Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGÅVE

Tilrettelegging for utvikling av matematisk kompetanse i algebraoppgåver

Ein analyse av to norske læreverk med fokus på matematisk kompetanse i algebra

Facilitating the development of mathematical proficiency in algebra tasks

An analysis of two Norwegian textbooks focusing on mathematical proficiency in algebra

Elise Aalvik Kvåle

Master i undervisningsvitenskap med matematikk som fordjupingsfag

Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett

Rettleiarar: Silke Lekaus og Nils Henry Williams Rasmussen

Innleveringsdato: 15. mai 2019

Eg stadfestar at arbeidet er sjølvstendig utarbeida, og at referansar/kjeldetilvisingar til alle kjelder som er brukt i arbeidet er oppgitt, *jf. Forskrift om studium og eksamen ved Høgskulen på Vestlandet, § 10.*

Forord

Denne masteroppgåva markerar slutten på min femårige utdanning ved Høgskulen på Vestlandet. Eg sit igjen med mykje lærdom etter desse fem åra, og frå arbeidet med denne oppgåva. No er tida kome for at eg skal setta all lærdom ut i praksis. Det er noko eg gler meg veldig til!

Eg vil retta ein stor takk til rettleiarane mine, Silke Lekaus og Nils Henry Williams Rasmussen. Takk for gode og konstruktive tilbakemeldingar undervegs i arbeidet med denne oppgåva. Med god støtte frå dykk har eg endeleg vorte ferdig med masteroppgåva.

Eg vil òg takka familie og vennar for gode og oppmuntrande ord når eg ikkje har sett lys i enden av tunnelen. Spesielt takk til mamma og Andrine for hjelp med korrekturlesing.

Til slutt vil eg takka sambuaren min, Snorre. Takk for at du har vert her for meg, vist forståing og gjeve meg den tida eg har trengt for å verte ferdig med masteroppgåva mi.

No ventar eit nytt kapittel i livet, noko som eg ser fram til!

Elise Aalvik Kvåle

Bergen, mai 2019

Samandrag

Forskingsspørsmålet for denne masteroppgåva er: *Kva for nokon matematiske kompetansar legg algebrakapittelet i to norske læreverk til rette for at elevar på 8. trinn får utvikla?.*

For å svara på forskingsspørsmålet er det vorte utført ein lærebokanalyse, der det er vorte nytta ein kombinasjon av kvalitativ og kvantitativ metode. 419 oppgåver får læreverka *Tetra 8* og *Faktor 8* er undersøkt og analysert for å finna ut kva for ein algebraisk aktivitet oppgåvene stimulerer til, og kva for ein matematisk kompetanse oppgåvene legg til rette for.

Det er tatt utgangspunkt i to rammeverk for matematisk kompetanse. Kilpatrick sitt rammeverk deler matematisk kompetanse inn i fem komponentar, som i følgje han må utviklast parallelt for at eleven skal utvikla matematisk kompetanse. I Niss sitt rammeverk er matematisk kompetanse delt inn i åtte delkompetansar. Niss hevdar at dei åtte delkompetansane består av å kunna bruke bestemte typar matematiske aktivitetar basert på spesifikk kunnskap og ferdigheit. GTG - modellen til Kieran, deler skulealgebraen inn i tre aktivitetar, og er brukt til å undersøka kva for nokon algebraiske aktivitetar oppgåvene i læreverka stimulerer til. Ved å arbeide med oppgåver som stimulerer til ulike algebraiske aktivitetar kan elevar utvikla sin matematiske kompetanse. Analysen er todelt, den kvantitative delen viser fordelinga av oppgåver innanfor dei ulike komponentane og delkompetansane, og kva for ein algebraisk aktivitet oppgåvene stimulerer til. Den kvalitative delen av analysen gjev mogelegheit til å analysera nærare eit utval av oppgåver.

Resultata viser at fleirtalet av oppgåvene i læreverka går under komponentar eller delkompetansar som gjev elevane ferdigheitstrening. Relativt få oppgåver i forhold legg opp til resonnering, argumentasjon og bevis.

Summary

The research question for this master's thesis is: *What kind of mathematical proficiency does the algebra chapter in two Norwegian textbooks facilitate for pupils at the 8th grade to develop?*

In order to answer the research question, a combination of qualitative and quantitative content analysis has been used. To uncover what algebraic activity the tasks stimulate and which mathematical proficiency they facilitate, 419 algebra tasks from the textbooks Tetra 8 and Factor 8 have been examined and analyzed.

The analysis is based on two frameworks for mathematical proficiency. Kilpatrick's framework divides mathematical proficiency into five components. He claims the five components must develop in parallel in order for the student to develop mathematical competence. In Niss' framework, mathematical proficiency is divided into eight sub-competence areas. Niss claims that the eight sub-competences consist of being able to use specific types of mathematical activities based on specific knowledge and skills. The GTG - model by Kieran, divides the school algebra into three activities. They are used to research how stimulating the textbooks tasks are for algebraic activities. Kieran's model also claims that it is by working on various algebraic activities, the pupils can develop their mathematical competence.

In this thesis the analysis is twofold. The distribution of tasks within the various components and sub-competences makes up the quantitative part, wich also shows wich type of algebraic activity the task stimulates. The qualitative part of the analysis gives the opportunity to more closely analyze a selection of tasks.

The result show that majority of tasks in the Norwegian textbooks fall under the category of components and sub-competences that are connected to skill-training. In comparison, few other tasks demand the use of reasoning, argumentation and evidence.

Innhaldsliste

Figurliste:

Tabelliste:

Diagramliste:

1. Innleiing

Lærebøkene har stor innflytelse på matematikken i skulen. Den er ein viktig ressurs for elevane – som lærer matematikk, og for læraren – for å planlegga og undervisa i matematikk. Matematikkundervisinga er ofte konsentrert rundt oppgåvene og aktivitetane i lærebøkene. (Lepik m.fl, 2017, s.289). Inntil år 2000 var alle lærebøker i Norge godkjent av Nasjonalt læremiddelsenter (Kongelf, 2015, s.84), som skulle sikra at alle lærebøkene samsvarar med det offisielle pensum (Lepik m.fl, 2017, s.292).

Kongelf (2015,s. 85) viser til Schoenfeld (1988) som meiner at god undervising kan kompensera for svakheiter i lærebøkene. Likevel er det mykje som tyder på at dette ikkje er tilfellet. Undervisinga i Noreg, der læraren forklarar til heile klassen, utgjør ein liten del samanlikna med det internasjonale gjennomsnittet. Elevar i Noreg arbeider mykje åleine med oppgåver i læreboka, og forklarar i liten grad svara sine (Kongelf, 2015, s. 84). Ein analyse gjort av AAAS (American Association for the Advancment of Science) hevdar at største delen av lærebøker som er brukt for å læra algebra i USA har ein «serious weakness» (Cai, Ng & Moyer, 2011,s.26). Det kan kanskje tenkjast å gjelde for Noreg òg, når Kongelf (2015, s. 84) hevdar: «Utdanningsdirektoratet understreker lærebøkenes viktig rolle når den påstår at dersom det generelt ønsker forandring i norsk skole, må òg lærebøkene forandrest».

TIMMS målar elevar sin kompetanse i matematikk. Studiar som er gjort tidlegare har vist at norske elevar hadde ein sterk tilbakegang i matematikk frå 1995 til 2003. Frå 2003 har norske elevar hatt ein jamn framgang. I 2015 var norske presentasjonar i matematikk høgare enn ved førre TIMMS studie. I eit europeisk perspektiv kan norske elevar sine matematikkprestasjonar reknast som middels gode. Det er likevel stor forskjell i elevane sine prestasjonar på dei ulike områda. Til dømes skårer vi bra i tal og statistikk, men det som trekker gjennomsnittet ned er dei svake prestasjonane i algebra (Bergem, Kaarstein, Nilsen, 2016). Sissel Grønmo er prosjektledar for TIMSS Advanced 2015, og sa i eit intervju med Dagsavisa følgjande:

«Vi var dårlige sist gang dette ble målt på ungdomstrinnet og i videregående skole. Resultatene for TIMSS 2015 viser at det har gått fra vondt til verre. Norske elever er alarmerende dårlig i algebra» (S. Grønmo, 29 november, 2016)

Til tross for at norske elevar har hatt oppgang i matematikkprestasjonar i dei to siste TIMSS studiane, er fortsatt algebra den store utfordringa. Saman med aritmetikk kan algebra reknast som «motoren i matematikk». Å ha grunnleggande ferdigheiter og forståing innanfor aritmetikk og algebra er viktig for alle som brukar matematikk, noko som gjeld i mange yrker og profesjonar (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016).

Det vert for tida jobba med å utvikla nye læreplanar, som skal tas i bruk i 2020. Ved innføringa av de nye læreplanane skal lærarane få meir tid til å gå i djubda på det viktigaste i faget. I matematikk er det utvikla seks kjerneelement. Det sjette kjerneelementet heiter «matematiske kunnskapsområder», og om algebra står det følgjande:

«Algebra i grunnskolen betyr å arbeide med strukturer, mønster og relasjoner. Elevene skal gjennom hele skoleløpet arbeide med algebraisk tenkemåte - om hvordan algebra er en generalisering av tallregning, om hvordan algebra kan brukes til å finne ukjent» (Kunnskapsdepartementet, 2018a, s.16)

Dei fem fyrste kjerneelementa omtaler arbeidsmåtar, metodar og tenkjemåtar. Elevane skal få større forståing for faget ved å arbeida meir med metodar og tenkjemåtar. Det sjette kjerneelementet skal eleven møta gjennom dei fem fyrste (Kunnskapsdepartementet, 2018a).

1.1 Bakgrunn for oppgåva

Personleg likte eg best å arbeida med oppgåver i læreboka når eg gjekk på grunnskulen. I ettertid har seg innsett at eg på den tida reflekterte lite rundt oppgåvene eg gjorde, og målet var å sette to strekar under eit svar som stemte med fasiten bak i boka. Interessa for lærebøker og oppgåvene i dei, fekk eg i løpet av lærarutdanninga. Av erfaring frå både praksis gjennom høgskulen og ulike vikariat på skular, har eg observert at læreboka er mykje brukt og ein viktig ressurs i klasserommet. Sjølv har eg mest erfaring frå mellomtrinnet, men etter ein praksisperiode på ungdomsskulen der eg underviste i algebra, fatta dette min interesse. Eg såg fleire frustrerte elevar som ikkje såg nytten av å kunne algebra. I tillegg såg dei ofte ikkje samanhengen frå aritmetikken.

