn.

4.1 Hermeneutisk vitenskapssyn

Jeg vil plassere min studie innenfor hermeneutisk vitenskapssyn. Begrepet hermeneutikk blir ofte kalt for *fortolkningslære* (Grønmo, 2016). Hermeneutikk er en vitenskapsteoretisk tilnærming som ofte blir tatt i bruk i studier av tekster, og det går ut på at leseren skaper en mening når man tolker en tekst (Bukve, 2016). Siden forskeren står overfor egen fortolkning av tekstinnholdet, anses det sentralt innenfor en kvalitativ forskningstilnærming. I sammenheng med masteroppgaven vil forståelsen av eksamensdokumentene innebære et samspill mellom disse dokumentene og forskeren som tolker dem.

Forskerens for-forståelse har betydning for tolkning og forståelse av innholdet i dokumentene. For-forståelse kan betraktes som en ramme av egne erfaringer, ideer, faglige begreper og tidligere resultater fra forskning (Grønmo, 2016). Disse komponentene kan ses på som et viktig grunnlag av forståelsesberedskaper forskeren tar med seg inn i forskningsprosessen. I denne masteroppgaven er min forforståelse av begrepet algebra helt avgjørende, nærmere hvilket innhold som anses innenfor algebrabegrepet. Min forforståelse blir brukt særlig i startfasen av analyseprosessen når oppgavetekstene som jeg mener er algebraoppgaver, skal kodes intuitivt. Dette vil utdypes videre i senere metodekapittelet.

Hermeneutikk forklarer også forskningsprosessen som en aktivitet. Alle enkeltutsagn, enkeltelementer som studeres i tekster blir igjen forstått som en del av en større helhet i for-forståelsen. Man bruker den kunnskapen man har fra for-forståelsen til å fortolke og gi mening til det temaet som studeres. De opplysningene som har blitt studert i enkeltelementene, glir inn i for-forståelsen og justerer helhetsbildet. Slik foregår en vekselvirkning mellom forståelse av helheten og enkeltelementene som man kaller for *den hermeneutiske spiral* (Befring, 2015; Jacobsen, 2015).

4.2 Innholdsanalyse

De fleste som analyserer kvalitative data, gjennomfører en innholdsanalyse (Larsen, 2017). Siden det er innholdet i eksamensdokumentene som skal undersøkes, er det opplagt å plassere denne studien innenfor en kvalitativ innholdsanalyse. Algebra som begrep er ikke entydig definert (Kongelf, 2015, s. s.85), og man må derfor gå mer i dybden i tekstinnholdet for å klare å svare på problemstillingen.

Studien kan derfor plasseres innenfor kvalitativ undersøkelse fordi man går mer i dybden av det feltet som skal studeres (Grønmo, 2016).

En vanlig måte å arbeide med slike analyser på, er følgende:

- Tekstene kodes
- Kodene klassifiseres i temaer eller kategorier
- Datamaterialet sorteres etter disse kategoriene
- Datamateriale undersøkes for å avdekke meningsfulle mønstre eller prosesser
- Finne mønstre ses i lys av beslektet forskning og teorier, og overførbar kunnskap etableres

I korte trekk har denne rekkefølgen blitt fulgt kronologisk i studieanalysen. Koding og klassifisering er viktig som et analytisk hjelpemiddel. Ved å kode og klassifisere oppdager man lettere mønstre og tendenser, altså å tolke funnene våre (Larsen, 2017, s.114). I tillegg handler denne fasen om å redusere datamengden. Det er viktig at man luker ut informasjon i teksten som ikke er relevant i denne fasen dersom de ikke belyser problemstillingen. Ved at jeg i denne studien velger å fokusere på algebraemnet uttrykt i oppgaveform i eksamenssettene, var det essensielt å finne frem oppgaver som i stor grad knyttes til algebra og samtidig luke vekk oppgaver som bunner i andre matematikk-kompetanser.

4.3 Utvalg av datamateriale til analysen

Problemstillingen avgrenser seg til nasjonale eksamener i perioden 2009–2019. Eksamensoppgavene fra de tre siste årene fikk jeg fra Utdanningsdirektoratet. Tidligere eksamenssett med løsningsforslag ligger tilgjengelig på nettsiden matematikk.net (matematikk.net/side/Eksamensoppgaver). I datamaterialet ble det analysert totalt åtte eksamenssett fra perioden 2009-2019, med unntak av oppgavesett fra 2012, 2013 og 2016. Årsaken til at disse oppgavesettene ikke ble inkludert i analysen, var begrenset tid og for å avgrense arbeidsmengden. Det at det er tre sett nær midten av tiårsperioden som ikke er med, vil si at mulige utviklingstrekk i løpet av perioden bør fanges opp likevel.

4.4 Forberedelser

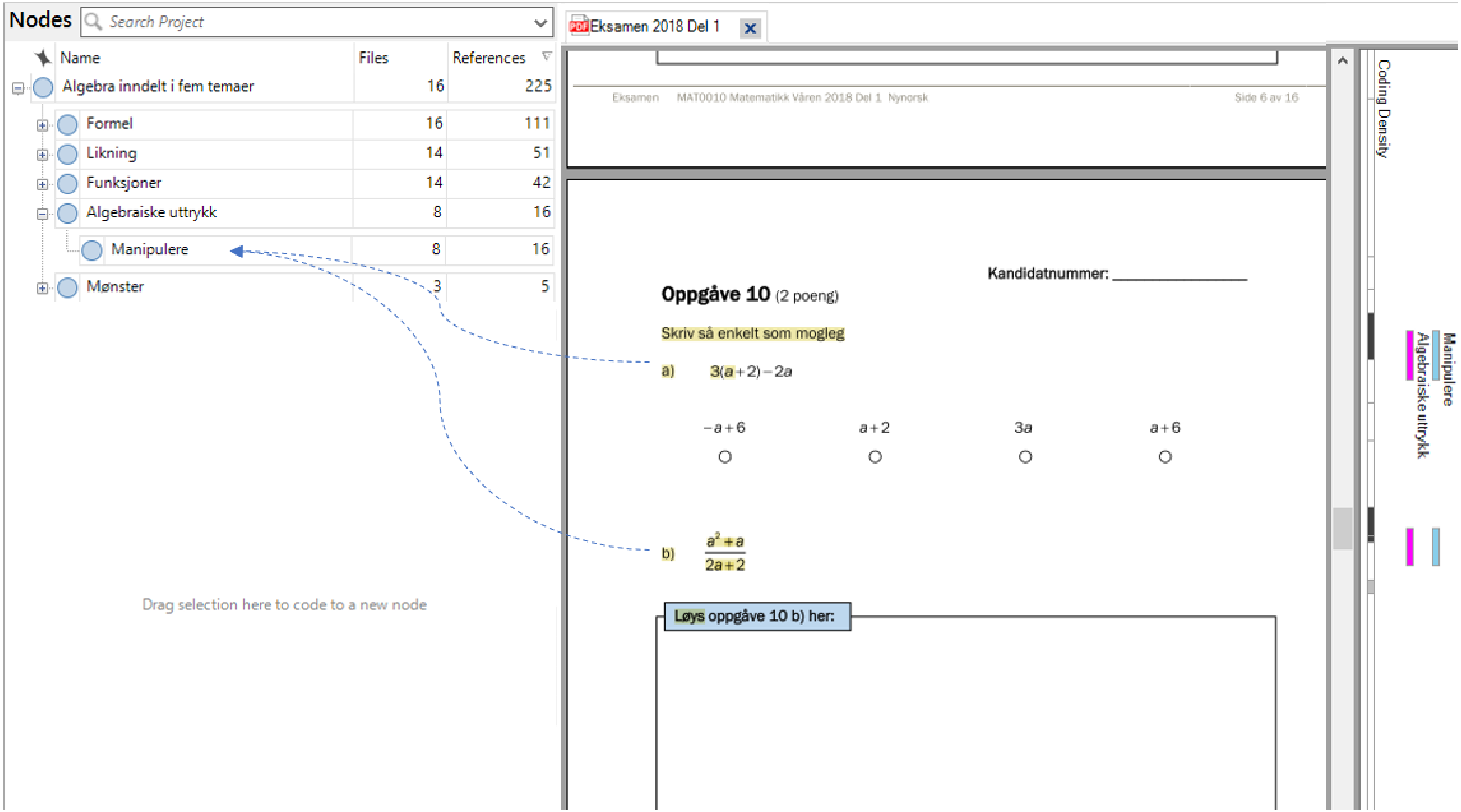
Før analysen kunne starte, var det en del forberedelser som måtte gjøres. Det var behov for å få et helhetsinntrykk om algebrafeltet fra et elevperspektiv. Det var et konkret behov for å undersøke hvordan elever opplever møtet med algebra i skolesammenheng, særlig hvilke tekstkomponenter som blir brukt i skolesammenheng. Den vanlige elev møter algebra i skolen i første rekke gjennom det som står i lærebøkene, men også gjennom hvordan lærerne tar utgangspunkt i læreplanen, og til slutt gjennom eksamen. Derfor ble et par eksamensoppgaver og et par lærebøker lest igjennom. Grunnen var å få et helhetsinntrykk rundt temaet og videre for å teste om eksamenssettene var forskbare. Lærebøkene, *Sirkel 10 A* og *B*, *Faktor 10* og *Nye Mega A* og *B* (Gulbrandsen, Løchsen, & Melhus, 2008a, 2008b; Hjardar, 2015; Torkildsen & Maugesten, 2008a, 2008b) ble lest, og alle hovedkapitler og delkapitler som kunne knyttes til algebra, ble registrert. Tilsvarende ble læreplanmål som kunne knyttes til algebra, markert. Tre eksamenssett ble lest igjennom, løst, lest på nytt mens det hele veien ble skrevet ned kommentarer for hver deloppgave som intuitivt ble vurdert som å være en algebraoppgave. Larsen (2017) hevder at det kan være lurt å lese igjennom datamaterialet flere ganger før en starter med koding og klassifisering. Det viste seg fort at algebraisk innhold kunne være en del av oppgaver der hovedemnet ikke var algebra, men sto i kontekst av geometri- og målingsoppgaver. Det gjelder både i oppgavesettene til eksamen (Utdanningsdirektoratet, 2013) og i lærebøkene. I læreplanen står det at algebra blir benyttet i forbindelse med andre hovedområder, blant annet geometri. Dette ble i etterkant gjennomgått med veilederne.

4.5 Dataprogrammet NVivo som analyseverktøy

Ved hjelp av dataprogram kan det være lettere å klassifisere og kode deler av dokumenttekstene slik at de gir mening og viser sammenhenger (Tjora, 2017). I denne studien har dataprogrammet NVivo 12 Pro blitt brukt i analysearbeidet. Dette programmet er bygget rundt to parallelle system, ett for koder og ett for dokumentene som skal kodes. Programmet lagrer koblinger mellom kodene og dokumentene. De digitale eksamenssettene som skal analyseres i studien, har blitt importert i programmet. Så er hvert oppgavesett blitt gjennomgått, og relevante tekstutdrag er blitt markert og gitt et kodenavn som jeg selv lager induktivt fra empirien (se nærmere omtale under). Man navngir kodene selv i programmet, gjerne med empirinære navn som ligger tett opp til tekstutdrag fra dokumentene som analyseres. Denne måten å starte kodingen på kaller Tjora (2018, s.39) for *empirinær koding.*

Når man har kodet alle dokumentene, sitter man igjen med et antall koder i en *kodeliste* sammen med alle dokumentene, samt alle koblingene fra ulike steder i dokumentene til kodene. Ved at programmet gir en oversikt over kodene, har det vært lettere å identifisere mønstre og tendenser i dataene.

Det gunstige med NVivo 12 Pro har vært at kodene som ligger i kodelisten, er lette å finne frem hvis man vil se igjennom dokumentene en gang til. Det er åtte eksamenssett som utgjør datamaterialet. Programmet gjør det enkelt å få en ryddig og oversiktlig struktur på dokumentene og kodene. Programmets anvendelighet har gjort at kodene i analysen kunne ha blitt presentert i veiledningsmøter, blant annet ved at man kan «skrolle» eller klikke seg fra den ene oppgaven til den neste. Ved at Nvivo holder telling på antall markerte tekstutdrag innenfor de ulike kategoriene, får man en grei oversikt over dataene i form av statistikk. I figur 10 nedenfor ser man en liste på venstre side av koder som er laget. Tallene under «References» representer eksamensoppgavene som har blitt kategorisert i de ulike kategoriene. Tallene under «Files» representer alle eksamensheftene som er med. I midten av figuren ser man selve eksamensdokumentet som blir analysert i programmet. Utdraget viser også hvordan en eksamensoppgave blir kodet til en ferdiglaget kategori. Begge deloppgavene i utdraget har blitt kodet innenfor «Manipulere» som er en underkategori til «Algebraiske uttrykk». Man kan også se at kodene er markert som en marg til høyre for eksamens-dokumentet på linje med de markerte deloppgavene.



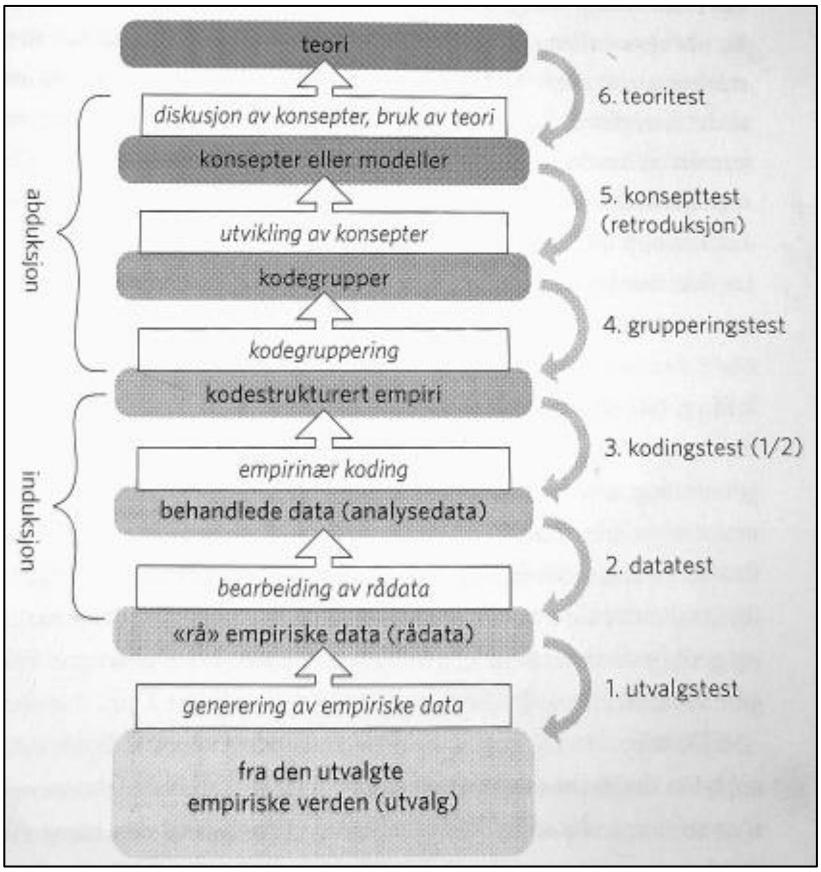
Figur 10. Utdrag fra NVivo 12 Pro av kodene på venstre side og eksamensdokumentene på høyre side. «References» representer antall deloppgaver som er kodet inn i kategoriene, mens «Files» representerer hvor mange eksamensdokumenter som er inkludert i analysen og har blitt registrert innenfor hver kategori.

4.6 Stegvis deduktiv-induktiv metode

Analysen denne studien kan knyttes til den stegvis deduktiv-induktiv metoden. Videre i oppgaveteksten vil denne metoden bli omtalt som SDI eller SDI-modellen. I korte trekk er SDI, ifølge Tjora (2017), velegnet for kvalitativ forskning med en induktiv fortolkende tilnærming, og spesielt rettet mot analytiske dataprogrammer som i mitt tilfelle er NVivo 12 Pro. Begreper som *induktiv*e og *deduktive* metoder blir brukt mye i denne modellen og trenger derfor en forklaring.

