

Deteksjon av kavitasjon i pumper

Marius Alsaker

Sindre Korten

Adrian Løkken

Bacheloroppgave i Allmenn maskinteknikk
Bergen, Norge 2019



Deteksjon av kavitasjon i pumper

Marius Alsaker

Sindre Korten

Adrian Løkken

Institutt for Maskin- og Marinfag

Høgskolen på Vestlandet

NO-5063 Bergen, Norway

IMM 16HMAM

Høgskulen på Vestlandet
Fakultet for Ingeniør- og Naturvitenskap
Institutt for maskin- og marinfag
Inndalsveien 28
NO-5063 Bergen, Norge

Omslag fotografi © Norbert Lümmer

English title: Detection of cavitation in pumps

Forfatter(e), studentnummer: Marius Alsaker h182419
Sindre Korten h181320
Adrian Løkken h181350

Studieprogram: Allmenn Maskin
Dato: Mai 2019
Rapportnummer: IMM 16 HMAM
Veileder ved HVL: Boris Balakin HVL ansatt
Oppdragsgiver: Framo AS
Oppdragsgivers referanse: Magnus Kallanger
Antall filer levert digitalt:

Forord

Dette er et bachelorprosjekt som markerer avslutningen på en treårig utdanning som maskiningeniør ved Institutt for Maskin- og Marinfag (IMM) ved Høgskolen på Vestlandet (HVL). Oppgaven står for 12 studiepoeng og krever tilegnet kunnskap tillært gjennom utdanningsforløpet. Oppgaven går ut på å detektere kavitasjon i pumper ved hjelp av trykkmålinger (akustiske målinger ved bruk av mikrofon). Prosjektet skrives i samarbeid med Framo AS, avdeling Flatøy.

Vi valgte denne oppgaven fordi det virket spennende og lærerikt å få være med i spissen på et innovativt prosjekt som tidligere ikke har blitt gjort mye forskning på. Det har heller ikke vært skrevet bacheloroppgaver om dette emnet før, noe som gjør denne oppgaven veldig krevende men også enda mer givende for vår del.

Fagene som har bidratt til å hjelpe på forståelsen av oppgaven vår er Materiallære, Matte, fysikk, Maskinkonstruksjon, Fluidmekanikk, fluiddynamikk og Hydraulikk. Vi har altså fått et utmerket grunnlag for å skrive denne oppgaven med tanke på tidligere erfaringer fra tidligere fag.

Vi vil gjerne takke vår eksterne veileder Magnus Kallanger (Framo AS) som har fulgt oss hele veien og som har vært bindeleddet vårt mellom IMM og Framo AS. Vi vil også takke vår interne veileder Boris Balakin (IMM) som har vært en utmerket veileder gjennom arbeidet på bacheloroppgaven.

Vi vil i tillegg takke

- Victoria Popsueva, lærer, HVL, hjelp til forståelse av fourier transform og MATLAB
- Gisle, ansatt, Onesubsea, som har hjulpet oss med testing på Framo.
- FRAMO AS som har finansiert utstyr til testing av pumpene, og sittet av tid til testingen vår.

Sammendrag

Kavitasjon er et vanlig fenomen som forekommer i pumpeindustrien. Det er svært uheldig da det tærer på materialet i pumpene og kan føre til store skader og defekter, som resulterer i dårligere pumpeeffekt. Dette kan koste dyrt for dem som driver pumpene. Dermed vil man unngå kavitasjon der det er mulig.

Denne oppgaven går ut på å se om det er mulig å detektere tidlige tegn på kavitasjon slik at det er mulig å forhindre tæring på pumpen før uhellet er ute.

Innledningsvis utredes bakgrunnen og formålet med oppgaven, samt informasjon om samarbeidspartner Framo og pumpene deres. Oppgaven gir en god forståelse av hva kavitasjon er, hvilke tidligere metoder som har blitt brukt for å detektere det, men også hvilke tidligere forskning som er gjort på feltet.

Deretter utledes den videreutviklende metoden rundt programmet som er blitt utviklet basert på FFT modellen, med den hensikt å gi et konsist svar på hvor og når kavitasjon oppstår i pumper.

Resultatene som har kommet frem i denne oppgaven viser at målinger ved trykk oscillasjoner har gidd gode tegn til at kavitasjon kan detekteres tidligere enn man kunne før.

Abstract

Cavitation is a common phenomenon that occurs in the pump industry and is very unfortunate as it tears on the material and can cause large damage and defects in the pumps, resulting in poor pumping power. Cavitation can be expensive for those who run the pumps. Therefore cavitation should be avoided whenever possible.

This paper explores the possibilities of early detection of cavitation to prevent pump deficiency before the accident occurs.

Initially, the background and purpose of the task are examined, as well as information about the partner Framo and their pumps. This paper gives a good understanding of what cavitation is, what previous methods have been used to detect it, and also which previous research has been done in the field.

Thereafter, the developing method is derived around the application which has been developed based on the FFT model, with the purpose of providing a concise response to where and when cavitation occurs in pumps.

The results that have emerged in this paper show that measurements at pressure oscillations have given good signs that cavitation can be detected earlier than previously.

Innholdsfortegnelse

Forord	5
Sammendrag	7
Abstract	9
1. Innledning	12
1.1 Bakgrunn	12
1.2 Målsetning	13
1.3 Framo AS	13
2. Bakgrunnsinformasjon	15
2.1 Hva er kavitasjon?	15
2.1.1 Parametere som påvirker kavitasjon	16
2.2 NPSH	16
2.2.1 NPSH verdier	17
2.3 Testtrigg	18
2.3.1 Vanninjeksjonspumpe (WIP)	18
2.3.2 Seawater lift pump (SWL)	19
2.4 Ulike målemetoder	20
2.5 Tidligere forskning	21
2.5.1 Forutse koke regime ved analyse av temperatur svingninger	21
2.5.2 Envelope analyse:	21
2.5.3 Vibro-akustiske målinger:	22
2.5.4 Analysering av deteksjon av kavitasjon i turbiner	22
2.5.5 Tidligere forskning konklusjon	22
2.6 MATLAB	23
3. Metode	23
3.1 Teori	24
3.1.2 DFT	24
3.1.1 Hvorfor DFT	26
3.1 Arbeidet i MATLAB	27
3.2 Resultater i MATLAB	31
3.2.1 A mot S	32
3.2.2 Mode-trykk mot s	32
3.2.3 Mode-FFT mot s	33
3.2.4 Dispers-trykk mot s	34
3.2.5 Dispers-FFT mot s	34
3.3 Analyseringsmetode	35
4. Resultater	36
3.4 Sammenligning med NPSH-beregninger	40
4.1 Målinger på høytrykkside	42
5. Diskusjon	43
6. Konklusjon	43
7. Videre utvikling av programmet	44
Kilder	45

1. Innledning

I innledningen kommer bakgrunnen for oppgaven frem, målsetningen for oppgaven forklares og til slutt litt kommer det litt fakta om samarbeidsbedriften Framo.

1.1 Bakgrunn

Pumper er mye brukt i all industri. Pumper brukes i alt fra vann, olje og gass, strøm industrien til mye mer. Mange ulike feil kan oppstå i pumper som resulterer i lavere effektivitet av pumpene. Kavitasjon er en av de vanligste årsakene til dette.

En undersøkelse på feil i pumper utført av the German Engineering Federation (VDMA) viser at 80% av alle mekaniske feil i pumper er grunnet kavitasjon, tørr drift, utvendig vibrasjoner, ubalanse i deler, gass i væske, slitasje på lagre og stengte ventiler. Undersøkelsen viser også at ut ifra alle disse feilene, var kavitasjon den mest prominente. (referanse)

Kavitasjon i industrien har også vist seg at kan føre til alvorlige konsekvenser.

På 15 November 1999, ble H-II Flight #8 offisielt avfyrt fra Tanegashima romsenter i Japan. Første-fase motoren feilet plutselig bare 4 minutter etter avgang. Rapporter i ettertid viser at roterende kavitasjon i en turbo drivstoffpumpe var en av de avgjørende feilene. (referanse)

Framo er ledende på industrielle pumper og distribuerer produktene sine verden over.

Fenomenet kavitasjon er naturligvis vell kjent for bedriften. De vil så klart unngå kavitasjon i pumpene deres til enhver pris. For noen år tilbake forsket noen på Framo på en bedre måte å detektere kavitasjon i pumpene deres på, men forskningen ble lagt på is siden en av de involverte i arbeidet gikk ut i pappaperm. Bakgrunnen for å skrive denne oppgaven sammen med Framo er at de nå ønsket å ta opp igjen arbeidet på deteksjon av kavitasjon i pumpene deres.

1.2 Målsetning

Formålet med denne oppgaven er å komme med en måte å detektere kavitasjon tidligere enn man kunne før. Dersom det er mulig å oppdage kavitasjon i tide kan det eventuelt forhindre store skader og økonomiske tap som følge av dette.

Denne oppgaven dreier seg om en matematisk metode som analyserer trykkmålinger. Målet er at programmet vil oppdage kavitasjon der tidligere målinger ikke har fanget opp problemene, dette gjør at man kan bytte ut deler i systemet før de blir ødelagt, som igjen resulterer i mindre nede-tid og redusert risiko for at andre deler i systemet blir ødelagt i prosessen.

1.3 Framo AS

Basert i Bergen, Norge, Framo har vært en anerkjent leder innenfor design og produksjon av industrielle pumper i over 50 år.



Figur 1: Framo sitt hovedkontor på Flatøy [1]

Bedriften ble startet opp i 1938 av Frank Mohn. Fra 1986 frem til 2014 ble bedriften ledet av Trond Mohn. Bedriften produserer hovedsakelig pumper, rør og pumpesystemer for rederier og oljeindustrien men også utstyr for oljevern og brannslukking på blant annet store cargoskip.



Figur 2: Cargoskip [2]

Det meste av produksjon foregår på Flatøy og Fusa.

Kunder verden over oppsøker Framo for pumpe tjenestene deres men også for deres ekspertise for å møte nye utfordringer. I 2014 ble Framo del av Alfa Laval en organisasjon som har pionert i maritime løsninger for over 100 år.