Bakgrunnen for at eg ville undersøka algebrakapittelet var for å sjå korleis dagens lærebøker behandlar algebra på ungdomstrinnet. Ettersom norske elevar sine prestasjonar er svake i algebra i forhold til andre områder fann eg det spennande og interessant å velje dette emnet. I tillegg til at elevane arbeider mykje individuelt med oppgåver i matematikkundervisinga, fann er det interessant å analysera oppgåvene i algebrakapittelet for å sjå om elevane får utvikla sin matematiske kompetanse ved å arbeide med oppgåvene i lærebøkene.

1.2 Forskingsspørsmål

Forsking har vist at elevar arbeider mykje individuelt med oppgåver i matematikkundervisinga, og på bakgrunn av det har eg valt å undersøka lærebøker. På bakgrunn av at TIMSS studiar, som undersøkjer elevar sin matematiske kompetanse, viser at norske elevar har dårlege prestasjonar på området algebra finn eg det interessant å sjå kva for nokon kompetanseområder som vert vektlagt i arbeidet med oppgåver i lærebøkene.

Forskingsspørsmålet vart derfor:

Kva for nokon matematiske kompetansar legg algebrakapittelet i to norske læreverk til rette for at elevar på 8.trinn får utvikla?

For å svara på forskingsspørsmålet har eg valt å undersøka to norske læreverk, *Faktor* og *Tetra*, på 8.trinn. Det er brukt to rammeverk for matematisk kompetanse for å analysera oppgåver. Kilpatrick sitt rammeverk inneheld fem komponentar som har meiner elevane må utvikla parallelt for at dei skal utvikla sin matematiske kompetanse. Niss har 8 delkompetansar som han meiner til saman utgjer matematisk kompetanse. Det er desse to rammeverka som legg grunnlaget for kva matematisk kompetanse vert rekna som i denne studien. I tillegg er Kieran sin GTG-modell brukt som eit rammeverk for algebraisk aktivitet for å sjå kva for ein type aktivitet dei ulike oppgåvene stimulerer til. Rammeverket deler oppgåvene i tre ulike aktivitetar. Kva for ein type algebraisk aktivitet oppgåva stimulerer til har noko å seie for kva for ein delkompetanse eller komponent oppgåve vert plassert under i rammeverka for matematisk kompetanse.

1.3 Omgrepsavklaring

I LK06 er matematisk kompetanse skildra slik: «*Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Dette har òg språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idear*» (Kunnskapsdepartementet, 2013, s.2). I denne studien er matematisk kompetanse definert ut i frå modellane til Kilpatrick m.fl (2001) og Niss m.fl (2002), og deira forståing av matematisk kompetanse. Seinare i oppgåva vert rammeverka omtalt som «rammeverket til Kilpatrick» eller «rammeverket til Niss».

Kieran (2014) sin GTG-modell delar skulealgebraen inn i tre algebraiske aktivitetar:

- Genererande aktivitet: situasjonar, mønster og forhold vert tolka og deretter representert algebraisk. Denne aktiviteten inneber òg å ha forståing for ulike omgrep ein møter i matematikken.

- Transformerande aktivitet: omhandlar reknetekniske prosessar i algebra. Denne aktiviteten vert gjerne kalla den *regelbaserte* aktiviteten.
- Resonnerande aktivitet: er aktivitetar der algebra vert nytta som eit verktøy, til dømes problemløysingsoppgåver, modelleringsoppgåver, bevise, generalisering, sjå etter mønster og strukturar.

(Kieran, 2014)

1.4 Studien sitt føremål

Denne studien har som føremål å gje eit innblikk i kva type oppgåver elevane arbeider med i algebrakapittelet i to norske læreverk på 8.klasse, og kva for nokon formar for matematisk kompetanse desse oppgåvene gjev. Studien gjev ein pekepinn på kor mange oppgåver som går under ulike områder for matematisk kompetanse og kva algebraisk aktivitet oppgåvene stimulerer til. Målet med studien er å gje eit bidrag til norsk lærebokforsking. Både for lærarar og lærarstudentar kan det vera nyttig å vera klar over kva dei ulike oppgåvene gjev matematisk kompetanse innan, og kva som type oppgåver elevane arbeider mest med når dei løyser oppgåver i læreboka. Ettersom forsking viser at elevar arbeider mykje åleine med oppgåver i læreboka, kan det vere nyttig for ein lærarar å ha innsikt i dette. Blant anna viser SØF- rapporten «Kartlegging av tidsbruk og organisering i grunnskulen» at 49,52% av tida i matematikktimane i 8. klasse vert brukt til eige arbeid med eller utan rettleiing (Borge m.fl, 2009). Kongelf (2015) hevdar lærebøkene kan legga til rette for at elevane kan utvikla misoppfatningar, og ved å vere klar over dette, kan lærarar kompensera med god undervisning som gjer at elevane ikkje feiltolkar det som står i lærebøken. I tillegg til eit aukande fokus på norske elevar sine prestasjonar innan algebra, kan det vere nytting å ha eit innblikk i kva for nokon områder av matematiske kompetansar som er gjennomgåande i algebrakapittelet.

1.5 Oppbygging av oppgåva

I dette kapittelet er oppgåva sitt forskingsspørsmål presentert, samt kvifor lærebøker er viktig å forska på og eigen interesse for området. Teorikapittelet byrjar med å gje ein oversikt over tidlegare forsking på området. Deretter vert det gjort greie for algebra, skulealgebraen, algebraisk tenking og algebraisk kompetanse. Vidare vil rammeverka for matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet vorte gjort greie for. Dei teoretiske rammeverka legg grunnlaget for analysen.

Kapittel 3 tar for seg forskingsmetoden som er brukt i denne oppgåva. Her vert val som er tatt grunngjeve og det vert gjort greie for korleis rammeverka er nytta. Til slutt vil reliabiliteten og validiteten til forskinga vorte diskutert, i tillegg til etiske omsyn som er tatt undervegs i prosessen.

I kapittel 4 vil dei ulike delane av analysen vorte presentert i lag med studien sine funn. I diskusjonskapittelet vert funna drøfta opp mot teori og tidlegare forsking som vart gjort greie for i kapittel 2. Til slutt vil resultata frå studien vorte oppsummert, og satt opp mot forskingsspørsmålet.

2. Teorikapittel

I dette kapittelet vert det presentert teori som ligg til grunn for denne studien. Temaet for studien er matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet i algebrakapittelet i to norske læreverk. Fyrst vert det gjort greie for relevant forsking som er gjort på området tidlegare. Vidare vil eg gå nærmare inn på algebra og skulealgebraen, og skillet mellom aritmetikk og algebra. Deretter vil eg seie noko om kva som kjenneteiknar algebraisk tenking og algebraisk kompetanse. Matematisk kompetanse er eit viktig omgrep i denne studien. Kva som vert lagt i dette omgrepet vert gjort greie for mot slutten av kapittelet. Heilt til slutt vert det presentert to rammeverk for matematisk kompetanse. Desse er med på å definera kva denne studien legg i omgrepet. Det vert òg presentert eit rammeverk for algebraisk aktivitet. Dei tre rammeverka vert brukt til å analysera oppgåver i læreverka.

2.1 Tidlegare forsking

Ei rekke studiar på lærebøker i matematikk har vorte analysert og samanlikna, både innanfor same land og på tvers av landegrenser. Fan, Zhu og Miao (2013) har gjennomført ein metastudie av kva forsking som er gjort på lærebøker tidlegare. Studiar på lærebøker har ein kort historie, i forhold til kor lenge lærebøkene har eksistert. Til tross for at lærebøker er utbredt i klasserommet, har forskinga på lærebøker, i følgje Cronbach (1955, referert til i Fan m.fl, 2013, s.633) vert «spreidd og ufullstendig». I dei siste tre tiåra har derimot forsking på lærebøker vekst fort. Fan m.fl (2013) viser til at av alle undersøkte studiar av lærebøker har det i hovudsak handla om analyser og samanlikning av lærebøker (63%) og bruken av lærebøker (25%), medan berre 12% på andre områder.

Metastudien (Fan m.fl, 2013, s. 642) refererer blant anna til Chandler og Brosnan (1995), som har samanlikna innhaldet i sju matematikklærebøker frå 1. til 8. klasse og utført ein test som omhandlar matematisk kompetanse, på 9.klassingar i USA. I tillegg samanlikna dei innhaldet i matematikkbøker og innhaldet på testen. Dei fann ut at dei største forskjellane mellom lærebøkene og testen var på områda aritmetikk, måling og algebra.

Lepik (2017) har gjennomført ein studie om korleis lærebøker vert brukt i matematikkundervisinga i Estland. Han seier at lærebøker har stor innflytelse på skulematematikken. Analysen er basert på 164 lærarar og 29 observasjon gjort på barneskulen, og viste at lærebøkene fungerte som eit viktig instruksjonsreiskap. Lærebøkene vart aktivt brukt i cirka halve undervisningstida. Forfattarane konkluderte òg med at dei fleste lærarane brukte læreboka som ei øvingsbok. På den måten har elevane avgrensa tilgang til læreboka, og den vert ikkje brukt som ein variert ressurs slik den kunne vorte brukt.

Det har vorte gjort mykje forsking på algebraområdet dei siste 20 åra. Blant anna på når elevar bør møta algebra for fyrste gong og kva som bør introduserast. I tillegg er det gjort mykje forsking på korleis lærebøkene presenterer algebra. Algebra har lenge vore eit problemområde i skulen, og truleg derfor har mange forska på lærebøker. Både korleis lærebøkene vert brukt av læraren i undervisinga og elevar sitt syn på lærebøker har vorte undersøkt. I tillegg til at læreverk har vorte samanlikna og analysert innanfor kapittelet som omhandlar algebra. I seinare tid har ein fått eit auka fokus på algebraisk tenking og at elevar skal utvikla algebraisk kompetanse.

Jopperud (2015) analyserte og samanlikna læreverka Grunntall og Faktor på 8.trinn. Ho såg på korleis læreverka presenterte algebra, og om dei la til rette for instrumentell eller relasjonell forståing. I tillegg såg ho på korleis læreverka vart brukt av lærarar i klasserommet. Resultata hennar viste at oppgåvene i begge læreverka i stor grad la til rette for instrumentell forståing hos elevane, men at Faktor 8 hadde fleire element som kan hjelpa elevane til å utvikla relasjonell forståing. Likevel fann ho ut at det er måten læraren brukar læreverka i undervisingar, som har størst betydning for kva for ein forståingstype elevane har mogelegheit for å tileigna seg.