Induktiv bruker man om forskning som er oppdagende (eksplorerende) og/eller empiridrevet. Man bruker også induktiv om det å slutte fra et enkelt tilfelle (eller et begrenset antall enkelttilfeller) til en generell regel. Deduktiv bruker man om forskning som tar utgangspunkt i generelle, teoretiske forklaringer når man skal undersøke og fortolke enkelttilfeller i empirien. Man kan si i motsetning til induktiv at man i deduktiv slutter en fra generell regel til ett enkelttilfelle (Tjora, 2017).

SDI er en stegvis modell for kvalitativ forskning, hvor hovedprinsippet er en induktiv utvikling fra empiri til konsepter eller teorier, med deduktive trinnvise tilbakesteg (Tjora, 2017). Målet med metoden er å utvikle generelle konsepter fra enkelttilfellene i empirien (induktiv) for så kvalitetssikre at konseptene er forenlig med eksisterende teori (stegvis deduktiv). Oppsummert illustrerer modellen hvordan man jobber fra rådata stegvis mot teori.



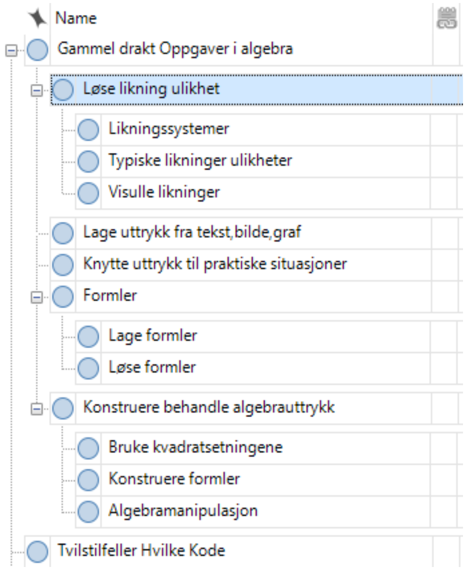
Figur 11: Stegvis-deduktive induktive metoden (SDI) (Tjora, 2018, s. 17)

Modellen som er vist over, kan gi inntrykk av at forskningsprosessen er fullstendig lineær, noe den for min studie ikke har vært. Larsen (2017) skriver at fasene i kvalitative studier går mye mer over i hverandre enn ved kvantitative metoder. Likevel er modellen et godt utgangspunkt for systematikk og fremdrift i et kvalitativt forskningsprosjekt. Jeg skal nå presentere en sammenfatning av hovedfasene av analyseprosessen i lys av SDI-modellen. I sammenfatningen av analyseprosessen vil jeg legge mest fokus på steg 3, 4 og 5. Dette var hovedfaser i analysen som i neste delkapittel, *Analyseprosessen,* vil bli forklart. I *Analyseprosessen* vil det i teksten være tall i parentes som refererer til de nummererte i stegnavnene til Tjoras modell (se figur 11) overfor.

4.7 Analyseprosessen

Empirinær koding i denne studien består av *generering av empirisk data* (1) av dokumentene til eksamensoppgavene i matematikk som blir utgitt på tiende klassetrinn (avgangseksamen fra ungdomsskolen). Eksamenssettene ble ført inn i dataprogrammet NVivo 12 Pro, og man kunne nå starte med å kode datamaterialet. Det ble som nevnt gjennomført en empirinær koding i første omgang (3). Med utgangspunkt i en induktiv tilnærming er den relevante oppgaveteksten i hver deloppgave kodet, og man unngår å trekke forhastede eller forhåndsdefinerte teoretiske konklusjoner (Tjora, 2017). På denne måten vil en induktiv metode muliggjøre interessante oppdagelser og avdekke sammenhenger uten å være påvirket av ulike forventninger eller teorier som en forsker vil mer eller mindre ta med seg i analysen. Det skal midlertid påpekes at i forskning klarer man ikke å forske med et helt åpent sinn. Man er til en viss grad forutinntatt med antakelser, kunnskap og tanker om fenomenet i forkant av analysen, som er påvirkende for alle valg man gjør i forskningsprosessen (Tjora, 2017). Dette kan assosieres med det hermeneutisk vitenskapssyn kaller for forforståelse til forskeren. Som tidligere nevnt ble det gjort forberedelser i forkant av analysen som kan være medvirkende for valg som er gjort.

Etter at de tre første eksamensheftene var blitt gjennomgått, satt jeg igjen med mange ulike koder og mange oppgaver som jeg var usikker på om de skulle være med eller ikke i analysen. Figur 12 viser et utdrag av hvordan noen av de første kodene i analysearbeidet så ut. Etter hvert som flere koder ble laget, oppfattet jeg dem på et tidspunkt lite strukturerte, og jeg var usikker på hovedtemaene jeg hadde laget. Derfor ble det behov for omgruppering av kodene innenfor noen kjente og tydelige hovedtemaer fra faglitteraturen.



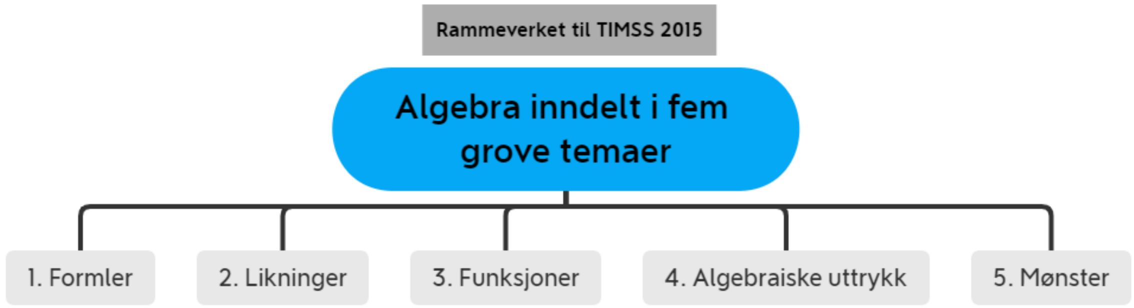
Figur 12: Utdrag fra Nvivo 12 Pro av empirinære koder

4.7.1 Kodegruppering

Det var altså behov å plassere oppgavene innenfor ulike temaer med teoretisk forankring. Man er nå i fasen hvor kodene må grupperes, også kalt *kodegruppering* i SDI-modellen (4).

Arbeidet startet da med å gå igjennom ulike teoretiske rammeverk som kunne gi en dekkende og tilstrekkelig ramme rundt temaet algebra. Lærerplanens hovedområder og kompetansemål ble vurdert, men dette rammeverket ga ikke en tilstrekkelig definisjon fordi temaet algebra har blitt gruppert med emnet aritmetikk (omtalt som «Tall og Algebra» i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013). I tillegg er hovedemnene «Tall og Algebra» og «Funksjoner» fortsatt separerte emner i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.3), i likhet med den gamle læreplanen L97 (Veiteberg, 1996).

Studien er delvis motivert av de svake resultatene i algebra fra TIMSS-testene fra 2015 (Utdanningsdirektoratet, 2016), så jeg bestemte meg som nevnt tidligere å ta i bruk TIMSS sin definisjon av algebra som rammeverk for seleksjonen av algebraoppgaver i eksamenene. Det som er gunstig med rammeverket til TIMSS (UiO, 2015), er at det definerer algebra som et selvstendig emne, i motsetning til LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013). Figur 13 nedenfor illustrerer hvordan TIMSS deler algebra inn fem temaer.

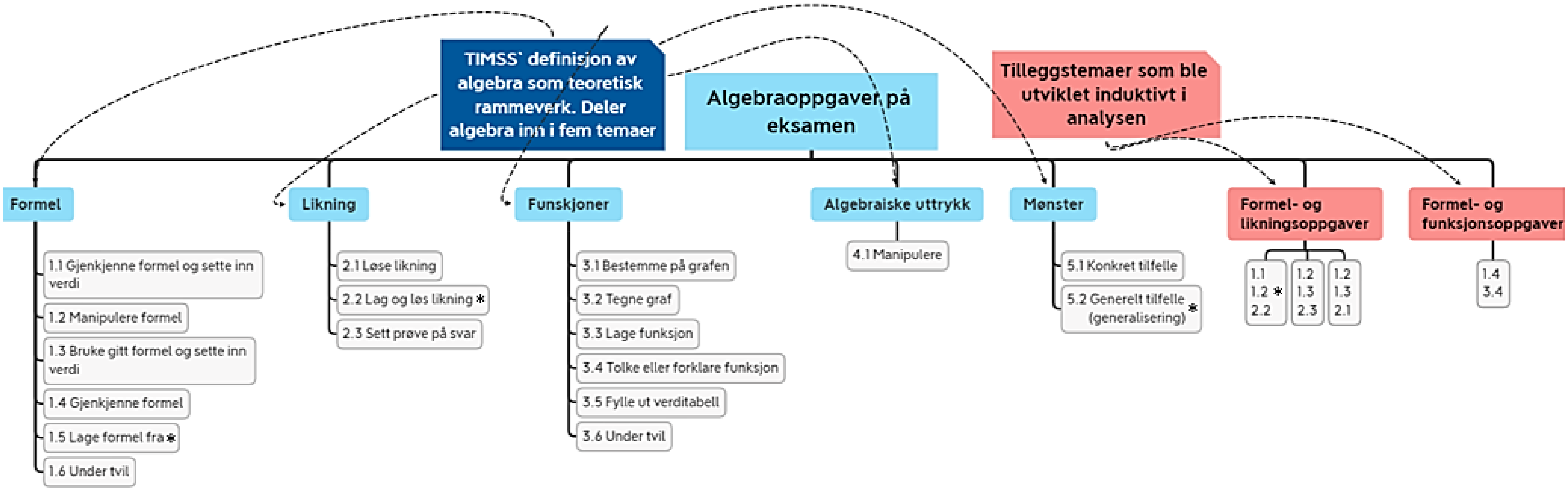


Figur 13: TIMSS` inndeling av algebra i fem temaer

Dette var temaer i algebra som ble vurdert som dekkende nok for de empirinære kodene fra tidligere faser. Kodene ble sortert innenfor en av de fem temaene. Koder som fortsatt var usikre, ble plassert under «tvil». Noen av de fem temaene opplevdes som svært dekkende til de fleste algebraoppgavene. Men det er ikke nok å plassere kodene under disse fem grove temaene. Formler, likninger, funksjoner, algebraiske uttrykk og mønster opplevdes likevel som *for* generelle temaer som ikke beskrev deloppgavene godt nok. Det var fortsatt behov å samle de opprinnelige kodene innenfor snevrere og mer konkrete kategorier som kunne ligge under de fem hovedtemaene i algebra.

4.7.2 Konseptutvikling

Det er viktig å presisere i den neste fasen (5, se tilbake på figur 11) av analysen at selv om temaene til TIMSS-rammeverket ble vurdert som dekkende for sorteringen til de empirinære kodene, ble det ikke gjort en dypere granskning i hva TIMSS sine dokumenter eller teori generelt vektlegger i disse fem temaene som er listet over. Årsaken til det var at det fortsatt var ønskelig å holde fase fem så induktiv som mulig og ikke la seg påvirke av teori. Fase fem kaller Tjora for *konseptutvikling*. De opprinnelige empirinære kodene skulle i denne fasen bli slått sammen til mer generelle underkategorier til temaene (Grønmo, 2016). Ved å holde på det induktive premisset i fase fem mener man at man fortsatt skal utvikle konseptene gjennom induksjon og ikke presse teorier på dataene. Jeg som forsker skulle da lage mer praktisk generelle kategorier, basert på min intuisjon og at de beskrev empirien til en viss grad. Ved utvikling av generelle underkategorier ble mine egne bakgrunnskunnskaper om fenomenet løftet frem i samspill med eksamensdokumentene. I denne fasen ble det ved induktiv tilnærming utviklet til sammen 18 delkategorier under de fem hovedtemaene til TIMSS-Rammeverket. Figur 14 viser alle underkategoriene som ble utviklet under hvert hovedtema. I tillegg ble det utvidet to hovedkategorier til fordi noen av oppgavene ikke kunne legges inn under bare én av de fem opprinnelige hovedkategoriene. De to nye hovedkategoriene er kalt «Formel- eller likningsoppgaver», og «Formel- eller funksjonsoppgaver», og er fremstilt i de røde boksene i figur 14. Det ligger i navnene at de fanger opp oppgaver som både faller inn under formel og i tillegg henholdsvis likninger eller funksjoner.



∗ markerer underkategoriene hvor det ble observert problemløsningsoppgaver

Figur 14. De 18 underkategoriene som ble utviklet under sine respektive temaer fra TIMSS-Rammeverket. I tillegg ble det utviklet to stillingskategorier på likt nivå med TIMSS' temaer (til høyre i rødt). Tilleggskategoriene er kategorier som genererer en kombinasjon av de to hovedtyper. Dette var oppgaver som kombinerte flere underkategorier på tvers av temaene. Underkategoriene som ligger til grunn for tilleggskategoriene er presentert med referansenummer.

Grunnen til dette var at det var deloppgaver i analysen som var vanskelig å skille mellom to hovedkategorier som deloppgaven skulle falle under. For eksempel for «Formel- eller likningsoppgaver» var det oppgaver som ble klassifisert til underkategoriene 1.1 og 1.2, under formel, klassifisert sammen med underkategorien 2.2, som ligger under likning (se figur 14). Det var fordi oppgavene kunne betraktes både som en formeloppgave og som en likningsoppgave. Ved å holde på det induktive premisset i analysen ble det gjennom induksjon utviklet to «både-og»-kategorier for disse oppgavetypene. Hovedkategoriene og underkategoriene utgjorde på denne måten rammeverket for klassifiseringen av de enkelte oppgavene.

4.7.2.1 Prinsipielt om de ulike underkategoriene.

De fleste navnene til underkategoriene starter med et verb som utrykker at elevene må utføre en form for handling for å løse oppgaven. Noen av underkategoriene kan være selvforklarende. Likevel vil jeg her forsøke å si noe prinsipielt som ligger til grunn for de ulike underkategoriene i figuren 14. Underkategoriene blir videre referert med navn og nummer som man kan se tilbake på i figur 14.

For kategoriene som ligger under «formel», er det oppgaver som krever at eleven kjenner til flere av velkjente formler for figurer innenfor lengder, areal, volum og vei-fart-tid, formelregning og formelmanipulering. Kategori 1.1, «Gjenkjenn former og sett inn verdi», krever at eleven husker en velkjent formel, representerer den i oppgaven og sette inn verdier fra oppgaveteksten i formelutrykket, og deretter foretar en utregning. Kategori 1.3, «Bruke gitt formel og sette inn verdi», går ut på at formelen er oppgitt i oppgaveteksten og eleven skal kun sette inn variabler i formeluttrykket, for så å regne ut formeluttrykket. Kategori 1.2, «Manipulerer generell formel», tester elevens evne til å manipulere formelutrykk. Kategori 1.5, «Lage formel», krever at eleven lager et formeluttrykk fra en tekst eller en presentert figur i oppgaven.

For kategoriene som ligger under hovedtemaet «likning», gjaldt det oppgaver hvor elevene skulle prinsipielt løse likningsuttrykk. Kategori 2.1, «Løse likning», er oppgaver som inneholder en oppstilt likning som elevene skal løse. Noen oppgaver inneholder ikke en oppstilt likning, men en oppgavetekst hvor problemet kunne blitt løst gjennom likningsløsning. Eleven må da lage en likning fra oppgaveteksten for så å løse den. Disse oppgavene ble plassert under kategori 2.2, «lage og løse likning». Kategori 2.3, «sette prøve på svaret», var oppgaver der svaret på den ukjente var gitt i teksten, og eleven må kontrollere om svaret er riktig gjennom likningsløsning.