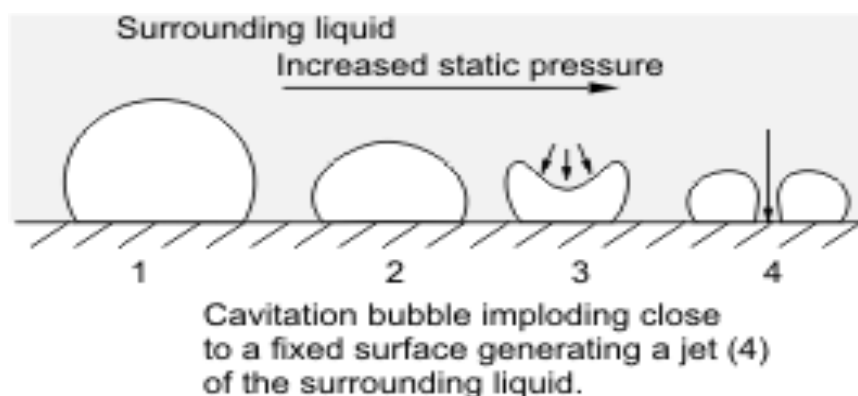
Figur 3: Oljerigg [3]

2. Bakgrunnsinformasjon

Før metoden utledes må det utredes litt bedre om fenomenet kavitasjon og samtidig om den tidligere metoden som ble brukt for å detektere kavitasjon på. Dette må med for å få en mer helhetlig forståelse av problemet og motsetningen til metoden i denne oppgaven.

2.1 Hva er kavitasjon?

Kavitasjon kjennetegnes med dannelsen av gassbobler som deretter imploderer i en væske. Fenomenet opptrer dersom trykket i en væske synker til under damptrykket, dette fører til en faseovergang, slik at små gassbobler formeres. Når trykket igjen stiger, til over væskens damptrykk, vil gassboblene implodere. Dersom disse gassboblene imploderer ved en overflate oppstår det lokalt svært høyt trykk. De høye trykkene kan videre føre til skade på overflaten.



Figur 4: Kavitasjon [4]

Kavitasjon er normalt uønsket ettersom det fører til erosjon av overflater, men også på grunn av vibrasjonen og støyen som opptrer. Det har også en uheldig effekt av å redusere effektiviteten til pumper og kompressorer. Dersom kavitasjonen tillates å fortsette vil det kunne føre til at rør brister, ventiler kan miste sin funksjon, eller at roterende maskiner ødelegges. Et eksempel på dette er i innsuget til en pumpe, da pumpen «trekker» væsken (ofte vann) og derfor kan trykket nå kritiske lave nivåer, og damp kan oppstå. Vanndampen blir sugd inn i pumpen og dampboblene tærer på forskjellige komponenter i pumpen, for eksempel impelleren. Fenomenet som gjør at denne dampen oppstår inni væsken og tærer på komponentene kalles kavitasjon. Kavitasjon er hovedårsaken til slitasje på mange av nevnte systemer.

2.1.1 Parametere som påvirker kavitasjon

I en pumpe er det mange parametere som kan påvirke og risikere at kavitasjon oppstår.

Hovedparameteren er trykk, da kavitasjon, "cold boiling", skjer når det laveste systemtrykket er likt eller mindre enn fordampningstrykket til vann. Temperatur er en annen faktor som direkte er knyttet til trykket. En økning i temperatur gjør at vannets fordampningstrykk også øker og dermed øker risikoen for at kavitasjon oppstår.

$$P_{\text{system}} = P_{\text{steam}}$$

$$CA = \frac{P_{\text{static}} - P_{\text{steam}}}{\frac{\rho \bar{v}^2}{2}} < 1$$

Andre faktorer som også påvirker kavitasjon er overflatens evne til adhesjon, overflateruhet på impeller, forurensninger i væske, turbulens. Øker noen av parameteren nevnt over, øker også risikoen for kavitasjon.

2.2 NPSH

Net positiv suction head som går under forkortelsen NPSH er netto energi tilgjengelig på innsuget av en pumpe i form av høyde, også kalt « head » som kan benyttes i form av sugehøyde. NPSH gir høydenivået en pumpe kan bli installert uten å skape kavitasjon.

$$\text{Formelen for } NPSHA = \frac{P_{in} + \frac{\rho v_{in}^2}{2}}{\rho g} - \frac{P_{steam}}{\rho g}$$

P_{in} = innsugstrykket, v_{in}^2 = inngangshastigheten på fluidet, P_{steam} = damptrykket.

For å forstå hvordan Framo bruker NPSH beregninger til å estimere "høyden" som trengs for å unngå kavitasjon må man først forstå de ulike NPSH-verdiene.

2.2.1 NPSH verdier

$NPSH_{Available}$ = absolutt trykk på suge siden til pumpen, er en funksjon som må regnes ut, som oftest av kunden av pumpen hvor man må vite dimensjonering og informasjon om forholdene rundt pumpen der den opererer/i drift.

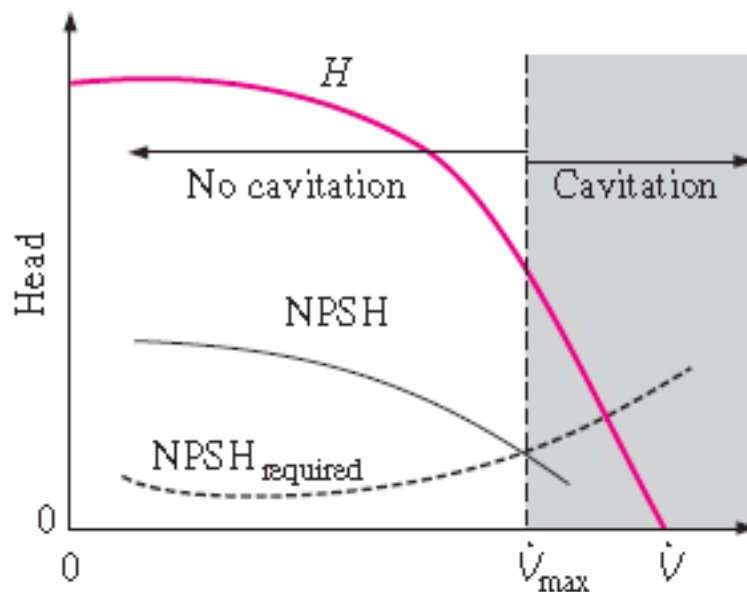
$NPSH_{Required}$ = minimum trykk som trengs på suge siden av pumpen for å forhindre pumpen å kavitere, må bli gitt av leverandøren av pumpene, I denne sammenhengen er det Framo som står for denne verdien. Denne kalles også $NPSH_I$ eller $NPSH_{3\%}$ som viser til sikkerhetsmarginen som man må ta hensyn til i Nordsjøen.

$NPSH_{Available}$ må være større enn $NPSH_{Required}$ for at pumpen skal operere uten å kavitere. Når man skal kontrollere dette må man også ta hensyn til en sikkerhetsmargin(1m) som skal legges til $NPSH_{Required}$

da får man at

$$NPSH_{Available} > NPSH_{Required} + \text{Sikkerhetsmargin}(1m)$$

Kan omformuleres som: man må ha mer suge trykk (tilgjengelig) enn det som (kreves).



Figur 5: Graf over forholdet mellom $NPSH_{Available}$ og $NPSH_{Required}$ [5]

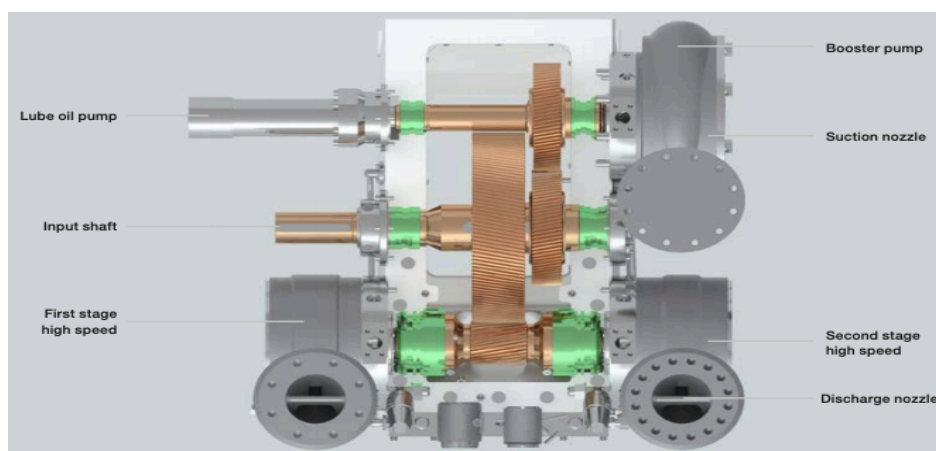
2.3 Testrigg

Målinger i form av trykk er målt hos Framo AS ved hjelp av deres test anlegg på Flatøy. Testanlegget er delt inn i to haller som er beregnet for ulike pumper. Her er den ene beregnet for nedsenkede pumper, mens den andre er for ombord pumper. Målingene baserer seg på resultater fra begge disse hallene, hvor det er blitt testet én vanninjeksjonspumpe og én løftepumpe.

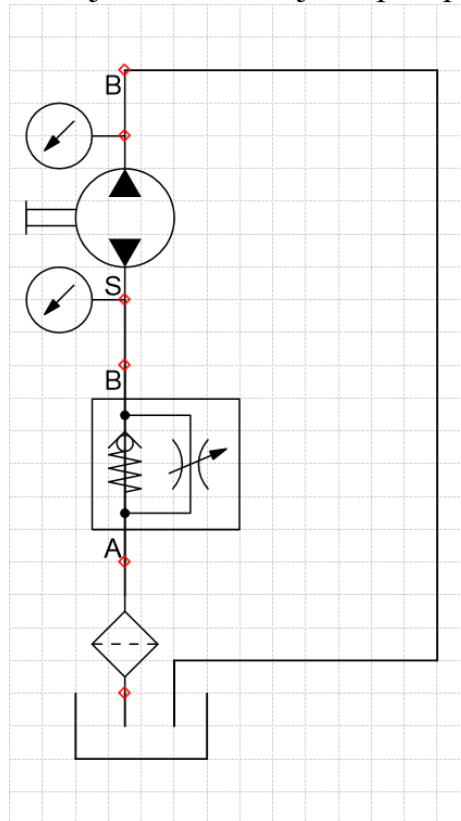
2.3.1 Vanninjeksjonspumpe (WIP)

Vanninjeksjonspumpen består av tre trinn og er designet for å øke trykket i en væske. Førstetrinn består av en sentrifugal boosterpumpe og andre samt tredjetrinn består av to høyhastighets injeksjonspumper. Trinnene er kjørt av en felles innputt og er bygget slik at selve pumpen er integrert med girkasse og da sammen blir til én enhet med kombinerte akslinger/lagre. HP-pumpens trinn består av to enkelte sentrifugalpumper montert rygg-til-rygg på en felles aksel.