Kongelf (2015) har gjennomført ein analyse av introduksjonskapittelet i algebra i seks ulike læreverk i Norge. Han ser på introduksjonen til bokstavar som symbol for variable storleikar. Studien viser at det er mangelfulle sider ved kapitla. Blant anna kjem ikkje variabelaspektet tydleg fram gjennom konteksten til døme, og dei brukar i liten grad moglegheita til å byggja vidare på tallære. I tillegg legg lærebøkene til rette for at elevane kan utvikla misoppfatningar ved at dei inneheld feilaktige formuleringar, illustrasjonar og matematiske resonnement. Han finn òg manglande samsvar mellom læreplanen og lærebøkene om korleis introduksjonen av bokstavar vert brukt som symbol for variable storleikar. Felles for alle lærebøkene var at algebraen i liten grad generaliserer aritmetikken. Kongelf (2015) referere til Mason(1996) som hevdar at det er den viktigaste sida ved algebraisk tenking. Bokstavar som symbol for variable storleikar varierer med omsyn til klassetrinn, mengde og kontekst. Algebra syna seg som eit isolert emne, til tross for at algebra står saman med tal i læreplanen. Studien til Kongelf (2015) kan reknast som *ein* forklaring på kvifor norske elevar presterer svakt på nasjonale og internasjonale testar i algebra, og han sett spørsmålsteikn ved lærebokforfattarane si tolking av «tal og algebra» i læreplanen.

Petersen (2015) utforma ein kartleggingsprøve som byggjer på Kieran sin GTG-modell, for å kunne måle elevane sine ferdigheiter i algebra på 10.trinn i Noreg. Modellen delar skulealgebraen inn i tre algebraiske aktiviteter; genererande, transformerande og resonnerande aktivitetar. Resultat frå kartleggingsprøven viste at dei genererande oppgåvene og matematisering av verkelege situasjonar og problem var den største utfordringa til elevane. Dei transformerande oppgåvene fekk eit noko betre resultat, og dei resonnerande oppgåvene fekk det beste resultatet. Vidare skriv ho at spreiinga i resultatet var stort, men at ein kan anta at mange elevar har problem med å matematisera ulike situasjonar, og relativ god kontroll på resonnement og fortolking opp mot kontekst. Her kom det òg fram at representasjonsforma hadde mykje å seie for suksess i genererande oppgåver. Elevane er relativt gode i algebraisk tenking, resonnement og fortolking – aktiviteter der det ikkje stilles formelle krav i oppgåveløysinga (Petersen, 2015).

Naalsund (2012) har i sin PhD «Why is algebra so difficult?» undersøkt norske elevar på ungdomsskule sin algebraiske kompetanse. For å svare på spørsmålet, som også er tittelen på studien, ser ho på elevane sine kognitive prosessar knytt til algebraisk aktivitet. Analysen er basert på 412 responsar frå 8.klasse og 417 elevar for 10 klasse, i tillegg til intervju av utvalde elevar. Ho har brukt rammeverket til Kilpatrick for ulike aspekt ved matematisk kompetanse. Resultata tyder på at det er eit kognitivt gap mellom uformell og formell resonnering i 8.klasse, noko som gjer det tydeleg at uformelle metodar vart brukt som eit resultat av eleven i mindre grad hadde formell prosedyrekunnskap. Av dei elevane i 8.klasse som resonnerte formelt, såg ein avgrensa prosedyrekunnskap, noko som gjerne kom av avgrensa forståing av algebraiske konsept. Det som såg ut til å vere vanskeleg i formell algebra kom frå utilstrekkeleg kunnskap om aritmetikk, og overgangen til algebra. Mange av dei same utfordringane vart sett på begge klassetrinna. Å kunne skifte mellom ulike strategiar og forståing av likskapsteiknet var manglande kunnskap for mange av elevane i 10. klasse. Naalsund (2012) meiner ein kan dra nytte av å auka fokuset på ulike aspekt som utgjør algebraisk kompetanse. Ho føreslår eit «ferdigheits v.s forståings» fokus – då desse står tett saman i utvikling av kompetansen til elevane.

2.2 Algebra

«Kva er algebra?». Å definere kva algebra er eller forklara kva det er, er vanskeleg. Som matematikklærar kan eg seie mykje om kva algebra handlar om, og kva kompetanseområder som kjem under dette emnet. Likevel er algebra eit stort emne, og ein klar definisjon på kva det er, vert problematisk å formulera. I Store Norske Leksikon vert algebra skildra som ei grein innanfor matematikken og som læra om likningar. I tillegg til å omhandla bokstavrekning og rekning med tal og variablar (Aubert, K. E, 2018). Orda *likningar,* *bokstavrekning og variablar* er sentrale omgrep innanfor skulealgebraen, men dei dekkjer ikkje heile algebraområdet. Innanfor matematikkforsking har mange forskarar forsøkt å definera, forklara og skildra ulike aspekt ved algebraen. I følgje Kieran (2014, s. 27) har ordet *algebra* eksistert sidan det 9. århundre, då Al-Khowarizimi brukte det for å forklara vitskapen om likningsløysing. Kaput, Carraher og Blanton (2008) ser to kjerneaspekt ved algebra, som underordnar seg tre element på korleis ein kan tilnærma seg algebra. Det fyrste kjerneaspektet (A) ser på algebra som å systematisk symbolisera generaliseringar av regelmessighet og avgrensingar. Det andre (B) ser på algebra som syntaktisk leia resonnering og handlingar på generaliseringar uttrykt i symbolsystem. Under dei to kjerneaspekta finn ein tre tilnærmingsmåtar:

1. Algebra som studien av strukturar og system frå berekningar og relasjonar, inkludert dei som kjem fram i aritmetikken (algebra som generalisert aritmetikk).
2. Algebra som studien av funksjonar, relasjonar og felles variasjon.
3. Algebra som bruken av ei samling av modellerande språk både innanfor og utanfor matematikken

(Kaput, Carraher & Blanton, 2008)

I fylgje Kaput, Carraher & Blanton (2008) er det typisk at elevar utviklar aspekt B seinare enn aspekt A, ettersom at når ein reknar med symbol, er ein avhengig av å ha forståing for dei lovlige kombinasjonane av symbola, og korleis dei føreheld seg til kvarandre.

2.2.1 Kva er skulealgebra?

Algebra som eit verktøy for å manipulera symbol vart innført i skulen sine læreplanar gjennom 1800-talet og inn i 1900-talet. Mot slutten av 1980-talet hadde funksjonar vorte sett på som eit eige emne i skulen, men i løpet av dei siste tiåra byrja funksjonar og likningssett å slå seg saman i skulealgebraen. I tillegg kom datateknologien, noko som i varierande grad vart integrert i innhaldet til skulealgebraen (Kieran, 2014, s. 27)

I følgje Kieran (2014, s 27) kan definisjonar på algebra variere, ettersom det i dei siste 10 åra har skjedd endringar i perspektiva om kva skulealgebra er. Kieran (2014, s .27) viser til Freundenthal (1977) som meinte at skulealgebraen ikkje berre er å løyse 1. og 2. gradslikningar, men også algebraisk tenking. Dette inkluderer evna til å beskrive forhold og løysa prosedyrar på ein generell måte. Kieran meiner denne definisjonen står i dag òg, ettersom den ikkje berre fangar dei symbolske aspekta ved algebraisk aktivitet, men òg relasjonell tenking som ligg til grunn for algebraisk resonnement, og som skiljer den frå aritmetisk aktivitet.

Bergsten m.fl (2016, 12) skriv at for mange er algebra synonymt med bokstavrekning, der ein reknar med bokstavar i staden for med tal. Den synlege skilnaden mellom algebra og aritmetikk for elevane, er bokstavsymbola. Dette kan tyde på ein innstilling til matematikken som er prosedyreorientert. Vidare hevdar han at det algebraiske språket er eit standardverktøy for å presist handtere tal og funksjonar, og at det er viktig at elevane får moglegheit til å læra seg dette. Mange elevar opplever algebra som abstrakt og ser ikkje meininga med den. Dette kan føre til at eleven mister interesse og får ein negativ innstilling til emnet. Algebra bør derfor gjerast attraktiv og levande, noko som elevane kan engasjerer seg i.

Mason (1996, s. 65) hevdar at algebra er eit dødt emne i skulen, og samanliknar det med å bøye latinske verb og memorere delar av blomar. Han meiner at når ein fokuserer på generalisering i klasserommet, vil algebra verte tilgjengeleg for fleire. Når generalisering vert naturleg og skjer spontant, vil dette gjennomsyre matematikken. Mason meiner at generalisering er hjerterytmen i matematikk, og dersom ikkje elevane er vane med å uttrykke generaliseringar, tar ikkje matematisk tenking plass hos elevane.

Lee (1996, s 87) ser på algebra som ein mini-kultur innanfor ein større kultur av matematikk. Ho meiner dette gjer det mogleg å sjå på algebra som eit sett av aktivitetar, algebra som språk og alle andre metaforiske måtar å definere algebra på. Vidare hevdar ho at det er nyttig å tenkja på samspelet mellom språk og kunnskap i den gradvise prosessen med algebraisk akkulturasjon som føregår i klasserommet. I tillegg til samspelet mellom algebra og andre matematiske «kulturar», som aritmetikk. Ordet «kultursjokk» kan vere nyttig å tenkje på når elevane møter den algebraiske kulturen.

Aritmetikk og algebra

Carraher og Schliemann (2007) hevdar at aritmetikk er vitskapen om tal, mengder og storleikar. Dette inkluderer addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, i tillegg til faktorisering og utvinning av røtter. På barneskulen er aritmetikken ofte retta mot å finne svaret. Algebra, som fyrst kjem inn på ungdomsskulen byrjar vanlegvis med variablar, forenkla algebraiske uttrykk, likningar med ein ukjent og å løysa likningar (Kieran, 1989, s.33). Etter mykje tallære på barneskulen, vart skulealgebra på 1900 talet introdusert som generalisert aritmetikk med vektlegging på symbolmanipulering og likningsløysing. I dag spør forskarane seg om korleis ein skal greia overgangen frå aritmetikk til symbolalgebra

(Kilpatrick, 2011, s. 125). Lins og Kaput (2004) hevdar det er ein tradisjon at aritmetikk kjem før algebra. I dei alle fleste land er samanhengen mellom algebra og aritmetikk, at algebra er generalisert aritmetikk.