For kategoriene under hovedtema «funksjon» gjelder generelt oppgaver der elevene skal lage funksjoner som beskriver numeriske sammenhenger og praktiske situasjoner, beskrive og tolke dem og oversette mellom ulike representasjoner av funksjoner, som grafer, tabeller, formler og tekster. Kategori 3.1, «Bestemme på graf», er oppgaver der eleven må lokalisere et punkt på en graf i et koordinatsystem. Kategori 3.2, «Tegne graf», skal elevene tegne en graf fra et presentert funksjonsuttrykk eller en verditabell i oppgaven. Kategori 3.3, «Lage en funksjon», skal elevene lage en funksjon selv eller velge en funksjon ut fra fire alternative funksjoner som representer en oppgavetekst, tabell eller en graf. Kategori 3.4, «Tolke eller forklare en funksjon», skal elevene tolke eller forklare skriftlig hva som ligger til grunn for et funksjonsuttrykk tatt fra en praktisk sammenheng.

Algebraiske uttrykk har bare én kategori, 4.1, som har blitt kalt «Manipulere». Oppgaver innenfor denne kategorien handler om å manipulere algebraiske uttrykk, enten ved å forenkle dem eller ved å faktorisere uttrykk.

For de to kategoriene under «mønster» gjelder dette oppgaver som behandler geometriske figurmønster eller tallmønster. Kategori 5.1, «Konkret tilfelle», skal eleven finne ut konkret hva det neste tallet eller figuren er i mønsteret. Elevene må da gjenkjenne sammenhengen i mønsterets utvikling for så å regne seg frem til svaret. Kategori 5.2, «Generelt tilfelle (generalisering)», handler om å lage et generelt utrykk for den n-te figuren eller tallet i mønsteret.

Av de to utvidede hovedkategoriene «Formel- eller likningsoppgaver» og «Formel- eller funksjonsoppgaver» ligger det til grunn en flerkombinasjon av ulike underkategorier fra de gjeldende TIMSS-temaene. For eksempel under «formel- eller likningsoppgaver», gjaldt det oppgaver som man enten kunne betrakte som en formeloppgave hvor elevene må gjenkjenne en formel og sette inn verdier (kategori 1.1), for så gjøre en formelmanipulering (kategori 1.2) for løse oppgaven. Eller så kan man betrakte oppgaven som en uoppstilt likning, der eleven må representere problemet i figuren eller teksten i form av en likning som må løses (kategori 2.2). Løsningsmetodene for begge betraktningene er veldig like etter algebraisk notasjon og anses her som er likeverdige.

4.7.3 Vurdering av oppgaver som er problemløsende og oppgaver som er rutinepreget

Masteroppgaven har som mål å undersøke hvor mye problemløsende oppgaver det har vært i eksamenssettene. For å kunne vurdere om en matematikkoppgave krever problemløsning eller ikke, må det være definert hva det er som er et matematisk problem. I denne studie har man støttet seg til definisjonen om at dersom elevene møter på en oppgave der de ikke straks har en tydelig eller velkjent løsningsmetode som kan brukes i løsningen, vil oppgaven bli vurdert som en problemløsningsoppgave (Björkqvist, 2003; Polya, 1981; Schoenfeld, 1985).

Eksamensveiledningen skriver at en strategi for problemløsning er hvordan eleven bruker kunnskaper og ferdigheter på ulike matematiske problemstillinger mellom læreplanens hovedområder. I denne analysen har jeg ikke funnet algebraeksempler i oppgavesettene som har invitert til ferdigheter på tvers av flere hovedområder. Likevel har jeg valgt ut noen prinsipielle krav for oppgaver som behandler problemløsingsstrategier. I tillegg til definisjonen til Björkqvist (2013) er det lagt ved tre kriterier som støtter opp under problemløsningsstrategier som blir tatt med i vurderingen om oppgavene er problemløsende. Disse kriteriene går ut på at eleven som møter på en eksamensoppgave må:

- Gjøre en modellering fra oppgaveteksten eller figuren(e) til et matematisk uttrykk (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.1)
- Løse deloppgaven i flere trinn (Andersen m.fl., 2015, s.12)
- Tolke om løsningssvaret er gyldig i forhold til det formulerte spørsmålet (Grønnmo, 2005, s. 39; Utdannigsdirektoratet, 2013, s.1)

Disse prinsippene kan ikke forstås adskilt fordi de ofte flyter over i hverandre i en problemløsningsoppgave. Disse oppgavebeskrivelsene er ifølge Andersen m.fl. (2015) mer kognitivt krevende for elevene. Av de 18 underkategoriene ble det vurdert fire underkategorier som inneholder problemløsningsoppgaver. I figuren er de gjeldende kategoriene markert med en stjerne (∗) i figur 14 på side 38.

Alle de andre kategoriene som ikke ble vurdert som «problemløsende», kan man anse som «rutineoppgaver». Prinsipielt for rutineoppgavene er at de involverer reproduksjon av lærte fakta, drillstoff, bruk av algoritmer, regler, formler eller definisjoner. Algoritmer, manipulering og enkle prosedyrer som oppgavene krever, skal være kjent fra undervisningen. De fleste oppgavene er tydelige på hvilke prosedyrer eleven skal bruke. For noen tekst- eller figuroppgaver er ikke løsningsmetoden gitt ut eksplisitt, men oppgavene er så enkelt sammensatt i uttrykket at den krever at eleven gjenkjenner velkjente løsningsprosedyrer i oppgaveløsningen. I tråd med Andersen m.fl. (2015, s.12) oppgavebeskrivelser for «enkle oppgaver», er rutineoppgavene vurdert som mindre kognitivt krevende for elevene.

4.7.4 Konsepttest

I den siste fasen av bearbeidingen av dataene har jeg gjort det Tjora (2017) kaller for en konsepttest. En konsepttest består av en refleksjon over hvorvidt de konseptene som er laget i analysearbeidet, er abstrakte nok eller adekvate nok til å representere forskningen som *funn*. For å klare å avgjøre dette må man ta i bruk deduktiv strategi – ved å la det teoretiske få større styring. Man må kontrollere om konseptene som er laget, om de er gode nok ved å se om det fins eksisterende teori som er forenelig med de tankene som ligger bak konseptutviklingen. Finnes det noen teoretiske bidrag som allerede omtaler konseptet som er utviklet eller beskriver temaet på en annen måte, og som er relevant? Man kan anse dette som en kontrollsjekk og et hjelpemiddel for å vurdere om man som forsker har tenkt riktig da man laget konseptene. Om teoretisk litteratur har lignende beskrivelser rundt temaene som er forenelige med delkonseptene, kan konseptene stå som de er. Hvis faglitteraturen ikke har noen teoretiske bidrag som omtaler de konseptene som er utviklet, må man vurdere om konseptene bør korrigeres, plasseres under et annet tema, eller ekskluderes fra analysen.

Konsepttestene ble gjort ved at de fem temaene – formel, likninger, funksjoner, algebraiske uttrykk og mønster – ble undersøkt. TIMSS' rammeverk (Grønmo m.fl., 2015) ble lest og vurdert, og annen faglitteratur ble inkludert for å sjekke hva de legger i definisjonen av de fem temaene som er listet opp. Temaene og underkategoriene ble også diskutert med veilederne. Konsepttestene ble da utført, og jeg vurderte konseptene mine som adekvate nok i sammenheng med den eksisterende teorien. Temaene og underkategoriene kunne altså stå, og eksamenssettenes antall av ulike algebraoppgaver som faller under de ulike delkonseptene, utgjør studiens funn.

I analyseprosessen har jeg kun vært interessert å finne ut om konseptene som er laget, kan støttes under av eksisterende teori slik at de utviklede kategoriene kan stå som de er (fase 5, se figur 14). Derfor har jeg valgt å ikke bevege analyseprosessen inn i SDI-modellens siste steg (6), kalt teoritest. I siste steg av SDI-metoden må man stille spørsmål om konseptene er falsifiserbare og etterprøvbar til å ha formell status som teori (Tjora, 2017). Et slikt arbeid med å vurdere og formidle at mine konsepter kan ha status som formell teori, går over mitt nivå som masterstudent og studiens omfang av tid og ressurser. Derfor blir siste steg i SDI-modellen ekskludert fra denne studien.

4.8 Forskningsetiske hensyn

Selv om metodebruk som innholdsanalyse gir en viss avstand fra datamaterialet som velges ut, er det likevel viktig å være bevisst på hvordan en som forsker påvirker undersøkelsesprosessen gjennom sine valg, vurderinger og fortolkninger. Det er viktig å begrunne egne fortolkninger av eksamens-oppgavene underveis (Trondsæther, 2017). Derfor har hvert hovedtema fra analysen blitt definert i teorien. I tillegg vil egne fortolkninger utdypes, og oppgave-eksempler fra eksamensdokumentene vil bli illustrert. Dette vil ble skrevet om i drøftingen. Dette er eksempler på forhold som kan anses som *etiske normer* i forskningen. Forskningsetiske normer i vitenskapen har utviklet seg helt siden 1940-årene hvor Robert Merton (1973) har utarbeidet en rekke forskningsetiske prinsipper. Jeg vil nå redegjøre for noen av hans prinsipper som jeg regner som relevante for min studie, og jeg vil særlig drøfte hvordan jeg har tatt vare på disse prinsippene i studien min.

Organisert skepsis er en norm som er i tråd med forpliktelsen med å revurdere de analysene man har gjort i sitt studieprosjekt. Hvis det er muligheter for at det forekommer eventuelle feilkilder i resultatene, bør man etterprøve svarene sine og drøfte resultatene kritisk. Som nevnt har det vært noen oppgaver som har blitt vurdert som tvilstilfeller. Disse oppgavene har blitt vurdert og gjennom-lest flere ganger samtidig som de har blitt tolket i tråd med eksisterende teori. Disse oppgavene har blitt inkludert under algebraområdet, men har blitt kategorisert under «Tvil».

Ydmykhet handler om at forskeren skal vær klar over og gjøre rede for sine begrensninger ved analytiske evner og den kontekstuelle forståelsen rundt feltet som skal studeres (Grønmo, 2016). Innenfor innholdsanalyse er disse utfordringene typiske. Jeg har gjort en liknende innholdsanalyse fra en pilotstudie tidligere i utdanningen, men innehar ikke nok analytiske ferdigheter slik en dreven forsker har på feltet. Derfor har det blitt gjort forberedelser i forkant av analyseprosessen som er nevnt tidligere i metodekapittel for å få et helhetlig kunnskapsinntrykk over feltet. Læreplaner har blitt gjennomgått, tre ulike lærebøker på 10. trinn har blitt gjennomgått, og tre eksamenssett har blir lest, løst og notater har blitt tatt underveis.

4.9 Eksempeloppgaver fra eksamenssett

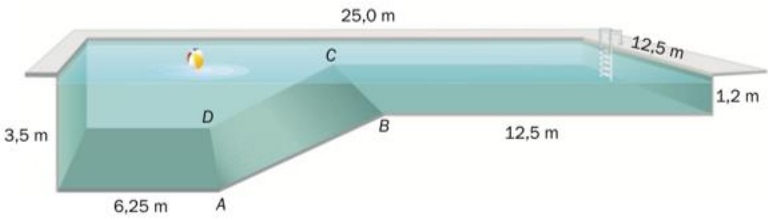
I dette delkapitlet vil jeg legge frem konkrete oppgaveeksempler fra eksamenssettene. Prinsipielle vurderinger og analytiske beskrivelser for hva som er typisk for oppgavene, samt begrunnelser hvorfor oppgavene havner innenfor de ulike kategoriene vil bli redegjort. Her vil det bli lagt frem en oppgave som ble vurdert som en problemløsningsoppgave, en formeloppgave og to likningsoppgaver, som er vurdert som rutineoppgaver, og til slutt to mønsteroppgaver som går fra det konkrete til det generelle. Løsningsforslag til oppgavene vil også bli drøftet. Første oppgaveeksemplet trenger en del mellomregninger i løsningen. Løsningsforslaget vil derfor bli presentert separert fra teksten. I de andre oppgaveeksemplene blir løsningsforslagene gitt som en del av teksten.

4.9.1 Problemløsningsoppgaver – «Lage og løse likning»

Oppgave 4 (7 poeng)

Overflaten i svømmebassenget i Badeland har form som et rektangel. Svømmebassenget har to ulike dybder. Mellom de to dybdene er det et skråplan *ABCD* med form som et rektangel.

Se skissen nedenfor.



a) Tegn overflaten av svømmebassenget sett rett ovenfra i målestokk 1 : 250

b) Regn ut *AB* og arealet av skråplanet *ABCD*.

c) Vis ved regning at volumet av svømmebassenget er ca. 645 m³ (645 000 L).

Svømmebassenget er helt fullt av vann. Vannet i svømmebassenget skal tappes ut med 300 L per minutt.

d) Hvor mange centimeter har vannstanden sunket etter 60 min?

Løsningsforslag til oppgave 4d):

Etter en time (60 min) har det blitt tappet ut

$300L/min \cdot 60min = \ 18000L = 18m^3$

Dette er mindre enn volumet av det øverste sjiktet med vann (mindre enn volumet av vannet over skråplanet).

Vi kan dermed sette opp likningen:

$\rightarrow 18m^3 = 25m \cdot 12{,}5m \cdot h$

$\rightarrow h = \dfrac{18}{25 \cdot 12{,}5} m = 0{,}058m$

$\underline{0{,}058m \cdot 100 = \underline{5{,}8cm}}$

Vannstanden har altså sunket 5,8cm ned etter èn time.

Figur 15. Eksempeloppgave 4 d), Del 2, Eksamen 2014, s.6 med et forenklet løsningsforslag (til høyre)

Figuren ovenfor er en oppgave som er vurdert som en problemløsningsoppgave. Prinsipielle sider ved denne deloppgaven er at den ikke ber om noen direkte løsningsmetode slik som oppgaveteksten gjør i de innledende deloppgavene. Oppgaven spør om hvor mange centimeter vann, og ikke liter vann som har blitt tappet ut. Dette gjør oppgaven mer kompleks. Det er mye informasjon som ligger i oppgaveteksten og i figuren til oppgaven. Dette må elevene analysere og tolke. Løsningsmetoden i innledende fase er etter mine vurderinger ukjent for eleven, som er prinsipielt for problemløsningsoppgaver (Björkqvist, 2003).

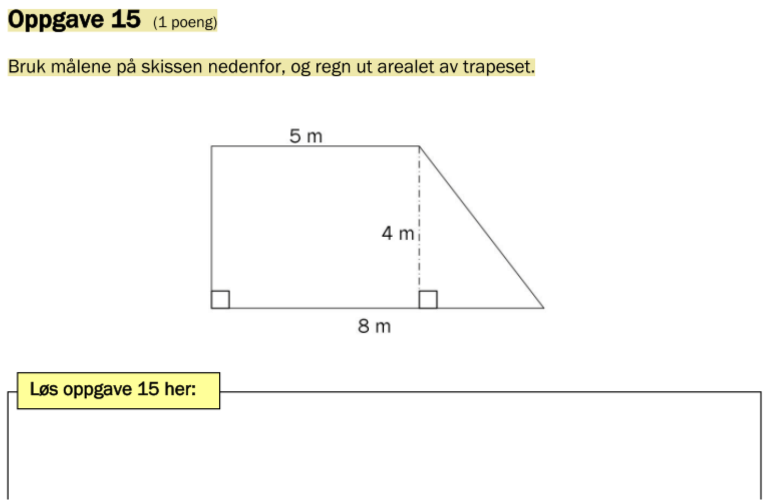
I tillegg krever oppgaven en trinnvis utførelse (se løsningsforslaget til høyre for oppgaven). Først må eleven omgjøre 18000 liter til kubikkmeter, fordi eleven må vite hvor mange centimeter vannmasse i høyden som har sunket.

I tillegg må eleven vurdere om $18m^3$er mindre enn volumet av det øverste sjiktet med vann, eller om det rommer dypere i bassenget (sunket under der skråplanet *ABCD* starter). Når eleven skal sette opp en likning må hen vite hvilken variabel i likningsuttrykket som representer det ukjente tallet for centimeterne vann som har sunket i høyden. Til slutt må 0,058 meter regnes om til 5,8 centimeter. Oppgaven spør om hvor mange centimeter vann som har sunket, ikke meter. Siden oppgaven må løses i flere trinn er det lett å gjøre regnefeil underveis, og det er ikke umulig for at det første sluttsvaret vil være feil. Derfor er det viktig at eleven tolker om sluttsvaret er logisk i forhold til informasjonen som er oppgitt i problemet (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.1). Å gjøre en antakelse underveis om hva sluttsvaret kan bli, for så å sjekke om resultatet blir riktig kan være en heuristikk[4].