Ved testkjøring av vanninjeksjonspumper benyttes en tilordnet test rig hvor pumpen står på land og bruker sjøvann som testmedium. Her suges saltvann opp fra havet ved hjelp av booster trinnet. Inntaket på vanninjeksjonspumpen strupes så gradvis ned for å oppnå lavt trykk på innsuget og dermed tvinge frem kavitasjon. En trykktransmitter er plassert på både sugesiden og trykkside, og leverer live målinger til Framo sitt kontrollrom. Disse målingene logges ved hjelp av Catman Easy og overføres så til tekstfiler som kan kjøres i programmet.



Figur 6: Vanninjeksjonspumpe [6]

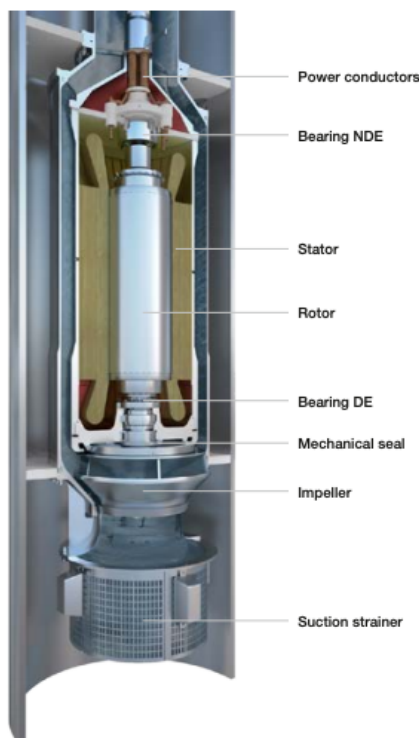


Figur 7 : Hydraulikk skjema WIP

2.3.2 Seawater lift pump (SWL)

Seawater lift pump er en elektrisk nedsenkbar sentrifugal løftepumpe som er designet for å kunne frakte store mengder vann fra havet til plattform/båt. Dette havvannet brukes til å mate vanninjeksjonspumpen med vann, samt kjøle av diverse systemer. Pumpen kan bestå av ett eller to trinn og er drevet av en integrert oljefyllt induksjonsmotor som er designet for direkte on-line starter (DOL) eller variabel hastighets kjøring (VSD) –operasjon.

Ved testkjøring av løftepumpen benyttes en tilordnet test rig hvor pumpen er nedsunket i et ferskvannsbasseng. Pumpen sirkulerer så vannet kontinuerlig igjennom en lukket krets hvor trykket på vannet senkes jevnt og kavitasjon tvinges frem. En trykktransmitter er plassert på trykkside, og måler leveringstrykket på løftepumpen. Sugetrykket måles ikke, da det her er vanskelig å strupe innsuget og dermed kunne måle nøyaktig. Transmitteren leverer målinger fra trykkside live til kontrollrommet og loggføres så i tekstfiler som kan brukes i programmet.



Figur 8: Sea water lift pumpe [7]

2.4 Ulike målemetoder

Når en pumpe kjøres, vil det oppstå svingninger rundt en likevektsstilling i form av f.eks. lyd og trykk. Disse svingningene, kalt oscillasjoner, kan måles til stor nøyaktighet av moderne måleutstyr, og er hva MATLAB programmet tar utgangspunkt i. Når kavitasjon oppstår, vil dampboblene dempe svingningene og da gi utslag i programmet. Denne oppgaven tar utgangspunkt i trykkoscillasjoner, da mikrofon som tilfredsstillere kravene for å kunne ta opp nok informasjon ikke har vært tilgjengelig. For å oppnå riktig resultat fra lydmålingene, må mikrofonen kunne ta opp ultralyd. Dette er fordi mye av lydene skapt av pumpen ikke kan høres av mennesker, da disse ligger langt over vår grense på 20 kHz. En mikrofon med mulighet til å ta opp lyd fra 0 – 100 kHz ville vært nødvendig for å kunne samle all informasjonen skapt i form av lyd. Ønskelig hadde oppgaven tatt for seg begge typer oscillasjoner for sammenligning for å komme frem til best mulig metode.

2.5 Tidligere forskning

Metoden i denne oppgaven baserer seg på tidligere forskning gjort på dette området. Det har blitt analysert noen tidligere rapporter som har bidratt til bedre forståelse av metoden.

2.5.1 Forutse koke regime ved analyse av temperatur svingninger

I den første rapporten tar man for seg problemet med nukleær koking og metoder for å detektere tidlige tegn på fenomenet. Den utledede FFT metoden brukes for å undersøke om man kan detektere nukleær koking i en tidlig fase. Det brukes to metoder i denne rapporten, den ene går ut på å detektere tidlig koking, den andre går ut på å tolke svingninger i opphetet overflate temperatur.

Rapporten konkluderer med at ved hjelp av FFT metoden som for brukeren er simplifisert, kan man vellykket detektere overgangen fra tidlig koking til fullt utviklet nukleær koking. Utfra denne metoden kan man tolke koke regimer bedre og mer presist enn man tidligere kunne med de konvensjonelle koke kurvene.

Denne rapporten gir en god forståelse av potensialet til FFT-metoden, selv om denne oppgaven ikke dreier seg temperatur svingninger i den grad, så er det god hjelp ved forståelsen av tidlig deteksjon av ulike fenomener. [8]

2.5.2 Envelope analyse:

En ”Envelope” analyse er en signal behandlings teknikk, også kalt amplitude demodulasjon. Man kjører lyd signaler gjennom et filter som skal filtrere ut all unødvendig lyd fra maskineri slik at man får konsentrert seg om frekvensene hvor fenomener man er interessert i oppstår, slik som kavitasjon. De gjenstående signalene utbedres før de kjøres gjennom en FFT omdannelse. Man ender så opp med et frekvens spektrum man kan tolke.

Under testene fikk man opp markante forskjeller på spektrene ”med” og ”uten” kavitasjon til stede. Høye topper som skiller seg ut kommer frem på grafene med kavitasjon. Amplitude demodulasjon metoden viste seg å lykkes i å detektere kavitasjon i sentrifugale pumper ved tre ulike forhold. [9]

2.5.3 Vibro-akustiske målinger:

I rapporten om ”vibro”-akustiske målinger ble det gjort forsøk på deteksjon av kavitasjon i turbiner ved ulike metoder. Her plottet de lydmålinger og vibrasjoner hvor de filtrerte målingene i et spekter før de tolket grafene. De så på ”toppene” som skilte seg ut og tolket derifra. Rapporten konkluderte med at måle, analyse og tolkings prosedyrene må være flerdimensjonale, og må involvere lydfrekvenser, ”runner” vinkel posisjon, sensorposisjon og variabler som beskriver opererende forhold for turbinen. [10]

2.5.4 Analysering av deteksjon av kavitasjon i turbiner

Her defineres ulike turbiner og deres egenskaper. Rapporten tar for seg hvor kavitasjon oppstår i maskineriet, hvor i turbinen kavitasjon er mest utbredt og hvor kavitasjon er mest skadelig. Metoden i denne rapporten baserer seg i hovedsak på de samme prinsippene som nevnt i de tidligere rapportene. Ulike oscillasjoner som trykk, lyd og vibrasjoner gir opphav i signalene som blir analysert og vurdert. Konklusjonen i denne rapporten er at alle typer kavitasjon forekommer på høyfrekvent vibrasjons nivåer. Og de mest passende sensorene, beste posisjonen av sensorene, og signal prosessering har blitt testet på de ulike kavitasjonsområdene. [11]

2.5.5 Tidligere forskning konklusjon

Det er mange likheter mellom de tre siste rapportene, alle tar for seg oscillasjoner som f.eks. vibrasjoner og lydmålinger og filtrerer dem og plottet resultatene i et spektrum.

Rapportene som er blitt gjennomgått har gidd et bedre overblikk over forståelsen av metoden og spesielt hvordan man skal tolke resultatene og grafene man utleder. Det å oppdage kavitasjon tidlig er gunstig for metoden og i disse rapportene får man et innblikk i hvordan man skal tolke tidlige tegn på kavitasjon. Innsikten i disse rapportene har hjulpet på veien til gode troverdige resultater i denne oppgaven. Rapportene har blitt brukt som grunnlag for at man kan tro at slik metode kan fungere.

2.6 MATLAB

MATLAB er et programmeringsspråk som egner seg godt til analysering av data. MATLAB har gode muligheter for å behandle, plote og analysere data i et visuelt miljø. MATLAB har også innebygget mange komplekse matematiske funksjoner som kan brukes på nevnt data, for eksempel transponering av matriser, kryss-produkter, dot-produkter, determinanter, inverse matriser osv. Det er enkelt å importere data, I dette tilfellet tekstfiler fra Framo med test-data. Denne dataen lagres i matriser, MATLABs grunnleggende dataelement. Kanskje den største grunnen til at MATLAB ble valgt i denne oppgaven er dets muligheter for interaksjon med grafiske output med farger, størrelser, skalaer osv. Dette er viktig for å kunne analysere og behandle resultater etter at programmet har kjørt og man står igjen med grafer. Her kan brukeren dra, zoome, og studere grafene.

3. Metode

Hittil er metodene for å detektere kavitasjon mangelfulle. NPSH-beregninger blir mye brukt, men med trykkmålinger/oscillasjoner kan man få et mer nøyaktig bilde på kavitasjonen som oppstår.

Hensikten med oppgaven er å utvikle et program som vil kunne oppdage kavitasjon der tidligere målinger ikke har fanget opp tegnene, dette gjør at man kan erstatte deler i systemet før de blir ødelagt, og samtidig resulterer dette i mindre nede-tid og redusert risiko for at andre deler i systemet blir ødelagt i prosessen. Programvaren er et komplekst matematisk program som leser målinger ved hjelp av trykkoscillasjoner, og kan gi en indikasjon på om det oppstår kavitasjon eller ikke, og når kavitasjonen oppstår. Programmet viser forskjellige grafer på en forståelig måte som gir brukeren detaljer om kavitasjonen.