Watson (2009) hevdar at dersom algebra berre vert sett på som generalisert aritmetikk, kan det oppstå mange problem for læring og undervising. Det er signifikante forskjellar mellom aritmetiske og algebraiske tilnærmingar. Elevane vert ofte forvirra av uttrykk som kombinerer tal og bokstavar. Denne forvirringa kan forsterkast ved at elevar tenkjer at bokstavane står for objekt. Som til dømes i den velkjente «fruktsalatalgebraen» der elevane lærer at 5a+3a står for 5 appelsinar pluss 3 appelsinar, og at svaret vert då 8a, åtte appelsinar. Dersom elevane tenkjer slik, kan det skape problem for dei seinare, når dei skal tenkje på ein bokstav som ein variabel. Til dømes når 2 bananer kostar 7 kroner, og elevane skal uttrykke dette algebraisk. Då får ein formelen 2b = 7. Her står ikkje lenger b'en for objektet banan, men ein ukjent storleik, og i dette tilfellet prisen for ei banan. I følgje Watson (2009) er algebra ein måte å uttrykka generaliseringar på. God forståing mellom tal, mengder og relasjonar er viktig for å læra algebra. Vidare hevdar ho at fleire studiar har vist at elevar forstår korleis dei bruker algebra dersom fokuset er på generaliseringar.

I følgjer Rivera (2006) kan forskjellar mellom aritmetikk og algebra forklara kvifor eldre elevar opplever vanskar når dei lære algebra. Overgangen til algebra, frå eit «aritmetikk-basert-fokus» kan vere vanskeleg fordi aritmetikken som oftast handlar om tal, mengder og operasjonar, medan algebra fokuserer på variablar, funksjonar, forhold og strukturar. Ei anna mogeleg problemkjelde kan vere oppfatninga om at algebra krev eit vist nivå av abstraksjon og mental modnad som aritmetikkpensumet ikkje gjev i tilstrekkeleg grad. Det er òg feil å anta at dersom elevar utviklar forståing for aritmetiske operasjonar, vil dei induserer tilsvarande aritmetiske strukturar som er nødvendige for å utvikla algebraisk tenking, i tillegg til å verke forberedande. Rivera (2006) føreslår eit pensum som er prega av algebra i aritmetikken, på tidlegare trinn. Kieran (2004. s. 140) har føreslått fem punkt som ho meiner kan hjelpa elevane å gå frå aritmetisk tenking til algebraisk tenking. Desse fem punkta vert presenter seinare.

2.2.2 Algebraisk tenking

Kieran (2004) definerer algebraisk tenking som utviklinga av tenkjemåtar der bokstav-symbolsk algebra kan brukast som eit verktøy, men som ikkje er eksklusivt for algebra. Likevel kan ein nytta det utan å bruka bokstav-symbolsk algebra i det heile tatt, som å analysera forhold mellom mengder, legga merke til strukturar, studera endringar, generalisering, problemløysing, modellering, forklaring, bevise og føreseie.

Cai og Knuth (2011) hevdar at utviklinga av algebraisk tenking på tidlegare trinn krev «.. development of particulare ways of thinking», noko som inkluderer å analysere forhold mellom mengder, legge merke til strukturer, studera endring, generalisering, problemløysing, modellering, forklara, bevise og føreseie. Å læra algebra på tidlegare trinn utviklar ikkje berre nye verktøy for å forstå matematiske relasjonar, men òg nye vanar.

Kilpatrick (2001) hevdar at dei tradisjonelle representasjonsaktivitetane i algebra fokuserer på algebraiske uttrykk og likningar. Å laga uttrykk og likningar inneber at elevane forstår dei matematiske operasjonane og kan representera dei ved bruk av bokstaver. I tillegg til at dei må ha forståing for likskapsteiknet. Dette krev ei tenking som går vidare frå korleis ein tenker i aritmetikk. Overgangen frå aritmetikk til algebra krev at elevane må gjere ein del tilpassingar. Aritmetikken i grunnskulen er ofte prega av å vere svarorientert, og ikkje på representasjonar av relasjonar. Ein har til dømes sett at når elevar får ein oppgåve som 8 + 5 = □ + 9, så skriv dei 13 i boksen, og ikkje 4 som er det rette svaret. Det kan komme av at elevane ser eit likskapsteikn og responderer automatisk med å skrive svaret.

På bakgrunn av dette utvikla Kieran (2004) fem punkt som ho meinte var nødvendig for å utvikla algebraisk tenking. Dei fem punkta inkluderer, men er ikkje avgrensa til:

1. Ein må ha fokus på relasjonar, og ikkje berre på utrekning av eit svar
2. Ein må ha fokus på operasjonane og deira inversar, og på den tilhøyrande ideen om å gjera noko og gjera om på noko
3. Ein må ha fokus på både å representera og å løysa eit problem. Ikkje berre på å løysa dei.
4. Ein må ha fokus på tal og bokstavar, og ikkje berre på tal. Dette inkluderer:

a) Arbeid med bokstavar som både ukjente, variablar og parameter

b) Ein må akseptera at bokstavuttrykk kan vera ein ferdig løysing

c) Samanlikne utrykk for likeverdighet basert på eigenskapar i staden for numerisk evaluering.

5. Ein må ha eit refokus på tydinga av likskapsteiknet

(Kieran, 2004, s. 140)

Desse punkta meiner Kieran (2004) at ein må byrje å jobbe med på tidligare trinn, for å gjere overgangen til algebra lettare for elevane. På den måten kan ein hjelpe elevane å komme frå aritmetisk tenking til algebraisk tenking. Cai og Knuth (2012) hevdar at desse punkta fell under aritmetikken, *men* dei representerer òg ein overgang mot å utvikla idear som er grunnleggande for å læra algebra. På denne måten vert ikkje skillet mellom aritmetikk og algebra så tydeleg som ein ofte tenkjer at det er (Cai og Knuth, 2011).

2.2.3 Algebraic proficiency

Algebraic proficiency, eller algebraisk kompetanse på norsk, inkluderer ikkje berre prosedyreferdigheiter, men involverer også algebraisk innsikt. (Stiphout, Drijvers, Gravemeijer, 2013, s. 62). I det siste avsnittet i dette kapittelet vert dette sett i samanheng med dei teoretiske rammeverka.

Stiphout m. fl. (2013, s. 63) ser på to aspekt i forhold til algebraisk kompetanse - forholdet mellom forståing og berekning og «the notion of structure sense». Dei hevdar at skiljet mellom forståing og berekning er sentral i diskusjonen om algebraisk kompetanse. Kilpatrick m.fl (2001) ser berekning og forståing som to av fem komponentar som til saman utgjer matematisk kompetanse, saman med anvendelse, resonnement og engasjement. Desse vert introdusert i neste avsnitt. Stiphout (2013) hevdar det er allment akseptert at berekning og forståing må gå hand i hand. Kilpatrick m.fl (2001) hevdar òg at dei fem komponentane må utviklast parallelt. Algebraisk kompetanse går frå grunnleggande ferdigheiter som prosessarbeid til strategisk arbeid, algebraisk resonnement og forståing. For å dekka dei fleksible ferdigheitane som er involvert i algebraisk kompetanse, introduserte Arcavi (referert til i Stiphout m.fl, 2013) omgrepet «symbolfølelse». Å ha symbolfølelse er å ha ein kompleks følelse for symbol. Dette inkluderer ei positiv haldning til symbol og evna til å kunne lesa symbola. Lincheski og Linvneh (referert til i Stiphout m. fl, 2013) introduserte «strukturfølelse» som å kunna kjenna att strukturar, sjå ein del av eit uttrykk som ei eining, dela opp uttrykk og kjenna att korleis ein kan manipulera uttrykk slik at det vert meiningsfylt. Forfattarane meiner desse aspekta er viktige for algebraisk kompetanse. Som nemnd i kapittel 2.2.2 inkluderer algebraisk tenking blant anna å kunna legga merke til strukturar og studera endringar. Dette kan koplast til «strukturfølelse» som blant anna handlar om å kjenna att strukturar. Vidare krev algebraisk tenking generalisering og problemløysing. Då vert det sentralt å snakka om «symbolfølelse», ved at ein ofte bruker symbol for å generalisera eller uttrykka eit problem der ein har ein eller fleire ukjende.

2.3 Matematisk kompetanse

I denne studien er det brukt to rammeverk, Niss og Kilpatrick sitt, for matematisk kompetanse for å analysera oppgåver. I tillegg er eit rammeverk utvikla av Kieran nytta for å finne ut kva for ein algebraisk aktivitet oppgåvene stimulerer til. Rammeverka vert beskrive seinare (sjå kap. 2.4).

Kunnskapsløftet seier at matematisk kompetanse blant anna inneber at elevane skal kunne bruke problemløysing og modellering til å analysera og omformar eit problem til matematikk. I tillegg til å kunne løyse problemet og vurdere løysinga. Vidare står det at matematisk kompetanse òg inneheld språklege aspekt. Å kunne formidle, samtala og resonnera rundt idear, er og ein del av den matematisk kompetanse elevane skal utvikla. I mange dømer av matematisk aktivitet vert det nytta hjelpemidler og anna teknologi. I Kunnskapsløftet står det at elevane skal både kunne «bruke og vurdere ulike hjelpemiddel og det å kjenne til avgrensinga deira er viktige delar av faget» (Kunnskapsdepartementet, 2013).

I skulen skal matematikkfaget bidra til å utvikla den matematiske kompetansen som elevane og samfunnet trenger. For at elevane skal få mogelegheit til å utvikla denne kompetansen, må dei få høve til å arbeida utforskande, leikande, kreativt, med problemløysande aktivitetar og ferdigheitstrening. I tillegg til å kunne gjere dette både praktisk og teoretisk. For å kunne forstå og kunne påverke prosessar i samfunnet, er matematisk kompetanse nødvendig (Kunnskapsepartementet, 2013).

At elevane blant anna må arbeida med problemløysande aktivitetar og oppgåver som gjev ferdigheitstrening, kan sjåast i samanheng med høvesvis resonnerande og transformerande aktivitet etter modellen til Kieran (sjå kap. 2.4.3). Den fyrste aktiviteten i modellen til Kieran, den genererande aktiviteten, kan koblast til matematisk kompetanse ved at elevane må kunne omforma eit problem til matematikken. Altså nytta ulike representasjonsformer. Å kunna skifta mellom ulike representasjonsformer finn ein òg i rammeverka til Niss og Kilpartick (sjå kap 2.4.1 og 2.4.2.)

Som vi kjem til å sjå seinare når dei teoretiske rammeverka vert forklart, ser vi at Kunnskapsløftet sin forklaring på matematisk kompetanse, er å finne igjen i rammeverka til Niss og Kilpatrick for matematisk kompetanse. Ein ser òg at fleire av dei algebraiske aktivitetane elevane får arbeide med gjennom oppgåver, kan sjåast i samanheng med utviklinga av matematisk kompetanse. Til dømes at elevane vil få kompetanse innan representasjon ved å arbeide med oppgåver som stimulerer til genererande aktivitet (sjå kap

2.4.3). Kilpatrick introduserer forståing og berekning som to av fem komponentar for matematisk kompetanse (sjå kap. 2.4.2). Udir.no skriv at ferdigheiter og kunnskapar til saman utgjer kompetanse. Boaler (2002) skriv at det på 1970 talet var det einigheit om at kunnskap kan utviklast på ulike måtar, og nemner blant anna forståing og berekning(sjå kap. 2.4.2), og relasjonell og instrumentell (sjå kap. 2.3.1).