Hvis eleven har resonnert seg fram til at 18 kubikkmeter er mindre enn volumet av det øverste sjiktet, burde ikke vannstanden ha sunket over 120 centimeter. En annen antakelse er at $18m^3$av $645m^3$utgjør bare tre prosent av vannstanden i bassenget så en rimelig tolkning er at vannet ikke kan ha sunket altfor mange centimeter. Om svaret er feil kan eleven se over om det er gjort noen regnefeil eller gjenta prosedyren om nødvendig.

Kort oppsummert så er ikke løsningsmetoden kjent for eleven i oppgave 4 d). Oppgaven må løses trinnvis ved hjelp av mellomregninger før eleven kan komme med et sluttsvar. Regneteknisk er ikke oppgaven vanskelig, men den er kognitivt utfordrende. Det er mye informasjon som må analyseres før en kan omforme problemet i en matematisk form. Det krever at eleven er flink til å modellere informasjon og problemet i teksten over til en likningsmodell. Modellering hevder Bjørnestad m.fl. (2013) at norske elever sliter med. Totaliteten i denne oppgaven gjør den mer krevende enn andre rutinemessige oppgaver og har derfor blitt vurdert som en problemløsningsoppgave. Man har nå gått igjennom konkrete og generelle sider ved en problemløsningsoppgave. Det vil nå bli presentert tre oppgaveeksempler, som har blitt vurdert som rutineoppgaver.

4.9.2 Formeloppgaver – «Gjenkjenne formel og sette inn verdi»



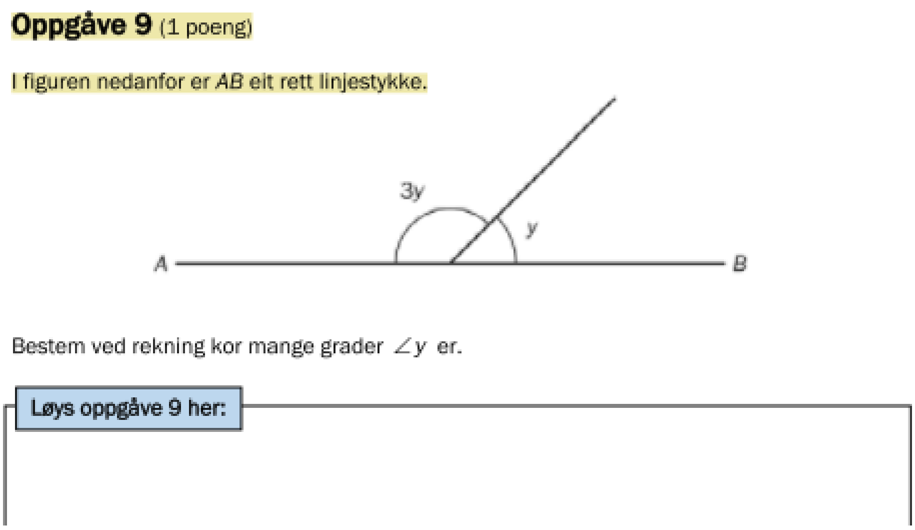
Figur 16. Eksempeloppgave 15, Del 1 Eksamen 2011, s.9

Her er et eksempel på en deloppgave som opptrer hyppigst i eksamenssettene. Her må eleven kjenne igjen lærte formler for arealer av ulike figurer fra undervisningen, for så å sette inn verdiene for variablene i formelregningen. Trapeset består av et rektangel og en rettvinklet trekant. Formelen for arealet av et rektangel er $A = l \cdot b$, og arealet for en rettvinklet trekant er $A = \frac{g \cdot h}{2}$. Til slutt må eleven legge sammen arealet for begge figurene i trapeset. I dette eksempelet må i tallene til sidene i rektangelet settes inn i formelen: $5m \cdot 4m = 20m^2$. Man setter så inn tallene til sidene i trekantformelen: $\frac{(8m-5m)\cdot 4m}{2}$ = $6m^2$. Areal av trapeset blir da: $20m^2 + 6m^2 = 26m^2$

Denne oppgaven ble kategorisert inn hovedkategorien formel, og har blitt plassert inn i underkategori 1.1 «gjenkjenne formel og sette inn verdier». Generelt for oppgavene i denne underkategorien er at de tester triviell formelregning og kriteriet for å løse oppgavene er at eleven husker formelen til figuren eller teksten, for så å sette inn verdiene for variablene. Dette er rutineferdigheter som elevene bør kunne fra opplæringen. Derfor har disse oppgavetypene blitt vurdert som rutineoppgaver.

4.9.3 Likninger – «Lage og løse likning»

Oppgaver som omhandler likninger, var det også mange av i oppgavesettene. De kunne enten opptre som oppstilte likninger eller uoppstilte likninger. Uoppstilte likninger er tekstoppgaver eller figuroppgaver som inneholder informasjon som gjør det naturlig å bruke likninger som utgangspunkt for løsning (Bjørnestad m.fl., 2013, s.289). Siden oppstilte likninger i oppgavesammenheng er lett gjenkjennbare vil jeg heller legge frem et konkret eksempel på en uoppstilt likning.

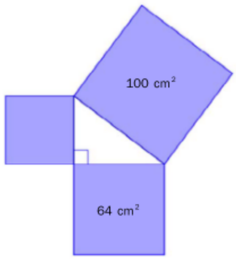


Figur 17. Eksempeloppgave 9, 2018, Del 1, s.6

I eksempeloppgave 9 må eleven vite at vinkelen til linjestykket AB er $180°$. Man kan sette opp oppgaven som en likning der *y* er den ukjente som man vil finne. Likningsuttrykket kan settes opp slik $4y = 180° \rightarrow \frac{4y}{4} = \frac{180°}{4} \rightarrow y = 45°$. Her må eleven klare å sette opp en likning fra figuren i oppgaven, og kunne prinsipielle regler for likningsløsning. For dette eksempelet: skal man dividere utrykket på den ene siden av likhetstegnet, må det også divideres på andre siden av likhetstegnet for å holde likevekt mellom utrykkene.

Oppgave 19 (1 poeng)

Figuren nedenfor viser en rettvinklet trekant og tre kvadrater. Arealene av de to største kvadratene er $64 cm^2$ og $100 cm^2$



Bestem lengden av den korteste siden i trekanten

Figur 18. Eksempeloppgave 19, Eksamen 2019, Del 1, s.13

Eksempeloppgave 19 er en typisk oppgave som inneholder trekanter med en ukjent side i trekanten som eleven skulle finne ut av. Derfor må eleven har kjennskap til Pytagoras-setningen som elevene burde ha lært fra undervisningen, og oppgaven kan løses som en likning $x^2 + 64 = 100 \rightarrow x^2 = \sqrt{(100 - 64)} \rightarrow x = \sqrt{36} = 6$.

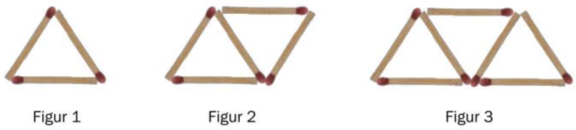
De fleste oppgavene som ble kategorisert i hovedkategorien «likning», både oppstilte- og uoppstilte likninger, var enkelt sammensatt og kan løses ved hjelp av velkjente prosedyrer. De innledende oppgavene i Del 1 var rene likningsoppgaver som krever enkel bruk av ferdigheter for likningsløsning, mens oppgaver lenger ut i Del 1-settet og Del 2 opptrådde som uoppstilte likninger. Likevel var de fleste uoppstilte likningene så enkelt sammensatt og bunner i velkjente regler fra undervisningen, at de ikke var spesielt krevende. Dette var oppgaver som inneholdt geometriske figurer som hadde oppgitte verdier i areal og volum, men hvor sidene til figurene var ukjente. Formlene til volum og areal til de figureksemplene må da løses i form av likningsuttrykk med en ukjent. Typisk var oppgaver som inneholdt rettvinklede trekanter med en ukjent side i trekanten som eleven skulle finne ut av. Derfor er det viktig at eleven har kjennskap til Pytagoras-setningen. Om eleven kan formelen for Pytagoras og andre figurer, burde ikke likningene være vanskelig å stille opp.

4.9.4 Mønsteroppgaver - «Konkret tilfelle» og «Generelt tilfelle (generalisering)

«Mønster» var det hovedtemaet som hadde færrest deloppgaver, med totalt 5 deloppgaver i tre av åtte eksamenssett. Mønsteroppgaver er ifølge definisjonen til rammeverket oppgaver som presenterer et figurmønster eller tallmønster. Slike oppgaver går fra det konkrete til det generelle. Oppgave 25b) er et eksempel der bokstavene blir et verktøy for å utrykke seg generelt for hvor mange fyrstikker Benedicte trenger for alle figurnumre:

Oppgave 25 (2 poeng)

Benedikte har disse tre figurene av fyrstikker:



Benedikte vil lage flere figurer etter samme mønster som figurene ovenfor.

a) Hvor mange fyrstikker trenger hun for å lage figur 5?

Figur 5: ____________ fyrstikker

b) Lag en formel som forteller hvor mange fyrstikker hun trenger for å lage figur n.

Løs oppgave 25 b) her:

Figur 19. Eksempeloppgave 25, Eksamen 2017, Del 1, s.15

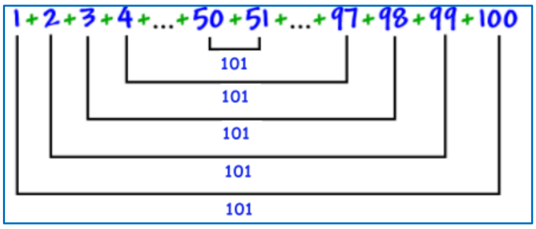
I dette eksempelet ser man et geometrisk figurmønster. Oppgave 25 a) handler om å finne tallet på fyrstikker i figur 5, og eleven må se at det øker med to fyrstikker for hvert figurnummer. Figur 3 har 7 fyrstikker, figur 4 vil derfor ha 9 fyrstikker, og figur 5 har derfor 11 fyrstikker. Oppgave 25 b) handler om å finne et generelt uttrykk for figurene. Nøkkelen for å kunne løse oppgaven er å finne sammenhengen mellom figurnummeret og det korresponderende tallet på fyrstikker. Fyrstikkene i figurene følger et entydig økende mønster, der figur 1 har én mer enn det dobbelte av figurnummeret. Hvis man skal utrykke seg matematisk blir figur 1 = $1 + 2 \cdot 1$. Videre blir følgen $1 + 2 \cdot 2, 1 + 2 \cdot 3, 1 + 2 \cdot 3$ … og det generelle tilfellet kan utrykkes som $1 + 2 \cdot n$.

Etter mine vurderinger fremstår figurnumrene mer som «navn» til figurene enn et figurnummer, dermed blir sammenhengen mellom antallet på fyrstikkene og figurnumrene mindre tydelig. Fyrstikkene i figurene gjør det lettere for elevene å tyde hvor mange fyrstikker som øker for hver figur i rekken. Likevel er 25 b) en oppgave som ikke inviterer til en tydelig og tradisjonell løsningsmetode som elevene skal være kjent med. Oppgave 25 b) har derfor blitt vurdert som en problemløsningsoppgave. Dette er i tråd med Fafos vurderinger av samme eksamensoppgave som de kategoriserer som problemløsning. De begrunner sine vurderinger med at «de fleste bøkene ikke behandler figurtall og tallmønstre og liknende oppgaver finnes ikke på de siste forlagsprøvene eller eksamensoppgavene» (Andresen m.fl., 2017, s.67). Dette er i tråd med mitt neste eksempelet 9b) fra eksamenen året etter, 2018, som behandler generalisering. Dette var den siste av to generaliseringsoppgaver som var å finne i oppgavesettene.

Oppgave 9 (3 poeng)

Da den store matematikeren Carl Friedrich Gauss var ni år gammel, ga læreren han som oppgave å addere de naturlige tallene fra og med 1 til og med 100.

Gauss kom fram til riktig svar etter veldig kort tid ved å bruke parvis addisjon.



Dermed fikk Gauss at $50 \cdot 101 = 5050$

a) Bestem summen av de naturlige tallene fra og med 1 til og med 1000 ved å bruke metoden til Gauss.

b) Lag en formel for summen av de naturlige tallene fra og med 1 til og med n. Kontroller om formelen stemmer for *n* = 100

Figur 20. Eksempeloppgave 9, Eksamen 2018, Del 2, s.11

Hele oppgave 9 går fra det konkrete til det generelle. Man ser en modell til metoden til Gauss i oppgave 9 (blå firkant). Det Gauss fant ut var at summen av det første og det siste tallet er det samme som summen av det andre og det nest siste tallet, og det tredje og det tredje siste tallet og så videre. Dette er det som kalles parvis addisjon. Videre forteller modellen at når man adderer de hundre første naturlige tallene har man femti par og summen av hvert par er 101. Altså finner man summen av de 100 første naturlige tallene ved å multiplisere 50 med 101.

Man observerer at summen av første og siste tall er den samme som summen av andre og nest siste osv. Man ser også at antall tall er partall. For $n = 1000$ blir det 500 par av sum 1001 som gir $S_{1000} = 500 \cdot 1001 = 500500$. Om man klarer oppgave a) får man mye hjelp til oppgave b). Fra forrige oppgave ser man om man dividerer n på 2 og multipliserer med $(1 + n)$. Man kan da utrykke seg generelt utrykke summen for $S_n = \frac{n}{2}(1 + n)$. Kontrollsjekken blir da:

$$S_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50 \cdot (101) = 5050$$

Deloppgave 9 b) har blitt vurdert som en krevende oppgave. Det er mye informasjon i modellen til Gauss som ikke blir utdypet i noen særlig grad. Etter min oppfatning blir «parvis addisjon» utdypet mindre tydelig i oppgaven. Det avhenger at eleven klarer å tolke sammenhengen i modellen riktig, noe som kan være utfordrende. Om eleven klarer 9 a) kan det være til hjelp å finne løsningen til 9b). Likevel finnes ikke en forutsigbar og velkjent tilnærming, og det er ikke tydelig hvilke løsningsmetoder elevene kan bruke i 9b). Derfor er oppgave 9b) også vurdert som problemløsningsoppgave.

5 Resultat

I dette kapittelet vil det analyserte og tolkede datamateriale bli fremstilt statistisk. Resultatet er en tolkning over hvor mange deloppgaver som har blitt kategorisert til de ulike algebrakategoriene til TIMSS: formel, likning, funksjon, algebraiske uttrykk og mønster og videre i de til sammen 18 underkategorier som beskriver deloppgavene i større grad. Det ble registrert deloppgaver som under tvil ble ansett som algebraoppgaver. Derfor ble det utviklet to av 18 underkategorier som ble kalt «under tvil» innenfor hovedtemaene formel og funksjon. Masteren vil inkludere dem i resultatene, men de anses ikke som hovedfunn i analysen. Tvilsoppgaver vil derfor kun bli presentert i tabell 1 og vil ikke bli fremstilt videre i resultatkapitlet.

5.1 Inndeling av algebraoppgaver mellom hovedtemaene

Tabell 1. Inndeling av algebraoppgaver mellom de ulike hovedkategoriene til algebra i TIMSS-Rammeverket og tilleggskategoriene, «formel- eller likningsoppgaver» og «formel- eller funksjonsoppgaver».