3.1 Teori

3.1.2 DFT

Discrete Fourier Transform er en form av Fourier Transform som er modifisert slik at den benytter en tilnærming av et signal bestående av målte verdier med en bestemt prøvfrekvens som innputt. På denne måten kan målinger fra den reelle verden direkte implementeres i programmet og deles opp i frekvensene som det opprinnelige signalet består av.

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{2\pi knj}{N}}$$

Fourier rekke, hvor:

- «K» angir frekvens nr.
- «n» er målingsnr. Av N målinger
- Utrykket som er opphøyd i «e», forenkles til b_n og brukes i neste formel.

$$X_k = x_0 \cdot e^{-b_0j} + x_1 \cdot e^{-b_1j} + \dots + x_n \cdot e^{-b_{N-1}j}$$

Euler`s formel

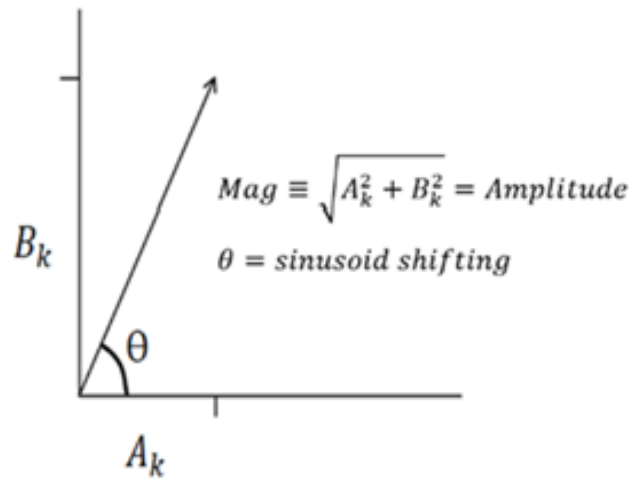
$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

Euler`s formel er her implementert inn i Fourier rekken

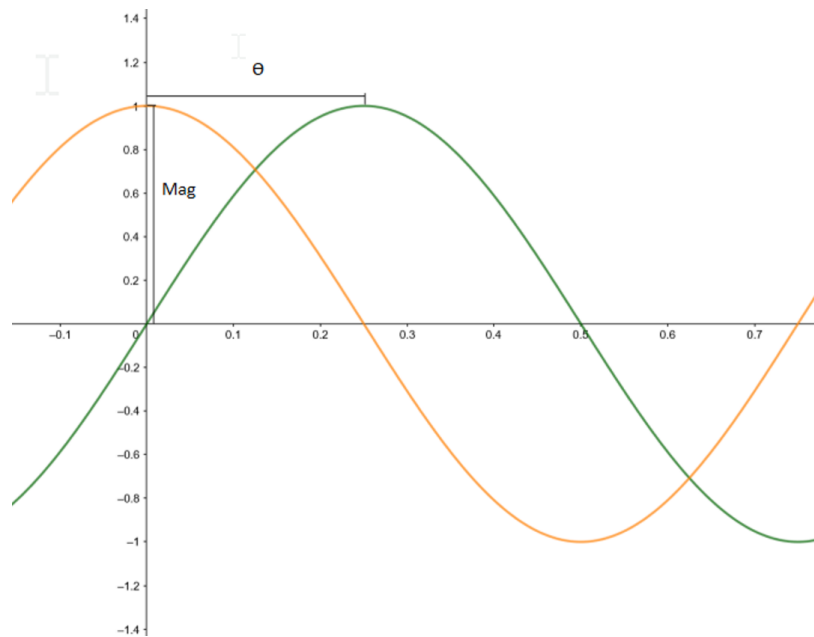
$$x_k = x_0 [\cos(-b_0) + j \sin(-b_0)]$$

Reel (A_x) og imaginær (B_{kj}) del

$$x_k = A_x + B_{kj}$$



Figur 9.1: DFT 1

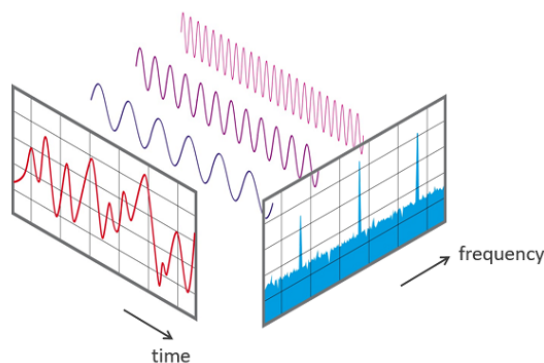


Figur 9.2: DFT 2

3.1.1 Hvorfor DFT

Målinger tatt opp i form av oscillasjoner gjennom et måleverktøy som en trykktransmitter, utgir diskrete målinger bestående av tallverdier. Disse tallverdiene er målt ved en bestemt «prøvefrekvens», og vil gi en god tilnærming av et kontinuerlig signal. En høyere «prøvefrekvens» vil gi en mer nøyaktig tilnærming. Signalet som er tatt opp består av et stort utvalg frekvenser som utjevner eller supplerer hverandre. For at programmet skal kunne oppdage kavitasjon, må signalet først deles opp i frekvensene det består av. Dette gjøres ved å benytte en matematisk modell kalt Fourier Transform.

Figuren under beskriver hvordan DFT skiller ut frekvensene fra et tidsdomene til et frekvensdomene. Toppene i frekvensdomene viser alle de ulike frekvensene signalet er sammensatt av.



Figur 10: DFT omformer [12]

3.1 Arbeidet i MATLAB

Oppgaven har basert seg på MATLAB-programmet som har vært under konstant utvikling. Funksjonaliteten har utviklet seg med funn og kunnskap som har blitt oppdaget underveis. Programmet er en kode skrevet i MATLAB og tar for seg tekstfiler, i dette tilfellet trykkmålinger fra Framo. Disse målingene er tatt fra innsuget til pumpene, der kavitasjon som oftest oppstår. Programmet leser målingene fra tekstfilen og lagrer dem. I tillegg til tekstfilen trenger den å vite hvilken «sampling frequency [Hz]» som har blitt brukt. Dette forteller programmet hvor mange målinger som blir gjort på ett sekund. Det man også må legge inn er antall intervaller man vil dele målingen opp i. Også må man velge antall karakteristiske tall J. J bestemmer hvor nøyaktig DFT beregningen skal bli. I vårt tilfelle har 15 vært nøyaktig nok.

```

antallIntervaller = 500; % antall intervaller målingen skal deles inn i
samplingFrequency = 2400; % målingens sampling frequency
antallKarakteristiskeTall = 15; % antall karakteristiske tall "J"
  
```

Figur 11: MATLAB 1

Deretter omgjør programmet tekstfilen til et "array" det senere kan bruke, og lager en rekke verdier basert på informasjonen brukeren har lagt inn. Programmet finner ut hvor mange målinger tekstfilen består av, hvor mange sekunder testen pågår, og hvor mange sekunder et intervall består av.

```

% velger hvilken måling vi skal teste
maalinger = table2array(NPSH800mpkt);

% finner ut hvor mange målinger testen består av
antallMaalinger = length(maalinger);

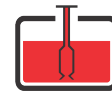
% finner ut hvor mange sekunder et intervall er
sampleDuration = length(maalinger) * (1/samplingFrequency) / antallIntervaller;

% en halv sampleDuration
sampleDurationHalf = sampleDuration/2;

% finner ut hvor mange målinger et intervall består av
antallMaalingerSample = antallMaalinger/antallIntervaller;
  
```

Figur 12: MATLAB 2

Etter at disse verdiene er bestemt oppretter programmet en rekke variabler det senere skal bruke, og setter verdien til nevnte verdier til «0».



```
% definerer alle variablene og gir dem verdi "0"  
underSumm = 0.0;  
summ = zeros(1,antallKarakteristiskeTall);  
frekvenser = zeros(1,antallKarakteristiskeTall);  
slope = zeros(1,antallIntervaller);  
E = zeros(1,antallIntervaller);  
summLog = zeros(1,antallKarakteristiskeTall);  
frekvenserLog = zeros(1,antallKarakteristiskeTall);  
underSummFisk = zeros(1,floor(antallMaalingerSample));
```

Figur 13: MATLAB 3

Deretter oppretter programmet en løkke som kjører x antall ganger, definert av brukeren (antall intervaller). Inni denne løkken ligger hoved funksjonaliteten til programmet. Det første som skjer inni løkken er at alle målingene i intervallet lagres i en egen variabel.

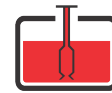
```
for i = 1:antallIntervaller  
  
    % oppretter Bsampl og gir den verdien "0" på alle plassene  
    Bsampl = zeros(1,floor(antallMaalingerSample));  
  
    for sb = 1:antallMaalingerSample  
        % tar ut målingene i intervall nummer "sb" og lagrer dem for seg  
        Bsampl(1,sb) = maalinger (sb+(i-1)*floor(antallMaalingerSample));  
    end
```

Figur 14: MATLAB 4

Inni samme løkken opprettes en ny løkke. Denne løkken tar alle verdiene i målingene i intervallet, og regner ut Discrete Fourier Transform verdiene hver for seg. Disse beregningene er basert på formelen

$$\Psi_j = \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\Delta T_k * e^{2\pi i \frac{j}{N} k} \right) \right]$$

Programmet lagrer alle disse nye verdiene i en egen variabel. Deretter bruker programmet verdiene fra DFT-beregningen til å finne verdien som skal representeres i dette intervallet, som vist her:



```
for j = 1:antallKarakteristiskeTall
    underSumm = 0.0;
    for s = 1:antallMaalingerSample
        % i de to neste linjene kalkulerer vi alle "undersummene" i
        % DFT-beregningen, i tillegg til å fiske dem ut og lagre dem
        % i en egen variabel
        underSummFisk(1,s) = (maalinger(s+(i-1)*floor(antallMaalingerSa
        underSumm = underSumm + underSummFisk(1,s);
    end

    % lagrer resultatene fra DFT-beregningen i en egen variabel
    summ(1,j) = abs(underSumm/sqrt(antallMaalingerSample));

    % finner ut hvilke frekvenser som oppstår i DFT-beregningen
    frekvenser(1,j) = j/sampleDuration;

    % finner logaritmen til summ og lagrer i tilsvarende variabel
    summLog(1,j) = log(summ(1,j));

    % finner logaritmen til frekvensene og lagrer i tilsvarende
    % variabel
    frekvenserLog(1,j) = log(frekvenser(1,j));
end
```