2.3.1 Instrumentell og relasjonell forståing

Skemp (1978), viser til Mellin-Olsen, og deler forståing inn i instrumentell forståing og relasjonell forståing. Å vite både kvifor og kva ein skal gjere, er det dei fleste meiner med forståing – Skemp kallar det relasjonell forståing. Instrumentell forståing er å vite korleis ein brukar reglane og algoritmane riktig. Sjølv om ein veit korleis ein skal bruke reglane, er det ikkje sikkert at ein har ein relasjonell forståing av dei – altså at ein veit kvifor regelen er slik og kvifor den vert brukt. Til dømes kan eleven vite regelen for divisjon med brøk: å dividera brøk er det same som å multiplisera med den omvendte brøken. Men dei veit kanskje ikkje kvifor det er slik. Å kunne bruke reglane og algoritmane riktig kan stimulerast gjennom transformerande aktivitetar (sjå kap. 2.4.3) og elevane kan då utvikla symbol- og formalisme kompetanse (sjå kap. 2.4.1) og kompetanse innan berekning (sjå kap. 2.4.2).

Nosrati og Wæge (2015) hevdar at relasjonell forståing ofte vert forbinda med undersøkande framgangsmåtar til faget, medan instrumentell forståing vert knytt opp til dei tradisjonelle undervisingsformane. På den måten vil relasjonell forståing bidra til å læra eit aukande antal reglar og formlar som hjelper eleven med å finna løysinga på oppgåva, fordi elevane veit *korleis* dei skal gjere det. Å kunna byggja opp omgrepsmessige strukturar og sjå samanhengar mellom omgrep, er ein del av relasjonell forståing. Det inneberer å kunne vite korleis ei oppgåve skal løysast og kvifor det vert slik. Ved å arbeide med genererande aktivitetar kan elevane få forståing for ulike matematiske omgrep, og dermed kompetanse innan forståing og tankegangskompetanse (sjå kap. 2.4).

Naalsund (2012) hevdar at skulealgebraen er den delen av matematikken der vi oftast møter algoritmar og hugsereglar for å løyse problem. I følgje ho vert mange norske elevar si forståing av algebra på eit instrumentelt nivå. Norasti og Wæge (2015) meiner at algebra har meir å tilby, og visar til ein artikkel skrevet av Cuoco m.fl (1996). Forfattarane meiner at algebra framstår som ein passiv, instrumentell aktivitet, i dei fleste klasserom og at arbeid med algebra bør innehalde følgjande:

- Elevar bør vere «*mønstersniffarar*». Ein bør fremma ei glede hos elevane ved å finna skjulte mønster.
- Elevane bør vere «*beskrivande*». Dei bør vere i stand til å:
- Gje presise beskrivingar av trinna i ein prosess. Å beskriva det du gjer er eit viktig trinn for å utvikla forståing.
- Finna på notasjon. Ein måte å få elevar til å sjå nytteverdien og elegansen i tradisjonell matematisk formalisme er å la dei få streva med å beskriva fenomen kor vanlige språklege skildringar kjem til kort eller vert for krunglete.
- Argumentera. Elevar bør vere i stand til å overtyda sine klassekameratar om at eit resultat er riktig eller sannsynleg ved å gje pressise skildringar av gode bevis/argumenter.
- Elevar bør være «*utforskarar*». Dei bør venne seg til å plukke idear frå kvarande og sette dei samen igjen. Når dei gjer dette bør dei prøve å sjå kva som skjer dersom noko vert tatt ut eller dersom delane vert satt samen på en ny måte.
- Elevar bør vere «oppfinnarar». Ein viktig ingrediens i matematisk oppfinnsomhet er at elever byrjar å sjå etter forskjellige tilfelle av same matematiske struktur.

(Cucuo m.fl, 1996, referert til i Norasti og Wæge, 2015)

Desse punkta gjeld ikkje nødvendigvis berre algebra, men for arbeid med matematikk generelt. Relasjonell forståing vil vorte fremma når ein har fokus på desse faktorane. I tillegg kan ein forbetra prosedyrekunnskapar på ein konstruktiv måte, slik at den kan brukast som eit reiskap (Norasti & Wæge, 2015).

Skemp sin forklaring av instrumentell og relasjonell forståing av matematikk kan koblast opp mot det som Hiebert og Lefevre (referert til i Norasti og Wæge, 2015) har kalla prosedyre – og omgrepsmessig kunnskap. Prosedyrekunnskap er kunnskap om reglar og prosedyrar for å løysa problem. Ofte ved å følgje oppskrift for å manipulera symbol. Naalsund (2012) seier at i Noreg er ofte denne kunnskapen dominerande i klasseromma, spesielt når det gjeld algebra.

2.4 Teoretisk rammeverk

I dette kapittelet vert dei teoretiske rammeverka som er lagt til grunne for analysen presentert. For å analysere oppgåver etter kva matematisk kompetanse elevane møter, er det nytta to rammeverk. Mogens Niss sitt rammeverk inneheld åtte kompetansar som til saman utgjer matematisk kompetanse. Kilpatrick m.fl (2001) sitt rammverk omfattar fem komponentar som må utviklast parallelt for at ein elev skal tileigna seg matematisk kompetanse. For å kategorisera oppgåver etter algebraisk aktivitet, er Kieran sin modell lagt til grunne.

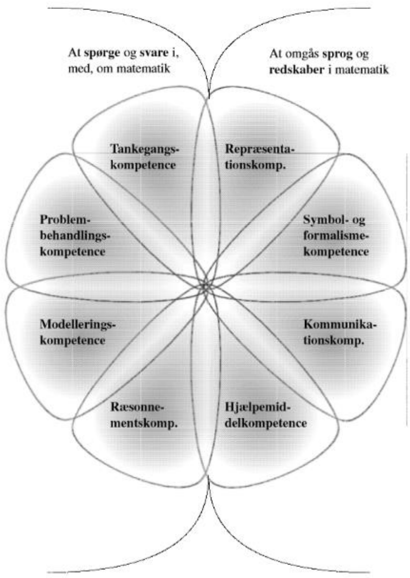
Niss (2017) sitt rammeverk inneheld viktige aspekt ved å utvikla matematisk kompetanse. Likevel er det felt innanfor matematikklæringa som ikkje vert dekka av hans rammeverk. Til dømes haldningar til faget og sider som omhandlar følelsar ved læringa. Ved å bruka ordet *mathematical proficiency*, og ikkje *mathematical competence* inkluderer Kilpatrick m.fl (2001) sider ved matematikklæringa som omhandlar haldningar til faget. Niss sitt rammeverk fokuserer meir på kva det vil seie å læra matematikk og går meir i detalj på kva eleven fysisk gjer. Medan rammeverket til Kilpatrick fokuserer overordna på kva oppgåvene bør innehalde for at eleven skal mestre matematikk. Læreverka utfyller kvarande på den måten at begge skildrar grunnleggjande sider ved matematisk kompetanse. Dette er grunnen til at eg i denne undersøkinga har valt å bruke to rammeverk for matematisk kompetanse, då dei ikkje er alternativer til kvarandre

2.4.1 Niss sine åtte delkompetansar for å oppnå matematisk kompetanse

Mogens Niss (2017) utvikla åtte matematiske kompetansar. Han definerer matematisk kompetanse som «en persons indsigtsfulde parathed til at handle hensigtsmæssigt og med succes i et bredt spektrum af situationer, som rummer matematiske udfordringer, uanset arten af desse» (Niss, 2017, s. 8). Vidare definerer han *ein* matematisk kompetanse som «en persons indsigtsfulde parathed til at handle hensigtsmæssigt og med succes i situationer, der rummer matematiske udfordringer af en bestemt slags» (Niss, 2017, s. 8). Dei åtte matematiske kompetansane inngår i kvarandre, og til saman dannar dei matematisk kompetanse. Kvar av kompetansane består av å kunne utøva bestemte typar matematiske aktivitetar basert på spesifikk kunnskap og spesifikke ferdigheiter. Dei åtta matematiske kompetansane er delt inn i to grupper, som kvar har fire kompetansar:

- Å kunne spørje og svara i, med og om matematikk:
- Tankegangskompetanse
- Problembehandlingskompetanse
- Modelleringskompetanse
- Resonneringskompetanse

- Å kunne handtere matematikken sitt språk og reiskaper:
- Representasjonskompetanse
- Symbol – og formalismekompetanse
- Kommunikasjonskompetanse
- Hjelpemiddelskompetanse



Figur 2.1 Niss sin modell for matematisk kompetanse. (Niss m.fl, 2002)

Å kunne spørje og svara i, med og om matematikk

Tankegangskompetansen inneberer *å vera klar over* kva for nokon spørsmål som er karakteristisk for matematikk. I tillegg til å kunne stilla spørsmål og føresjå kva type svar eit slikt spørsmål kan forventa. Å kunne kjenna igjen, forstå og handtera matematiske omgrep, og å kunna utvida eit omgrep er ein del av kompetansen. Vidare skriv Niss m. fl. (2002) at å kunna generalisera og forstå kva som ligger i generalisering av matematiske resultat, i tillegg til å kunna skilja mellom ulike matematiske utsegn og påstandar, blant anna definisjonar og setningar, ligg under denne delkompetansen.

Problemløysingskompetansen består av å kunne formulera, avgrensa og presisera forskjellige matematiske problem. I tillegg til å kunna løysa, både eigne og andre sine, matematiske problem i ein ferdigformulert form (Niss m. fl., 2002).

Modelleringskompetansen inneberer på den eine sida å kunne analysera grunnlaget for og eigenskapane til modeller. Under her ligger å tolka resultatet av modellen. På den andre sida inneberer det å kunna laga modellar i ein gjeven samanheng. Å kunna modellering betyr å kunna strukturera ein situasjon, oversetta objekt, relasjonar og problemstillinga slik at resultatet vert ein matematisk modell. Under her ligger det å kunna behandla modellen, løysa dei matematisk problema knytt til situasjonen, samt å kunne bestemma gyldigheten til modellen, og ha eit kritisk blikk (Niss m. fl., 2002).