Hovedkategorier	Algebraoppgaver i alle åtte eksamenssett	Algebradeloppgaver i alle åtte eksamenssett medregnet oppgaver «under tvil»
Formel	64	75
Likning	41	41
Funksjoner	36	37
Algebraiske Uttrykk	16	16
Mønster	5	5
Formel- eller likningsoppgaver	16	16
Formel- eller funksjonsoppgaver	1	1
Totalsummen av alle deloppgaver for alle hovedkategoriene til algebra på alle åtte eksamenssett	179	191
Totalsummen av alle deloppgaver, også de som ikke er algebraoppgaver, i alle åtte eksamenssett	432	432

Tabell 1 viser totalantallet av deloppgaver til sammen i de åtte eksamenssettene. I venstre kolonne er alle de fem temaene for innholdet i algebra ifølge TIMSS' rammeverk. I den midterste kolonnen ser man hvor mange deloppgaver som ble klassifisert under hvert hovedtema, hvorav den nest nederste raden er totalsummen av antall deloppgave for alle algebrakategoriene, og den nederste er totalsummen av alle deloppgaver på alle eksamenssettene. I alt ble 41 % deloppgaver klassifisert som algebraoppgaver, og 44 % deloppgavene om man tar med de tolv deloppgavene som var med under tvil, se den høyre kolonnen. Det er altså 11 deloppgaver som ble ansett som tvilsomme som ble plassert under formel, og én tvilsoppgave under funksjon.

Tabell 2. Oversikt over hvor mange deloppgaver som ble kategorisert i de ulike hovedkategoriene for hvert eksamenssett fra perioden 2009 til 2019.

År	2009	2010	2011	2014	2015	2017	2018	2019
Totalmengde av deloppgaver på eksamen	49	64	55	56	55	58	53	54
Totalmengde deloppgaver under algebra	18 (37%)	22 (34%)	26 (47%)	24 (41%)	21 (38%)	25 (43%)	22 (41%)	21 (39)
Formel	10	7	9	7	9	6	8	8
Likning	3	5	7	6	4	8	5	3
Funksjoner	3	6	5	6	4	2	4	6
Algebraiske uttrykk	2	2	2	2	2	2	2	2
Mønster	0	1	0	0	0	2	2	0
Formel- eller likningsoppgaver	0	1	2	3	2	5	1	2
Formel- eller funksjonsoppgaver	0	0	1	0	0	0	0	0

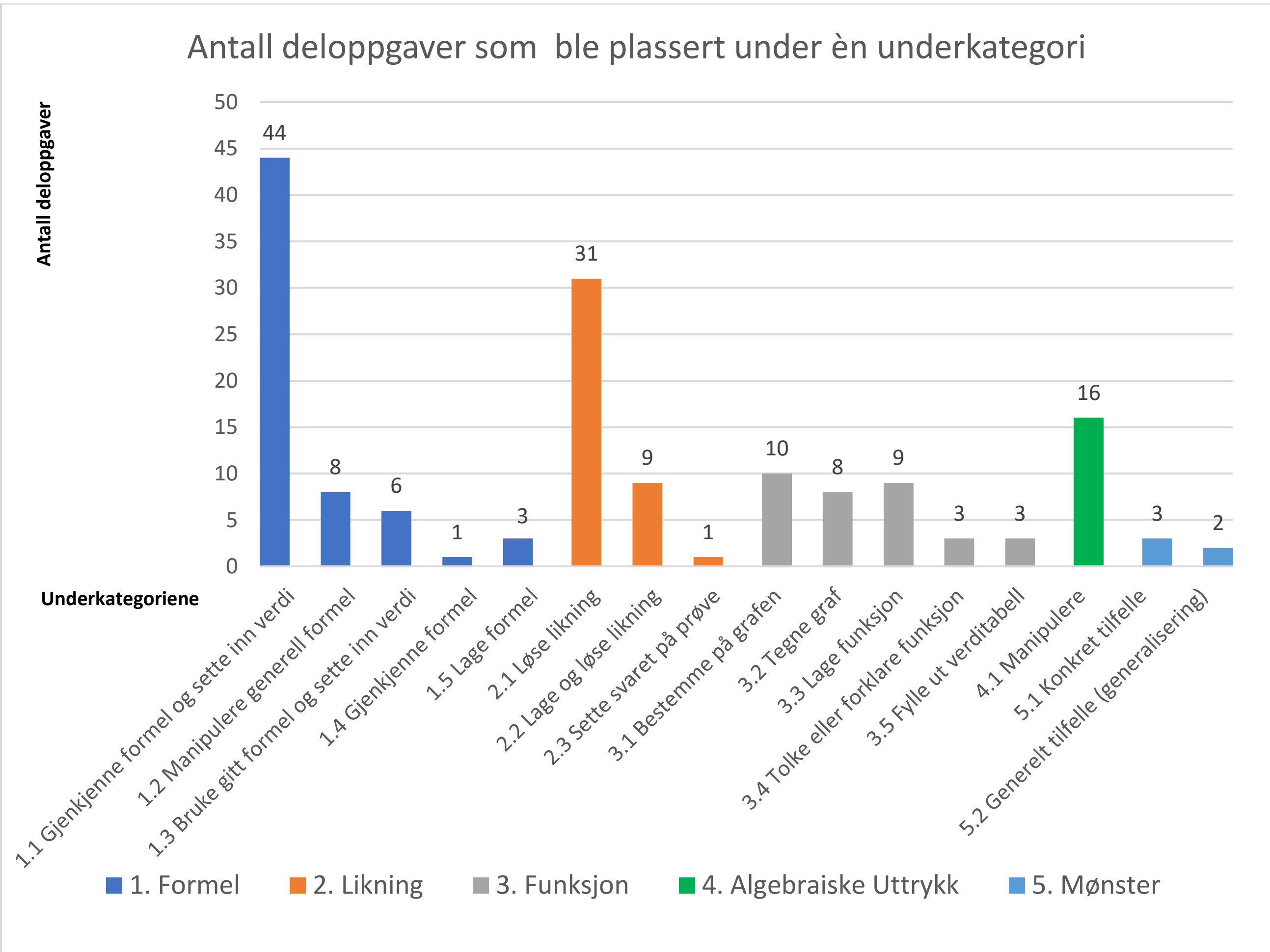
I tabell 2 ser man et nokså stabilt nivå av antall algebraoppgaver fra år til år, og hvor algebraoppgaver utgjør rundt om 40 % av alle deloppgavene på eksamen med bare mindre variasjoner fra år til år. Av deloppgaver innenfor hovedtemaene er det verdt å legge merke til at nesten halvparten av eksamenssettene ikke har tatt med mønsteroppgaver i sine oppgavesett. De eksamenssettene som har inkludert mønsteroppgaver, er det kun et fåtall av. Ser man på de andre hovedtemaene, formel, likning, funksjon og algebraiske uttrykk, er alle inkludert i eksamenssettene uten store variasjoner fra år til år i perioden 2009-2019.

5.2 Inndeling av algebraoppgaver mellom de ulike underkategoriene

Tabell 3. Fordeling av 22 (av 179) deloppgaver som ble klassifisert i flere underkategorier. Underkategoriene har fått samme farge som punktet til venstre for hovedtemaene. Tilleggskategoriene har delt farge i firkantene. «Formel- eller likningsoppgaver» har for eksempel blå og oransje i firkanten, som betyr at underkategoriene i oransje felt gjelder likning og blå felt gjelder formel.

	Dobbelklassifiseringer innenfor hvert hovedtema			Klassifiseringer på tvers av hovedtemaer			
	Formel	Funksjon		Formel- eller likningsoppgaver			Formel- eller funksjonsoppgaver
Antall deloppgaver	2	2	1	11	4	1	1
Kombinerte underkategorier	1.2	3.1	3.4	1.1	1.2	1.2	1.4
	1.4	3.2	3.5	1.2	1.3	1.3	3.4
				2.2	2.1	2.3	

Tabell 3 gir en oversikt for hvor mange deloppgaver som har fått dobbel- eller flerklassifiseringer innad og på tvers av hovedtemaene. Deloppgavene som har fått flere klassifiseringer på tvers av temaene, er fremstilt i de to hoved-kolonnene til høyre i tabell 3. Disse er tilleggskategorier som ble utviklet i analysen, kalt «formel- eller likningsoppgaver» og «formel- eller funksjonsoppgaver». Av deloppgavene i tabell 3 har jeg valgt å trekke frem de 16 deloppgavene under «formel- eller likningsoppgaver». Elleve deloppgaver krever at elevene må huske igjen en kjent formel. Så må elevene sette inn verdi(er) for variablene i formeluttrykket, og så gjøre en formelmanipulering i utregningen. Denne løsningsmetoden gjelder kombinasjonen av kategori 1.1 som heter «gjenkjenn formel og sette inn verdi» og kategori 1.3 som heter «manipuler generell formel». De resterende fem deloppgavene går prinsipielt ut på at eleven skal sette inn verdier for en oppgitt formel, for så manipulere formeluttrykket for å komme frem til riktig svar. En oppgitt formel betyr at formelen oppgis som en del av oppgaveteksten. Eleven slipper dermed å huske igjen formelen. Disse oppgavene har fått kombinasjonen av kategori 1.3 «bruke gitt formel og sette inn verdi» og kategori 1.2 «manipuler generell formel». Oppgavene åpner for en annen løsningsmetode, hvor elevene kan løse oppgavene som en likning. Derfor har de samme oppgavene under «formel- eller likningsoppgaver også blitt klassifisert med underkategori 2.1 «løse likning», 2.2 «lage og løse likning» og 2.3 «sette prøve på svaret»



Figur 21. Fordelingen av deloppgaver innenfor de ulike underkategoriene. Figur 2 viser kun oppgaver som ble plassert under èn underkategori i motsetning til tabell 3. Det er til sammen 157 deloppgaver (av 179).

5.2.1 Formeloppgaver som tester elevenes evne til å huske formeloppskrifter og manipulere formeluttrykk

Som man kan se i figur 21, opptrer kategorien 1.1[6] hyppigst i eksamenssettene. Det gjelder totalt 44 oppgaver der elevene må huske igjen en kjent formel, sette inn tall for de kjente variablene og regne ut svaret direkte. Oppgavene for kategori 1.3 er veldig lik kategori 1.1 i oppgaveløsning. Eneste forskjell på oppgavene i kategori 1.3 (6 deloppgaver) og 1.1 (44 deloppgaver) er at formelen i oppgaveteksten er oppgitt for kategori 1.3-oppgaven. Eleven slipper dermed å prøve å gjenkjenne kompliserte formler for disse oppgavene. Det ble funnet 6 slike oppgaver. Generelt for begge kategoriene er at de representerer den enkleste bruken for formelregning og begge kategoriene (1.1, 1.3) utgjør til sammen 50 av totalt 179 deloppgaver som er 27%.

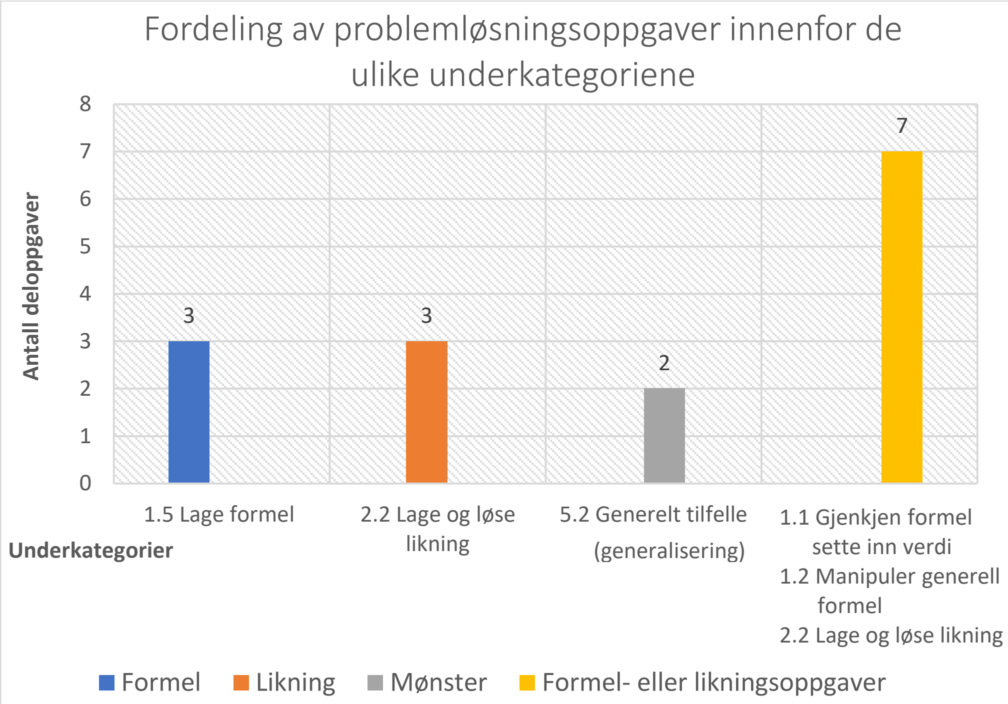
5.2.2 Mønsteroppgaver som tester elevens evne til å generalisere

Som man kan se i figur 21 er mønsteroppgaver hovedtemaet som ble gitt færrest ganger av de fem hovedtemaene på eksamen. Dette er oppgaver som tester elevenes forståelse av grunnleggende strukturer og hvordan mønstrene vokser. Kategori 5.1 «konkret tilfelle» går ut på å finne det neste tallet i tallfølgen eller figurmønster. Dette blir ansett som et konkret tilfelle. I analysen ble det funnet tre slike oppgaver. Kategori 5.2 «generelt tilfelle (generalisering)» tester elevens evne til å finne et generelt utrykk for mønsteret, der bokstaver kommer som en naturlig konsekvens av det utrykket seg generelt. Det var kun to deloppgaver i eksamenssettene som tester generaliseringskonseptet, og disse utgjør 1% av 179 deloppgaver. Mønsteroppgaven utgjør generelt under 3 % av alle algebraoppgaver i eksamenssettene.

---

[6] I dette avsnittet bruker jeg ikke navnene til underkategoriene for å komprimere teksten. Se derfor navnene til kategorinumrene i figur 21.

5.3 Oppgaver som ble vurdert som problemløsende



Figur 22. Oppgaver som krever problemløsning. Det ble funnet 15 problemløsningsoppgaver av totalt 179 algebraoppgaver

Figur 22 viser hvor mange av deloppgavene som ble vurdert som problemløsningsoppgaver. Kriteriet for disse oppgavene er at det ikke var en kjent prosedyre som kan brukes i løsningen. Analysen av algebraoppgavene i eksamenssettene viser en begrenset vektlegging av problemløsningsoppgaver. Av alle deloppgavene som ble vurdert i analysen, var det til sammen 15 deloppgaver som krever problemløsning. Det utgjør 8 % av alle algebraoppgavene i eksamenssettene, og impliserer at de resterende 164 algebraoppgavene ble vurdert som rutineoppgaver. Problemene i disse oppgavene var av rutinemessig og tradisjonell art som enkelt kan bli løst uten bruk av problemløsningsheuritstikker[4].

6 Drøfting

Denne studien har hatt som formål å undersøke i hvilken grad nasjonale eksamener vektlegger problemløsning i ulike algebraoppgaver i perioden 2009-2019. I studien finner man at av 64 formeloppgaver har tre av disse en problemløsende tilnærming. Av 41 likningsoppgaver var det tre av disse som ble vurdert som problemløsningsoppgaver. To av fem mønsteroppgaver som behandler generalisering, er begge problemorienterte, mens syv av totalt 16 oppgaver under hovedkategorien «formel- eller likningsoppgaver», er problemorienterte. Dette gir 15 problemløsningsoppgaver av totalt 179 algebraoppgaver, og utgjør kun 8% av algebraoppgavene i eksamenssettene. De resterende 164 oppgavene var av rutinemessig og tradisjonell art som enkelt kan løses ved hjelp av innlærte ferdigheter og kjente fremgangsmåter.