Figur 15: MATLAB 5

Flere beregninger følger. Her bestemmes verdien «m», som bestemmes ut ifra stigningstallet "slope" til en regresjonslinje basert på logaritmen til resultatene i DFT-målingene i et intervall.

```
% bestemmer hvor "slope" skal plottes på x-aksen
E(1,i) = -sampleDurationHalf + i * sampleDuration;

X = [ ones(length(frekvenserLog),1) frekvenserLog(:) ];
a = (transpose(X)*X)\(transpose(X)*summLog(:));

b = a(1);
m = a(2);

xa = min(frekvenserLog);
xb = max(frekvenserLog);
x = linspace(xa,xb,2);
f = b + m*x;

slope(1,i) = m;
```

Figur 16: MATLAB 6

Det siste som gjøres inni løkken til intervallet er å lagre verdiene som skal plottes. Den første og andre beregningen baserer seg på typetallet og standardavviket til målingene i intervallet, den tredje og fjerde baserer seg på typetallet og standardavviket til DFT-resultatene i intervallet. Dette er det siste som skjer inni løkken til intervallet.

```

% bestemmer verdiene til 4 av grafene som skal plottes

% finner typetallet til målingene i et intervall
BM1(1,i) = mode(Bsaml);
% finner standardavviket til målingene i et intervall
STD1(1,i)=std(Bsaml);
% finner typetallet til DFT-resultatene til målingene i et intervall
BM2(1,i) = mode(underSummFisk);
% finner standardavviket til DFT-resultatene til
% målingene i et intervall
STD2(1,i)=std(underSummFisk);
  
```

Figur 17: MATLAB 7

Deretter skriver programmet alle fem grafene som skrives ut til brukeren.

```

% plotter alle grafene
subplot(3,2,1);
plot(E,slope);
title('slope mot tid');
xlabel('[s]');
ylabel('a');

subplot(3,2,2);
plot(E,BM1);
title('mode-trykk mot s');
xlabel('[s]');
ylabel('BM');

subplot(3,2,3);
plot(E,BM2);
title('mode-DFT mot s');
xlabel('[s]');
ylabel('BM');

subplot(3,2,4);
plot(E,STD1);
title('dispers-trykk mot s');
xlabel('[s]');
ylabel('BM');

subplot(3,2,5);
plot(E,STD2);
title('dispers-DFT mot s');
xlabel('[s]');
ylabel('BM');
  
```

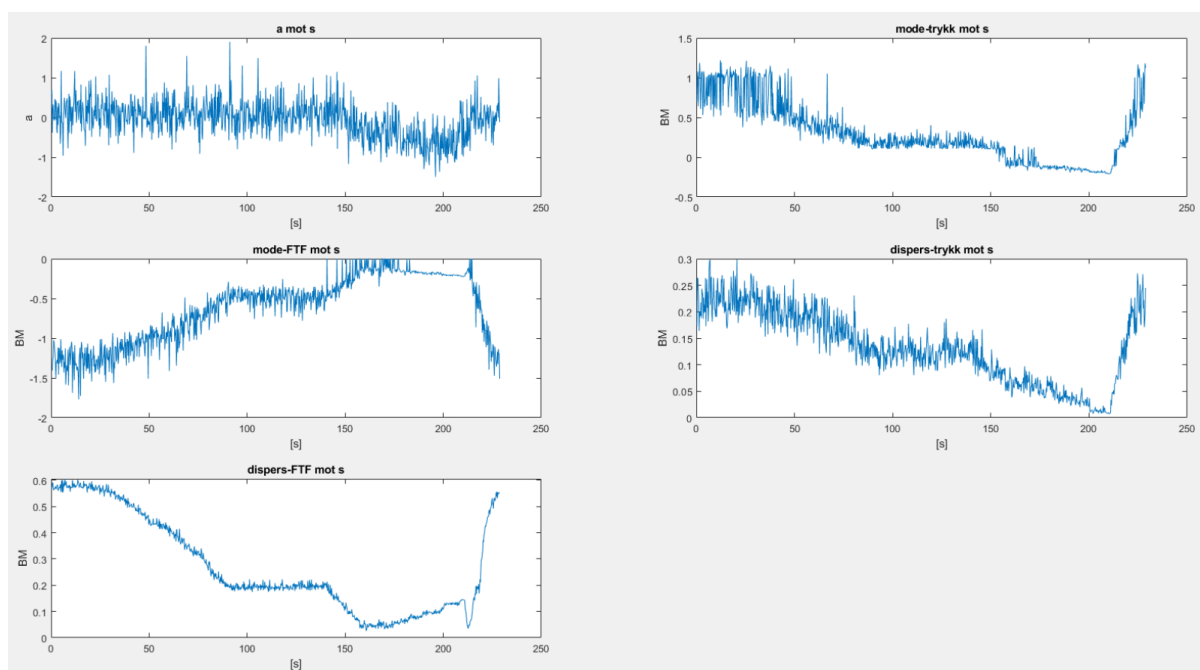
Figur 18: MATLAB 8

Dette er det siste i koden. Når programmet har kjørt gjennom alt står brukeren igjen med fem grafer på skjermen, som kan brukes til å detektere kavitasjon.

3.2 Resultater i MATLAB

Når programmet har kjørt gjennom står brukeren igjen med dette skjermbildet. Skjermbildet viser fem grafer som kan brukes til å detektere kavitasjon på forskjellige måter.

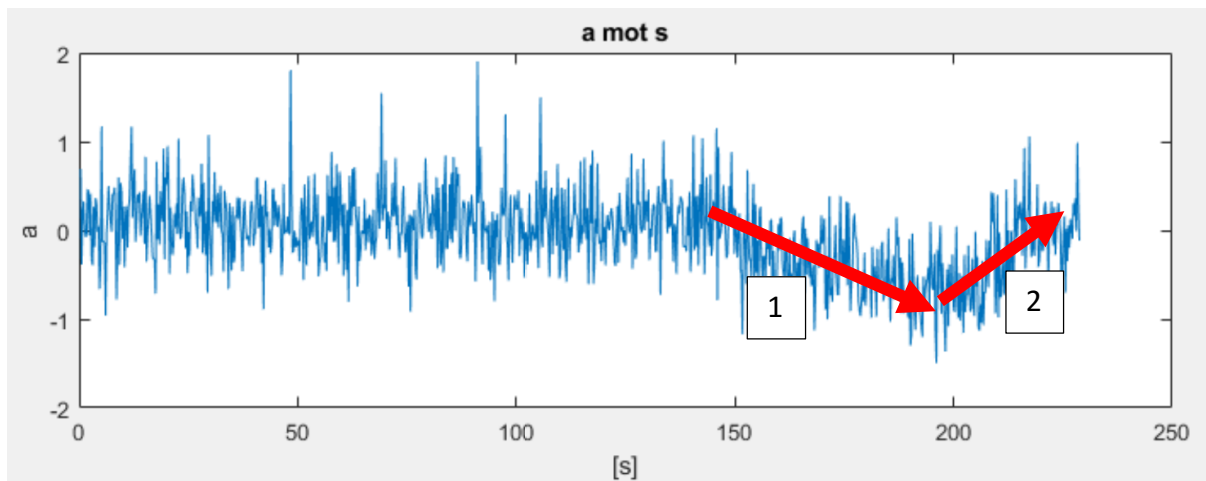
Den første grafen, «a mot s» (øverst til venstre) viser hvordan frekvensene i trykkmålingen endrer seg over tid.



Figur 19: MATLAB resultater 1

3.2.1 A mot S

1. Her kan brukeren observere at «a» begynner å synke like før 150 sekunder. Dette kan signalisere et tidlig tegn på at det begynner å oppstå kavitasjon.
2. Like før 200 sekunder inn i testen avbrytes testen, og vi ser at «a» begynner å stige igjen. Kavitasjonen var verst like før 200 sekunder.

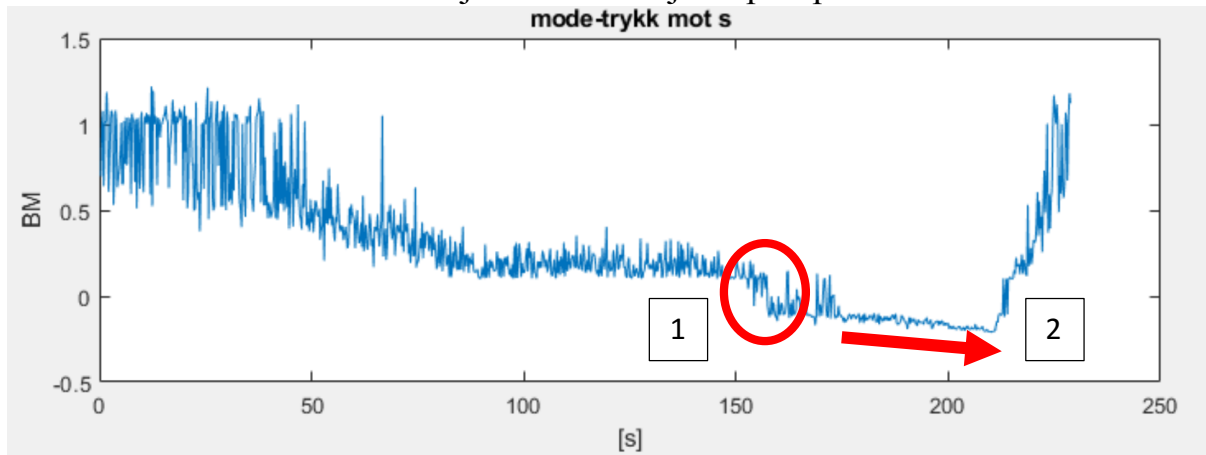


Figur 20: MATLAB resultater 2

3.2.2 Mode-trykk mot s

Denne grafen tar for seg typetallet til trykket i hvert intervall. Det viser i realiteten en «dempet» versjon av den ubehandlede trykkmålingen.