Resonneringskompetanse handlar om å kunne følgja og dømma eit matematisk resonnement, forstå kva eit matematisk bevis er og rekne og gjennomføra uformelle og formelle resonnement. Til dømes å gjere om eit resonnement til eit gyldig bevis. Denne kompetansen inneberer òg å kunne dømma gyldigheten til matematiske påstandar setningar eller ein regel. I tillegg til å kunna overtyda seg sjølv og andre om gyldigheten (Niss m. fl., 2002).

Å kunne handtere matematikkens språk og reiskapar

Representasjonskompetansen handlar om å forstå og bruka fleire representasjonar for ein matematisk situasjon eller eit problem. Det betyr å kunne avkoda, fortolka og skilja mellom symbolske (spesielt algebraiske), grafiske, geometriske, tall og verbale representasjonar. I tillegg til å forstå samanhengen mellom ulike representasjonsformar, og å kunne sjå deira styrkar og svakheter. Vidare omhandlar denne kompetansen i å kunne velje og oversetta mellom ulike representasjonar for eit problem, etter føremål (Niss m. fl., 2002).

Symbol- og formalismekompetansen handlar om å kunne handtera matematisk symbolspråk og formalisme. Denne kompetansen består på den eine sida av å kunne avkoda symbol og formelspråk, å kunna oversetta og veksla mellom matematisk symbolspråk og naturlig språk. I tillegg til å kunne behandla symbolholdig utsegn, uttrykk og formlar. På den andre sida inneberer denne kompetansen å ha innsikt i symbola og tydinga av dei, i tillegg til reglane som gjeld. Dette inkluderer ikkje berre avanserte matematiske symbol, men òg talsymbol og basale teikn i samanheng med rekneoperasjonar. Denne kompetansen handlar heller ikkje berre om bokstavrekning og utrekning, men inkluderer òg dei formelle sidene av elementære rekning (Niss m. fl., 2002).

Den nest siste kompetansen handlar om å kunne kommunisera i, med og om matematikk. Kommunikasjonskompetansen inneberer å kunne setta seg inn i, og tolka andre sin matematikk, både skriftleg, munnleg eller visuelle utsegn. I tillegg til sjølv å kunne uttrykka seg på forskjellige måtar og på forskjellige nivå (Niss m. fl., 2002).

Den siste kompetansen, hjelpemiddelkompetanse, består av å kunna bruka og forholda seg til hjelpemiddel for matematisk verksemd. Det inneberer å ha kjennskap til dei ulike hjelpemiddla og eigenskapane til dei. I tillegg til å kunne sjå mogelegheiter og avgrensingar i ulike situasjonar, og bruke dei på eit reflektert vis. Det handlar ikkje berre om å kunne bruka kalkulator og PC, men og tabellar, reknestokk, kuleramme, linjal, passar og vinkelmålar (Niss m.fl, 2002).

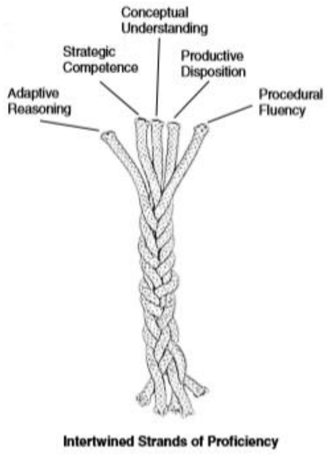
Dei åtte kompetansane inngår i kvarande. I representasjonskompetansen er særleg symbolske representasjonar av betydning. Derfor er blant anna denne kompetansen i nær slekt med resonneringskompetansen og symbol- og formalismekompetansen, som blant anna fokuserer på «spelereglane» for bruk av matematiske symbol. Representasjonskompetansen er òg nært knytt til kommunikasjonskompetansen, ettersom det å representera matematiske situasjonar er knytt til kommunikasjon i, med og om matematikk. Hjelpemiddelskompetansen er òg knytt til representasjonskompetansen, ved at eit hjelpemiddel involverer ein eller fleire typar matematiske representasjonar. I tillegg er bruken av nokon hjelpemidlar underlagt bestemte «spelereglar», og dermed er den knytt til symbol- og formalismekompetansen (Niss m. fl., 2002).

2.4.2 Kilpatrick sin forståing av matematisk kompetanse

Slik Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) ser det, har mathematical proficiency eller matematisk kompetanse, fem trådar. Desse fem trådane kan sjåast i samanheng med fagfornyelsen i matematikk og oversettast til:

- Forståing (Conceptual underderstanding)
- Berekning (Procedural fluency)
- Anvendelse (Strategic competence)
- Resonnering (Adaptive reasoning)
- Engasjement (Productiv disposition)

(NOU 2015:8, Kilpatrick m.fl, 2001)



Figur 2.2 Kilpatrick sin modell for matematisk kompetanse. (Niss m.fl, 2001)

Den fyrste av den fem komponentane, *forståing*, inneberer å kjenne omgrep og reglar som gjeld for matematikken, kunne bruke dei og sjå samanhengar mellom desse. I tillegg handlar det om å bruke og veksle mellom ulike representasjonar. *Berekning* handlar om å bruke ulike prosedyrar, utføre dei fleksibelt og veksle mellom dei som er mest hensiktsmessig**.** *Anvendelse* handlar om å ha evna til å formulera, representera og løysa matematiske problem (Kilpatrick m.fl, 2001). Det gjeld både problem frå kvardagen der ein kan bruka matematikk, men òg abstrakte matematiske problem. I tillegg handlar det om strategisk tankegang og å kunne vurdere løysinga (NOU 2015:8). *Resonnering* inneberer å kunne tenkja logisk, å kunne sjå og forklarar samanhengar mellom ulike matematiske omgrep. I tillegg handlar det om å kunne reflektera og argumentera for eigne matematiske resonnement og forklara dei til andre. Å kunne bruka ny kunnskap, i lag med tidlegare lært kunnskap, sjå desse i samanheng, for det som skal undersøkast, er ein viktig del av matematisk kompetanse. Den siste komponenten, *engasjement,* inkluderer sjølv å tru ein kan verte god i matematikk og at arbeidet ein legg til grunne bidrar til læring. Det handlar og om må å sjå matematikk som meiningsfult, verdifult og som eit nyttig fag.

Dei ovannemnde fem komponentane er samanvevd og gjensidig avhengig av kvarandre. Alle komponentane må utviklast parallelt for at elevane skal kunne utvikla matematisk kompetanse. Den matematiske kompetansen og dei ulike områda i matematikk (tal og algebra – måling – geometri – statistikk) bør arbeidast med slik at elevane ser samanhengar mellom dei (NOU 2015:8). I forhold til tal og algebra, kan det tenkjast at algebra bør byggje vidare på aritmetikken, slik at elevane forstår samanhengane, og ikkje ser på algebra som eit isolert emne.

2.4.3 Algebraisk aktivitet

Kieran (2014) utvikla GTG-modellen, som delar skulealgebraen inn i tre aktivitetar: genererande aktivitetar, transformerande aktivitetar og resonnerande aktivitetar. Dei tre aktivitetane, er aktivtetar som elevane vanlegvis er involvert i. Dette rammeverket er brukt for å undersøka kva for nokon algebraiske aktivitetar oppgåvene i læreverka stimulerer til. Desse aktivitetane heng saman med utviklinga av matematisk kompetanse ettersom dei har mange av dei same kriteriane som gjeld for å utvikla matematiske kompetanse. Ved å undersøkja den algebraiske aktiviteten oppgåvene legg til rette for, vil ein kunne sjå kva type oppgåver som er mest typisk for læreverka, og kva for ein matematisk kompetanse som trengs for å løyse slike oppgåver.

Genererande aktivitetar

I følgje Kieran (2014) er det i dei genererande aktivitetane at meining oppstår. Her vert situasjonar, forhold og mønster tolka og deretter representert algebraisk. Typiske dømer på algebraisk aktivitet er:

- Likningar som inneheld ukjente og som representerer ein situasjon eller eit problem
- Generalisera uttrykk frå geometriske mønster eller numeriske følgjer
- Uttrykk for reglar for numeriske relasjonar, i tillegg til representasjon av funksjoner ved å bruke graf, tabell eller bokstavsymbol

Denne aktiviteten inneberer å ha forståing for likskapsteiknet, omgrep som *variabel, ukjent, likeverdighet* og *likningsløysing* (Kieran, 2014). Wilson (2003, refererer til Kieran 1997) hevdar at den genererande aktiviteten er vanskeleg for elevane, og sikter spesielt mot å kunne representera tekstoppgåver eller verbale representasjonar, algebraisk. Teknologi, som hjelpemidler, kan hjelpa elevane til å skapa meining om algebraiske uttrykk. Eit døme på ei genererande oppgåve kan vere «Jack er tre år eldre enn Chloe. Kan du skrive eit uttrykk for Jack sin alder?» eller «David er 10 cm høgare enn Con. Con er h cm høg. Korleis kan du skrive David sin høgde? (Wilson, 2003). Dette er oppgåver der eleven vert spurt om å kunne skrive eit uttrykk, som representerer ein situasjon.

Transformerande aktivitetar

Den transformerand aktiviteten vert ofte kalla den *regelbaserte* aktiviteten, og handlar om dei reknetekniske prosessane i algebra. Det inkluderer til dømes å kunne samle like uttrykk, faktorisera, utviding, erstatte, legge til, løyse likningar, og forenkla uttrykk. Mykje av desse aktivitetane inneheld å endra form på eit uttrykk eller ein likning for å oppretthalda likeverdighet (Kieran 2004). Wilson (2003) hevdar at denne aktiviteten tradisjonelt sett har fått stor merksam i skulen. Dømer på transformerande oppgåver kan vere 2a+5a eller 23 = 37 – n. Det kan tenkjast at denne aktiviteten ofte frå stor merksam, ettersom lærebøkene ofte inneheld fleire reknetekniske oppgåver innanfor ei oppgåve (t.d. 34 a, b, c, d , e).

Resonnerande aktivitetar

Den resonnerande aktiviteten gjelder ikkje berre algebraiske prosesser, men òg meir generelle matematiske prosessar. Dette er aktivitetar der algebra vert brukt som eit verktøy, noko som kan gi motivasjon til å engasjere seg i genererande og transformerande aktivitetar. Det kan til dømes vere gjennom problemløysing, modellering, arbeid med å generalisere mønster, bevise og sjå etter relasjonar eller strukturar. Dette er aktivitetar der ein ikkje nødvendigvis treng å bruka formell algebra for å løysa ei oppgåve, og det er ikkje alltid oppgåver der ein skal finne eit svar, men der ein skal visa eller studera til dømes eit mønster (Kieran 2014).