6.1 Eksamensoppgavenes dekning av læreplanens intensjoner om problemløsning

Læreplanens formål for faget fungerer som en overordnet struktur som skal inngå i alle hovedområdene i matematikk. Grunnleggende ferdigheter er felles for alle fag i skolen, og integreres i kompetansemålene, der de bidrar til utvikling av fagkompetansen, og er en del av den. Problemløsning, modellering, og utforsking er svært fremtredende i begge delene av læreplanen i matematikk. Grunnet fokuset på disse i læreplanen burde utforskende aktiviteter, deriblant problemløsning, være en sentral del i matematikkundervisningen, samt i vurderingsformen. Ifølge eksamensveiledningen fra Utdanningsdirektoratet (2019a, s.6) skal eksamen teste elevens evne til problemløsning og resonnement både i Del 1 og Del 2. I tillegg påpeker Utdanningsdirektoratet (2019, s.14) at kategorien *problemløsning* av tre kategorier[7], den mest sentrale kategorien for sensors vurderingsgrunnlag av eksamensbesvarelsen. Man kan da forvente at eksamen tester elevenes måloppnåelse til å demonstrere at de behersker ukjente situasjoner, og at de er i stand til å bruke «varierte strategier til problemløsning og utforskning som tar utgangspunkt både i praktiske, dagligdagse situasjoner og i matematiske problemer» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.5). Resultatene i denne studien viser at algebraoppgavene på eksamen i matematikk tester først og fremst i hvilken grad elevene husker oppskrifter på formler, definisjoner eller prosedyrer. På den andre siden viser resultatene mine at algebraoppgavene i liten grad tester elevenes evne til å ta i bruk utradisjonelle metoder i ukjente matematiske problem. Læreplanens intensjon av problemløsning, som et overordnet syn på matematikk, samsvarer i liten grad med funnene i eksamensoppgavene. Funnene mine er i tråd med Leer (2009) som konkluderte med at det ble gitt

[7] Utdanningsdirektoratet skriver at gjennom hele eksamenen vil eleven bli vurdert på tre matematikkompetanser som går på tvers av læreplanmålene. Kompetansene er *1) begreper, forståelse og ferdigheter, 2) problemløsning og 3) kommunikasjon (Utdanningsdirektoratet, 2019, s.13)*

svært få oppgaver som krever problemløsning på eksamen på 10.trinn. Samme gjelder Gray m.fl. (2019) som påpeker en mangel på vanskelige algebraoppgaver i eksamenssettene fra 2010 og utover.

6.2 Karakterer og poengsystem

I kontekst av mer eller mindre krevende oppgaver på eksamenen er det naturlig å drøfte sammenhengen mellom oppgaver elevene blir vurdert i på eksamen, og antall poeng de kan få. For eksempel kan elever få totalt 65 poeng i alle oppgavene på eksamenen for 2018. Andel problemløsingsoppgaver totalt av alle algebraoppgavene i åtte eksamenssett utgjorde kun 8 %. Om man antar at andelen problemløsningsoppgaver er like begrenset for alle eksamensoppgavene i 2018, kan eleven oppnå $65 \times (1 - 0{,}08) \approx 59$ poeng på eksamen 2018. Dette kan eleven klare ved å memorere fakta og prosedyrer, samt bruke læreboken i Del 2 for å sammenligne eksamensoppgaver, og eksempler i læreboken. Leer (2009, s.68) viser i sine resultater at flesteparten av eksamensoppgavene ikke krever at elevene må resonnere på en ny måte for å løse oppgaven. Hun gjennomførte en analyse med hensyn til antall oppgaver som skal vurderes, og antall poenguttelling på eksamen. Leer (2009, s.89) vurderte det som svært sannsynlig å oppnå karakteren 5-6 ved å kun velge å løse oppgaver som krever pugging, sammenligning, og etterligning av fremgangsmåter fra eksempler de har sett/gjort i lærebøkene. Mitt inntrykk er at signalet eksamenene, fra 2009-2019, sender til lærere og elever, er at matematikk er et fag som primært går ut på å pugge fakta og prosedyrer. Elever som klarer det, kan få en god karakter på eksamen. Som et funn at det blir gitt svært få problemløsningsoppgaver på eksamenen, støtter dette opp om et syn om matematikk der kalkulering, pugging av regler, fakta, og prosedyrer er sentralt (Leer, 2009). Elever som har et slikt syn på matematikk, vil få vanskeligheter når de skal løse problemløsningsoppgaver fordi de ikke har lært hvordan de kan løse slike oppgaver. Fafos (Bjørnset m.fl., 2018) rapport viser for eksempel at oppgaven som hadde lavest gjennomsnittskår i poenguttelling i 2018-settet, var den eneste oppgaven i 2018 som ble vurdert som en problemløsningsoppgave i denne studien.

Jeg vil også gjøre oppmerksom på at problemløsningsoppgavene kan ifølge eksamensveiledning gi maksimalt 2 poeng i uttelling. De skriver at hver deloppgave kan gi enten 0, 1 eller 2 poeng i sensur (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.17). Av de 15 deloppgavene som ble vurdert som problemløsningsoppgaver utgjør det da totalt 30 poeng. Det er halvparten/under halvparten av alle poengsummene som elever kan få på eksamenene som jeg har gjennomgått. Det faktum av at elevene står fritt for å droppe kreative problemløsningsoppgaver, kombinert med en høy andel rutinemessige oppgaver på eksamen totalt sett, gjør at elevene fortsatt kan oppnå gode resultater ved å etterligne kjente svar og algoritmer. Ifølge Jensen og Gregersen (referert i Leer, 2009, s.88) vil en typisk elev i en eksamenssituasjon nedprioritere å løse oppgaver hen ikke anser som kjente. Grunnen til dette er at det ofte ikke er oppgitt hvordan eleven skal begynne å løse oppgavene, kombinert med en stor risiko for at hen må gi opp. Det siste kan fremkalle følelser som det kreves trening i for å håndtere. Da eksamen skal utføres og leveres innen 5 timer, kombinert med at det ikke er tillatt å kommunisere med elever eller utenforstående, er dette forståelig. Hvorfor skal en elev bruke verdifull tid på problemløsningsoppgaver, der det er høy risiko for å gi opp, og når deloppgaven i seg selv ikke gir noe særlig høyere poenguttelling enn enkle rutineoppgaver? Det kunne vært hensiktsmessig at Utdanningsdirektoratet i fremtiden er tydeligere i utformingen av problemløsningsoppgaver, og gir slike kreative oppgaver høyere poenggrense enn rutineoppgaver. På denne måten kan elevene bli oppfordret på at det ligger mange poeng å hente i en slik oppgave ved at de prøver, selv om de *ikke* kommer til riktig sluttsvar. Hele poenget med problemløsning er ikke sluttsvaret i seg selv, men de kreative metodene man tar i bruk for å komme frem til et sluttsvar (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.15). Eksamensveiledningen er veldig tydelig på at elevene skal vise fremgangsmåte og resonnementskompetanse i sine svar. Hvis ikke får de mindre eller ingen uttelling for oppgaven. «De bør unngå å bare oppgi et svar uten framgangsmåte» (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.8).

6.3 Eksamensoppgavenes påvirkning av undervisningen

En kan stille spørsmål om eksamensoppgavenes innhold er styrende for undervisningen i algebra. Alseth, Breiteig og Brekke (2003) hevder etter sin undersøkelse at skriftlig eksamen er sterkt styrende for innholdet i matematikkundervisningen, og at eksamen derfor har en tilbakevirkende effekt. I studien min har jeg undersøkt eksamener over en tiårsperiode. Funnene mine viser en tendens av et stort antall formeloppgaver som tester elevenes kjennskap til velkjente formler, samt innsetting av tall for variablene. Når dette er gjort skal svaret regnes ut direkte, eller med triviell formelmanipulering. Det ble funnet få oppgaver som krever problemløsning i eksamenssettene.

Det er naturlig at lærere legger opp undervisningen slik at elevene skal kunne gjennomføre eksamen med gode resultater. Når eksamensoppgavene vektlegger innlærte algoritmer, beherskelse av kjente formler, og manipulasjon av disse, er det naturlig at det blir prioritert i undervisningen. Når eksamenen ikke vektlegger problemløsningsoppgaver er det grunn til å tro at dette får mindre fokus i undervisningen.

6.4 Eksamensoppgavenes dekning av formel- og likningsoppgaver

Det ble funnet flest formel- og likningsoppgaver som var av rutinemessig og tradisjonell art, som enkelt kan løses med velkjente fremgangsmåter. Underkategori 1.1 «gjenkjenne formel og sette inn verdi» var den kategorien som opptrådde flest ganger i algebraoppgavene. Om man skal ta hensyn til vanskegrad kan man se på hva Andersen m.fl. (2015) tilegnet eksamensoppgaver med liknende kompetansemålbeskrivelser. Oppgaver som det var flest av i deres studie var oppgaver under kompetansemål 3.1, som går ut på at eleven skal «beregne lengde, omkrets, vinkel, areal, overflate, volum, tid, fart (…)»(Utdanningsdirektoratet, 2013, s.9). Oppgaver knyttet til kompetansemål 3.1 hadde, ifølge deres vurdering, i gjennomsnitt en «liten grad av stor kompleksitet og kognitivt høye krav» (Andersen, m.fl., 2015, s.15). Dette er i tråd med studiens vurderinger av at oppgavene ikke var problemløsende.

Det kan stilles spørsmål om hvorfor det vektlegges mange oppgaver som tester elevenes evne til å gjenkjenne oppskrifter til ulike formler på eksamen. Er dette sentralt for faget? En majoritet av oppgaver med formelregning kan tenkes å bli prioritert for å sikre «toerkandidatene». Da er det uheldig hvis elever er trygge regneteknisk, men ikke klarer å huske oppskriften til de ulike formlene. Om målet med oppgavene er å måle elevenes regneferdigheter, og ikke puggingen av formlene, kan det være grunn til å stille spørsmål om en liste med de tradisjonelle formlene kan legges ved i eksamensheftene. Hvis målet med oppgavene er at elevene skal beherske formlene, så må de pugges.

Noen formeloppgaver krever manipulering av formeluttrykket for at eleven kan regne ut svaret. Dette krever en del mellomregning. 7 av 16 oppgaver (se figur 22) var såpass sammensatte at de ble vurdert som problemløsningsoppgaver, mens 9 av 16 oppgaver hadde så enkel mellomregning at de ikke ble ansett som problemløsningsoppgaver. Kongelf (2015, 2019) påpeker i begge sine studier at algebramanipulasjon er dominerende i lærebøker på ungdomstrinnet. Man kan derfor anta at elever får trening i algebramanipulasjon i undervisningen.

For å oppsummere ser man at under hovedkategorien «formel» ble det funnet 44 oppgaver til underkategori «gjenkjenne formel og sette inn verdi», sammen med 6 oppgaver til underkategori «bruke gitt formel og sette inn verdi» $(44 + 6 = 50\ av\ 179 \approx 28\%)$. Sammen med disse ble det funnet flest likningsoppgaver som ikke var problemløsende $(38\ av\ 179 \approx 21\%)$. Generelt handler disse oppgavene om at eleven skal regne seg frem til verdien av en bokstav som representerer en ukjent lengde, areal, volum, side eller omkrets av geometriske figurer i praktiske, og ikke-praktiske oppgaver. Det gjør at bokstavene ikke opptrer som variable størrelser, men mer som bokstaver som står for et bestemt men ukjent tall. Det gjør at variabelaspektet, som betyr at det er noe som varierer, blir lite fremtredende. Majoriteten av slike oppgaver på eksamenen kan være med på å forsterke inntrykket av at bokstaver er noe som skal prioriteres i matematikken. Det kan tenkes grunnen til dette er fordi at man kan bli dreven i algebramanipulasjon, men *ikke* fordi det har oppstått et behov for å utrykke generaliseringer med matematiske symbol.

6.5 Eksamensoppgavenes dekning av mønsteroppgavene

Av fem mønsteroppgaver totalt i perioden fra 2009-2019, ble to oppgaver vurdert som problemløsningsoppgaver. Disse handler om generalisering av mønster, og er å finne i eksamenssett

2017 og 2018, mens i de andre eksamenssettene har mønstergeneralisering vært helt fraværende. Hadde det vært funn av mønstergeneralisering i 2019-settet kunne man antydet en tendens av vektlegging på mønsteroppgaver i de siste eksamensårene. Siden dette ikke er tilfelle, kan ikke studien antyde dette. Andresen m.fl. (2017, s. 67) skriver at de fleste lærebøkene på 10.trinn, som de har gjennomgått, ikke behandler figurtall og tallmønstre. Det gjorde det heller ikke på forlagsprøvene, og de siste eksamenssettene. Kongelfs (2019, s.17) algebraforskning i lærebøker på 8.- og 9. trinn fant også svært få mønsteroppgaver. En kan stille spørsmål om generalisering i den norske undervisningen får nok prioritet. Som nevnt tidligere har eksamenen tilbakevirkende kraft på undervisningen (Alseth m.fl., 2003). Når eksamensoppgavene i liten grad vektlegger generalisering gjennom mønsteroppgaver, er det derfor grunn til å tro at dette igjen påvirker undervisningen ved at det fokuseres på andre typer oppgaver.

Eksamensoppgavene blir laget ut fra kompetansemålene i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2019a). I kompetansemålene etter 7. trinn, som omhandler tall og algebra, finner man at eleven skal kunne utforske og beskrive strukturer og forandringer i geometriske mønster og tallmønster med figurer, ord og formler (Utdanningsdirektoratet, 2013). Læreplanen legger altså til rette for at elevene skal trene på dette. Siden dette kompetansemålet er etter 7. trinn kan det være en av grunnene til at man ikke tester så mye mønsteroppgaver etter 10. trinn. Mason (1996) påpeker at det viktigste er at elever blir drevne på generalisering fra *starten* av. Likevel viser tabellene til Fafo (Andresen m.fl., 2017, s.52; Bjørnset m.fl., 2018, s.83) i 2017 og 2018 at avgangselevene gjorde det dårligst i gjennomsnittlig poengskår i generaliseringsoppgavene. Hansens (2014) undersøkelse i 8. trinnselevers besvarelser i TIMSS-oppgaver fant ut at elevene hadde manglende kunnskap i generalisering. Det er trolig at ungdomselever ikke får nok trening i generalisering gjennom mønsteroppgaver. Når elevene først blir testet i det, er det få som klarer det. Man kan spørre om det ikke hadde vært hensiktsmessig om dette kompetansemålet også hadde vært å finne etter 10. trinn. På den måten kunne læreplanen signalisert mer konkret at mønsteroppgaver er noe elevene skal trenes i de siste trinnene, og som konsekvens av dette har man antatt en høyere prioritering av mønsteroppgaver på eksamen mer jevnlig. Ifølge Mason (1996) er generalisering selve kjernen i matematikk. I fagfornyelsen har generalisering fått forrang som et av seks kjerneelementer som skal dekke det viktigste innholdet i faget (Utdanningsdirektoratet, 2018).

Begge oppgaven ble altså vurdert som problemløsende både i denne studien og i Fafos rapporter (Andresen m.fl., 2017; Bjørnset m.fl., 2018). Et poeng kan være at mønsteroppgavene på eksamenssettene i 2017 og 2018 ble laget for å gjøre det mulig for sekser-kandidatene for å få vist seg frem. Andresen m.fl. (2017, s. 75) refererer til eksamensveiledningens matrise som beskriver kjennetegn på måloppnåelse. Gjennomgående i denne matrisen er at kompetansen som beskrives for de laveste karakterene, kan knyttes til rutinemessige løsninger, mens kompetansen som kreves for de høyere karakterene, kan knyttes oppgaver som krever problemløsning (Utdanningsdirektoratet, 2019a, s.15). Men betyr det da at generaliseringsoppgaver er kun laget for femmer- og sekserelevene og ikke elevene i mellomsjiktet? Både Fafo og Matematikksenteret råder Utdanningsdirektoratet å lage eksamensoppgaver med stigende vanskegrad. Det er ideelt at oppgavesett skal ha stigende vanskegrad, slik at ikke elever mister motet før de kommer til de oppgavene som de kan få til. Oppgave 25b) i 2017-settet og 9b) i 2018-settet er de siste deloppgavene i Del 1 og Del 2.

Kongelfs tolkning av hovedområdet i «Tall og algebra» er at elevene i innføringen av algebra, i utgangspunktet skal studere og beskrive strukturer og forandringer i mønster. Ved å arbeide med mønster vil man etterhvert øke et behov for å beskrive mønstrene generelt ved hjelp av algebraiske uttrykk. Til tross finner jeg lite tegn på at eksamenen følger opp dette. Det er et begrenset antall deloppgaver som behandler mønster og generalisering i eksamensoppgavene. Den samme begrensingen kan også stå i kontrast med Masons (1996) synspunkt knyttet til viktigheten av generalisering i matematikkfaget.