1. Det observeres at like etter 150 sekunder faller grafen noe. Denne trykk endringen kan skyldes kavitasjon som begynner å oppstå.
2. like etter ser vi at grafen jevnes ut. Dette kan være et tegn på at kavitasjonen begynner å bli mer prominent, og dampboblene i væsken demper trykkoscillasjonene.

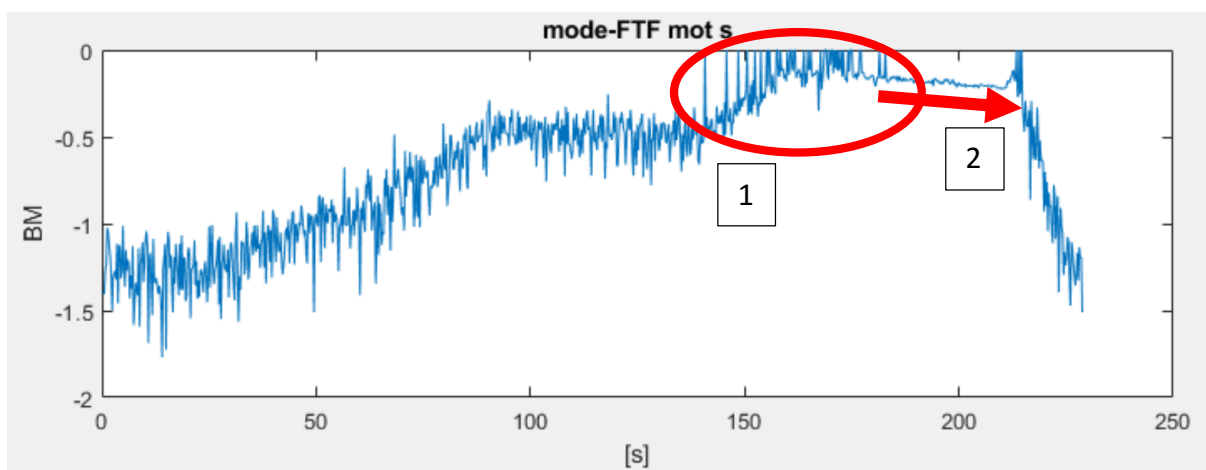


Figur 21: MATLAB resultater 3

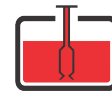
3.2.3 Mode-FFT mot s

«Mode-FFT mot s»-grafene tar for seg typetallet til frekvensene fra DFT-beregningen. Her er det viktig å se når verdiene nærmer seg 0.

1. Like før 150 sekunder observerer man at verdiene nærmer seg 0, og i flere intervaller er 0 eller større enn 0 (rundet av til 0). Dette kan være et tegn på kavitasjon.
2. I likhet med «mode-trykk mot s» kan man observere at grafen dempes rundt 175 sekunder.

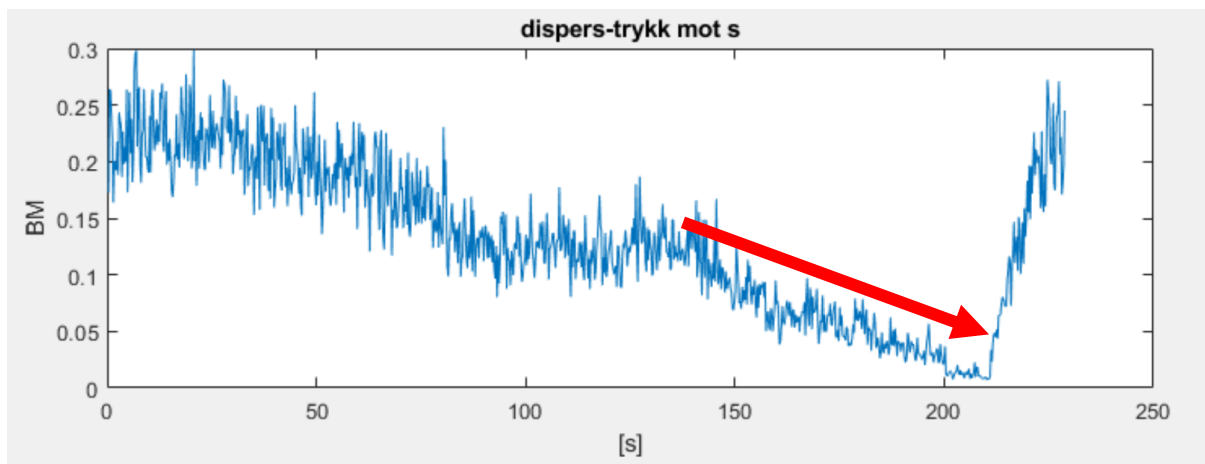


Figur 22: MATLAB resultater 4



3.2.4 Dispers-trykk mot s

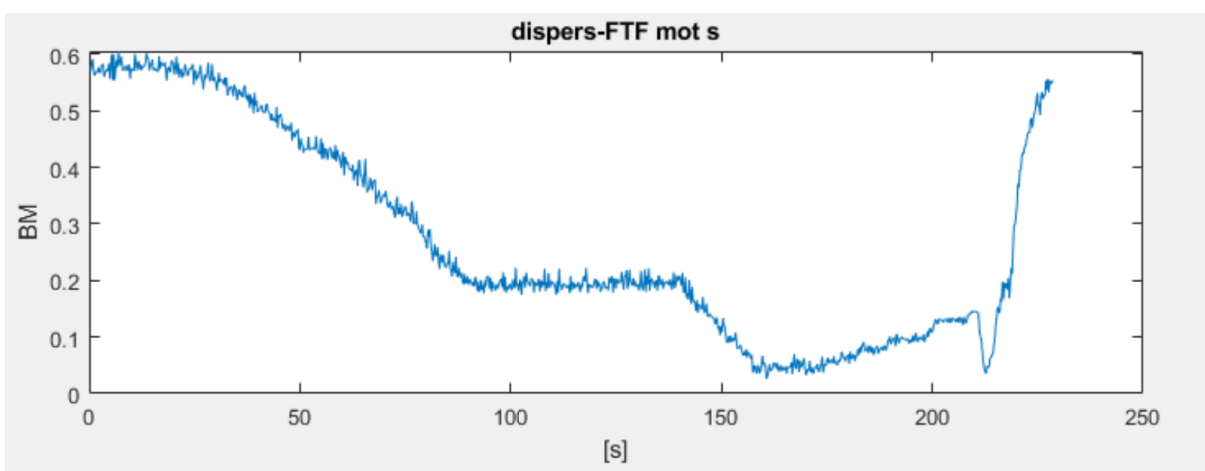
Denne grafen viser normalfordelingen til trykket i hvert intervall. Observasjonen som gjøres her er at like før 150 sekunder begynner verdien å synke drastisk, samtidig som oscillasjonene dempes. Dette er som tidligere nevnt to tegn på kavitasjon og kan brukes til å bygge oppunder resultater fra de andre grafene.



Figur 23: MATLAB resultater 5

3.2.5 Dispers-FFT mot s

Denne metoden har vi vist seg å være dårlig til å detektere kavitasjon. Den er uforutsigbar og gir ingen tydelige indikasjoner. Dette stemmer for denne spesifikke målingen, og den er ikke brukbar på andre målinger heller.



Figur 24: MATLAB resultater 6

3.3 Analyseringsmetode

For å komme frem til en konklusjon for en spesifikk test må brukeren sammenligne resultatene fra de fire grafene. Kavitasjon i denne testen viser seg å oppstå like før 150 sekunder og øker ganske konstant frem til like etter 200 sekunder, hvor testen blir avsluttet. For å analysere grundigere kan man opprette et diagram som tar for seg de forskjellige resultatene fra de forskjellige grafene.

Sammenligning – Hvilke intervall gir best resultat:

	10	100	1000
WIP – 400		x	
WIP – 730		x	
SWL – 2880		x	
SWL – 3000		x	

Tabell 1: Sammenligning intervaller

Sammenligning – Hvilke metoder gir best resultat:

	Tidligst	Nøyaktigst	Mest pålitelig
WIP – 400	3.	2.	1.
WIP – 730	4.	2.	1.
SWL – 2880	N/A	N/A	N/A
SWL – 3000	N/A	N/A	N/A

Tabell 2: Analyseringsmetoder

4. Resultater

En sammenlikning med resultatene fra MATLAB-programmet med resultater fra Framo sine NPSH beregninger blir gjort ved hjelp av inception-kurver. Basert på visuell analyse av resultatene fra MATLAB-programmet blir det bestemt når tegn til kavitasjon begynner å oppstå, når det er tydelig kavitasjon og når kavitasjonen er verst, heretter referert til som henholdsvis «start», «full» og «slutt».

For å gjøre denne sammenlikningen ble det tatt utgangspunkt i fire tester på samme pumpe (en WIP på 400, 500, 730 og 800 m³/s). Hver av disse fire testene ble kjørt gjennom programmet tre ganger, på 10, 100 og 1000 intervaller.

Først må det bestemmes når tegn til kavitasjon begynner å oppstå. Grafene ble studert og det ble bestemt når det begynte å oppstå tegn til kavitasjon.

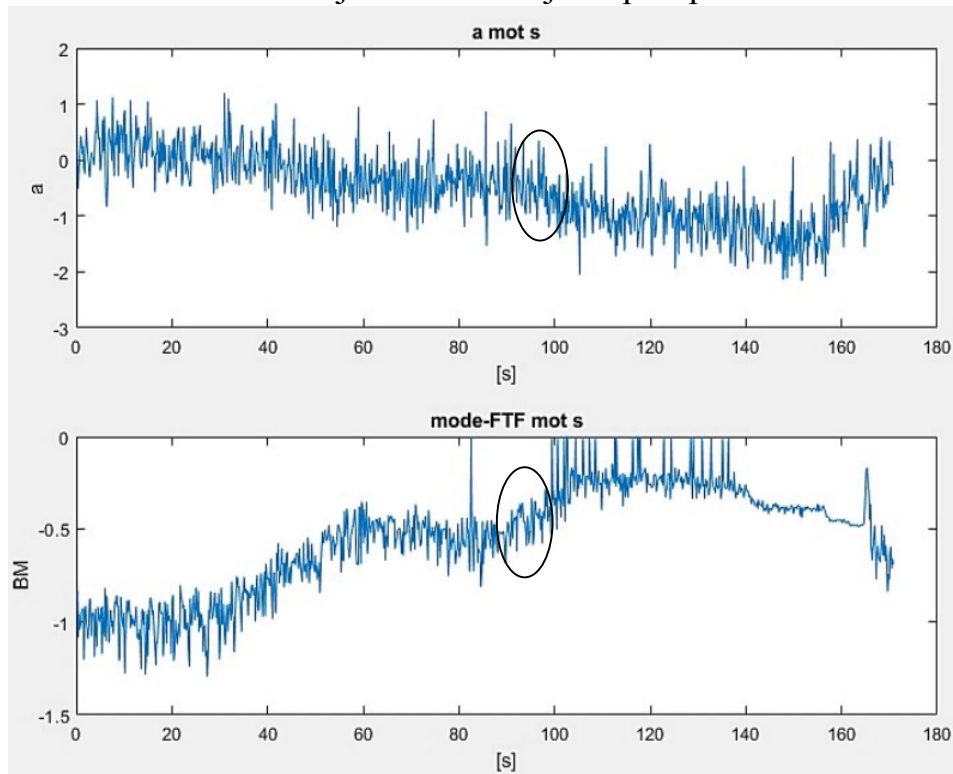
Dette er en av de fire flowene som ble sett på. (400m³/s) Det samme ble gjort for de tre andre.