2.4.4 Samanhengar og forskjellar mellom dei ulike rammeverka

I 8. klasse møter elevane for fyrste gong eit kapittel som heiter algebra, sjølv om dei på ulike måtar kan ha møtt algebraisk tenking før. No skal dei bruka kunnskapen dei har lært om aritmetikk, for å løysa algebraoppgåver. Som Kilpatrick (2001) hevdar, krev det ei anna type tenking. Elevane må byrja å tenka algebraisk, i staden for aritmetisk når dei skal løyse oppgåver. Ved å bruka Kieran sin GTG- modell for algebrisk aktivitet, kan ein dela oppgåvene i læreverka inn i tre kategoriar, etter korleis oppgåvene er bygd opp og kva eleven må kunne for å løysa oppgåver innanfor dei tre aktivitetane. Å kunne løysa algebra oppgåver krev ein algebraisk kompetanse. Under algebraisk kompetanse kan vi sjå på forhold mellom forståing og berekning, symbolfølelse og strukturfølelse (Stiphout m.fl, 2013). Dette kan koblast til matematisk kompetanse ved at forståing og berekning er to av Kilpatrick sine komponentar for å utvikla matematisk kompetanse. I tillegg kan symbolfølelse og strukturfølelse knyttast til blant anna symbol- og formalisme kompetanse i Niss sitt rammeverk, og transformerande oppgåver i Kieran sin modell. Dei kan knyttast saman ettersom symbolfølelse handlar blant anna om å kunne lesa symbol, og strukturfølelse blant anna handlar om å kunne arbeida med uttrykk. Kilpatrick har òg ein komponent som han kalla forståing, og Niss sin tankegangskompetanse og symbol- og formalisme kompetanse går ut på å ha forståing for og kunne lage uttrykk. Dette går under både genererande og transformerande aktivitet i GTG- modellen. Mange av desse kompetansane kan ein og finne i Kunnskapsløftet. Ein treng matematisk kompetanse for å kunne forstå prosessar i samfunnet. Likevel kan elevane forstå på ulike måtar når dei arbeider med oppgåver. Dersom dei berre utfører oppgåveløysinga i boka etter slik døme gjer det, og ein eigentleg ikkje forstår kva ein gjer og kvifor, kallar vi det instrumentell forståing. Dersom eleven veit kvifor og kva ein skal gjere, kallar vi det relasjonell forståing. At elevane må utvikla forståing for til dømes omgrep går igjen i alle rammeverka. I tillegg til at elevane må kunne grunnleggande reknereglar og å kunne behandla symbol er sentralt i alle kategoriane til dei tre rammeverka. For å kunna utvikla matematisk kompetanse må elevane arbeida med ulike typar oppgåver som algebraisk aktivitet stimulerer til. Som vi ser har rammeverka mykje felles, men noko er og ulikt. Til dømes har Niss sitt rammeverk hjelpemiddelkompetanse og kommunikasjonskompetanse, noko som vi ikkje finn i rammeverket til Kilpatrick. Kilpatrick har derimot ein komponent han kalla for engasjement, som ikkje er å finne i Niss sitt rammeverk. Som vi ser har alle rammeverka kvar sine kvalitetar som er nødvendig for å analysera oppgåver i algebrakapittelet i denne studien.

3. Metode

Denne studien har som føremål å undersøka to norske læreverk i matematikk, for å finna ut kva for nokon matematiske kompetansar algebrakapittelet legg til rette for. For å gjera detta vert det tatt utgangspunkt i oppgåvene i algebrakapittelet. I dette kapittelet vert det gjort greie val som har vorte tatt, og vanskar eg møtte ved kategorisering av oppgåver. I tillegg vert læreverka som er brukt introdusert. Mot slutten av kapittelet vert det grunngjeve korleis dei tre rammeverka er brukt. Dei tre rammeverka har kvar sine kvalitetar som tar utgangspunkt i ulike ting, men at dei i tillegg har mykje til felles. På slutten vert oppgåva sin reliabilitet og validitet diskutert, samt det forskingsetiske omsynet som er teke i forbindelse med denne studien.

3.1 Lærebokanalyse

I denne studien er det nytta lærebokanalyse, som går under innhaldsanalyse av dokumenter. I følgje Grønmo (2016, s. 175) vil ein i ein innhaldsanalyse gå systematisk gjennom dokument for å finna relevant informasjon ein er ute etter. Vidare hevdar Grønmo (2010, s. 187) at ein innhaldsanalyse kan bestå av både kvantitative og kvalitative data. For å svare på studien si problemstilling, er det valt å bruka ein kombinasjon mellom kvantitativ og kvalitativ metode. Ved å nytta kvantitativ metode kan eg telje oppgåver frå læreverk og plassere dei innanfor ulike kategoriar for matematisk kompetansar og algebraisk aktivitet. På den måten får eg gå gjennom lærebøkene på ein systematisk måte. Dette gjev ein mogelegheit til å sjå korleis dei ulike oppgåvene er fordelt innanfor kategoriar av matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet. Ved å nytta kvalitativ metode gjev det ein moglegheit til å velja ut eit utval av oppgåver som vert analysert nærare, og på den måten vert det drøfta kva kompetanse elevane treng eller kan utvikla ved å arbeide med slike oppgåver. I tillegg til å drøfta kva kategori av algebraisk aktivitet enkelte oppgåver kan stimulera til.

Å gå direkte i lærebøkene som elevane bruka på skulen for å samla inn datamaterial, gjev både fordelar og ulemper. Fordelen er at ein kan undersøkja dei oppgåvene elevane jobbar med på skulen. Forsking har vist at lærebøker er mykje brukt og pregar korleis undervisinga er bygd opp. Ved å berre ta for seg lærebøkene kan ein ikkje sei noko om korleis elevane jobbar med oppgåvene eller om dei jobbar med andre oppgåver. Læraren kan gje dei oppgåver som er henta frå andre ressursar eller gje anna informasjon til elevane om korleis dei skal arbeide med oppgåvene frå læreverka. Å intervjua lærarar og observera matematikkundervisinga til lærarane kunne ein fått eit større bilde på korleis elevane faktisk arbeider med oppgåvene. På den måten kunne ein òg fått innblikk i lærarane sine oppfatningar rundt oppgåvene. Likevel har forsking vist at lærebøkene er ein nyttig ressurs både for elevane og lærarane. Ved å nytta lærebøkene som kjelde for datainnsamling gjev dette ein direkte tilgang til oppgåvene. På den måten kan ein undersøkje den matematisk kompetansen og algebraiske aktiviteten oppgåvene i læreverka legg opp til. I tillegg gjev det mogelegheit til å sjå korleis forfattarane av læreverka presenterer oppgåvene.

3.1.1 Val av lærebøker

I Noreg har vi eit bredt utval av læreverk i matematikk for ungdomsskulen. *KodeX*, *Faktor, Tetra*, *Sirkel* og *Nummer* er nokon av dei. Det var derfor mange moglegheita då eg skulle velje ut berre to. Planen var å velje dei læreverka som var mest brukt i Noreg, men ettersom eg ikkje fann noko tal på dette, vart det gjort eit pragmatisk utval av lærebøker. I følgje Grønmo (2016, s.100) betyr det at læreverka er valt på ein skjønnsmessig måte og ikkje tar sikte for å generalisera. Vala mitt falt derfor på to norske læreverk, Faktor og Tetra.

Tetra er utgjeven av Det Norske Samlaget i 2006, og skreve av May Britt Hagen, Synnöve Carlsson, Karl-Bertil Hake og Birgitta Öberg. Læreverket består av ei elevbok, eit treningshefte, digitale ressursar (D-bok), og ei bok for læraren. Elevboka inneheld differensierte oppgåver, ein leksedel, regelsamling og fasit. Inndeling av kapittel er gjort etter hovudområda i læreplanen. Kvart kapittel har eit innleiande felleskurs for alle elevane. Deretter kjem ein test, som legg grunnlag for kva vanskegrad elevane bør velje i fortsetninga. Dersom «test deg sjølv» er for vanskeleg, vel eleven blått kurs. Då skal eleven, i følgje lærebokforfattarane, få meir øving. Går testen bra, vel ein rødt kurs, der det er meir utfordrande oppgåver, i følgje forfattarane. Treningsheftet er i hovudsak tenkt til dei elevane som treng enklare utfordringar enn det grunnkurset gjev. Dersom det blå kursert er for kort, og kanskje for vanskeleg, skal treningsheftet vere fint å bruke, i følgje lærebokforfattarane. Vidare hevdar dei at elevane får moglegheit til å arbeida med ekstra viktige moment. I Tetra 8 Treningshefte kan elevane skriva rett inn i heftet. I lærarrettleinga til Tetra finn ein arbeidsark, repetisjonsoppgåver, prøvar og grubleoppgåver (Fagbokforlaget, u.d.). Valet mitt falt på dette læreverket fordi eg var kjent med det frå tidlegare praksis, og inntrykket mitt er at mange skular bruker dette læreverket.

Det andre læreverket som er vorte analysert er *Faktor*. Den er skrevet av Espen Hjardar og Jan-Eirik Pedersen, og utgjeven av Cappelen Damm i 2014. Læreverket består av ei grunnbok, ei oppgåvebok, læraren si bok, og nettresursar. Dette læreverket var eg òg kjent med får før av. Den har vorte brukt på skular der eg har hatt praksis. I tillegg brukte eg dette læreverket sjølv då eg gjekk på ungdomsskulen, og dei brukar dette på den skulen eg arbeidar på i dag. Derfor synest eg det var spanande å analysere Faktor. Faktor si grunnbok skal med sin kortfatta tekst og enkelt språk vere tilpassa flest mogleg elevar. Den har tydeleg struktur og differensiering av oppgåver. I tillegg til frie oppgåver. I kvart kapittel er det lærestoff og oppgåver, «prøv deg sjølv», «noko å lure på» og ei oppsummering til kvart kapittel. Oppgåveboka har øvingsoppgåver i tre vanskegradar tilknytt kvart kapittel, i tillegg til repetisjonsoppgåver og oppgåver som skal løysast med digitalt verktøy. Kategori 1 byr på enkle oppgåver som gjev eleven trening i det forfattarane ser på som grunnleggande lærestoffet. Kategori 2 inneheld meir samansette og varierte oppgåver, medan kategori 3 har oppgåver som byr på større utfordringar. I tillegg har læreverket Faktor 8 ein alternativ oppgåvebok. Dette er ei bok elevane kan skrive i, og er tilpasse elevar som treng tilrettelagt opplæring. Oppgåvene er enkle, og inneheld forenkla teori og dømer for løysing av oppgåver (Cappelen Damm, u.d.).