7 Vurdering av teoretisk rammeverk og metodevalg

I dette kapittelet skal det reflekteres i hvilken grad funnene i denne studien er gyldige. Dette studiet faller inn under hermeneutisk fortolkningslære. Det vil si at det er forskerens egen fortolkning som fører til de funnene hen gjør. Siden tolkningene i analysen er gjort fra et hermeneutisk vitenskapssyn, kan man stille spørsmål i hvilken grad forskningsresultatene er gyldige. Hermeneutisk metode har ofte blitt kritisert for at den ikke er opptatt av, og heller ikke egnet for å generalisere (Bukve, 2016). Fra et positivistisk hold går mye av kritikken på at da studien blir tolket av kun én person, er studien lite generaliserbar. Tolkning og vurdering av en eksamen er en subjektiv aktivitet, og det kan være vanskelig å snakke om objektivt sanne svar innenfor kvalitative innholdsanalyser.

Selv om denne studien velger å dra slutninger om at eksamenen i liten grad behandler problemløsning i form av algebraoppgaver, er dette delvis en skjønnsmessig vurdering. Eksamensveiledning (Utdannningsdirektoratet, 2019a, s.13) skriver at et «problem» må forstås relativt: det som er et problem for én elev, kan oppleves som elementært for andre elever, avhengig av hvilket nivå de befinner seg på. Om oppgaver er problemløsende, blir opp til hver enkelt elev å bestemme. Oppgavene som ble vurdert som «rutineoppgaver» hadde også et spenn i vanskegrad. Hvilke oppgaver som oppleves som høyst vanskelig eller elementært for eleven, er en subjektiv opplevelse for hver enkelt elev. Likevel skriver eksamensveiledningen at problemløsning er oppgaver som kombinerer flere ferdigheter fra flere kompetansemål i læreplanen. Denne studien har analysert hver deloppgave for seg og ikke hovedoppgaven i sin helhet. Det kan da hende at en oppgave som inneholder tre deloppgaver, behandler flere hovedområder fra læreplanen. Denne studien finner likevel lite deloppgaver som krever flere kompetanser fra ulike kompetansemål. Som regel er modelleringen det vanskeligste for eleven, men løsningen er ofte enten en formel eller en likning som skal løses (Bjørnestad m.fl., 2013, s.299).

7.1 Sammenlikning med en liknende studie

Det fins et liknende undersøkelsesopplegg til denne studien. Det gir meg muligheter å si noe om reliabiliteten til analysen. I likhet med denne studien, har prosjektet til Gray m.fl. (2019) studert samme forhold med samme teoretiske rammeverk. De identifiserte algebraoppgaver på eksamener ved hjelp av TIMSS` definisjon av algebra, og de har gjennomgått eksamenssettene for 2010, 2015 og 2018. I deres studie har de presentert andelen av deloppgaver som har blitt kategorisert som algebraoppgaver av totalmengden deloppgaver på eksamen. Ved å vurdere samsvaret av antall algebraoppgaver for årene 2010, 2015 og 2018, i min masteroppgave med deres studie, kan man vurdere graden av samsvar. For å gi et oversiktlig bilde har jeg fremstilt mine og deres data i tabell nr. 4 og 5 nedenfor.

Tabell 4. Resultater for antall algebraoppgaver av totalmengden deloppgaver på eksamen fra Gray m.fl. (2019, s.5)

Resultatene til Gray m.fl. (2019)

År	2010	2015	2018
Totalmengde deloppgaver på eksamen	64	55	53
Totalmengde deloppgaver under algerbra	16 (25%)	21 (38%)	20 (38%)

Tabell 5. Resultater for antall algebraoppgaver av totalmengden deloppgaver eksamensoppgaver fra denne studien.

Resultatene fra dette studieprosjektet

År	2010	2015	2018
Totalmengde av deloppgaver på eksamen	64	55	53
Totalmengde deloppgaver under algebra	22 (34%)	21 (38%)	22 (41%)

Man kan se i tabellen at Gray m.fl. (2019) har plassert 20 deloppgaver under algebra i 2018-settet, og 21 algebradeloppgaver i 2015-settet. Jeg har i mitt arbeid klassifisert 22 deloppgaver som algebra i 2018-settet og 21 deloppgaver i 2015-settet. Det viser godt samsvar med tallene til Gray m.fl. (2019). På eksamenen i 2010 klassifiserte Gray m.fl. (2019, s.5) 16 deloppgaver under algebra, mens jeg har i det samme oppgavesettet klassifisert 22 deloppgaver under algebra. Det er betydeligere større forskjell. Ser en alle tre eksamenssettene under ett kan en likevel argumentere med at det er rimelig grad av samsvar. Jeg tolker det som at det ikke er vesentlige problemer med reliabilitet i arbeidet mitt.

I tillegg har deloppgavene og kodene i innholdsanalysen blitt gjennomgått og revurdert kritisk flere ganger på ulike tidspunkt. Med dette tatt i betraktning, kan man argumentere at det er en viss grad av reliabilitet i form av stabilitet i undersøkelsen.

7.2 Begrepsvaliditet

Denne formen for validitet refererer til forholdet mellom teoretiske og operasjonelle definisjoner av begreper. Mens den teoretiske definisjonen klargjør hva forskeren har til hensikt å undersøke, vil den operasjonelle definisjonen avgjøre hva som faktisk blir studert. Høy validitet forutsetter derfor at hvert begrep er operasjonelt definert på en måte som er treffende og dekkende for det teoretiske innholdet (Grønmo, 2016).

I denne studien er det algebra som skal forskes på i eksamensoppgavene og den teoretiske algebradefinisjonen er flertydig. Siden algebra er flertydig, har det vært et behov for et rammeverk som definerer algebra isolert fra andre hovedemner og er avgrenset til grunnskolenivå. Jeg mener at TIMSS' definisjon av algebra er et godt teoretiske rammeverk for arbeidet mitt. TIMSS deler algebra inn i fem hovedtemaer (formler, likninger, funksjoner, algebraiske uttrykk og mønster). Jeg har så gjennom en induktiv tilnærming utarbeidet til sammen 18 underkategorier.

Kategoriene fungerer som operasjonelle definisjoner av algebraområdet. Likevel har det vært en utfordring å separere temaene med underkategorier fra hverandre fordi hvert begrep ikke har en tilstrekkelig snever definisjon til at jeg alltid har kunnet greie å skille deloppgavene fra hverandre. Begrepenes egenart er i seg selv generelle og kan overlappe hverandre. I tillegg er oppgaveteksten kompleks, noe som gjør det utfordrende å plassere alle deloppgaver inn i kun én underkategori. På bakgrunn av dette har det vært viktig å analysere deloppgavene i form av hvilken kontekst de er i, vurdere språkformuleringen, hvilke hjelpeillustrasjoner ligger ved oppgaveteksten og svarformatet, og flere alternative løsningsforslag for å løse oppgaven.

7.3 Valg av metode

I denne studien har jeg valgt å bruke en stegvis-deduktiv-induktiv metode som utgangspunkt for analysen. Denne metoden har tillatt meg som forsker å gjøre kvalitative skjønnsmessige fortolkninger av deloppgavene uten å være for fastlåst i standardiserte teoretiske rammeverk. Som et resultat av mine skjønnsmessige vurderinger ble det utvidet to tilleggstemaer i tillegg til TIMSS-temaene. Med tanke på metodens pålitelighet, har jeg valgt å presentere en rekke autentiske tekstutsnitt, sammen med beskrivelser av analysen som ligger til grunn for kategoriseringen. Konkrete eksempler for tilleggstemaene, og andre underkategorier, som det ikke ble plass til å ha med masteroppgaven, har blitt plassert i vedlegg (1). Der står det mer om metodiske beskrivelser av prinsipielle sider for oppgavene under de ulike temaene og underkategoriene, samt sammenligninger med beslektet forskning.

I denne metoden valgte jeg å ikke bevege analysen inn i SDI-modellens siste steg (6), kalt teoritest. I siste steg av SDI-metoden må man stille spørsmål om hovedkategoriene og underkategoriene er falsifiserbare og etterprøvbare til å ha formell status som teori (Tjora, 2017). Et slikt arbeid med å vurdere og formidle at mine kategorier kan ha status som formell teori, går over mitt nivå som masterstudent, og studiens omfang av tid og begrenset arbeidsmengde. Derfor ble siste steg i SDI-modellen ekskludert fra denne studien. Likevel vil jeg argumentere for at kontrollsjekken som ble gjort av TIMSS-temaene, er god nok. I tillegg til rammeverket til TIMSS har også tilleggslitteratur blitt lest rundt de ulike temaene. Temaene og underkategoriene ble også diskutert med veilederne om de var treffende nok til eksamensoppgavene, noe det var enighet om. Jeg vil derfor argumentere for at kategoriene mine som adekvate nok.

7.4 Vurdering av teoretisk rammeverk

Det kan stilles spørsmål ved deloppgavene som ble kategorisert som algebraoppgaver i denne analysen, hadde sett annerledes ut om et annet rammeverk ble benyttet. Denne studien brukte rammeverket til TIMSS, men antall algebraoppgaver kunne sett annerledes ut om man hadde brukt kompetansemålene i læreplanen som et teoretisk rammeverk. For å eksemplifisere dette kan man se på Fafos funn fra 2018-eksamenen. De har sortert alle deloppgavene innad i hvert hovedområde til læreplanen. For eksempel har det blitt registrert to deloppgaver som jeg har kategorisert som «mønster», mens Fafo har plassert dem under «funksjon». Man ser også at oppgaver som jeg har plassert under algebra, finnes under hovedemnet geometri og måling i deres rapporter. Likevel velger jeg å holde fast ved at rammeverket til TIMSS passet bra til denne studien.

Det er poengtert at definisjonen av algebra er tvetydig. Studien har også lagt frem at argumenter fra faglitteratur at algebra har forbindelser til flere hovedemner. Det er læreplanen oppmerksom på selv: «Algebra benyttes også i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner». Bjørnestad m.fl. (2013, s.205) hevder at man finner algebra i alle emner i læreplanen. I tillegg hevder Jensen og Niss (2002) at det ikke går an å isolere hver selvstendige hovedkompetanse i matematikk uten at de overlappers. Med dette kan det argumenteres for at deloppgaver som havner under hovedområder som geometri og måling i læreplan, kan også anses å knyttes til algebra. Derfor er rammeverket til TIMSS gunstig for analyse av matematisk algebrainnhold. Temaene til TIMSS dekker algebraens innhold bredt, i motsetning til læreplanen som separerer funksjoner vekk fra algebra, og grupperer algebra med tall i læreplanen.

8 Oppsummering

Problemstilling for masteroppgaven er som følger: *I hvilken grad vektlegger nasjonale eksamener problemløsning i ulike algebraoppgaver i perioden 2009-2019?* Læreplanens «formål» for faget og «grunnleggende ferdigheter» fungerer som overordnet struktur som skal integreres på tvers av alle hovedområdene og kompetansemålene (Utdanningsdirektoratet, 2013, s.2). Problemløsning står sentralt i begge delene av læreplanen i matematikk. Eksamensoppgavene som skal måle elevens matematiske kompetanse er utformet på bakgrunn av lærerplanen. I eksamensveiledningen til Utdanningsdirektoratet (2019a) skriver de at eksamen skal måle elevenes evne i problemløsning og resonnement både i Del 1 og Del 2. De skriver også problemløsning, som er en av tre kategorier[7] som kjennetegner matematisk kompetanse, er den mest sentrale kategorien for sensors vurderingsgrunnlag av eksamensbesvarelsen. Det har derfor vært relevant å undersøke om det er samsvar mellom læreplanens fokus på problemløsning og algebraoppgavene som gis i eksamensoppgavene.

For å vurdere om en oppgave krever problemløsning eller ikke, har jeg har støttet meg til Björkqvists (2003) definisjon om at en matematikkoppgave der løsningsmetoden er uklar for eleven, er en oppgave som krever problemløsning. Jeg har forsøkt å ta hensyn til vanskegrad for å se om problemløsningsoppgaver henger sammen med mer krevende oppgaver. Eksamensrapporten Fafo og Matematikksenteret tar hensyn til vanskegrad av eksamensoppgavene, der begge vurderer problemløsende oppgaver som mer kognitivt krevende oppgaver. I analysen av eksamensoppgavene ble det brukt en stegvis-deduktiv-induktiv metode (Tjora, 2017). For å kategorisere hva som var algebraoppgaver i eksamenssettene ble rammeverket til TIMSS tatt i bruk. TIMSS deler algebra inn i fem temaer: formel, likning, funksjon, algebraiske utrykk og mønster. Oppgavene ble kategorisert inn i disse temaene med sine underkategorier som ble utviklet i analysen. I analysen ble det også utvidet to tilleggstemaer; «formel- eller likningsoppgaver» og «formel- eller funksjonsoppgaver» som noen oppgaver ble kategorisert inn i.

Resultatet mitt viser at eksamen i all hovedsak tester i hvilken grad elevene husker oppskrifter på formler, definisjoner eller prosedyrer i algebraoppgavene. Eksamenssettene fra 2009 til 2019 tester i liten grad elevenes evne i problemløsning og utforsking for å ta i bruk kreative løsningsmetoder i matematiske problem. Funnene gir grunn til bekymring. For det første viser flere forskere at eksamen har tilbakevirkende effekt på undervisningen (Alseth m.fl., 2003; Nordenbo m.fl., 2009). Det elevene testes i på eksamen, vil bli prioritert i undervisningen. For det andre er det et trolig at elevene som velger bort problemløsningsoppgaver, kombinert med en høy andel rutineoppgaver, vil elevene sannsynligvis få gode karakterer ved å kun svare på oppgavene som krever imitering av fremgangsmåter og algoritmer. Videre støtter matematikkeksamen en oppfatning om at matematikk er et fag der pugging av fakta, definisjoner og prosedyrer står sentralt. Denne oppfatningen kan skape vanskeligheter når elevene skal løse problemer.

8.1 Konklusjon

For å svare på problemstillingen ble konklusjonen at eksamensoppgavene inneholdt en liten andel av algebraoppgaver som krever problemløsning, til tross for at problemløsning i læreplanen i matematikk er sentralt. Eksamen, slik innholdet fremstår i det analyserte utvalget, tester først og fremst pugging av fakta, definisjoner og prosedyrer.

Utdanningsdirektoratet (2019b) reflekter selv at de er oppmerksomme på at eksamen kan være styrende i forståelsen og praktisering av læreplanen. Samtidig argumentere de for at «dette ikke trenger å være et problem så lenge eksamen gjenspeiler læreplanen» (Utdanningsdirektoratet, 2019b, s.37). Til tross for dette viser resultatene mine at eksamensoppgavene i liten grad gjenspeiler fokuset på problemløsning i læreplanen.

8.2 Videre forskning

Arbeidet med masteroppgave har vært spennende, men krevende. Det har vært en lang og lærerik prosess, og jeg føler jeg har fått bidratt med en liten del av forskningsfeltet. Av forskningsfeltet som har blitt lest, og funnene som har blitt gjort, har jeg blitt veldig engasjert i utsiktene til matematikkfaget. Forskningsstiftelsen Fafo har fått i oppdrag av Utdanningsdirektoratet (2019a, s.17) å gjøre en ekstern evaluering av matematikkeksamen for 10. trinn 2017-2019. Jeg er spent på å se hvilke funn og konklusjoner de trekker i deres siste rapport for matematikkeksamenen. Til tross for at den eksterne evalueringen av eksamensoppgavene går mot slutten for Fafos prosjekt, håper jeg fortsatt at det blir gjort flere eksterne studier av forhold rundt matematikkeksamen fremover. Studier av vurdering i matematikk er viktig, og det er fortsatt mye kunnskap å hente, særlig nå ettersom at faget er i endring med den nye læreplanen som trer i kraft i høst. På den andre siden kunne det også vært spennende å forske på eksamensoppgaver og læreplanverk fra en lengre tidsperiode for å undersøke om samsvaret mellom læreplanens og eksamens fokus på problemløsning er større, mindre eller uendret. Fagfornyelsen har fremstilt problemløsning, utforsking, modellering og generalisering som viktige punkt i kjerneelementer for innholdet i matematikkfaget. Mitt innblikk i Fagfornyelsens læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2018), basert på det jeg har lest, gir et inntrykk at problemløsning og utvikling av problemløsningskompetanse har fått et større fokus enn LK06. Jeg er derfor spent på hvordan dette vil gjenspeile seg i undervisningsinnholdet og vurderingsformen i faget. I tillegg håper jeg Utdanningsdirektoratet, slik som resultatene til Fafos (Andresen m.fl., 2017; Bjørnset m.fl., 2018) rapporter viser, fortsetter å offentliggjøre elevenes gjennomsnittlige poengskår på deloppgavene på eksamenen, i fremtidige år.