I den øverste grafen ser man at stigningstallet begynner å synke rundt 90 sekunder. Dette er et tidlig tegn på kavitasjon.

I den nederste ser vi at verdiene nærmer seg 0 rundt 90 sekunder. Dette også et tidlig tegn på kavitasjon.

Basert på disse to grafene ble det bestemt at tidlig tegn på kavitasjon oppstod rundt 90s. (Start = 90s)

Etter at start-verdiene for alle fire flowene er bestemt, ser vi på grafene igjen og prøver å bestemme når det oppstår tydelig tegn på kavitasjon.



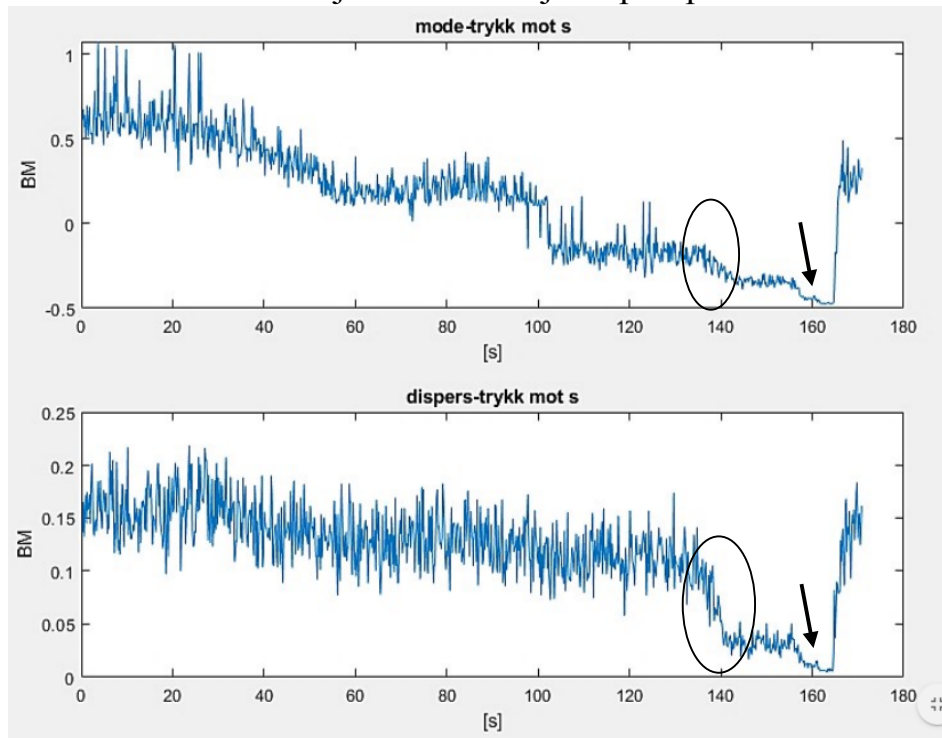
Figur 25: MATLAB analyse 1

I grafene nedenfor ser man på den samme testen ($400\text{m}^3/\text{s}$), men her ser man et tegn på tydelig kavitasjon. Dette ble også gjort for de tre andre testene.

I begge disse grafene ser man tegn på at det kaviterer mye rundt 140 sekunder (svart sirkel).

Trykket synker og oscilleringen dempes. Ut ifra disse observasjonene ble det bestemt at vi har tydelig kavitasjon rundt 140 sekunder (full = 140s)

På disse to grafene er det også tydelig når kavitasjonen er verst, like før testen avsluttes, like etter 160 sekunder (svart pil).



Figur 26: MATLAB analyse 2

Basert på disse funnene settes det opp en tabell for kavitasjonen for alle testene.

Flow	Start	Full	Slutt
400	90s	140s	165s
500	600s	800s	890s
730	145s	175s	210s
800	360s	400s	460s

Tabell 3: Kavitering tid

Basert på disse verdiene bestemmes sugetrykket for hver av de 12 verdiene, som gir denne tabellen:

Flow	Start	Full	Slutt
400	0,277bar	-0,299bar	-0,470bar
500	-0,010bar	-0,089bar	-0,394bar
730	0,246bar	0,061bar	-0,195bar
800	0,034bar	-0,063bar	-0,119bar

Tabell 4: Kavitering trykk

For å sammenligne med Framo sine egne resultater konverteres denne tabellen til en tabell med NPSH-verdier ut ifra denne formelen

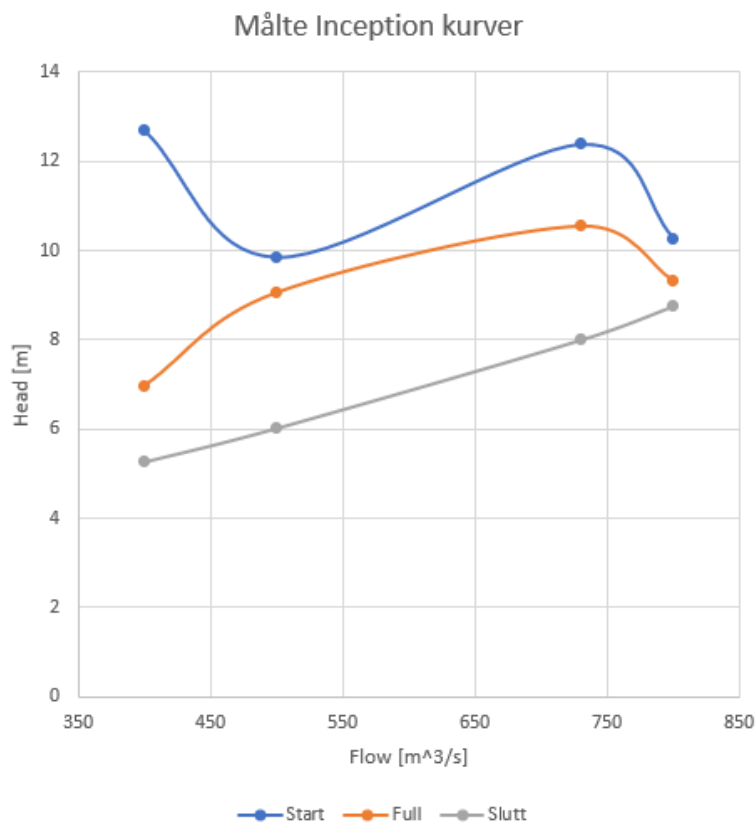
$$NPSH = \frac{P_{atm} + P_{suction}}{\rho * g}$$

Hvor $P_{atm} = 1,0bar$, $P_{suction}$ er sugetrykk fra tabell, ρ er vannets tetthet på $1025 \frac{kg}{m^3}$ og g er gravitasjon på $9,81 \frac{m}{s^2}$. Dette gir tabellen;

Flow	Start	Full	Slutt
400	12,65m	6,94m	5,25m
500	9,81m	9,02m	6,00m
730	12,34m	10,51m	7,97m
800	10,24m	9,28m	8,73m

Tabell 5: Kavitering løftehøyde

Og disse grafene:



Figur 27: Inception kurver

Denne grafen bekrefter for det første at programmet fungerer som forventet. Det kan detektere de forskjellige nivåene av kavitasjon og er konsistent over de fire forskjellige flowene som har blitt testet. Det observeres at tegn til kavitasjon oppstår tidligere i testen og ved høyere løftehøyde-verdi. Det observeres også at høyere flow oppnår større løftehøyde før det oppstår kavitasjon, men har et betydelig mindre vindu fra det har oppstått tegn til kavitasjon til det oppstår betydelig skadelig kavitasjon.

3.4 Sammenligning med NPSH-beregninger

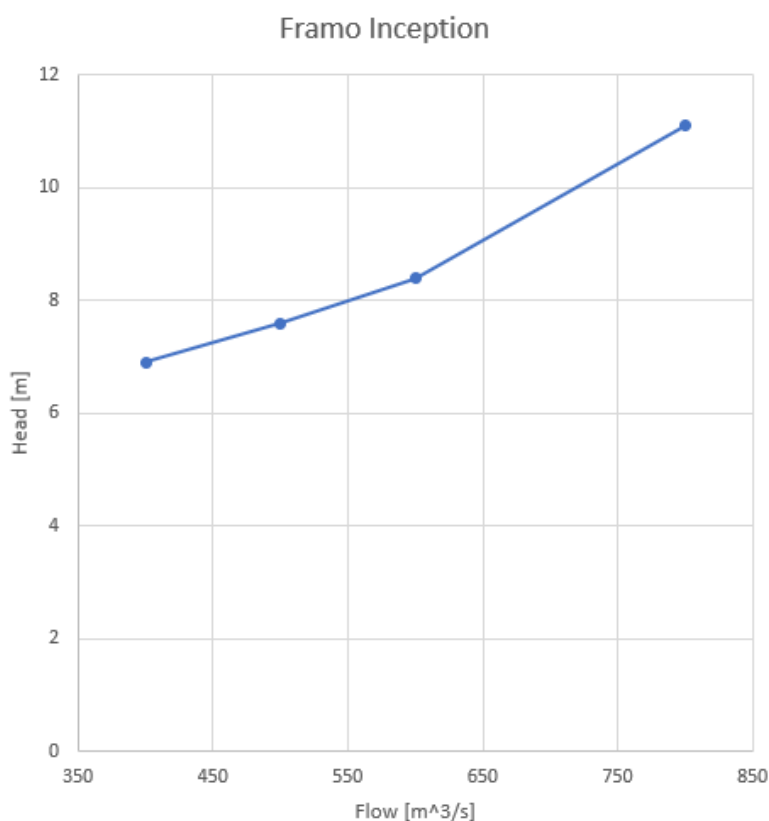
Resultatene fra metoden i denne oppgaven skal plottes slik at man får en NPSH linje slik Framo har, deretter vil man se om kavitasjon linjen starter tidligere for metoden enn Framo sin metode.