På den måten kan skolen nasjonalt få mer innsikt i hvilken type oppgaver elevene har vanskeligheter med, samt hvor det er rom for forbedringspotensialet i undervisningen.

9 Litteraturliste

Aanensen, S., & Kristensen, O. (2018). Praktisk matematikk. *Formelregning.* Hentet fra: https://ndla.no/nb/subjects/subject:29/topic:1:187398/topic:1:165249/resource:1:116782.

Aaseth, N. (2016). Problemløsning i norske og russiske matematikklærebøker for videregående skole. En sammenlignende studie av eksempler i norske og russiske lærebøker. Erfaringsbasert master i undervisning med fordypning i matematikk. Matematisk institutt Universitet i Bergen.

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). Endring og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus. Notodden: Telemarksforsking.

Andersen, T., Berg, U. S., Dahl, K. R., Ravlo, G., & Wæge, K. (2015). Rapport: Vurdering av eksamen i matematikk. Matematikksenteret Nasjonalt senter for matematikk i opplæring.

Andresen, S., Fossum, A., Rogstad, J., & Smestad, B. (2017). På prøve. Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn våren 2017.

Becker, J. R., & Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. I H. L. Chick & J. L. Vincent (Red.), International Group for the Psychology of Mathematics Education (s. 121-128). Melbourne.

Befring, E. (2015). Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Bergem, O., K.,, Leer, G., L.,, Maugesten, M., Torkildsen, S., Randal M., Settemsdal, M., ... (2014). Teoretisk bakgrunnsdokument for arbeid med regning på ungdomstrinnet – Revidert våren 2014.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm (Red.), Matematikk for skolen (s. 51-57). Bergen: Fagbokforlaget.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R., & Myklebust, T. (2013). *Alfa. Lærebok : matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (2. utg. ed.). Bergen: Fagbokforl.

Bjørnset, M., Fossum , A., Rogstad , J., Smestad , B., & Talberg, N. (2018). Digitale skillelinjer. Evaluering av matematikkeksamen på 10. trinn våren 2018 Fafo-rapport. Hentet fra: https://www.fafo.no/images/pub/2018/20685.pdf.

Bukve, O. (2016). Forstå, forklare,forandre. Om design av samfunnsvitenskapelege forskningsprosjekt.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. ZDM, 40 (1), 3-22. Hentet fra: https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7.

Christiansen, A. (2020). – Elevane må få vanskelegare matteoppgåver. *Forskning, Nyheter , Universitet i Agder.* Henter fra: https://www.uia.no/nyheter/elevane-maa-faa-vanskelegare-matteoppgaaver.

Cooper, T. J., & Warren, E. (2011). (2011). Years 2 to 6 students’ ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. I J. Cai & E. Knuth (Red.), Early algebraization (s. 187-214). Berlin: Springer.

Demby, A. (1997). Algebraic Procedures used by 13-to-15-Year-Olds. ESM, 33(1), 45-70. Hentet fra: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1002963922234.

Ertesvåg, F. (2015). Svakeste matte-eksamen noensinne . *VG.* Hentet fra: https://www.vg.no/nyheter/innenriks/i/MQzQK/svakeste-matte-eksamen-noensinne.

FuseSchool. (2017). Expressions, Equations, Formulae & Identities | Algebra | Maths | FuseSchool. Hentet fra: https://www.youtube.com/watch?v=IHmnSYj1gPA&t=15s.

Gray, J., Kleve, B., & Tellefsen, H. (2019). Students' expected engagement with algebra based on an analysis of exams in Norway from 1995 till 2018. Hentet fra: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416018/.

Grønmo, & Helgesen, R. (2018). Norge trenger algebra! Kronikk - Aftenposten. Hentet fra: https://www.aftenposten.no/meninger/debatt/i/qnMnz0/norge-trenger-algebra-liv-sissel-groenmo-og-rita-helgesen.

Grønmo, Lindquist, M., Arora, A., & Mullis, I. V. S. (2015). TIMSS 2015 Assessment Frameworks. Hentet fra: https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_FW_Chap1.pdf.

Grønmo, Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram : norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Grønmo, L. S. (2005). Ferdighetenes plass i matematikkundervisningen. Nämnaren nr. 4. Hentet fra: https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/publikasjoner/gronmo_ferdighetenes-plass-i-matematikkundervisningen.pdf

Grønmo, L. S. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken – derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart — BEDRE SKOLE. Henter fra: https://utdanningsforskning.no/artikler/algebra-og-tall-er-motoren-i-matematikken--derfor-gar-matematikkfaget-i-norden-for-halv-fart/.

Grønmo, L. S., & Onstad, T. (2012). *Mange og store utfordringer : et nasjonalt og internasjonalt perspektiv på utdanning av lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008*. Oslo: Unipub.

Grønmo, S. (2016). Samfunnsvitenskapelige metoder, 2. utgave. Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., & Melhus, A. (2008a). *Nye Mega : matematikk for ungdomssteget : [10. trinn] Grunnbok 10A* (3. utg., nynorsk. ed.). Oslo: Damm.

Gulbrandsen, J. E., Løchsen, R., & Melhus, A. (2008b). *Nye Mega : matematikk for ungdomssteget : [10. trinn] Grunnbok 10B* (3. utg., nynorsk. ed.). Oslo: Damm.

Hansen, R., R. (2014). Kan norske elever på 8. trinn noe algebra i det hele tatt? En studie av oppgavebesvarelser i algebra fra TIMSS 2011 med fokus på feilsvar. Hentet fra: https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/41230/Resell-Hansen-Master.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Harder, V. K. (2013). Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole. Masteroppgave, Universitetet i Oslo. .

Hjardar, E. (2015). *Faktor : Lærerens bok [10.klasse] Matematikk for ungdomstrinnet* (Bokmål[utg.]. ed.). Oslo: Cappelen Damm.

Husabø, I., A. (2016). Difor er algebra vanskeleg for norske elevar. Utdanningsforskning.no. Hentet fra: https://utdanningsforskning.no/artikler/difor-er-algebra-vanskeleg-for-norske-elevar/.

Jacobsen, D. I. (2015). Hvordan gjennomføre undersøkelser. Innføring i samfunnsvitenskapelig metode (3. Utg.). Kristiansand: Høyskoleforlaget.

Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T., S., Kjærnsli, M., Rohatgi, A., Eriksen, A., & Narvhus, E., K. (2018). PISA 2018 Norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag. Universitetsforlaget.no Hentet fra: https://www.udir.no/contentassets/2a429fb8627c4615883bf9d884ebf16d/kortrapport-pisa-2018.pdf.

Jensen, T. H. (2007). Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt - hvorfor ikke? Doktoravhandling. Roskilde: Roskilde universitet.

Karimzadeh, A. (2014). Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker. En sammenligning på bakgrunn av resultatene fra TIMSS 2011. Masteroppgave i realfagsdidaktikk ved. Det utdanningsvitenskapelige fakultet. Universitetet i Oslo.

Kieran, C. (2004). The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study s.21-33. Hentet fra: https://link.springer.com/chapter/10.1007/1-4020-8131-6_2

Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middel school through college levels: building meaning for symbols and their manipulations. I F. Lester (red.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (s. 707–762). Charlotte: Information Age.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? Nordic Studies in Mathematics Education, 16(4), 5–44.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. Nordic Studies in Mathematics Education, 20(3-4), 83-110.

Kongelf, T. R. (2019). Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge - Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra? Universitet i Agder. Hentet fra: https://uia.brage.unit.no/uia-xmlui/handle/11250/2616438.

Krovik, Ø. (2013). Introduksjon av algebra i den norske skole. En sammenligningsstudie av lærers introduksjon og forståelse av algebra på ungdomstrinnet og i den videregående skole. Masteroppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Universitetet i Agder.

Kunnskapsdepartementet. (2017). Realfagsbarometeret: Færre tar realfag på videregående skole. Pressemelding fra Kunnskapsdepartementet. Hentet fra:

https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/farre-tar-realfag-pa-videregaende-skole/id2550767/.

Kunnskapsdepartementet. (2018). Fornyer innholdet i skolen. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606064.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. Mathematical Thinking and Learning, 7(3), 231-258. Hentet fra https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3.

Larsen, A. K. (2017). En enklere metode. Veiledning i samfunnsvitenskapelige forskningsmetode, 2. utgave. Fagbokforlaget.

Lee, L. (1996). An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. I N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Red.), Approaches to Algebra - Perspectives for Research and Teaching (s. 87-106). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Lee, L. (2001). Early algebra – but which algebra? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), The future of teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference (Vol. 2, s. 392–399). University of Melbourne.

Leer, L. G. (2009). Vurdering av matematisk problemløsning: en studie av sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk og oppgavene som gis på eksamen. Masteroppgave. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Leistad, A.-M. (2016). Problemløsning i matematikk. Hvordan resonnerer elever på 9. trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon? Masteroppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Universitet i Agder.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), Approaches to algebra: perspectives for research and teaching (s. 65–86). Dordrecht: Kluwer Academic.

Merton, R. K. (1973). The Sociology of Science: Theoretical and Empirical Investigations (edited by Norman W. Storer) Chicago: University of Chicago Press

Morgan, C., & Tang, S. (2016). To what extent are students expected to participate in specialised mathematical discourse? Change over time in school mathematics in England. Research in Mathematics Education, 18(2), 142-164. HEntet fra https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416018/document.

Nemirovsky, R. (1996). Mathematical Narratives, modeling and algebra. I N. Bednarz, C. Kieran, &. Lee (Red.), *Approaches to algebra: Perspective for Research and Teaching* (s.197-220). Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M., & Jensen, J., H. (2002). Kompetencer og matematiklæring. *Ideer og inspiration til udviklingaf matematikundervisning i Danmark.* Hentet fra http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf.

Nordenbo, S. E., Allerup, P., Andersen, H. L., Dolin, J., Korp, H., Larsen, M. S., . . . Østergaard, S. (2009). Pædagogisk brug af test: – Et systematisk review. København: Danmarks Pædagogiske Universitets Forlag.

Onstad, T. (1994). Fra Babel til Abel: Likningenes historie. Oslo: NKS-Forlaget.

Petersen, I. J. (2015). Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert? En kvantitativ kartlegging av 215 elever på tiende trins ferdigheter i algebra. Masteroppgave i lærerutdanningen 5.-10. trinn. Tromsø: Norges Arktiske Universitet.

Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving. New York: John Wiley & sons, Inc.

Polya, G. (2004). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton university press.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. For the Learning of Mathematics, 30(2), 2-7. Hentet fra http://www.jstor.org/stable/20749442.

Reinhardtsen, J. (2012). The introduction of algebra: comparative studies of textbooks in Finland, Norway, Sweden and USA. Masteroppgave i matematikkdidaktikk. Universitetet i Agder. Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/138112.

Reinhardtsen, J., & Givvin, K. B. (2019). *The fifth lesson: Students' responses to a patterning task across the four countries. In C. Kilhamn, & R. Säljö (Eds.), Encountering algebra. A comparative study of classrooms in Finland, Norway, Sweden, and the USA (s. 165-234). Cham: Springer Nature. Hentet fra: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-030-17577-1.pdf*.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

Selvik, B. K., Rinvold, R. A., & Johnsen-Høines, M. (2002). *Matematiske sammenhenger : Algebra og funksjonslære* (2. utg., 2. oppl. ed.). Bergen: Caspar forl.

Storeli, S. (2011). Å være eller ikke være deltager i en matematisk diskurs - med fokus på elevers deltagelse i problemløsningsaktiviteter og deres fortellinger om matematikk. Masteroppgave i grunnskoledidaktikk.med fordypning i matematikk. Hentet fra: https://oda.hioa.no/nb/item/asset/dspace:2951/Storeli_Solfrid.pdf

Stymne, B., Nygård, M., Borre, K., Lundsgaard, A., & Zarrabi, S. (2008). Evaluering av ingeniørutdanningen i Norge 2008. Sammendrag av viktige konklusjoner og anbefalinger. Nokut - Nasjonalt organ for kvalitet i utdanningen. Hentet fra: https://www.nokut.no/contentassets/40568ec86aab411ba43c5a880ae339b5/ingeva_nokut_sammendrag.pdf.

Teigen, K., H. (2019). Heuristikk. Det store norske leksikon. Hentet fra: https://snl.no/heuristikk.
Thorvaldsen, S. (2002). *Matematisk kulturhistorie : artikkelsamling* (Vol. 4/2002). Tromsø: Høgskolen i Tromsø Eureka forl.

TIMSS. (2015). Frigitte oppgaver i matematikk for ungdomstrinnet. Hentet fra https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2015/frigitte-oppgaver/t15_g8_hefte_matte_211217.pdf.

Tjora, A. H. (2017). *Kvalitative forskningsmetoder i praksis* (3. utg. ed.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Tjora, A. H. (2018). *Viten skapt : kvalitativ analyse og teoriutvikling*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Torkildsen, S., & Maugesten, M. (2008a). *Sirkel : matematikk for ungdomstrinnet : A : Grunnbok* (Nynorsk[utg.]. ed. Vol. A). Oslo: Aschehoug.

Torkildsen, S., & Maugesten, M. (2008b). *Sirkel : matematikk for ungdomstrinnet : B : Grunnbok* (Nynorsk[utg.]. ed. Vol. B). Oslo: Aschehoug.

Trondsæther, C. (2017). Å være en strateg. En kvalitativ dokumentanalyse av leseforståelsesstrategier i læreverkene Salto 5 og Kaleido 5. Hentet fra: https://www.duo.uio.no/bitstream/handle/10852/58157/mac-duo-3--Masteroppgave-.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

UiO. (2015). Rammeverket for TIMSS 2015 - kortversjon. Hentet fra: https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekt-sider/timss-norge/TIMSS/2015/rammeverk2015.html.

Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag: Fastsett som forskrift av Kunnskapsdepartementet Hentet fra: http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.doc.

Utdanningsdirektoratet. (2016). Hovedresultater fra TIMSS 2015. Udir.no - Forside - Tall og forskning - Internasjonale studier - TIMSS. Hentet fra: https://www.udir.no/contentassets/7b41d7e958ad41cc8596f58dfd4838d1/timss_2015_hovedresultater.pdf.

Utdanningsdirektoratet. (2018). Matematikk – oppsummering av innspill : Hentet fra: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/matematikk--oppsummering-av-innspill/.

Utdanningsdirektoratet. (2019a). Eksamensveiledning - om vurdering av eksamensbesvarelser.

Utdanningsdirektoratet. (2019b). Kunnskapsgrunnlag for evaluering av eksamensordningen. Hentet fra https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/Kunnskapsgrunnlag-for-evaluering-av-eksamensordningen/del-2/.

Veiteberg, J. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen. Undervisnings-og forskningsdepartementet. Nasjonalt, læremiddelsenter* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. American Educator, 25 (2), 10–17.

Yan, Q. (2018). Problemløsning i norske og kinesiske lærebøker i matematikk for ungdomsskolen. En sammenlignende studie av eksempler fra norske og kinesiske lærebøker i matematikk på ungdomsskolen. Masteroppgave i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk, OsloMet – storbyuniversitet. Hentet fra: https://oda-hioa.archive.knowledgearc.net/handle/10642/6233.

Zwetzschler, L., & Prediger, S. (2013). Conceptual challenges for un-derstanding the equivalence of expressions: A case study. CERME8 (s. 558-567). Hentet fra: https://pdfs.semanticscholar.org/b630/e4b89bafcb6f1775a6ffc2edb4ae1cbff540.pdf.