Framo NPSH3 Tabell;

Flow	NPSH3
400	6,9m
500	7,6m
600	8,4m
800	11,1m

Tabell 6: NPSH3, løftehøyde

Og tilhørende plot:

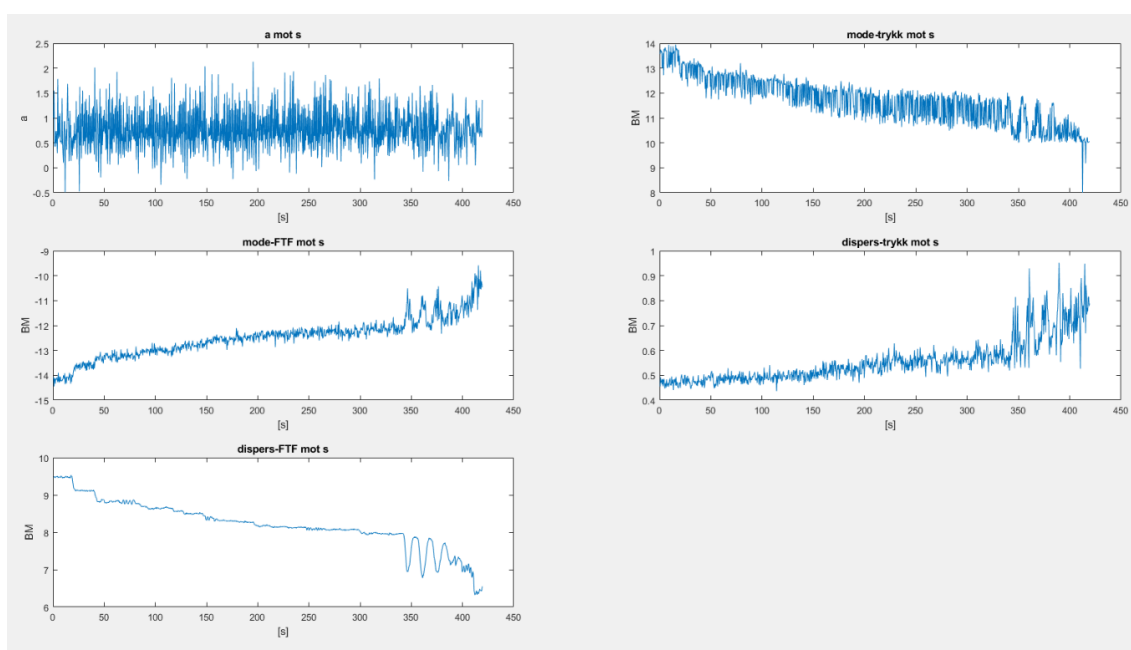


Figur 28: NPSH3 inception kurve

Framo sin NPSH3-kurve viser hvordan løftehøyden øker ved høyere flow. Det er viktig å merke seg at en NPSH3 beregning ligger 3% under inception kurven, og våre resultater for tilsvarende kavitasjon bør ligge litt over denne, som viser seg å stemme. Framo sin inception-kurve er mest sammenlignbar med «Full»-målingene fra målingene fra MATLAB-programmet, som understreker at programmet fungerer som forventet, og kan detektere kavitasjon når det forventes å oppstå. Mer interessant er kanskje «start»-kurven fra våre egne målinger. Den beskriver når tegn på kavitasjon begynner å oppstå, og ligger seg derfor over «Full»-målingene, som tilsier at man kan detektere kavitasjon før en NPSH måling.

4.1 Målinger på høytrykkside

Det ble hentet ut og analysert målinger på høytrykkiden av Sea water lift pumpen men disse målingene viste seg å være irrelevant med tanke på kavitering. Kavitasjon forekommer ved lavt trykk og dermed på lavtrykksiden av pumpen og ikke høytrykksiden. Grafene på 2800 m³/s og 3200 m³/s på ulike intervaller samsvarer med det som ble nevnt. Det er ikke mulig å tyde noe form for kavitasjon på disse grafene. Fra denne øverste grafen til venstre kan man tydelig se at det ikke er noe merkbar synkning eller økning på kurven, noe man tydelig ser på grafene med kavitasjon.



Figur 29: Høytrykkside grafer

5. Diskusjon

Etter planen skulle oppgaven egentlig basere seg på akustiske målinger, men ettersom en mikrofon med god nok evne til å ta opp høy frekvens ikke var tilgjengelig, ble oppgaven da basert på trykkmålinger. Trykkmåling metoden har vist seg å være en bra metode for å oppdage kavitasjon, men det hadde vært ønskelig å sammenligne resultatet av denne metoden med resultatene fra akustiske målinger. Dette er ønskelig for å kunne bestemme hvilken metode som tidligst og mest nøyaktig kan oppdager kavitasjon.

Konklusjoner og resultat baserer seg på menneskelige tolkninger av verdier og grafer dannet av programmet. Dette medfører da en viss usikkerhet i form av menneskelig feil, fordi antagelser samt visuelle sammenhenger har blitt brukt til å bestemme programmets evne til å kunne oppdage kavitasjon.

6. Konklusjon

Denne rapporten har vist seg å gi et interessant innblikk i hvordan kavitasjon kan oppdages. Metodene som har blitt testet har vist seg å gi en god forståelse på hvordan tegn på kavitasjon kan oppdages tidlig og hvilke metoder som kan brukes til dette. Resultatene har gitt en dypere lærdom i hvordan DFT-metoden og andre metoder kan brukes for å forbedre forståelsen av kavitasjon.

Arbeidet har basert seg på relevant og reell test-data fra operative systemer, og er med på å danne et grunnlag for videre forskning på området.

Rapporten har vist at behandling av trykk-oscillasjoner er en god måte å detektere kavitasjon på, og hvordan videre utvikling og anvendelse av metoden kan redusere pumpefeil i industrien.

7. Videre utvikling av programmet

I dette kapitlet utredes forbedringspotensialet til prosjektet, samtidig hva som er veien videre for prosjektet.

Programmet kan forbedres og utvikles videre for å øke funksjonaliteten og bli mer nyttig og brukervennlig. I dets nåværende form må brukeren være vant til å analysere grafene programmet skriver ut, og brukeren må forstå koden og beregningene for å gjøre seg en mening om hvor kavitasjonen oppstår og ikke oppstår. I en senere versjon hadde det vært hensiktsmessig å forbedre programmet slik at koden kan gjøre analyseringen selv, basert på våre funn og erfaringer. I stedet for å skrive ut grafer kunne programmet skrevet ut en rapport på når kavitasjonen begynner å oppstå, når den når skadelige nivåer. Dette hadde gjort programmet lettere å forstå, og krevd mindre bakgrunnskunnskap av brukeren/operatøren. Også et brukervennlig brukergrensesnitt hadde vært fordelaktig å få implementert.

Et annet område for videre utvikling er på fastvare-fronten. Å finne ut hvilke sensorer som gir best resultater, posisjonering av disse, og generelt mer kunnskap og erfaringer som kunne blitt importert inn i programmet. Mer testing og arbeid måtte blitt gjort, og forskjellige sensorer og mikrofoner måtte blitt anskaffet.

Hittil har programmet bare vært testet med trykk-oscillasjoner. Programmet er også laget for å kunne analysere lydsignaler, da trykkoscillasjoner og lydsignaler er naturlig veldig like. Her hadde det vært interessant å anskaffe en høyfrekvent mikrofon (opptil 100 kHz), få tilsvarende data som trykkmålingene, kjøre gjennom programmet og sammenligne resultater.

Kilder

- [1] Multiconsult, "Frank Mohn Flatøy," Mars 2019,
<https://www.multiconsult.no/prosjekter/frank-mohn-flatoy-as/>

- [2] Framo, "Cargo ship," April 2019
<https://www.framo.com/cargo-pumping-systems/cargo-pumping/>

- [3] Gulesider, "Oljerigg," Mars 2019
https://www.gulesider.no/f/framo-as:101118496?search_word=skipshandler

- [4] Wikimedia, "Cavitation bubble implosion," Februar 2019
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/91/Cavitation_bubble_implosion.png

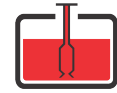
- [5] ProcessTechAcadamy, "Performance curve," Januar 2019
<http://www.processtechacademy.com/well-i-think-im-goin-out-of-my-head/>

- [6] Framo, "Water Injection Pump," Mars 2019
<https://www.framo.com/globalassets/pdf-files/Water-injection-pumps.pdf>

- [7] Framo, "Sea Water Lift Pump," Mars 2019
<https://www.framo.com/globalassets/pdf-files/Sea-water-lift-pumps.pdf>

- [8] B.V. Balakin, M.I. Delov, K.V. Kutsenko, A.A. Lavrukhin, S. Laouar, Yu.E. Litvintsova, A.S. Marchenko, Yu.A. Maslov, *Thermal science and engineering process 4*, pp. 219-222, ELSEVIER, 2017

- [9] Chek Zin TAN and M Salman LEONG, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 2, Institute of noise and vibration, Universiti Teknologi, Malaysia, pp. 274-285, 2008.



- [10] Branko Bajic, “methods for vibro-acoustic diagnostics of turbide cavitation,” in *Journal of Hydraulic Research*, VOL. 41, 2003, NO. 1.
- [11] Xavier Escaler, Eduard Egusquiza, Mohamed Farhat, Franc-ois Avellan, Miguel Coussirat, *Mechanical systems and signal processing*, pp. 983-1007, ELSEVIER, 2006
- [12] Wikipedia, “Discrete Fourier Transform,” Mai 2019
https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform?fbclid=IwAR3UVy0a_YhPwj7eopUVjt6HeJOwboDwFI3VuaVhT66VYtAeXfxOmwoSdGY