Ettersom eg ville sjå på oppgåver elevane jobbar med i skulen, og på grunn av studiet sitt omfang, er det berre teke utgangspunkt i bøker elevane har tilgang på. Det var derfor praktisk å velje to trykte læreverk. Gjennom studien og i analysen vert lærebøkene presentert med tittel og type læreverk. På den måten vert det lettare å forstå kvar dei ulike oppgåvene er henta frå, samt meir oversiktlege i analysen. Til dømes kjem det til å stå Tetra 8 Elevbok eller Faktor 8 Oppgåvebok. Forfattarane vert ikkje nemnd når eg omtalar læreverka ettersom det tar stor plass. Det er i stor grad dei same forfattarane innanfor kvart læreverk, og det kan vere lett å blanda forfattarar. Derfor vil eg allereie her kreditere forfattarane av lærebøkene. Alle bileta som er brukt i analysen frå desse to læreverka er attgjeven med forlaget sin tillating.

Bøkene som vert analysert er:

Faktor 8 – Grunnbok (Forfattar: Espen Hjardar og Jan-Erik Pettersen)

Faktor 8 – Oppgåvebok (Forfattar: Espen Hjardar og Jan-Erik Pettersen)

Faktor 8 – Alternativ oppgåvebok (Forfattar: Espen Hjardar og Jan-Erik Pettersen)

Tetra 8 – Elevbok (Forfattar: May Britt Hagen, Synnöve Carlsson, Karl-Bertil Hake og Birgitta Öberg)

Tetra 8 – Treningshefte (Forfattar: Eldbjørg Dahl, May Britt Hagen, Synnöve Carlsson, Karl-Bertil Hake, Birgitta Öberg og Anna Teledahl)

3.1.2 Val av emne og trinn

Då eg hadde valt læreverk, vart det teke stilling til kva for eit klassetrinn og kva for eit matematisk tema studien skulle ta utgangspunkt i. Ettersom eg har fullført grunnskulelærarutdaninga for 5.-10. trinn vart det naturleg for meg å velja eit klassetrinn innanfor desse trinna. I denne studien vert det lagt vekt på matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet. Ved å velja algebraisk aktivitet avgrensa eg meg i stor grad til ungdomsskulen. Valet falt dermed på 8. trinn, ettersom dette er elevane sitt fyrste møte med algebra. TIMMS studiar har òg vist at norske elevar prestera relativt lågt i emnet algebra, i forhold til andre emneområder. Eg tykkjer derfor det er interessant å kunne gå inn i lærebøkene elevane bruker på skulen, og undersøke kva for ein matematisk kompetanse oppgåvene kan gi elevane.

Læreplanen i matematikk inneheld kompetansemål elevane skal ha tileigna seg etter 2., 4., 7., og 10. trinn. Etter å har fullført 7. årstrinn skal elevane ha kompetanse innan *tal og algebra, geometri, måling og statistikk og sannsyn.* Dei same hovudområda gjeld for 10.trinn, men i tillegg er *funksjonar* ein del av kompetansemåla (Kunnskapsdepartementet, 2013). Denne studien er avgrensa til hovudområdet *tal og algebra.* I 2017 starta arbeidet med å fornya læreplanane i skulen, slik at dei vert meir relevante for framtida. I løpet av dette året er kjerneelementa i fagfornyinga vorte jobba med. Det omhandlar det viktigaste elevane skal læra i kvart fag. I løpet av 2019 skal dei nye læreplanane utviklast. Skulane skal forbereda seg på at dei nye læreplanane vert sett i kraft frå hausten 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2019). Ved innføring av den nye læreplanen skal elevane får meir forståing for faget, gjennom å jobba meir med metode og tenkjemåte. Å kunna handtera tal og ha forståing for tal vert rekna som grunnmuren i matematikk på grunnskulen, og for det dei skal lære vidare i matematikk (Kunnskapsdepartementet, 2018b). Tal og algebra går dermed mykje på grunnleggande ferdigheiter som elevane treng. Derfor tykkjer eg at dette er eit viktig emne å setja seg inn i. I tillegg er tydeleggjøringa av dei grunnleggjande ferdigheitane og hovudområdet *tal og algebra* styrka i den nye læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2015).

3.2 Gjennomføring av prosjektet

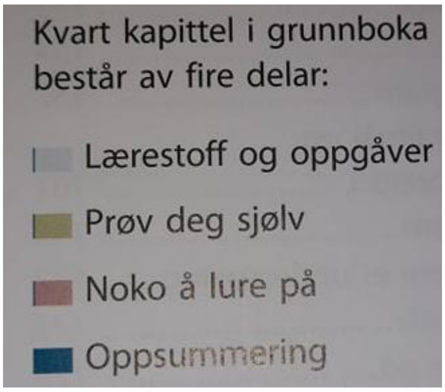
3.2.1 Oversiktsanalyse

Etter å ha valt lærebøker, trinn og emne, ville eg skaffa meg ein oversikt over læreverka. Ein slik oversiktsstudie har ikkje ein tilknyting til matematisk kompetanse eller algebraisk aktivitet, som denne studien handlar om. Det var likevel sett på som viktig å ta med for å vise kva moglegheiter læreverka gjev. I tillegg var det nyttig for meg for å finne ut kva eg skal analysera i algebrakapittelet. Då er det relevant å ha ei oversikt over korleis bøkene er strukturert og kor algebraoppgåvene er plassert. Denne studien tar for seg grunnbok, oppgåvebok og alternativ oppgåvebok i læreverket Faktor, og elevbok og treningsheftet i Tetra. Begge læreverka har òg andre tilleggskomponentar. Dei vert nemnt, men ikkje gått i djubna på. På grunn av tid og plass vart dei ovannemnte bøkene i læreverka valt, ettersom av erfaring er det desse bøkene elevane har tilgang på og som elevane oftast arbeider med. Ved å gjere ein oversiktsanalyse fekk eg eit innblikk i rekkefølgja på kapitla, og korleis emna er organisert. Til dømes er rekkjefølgja på kapitla i dei to læreverka ulik. Kapittelet som handlar om algebra er nummer seks i Faktor, medan det er nummer 3 i Tetra. I kapitla som omhandlar algebra vil eg gå grundigare inn i og sjå på overordna faktorar som oppbyggjing av kapittelet og rekkjefølgja på tema som vert presentert. Begge læreverka nivådeler oppgåver etter eit felles lærestoff og oppgåver. Eg vil derfor òg undersøkje forskjellen på oppgåvene som er nivådelte, for å sjå om elevane får utvikla andre områder for matematisk kompetanse dersom dei vel oppgåver som skal vere meir utfordrande. Det vert og sett på andre faktorar som grunnboka og elevboka tilbyr, som til dømes grubleoppgåver, frioppgåver, spel og utfordringar.

For 8-10 trinn er det for matematikkfaget utvikla fem hovudområder. Desse er: *tal og algebra, geometri, måling, statistikk, sannsyn og kombinatorikk, og funksjonar*. Kompetansemål er formulert for kvar av dei fem hovudområda (Kunnskapsdepartementet, 2013). I Faktor 8 er heiter kapittelet *tal og algebra*, medan i Tetra heiter det *algebra*. Begge læreverka har eit kapittel som handlar om *tal* i tillegg. Grunnen til at lærebokforfattarane til Faktor har kalla kapittelet *tal og algebra* kan vere fordi «algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall», og fordi tal og algebra er ein av dei fem hovudområda. Forfattarane av Tetra har kalla kapittelet *algebra*. Det kan tenkjast å ha vorte gjort slik fordi det er underforstått at algebra òg omfattar bruk av tal og forståing av tal. Det kan òg vere grunnen til at begge læreverka har eit kapittel om *tal* som kjem før algebra. Eg har valt å analysere heile kapittelet som handlar om algebra i kvar av læreverka. Det vart gjort fordi at når ein såg nærare inn i kva kapitla innehaldt, såg ein mykje det same. Til dømes inneheld begge læreverka oppgåver som omhandlar taluttrykk og reknerekkefølgje.

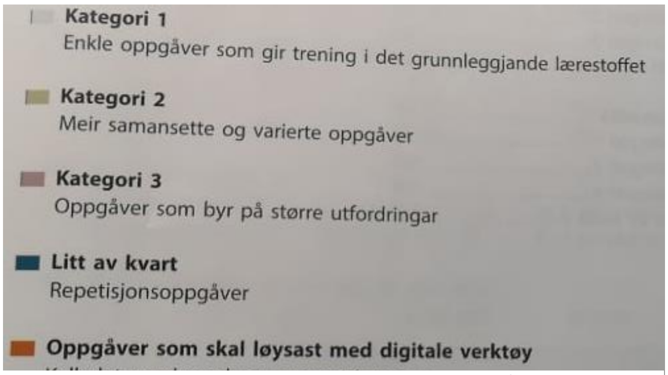
3.2.2 Faktor

Faktor er eit læreverk som skal hjelpa elevane å nå måla for matematikkfaget på ungdomstrinnet. I denne studien er det 8.trinn sine lærebøker som er fokuset. Lærebøkene som er analysert er Faktor 8 Grunnbok, Faktor 8 Oppgåvebok og Faktor 8 Alternativ oppgåvebok. I Grunnboka starter kapittelet med ein introduksjon som består av ei teikning, ein liten tekst og mål for kva eleven skal lære i dette kapittelet. Kvart kapittel er delt opp i fire delar, sjå figur til 3.1. Under «lærestoff og oppgåver» finn ein introduksjon av lærestoff, reglar og dømer for kvart underkapittel. I tillegg til oppgåver. «Prøv deg sjølv» - oppgåvene er laga for å tydeleggjere måla for kapittelet. Til slutt finn ein «noko å lure på» og ei oppsummering av lærestoffet. Under «lærestoff og oppgåver» finn ein i tillegg unummererte oppgåver . I læraren si bok står det at desse oppgåvene er godt eigna til diskusjonar eller gruppearbeid. Nokon av dei har gjerne fleire løysingar, skal løyast på PC eller saman med andre, eller oppgåvene er meir utfordrande enn dei andre oppgåvene (Hjardar & Pedersen, 2014). Oppgåver som er meir utfordrande vil i denne studien vorte rekna som oppgåver som går under andre delkompetansar og komponentar enn symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse, og forståing og/eller berekning (sjå kvantitativ analyse).



Figur 3.1: Kapitteloppbygging i Faktor 8 Grunnbok, side 3

Til grunnboka høyrer det ei oppgåvebok. Her finn ein øvingsoppgåver på tre ulike nivå, i tillegg til repetisjonsoppgåver. Bakerst i boka finn ein eit oppgåvesett som skal løyast ved hjelp av digitale hjelpemiddel. Desse oppgåvene er ikkje tatt med i analysen av lærebøken, ettersom dei ikkje direkte høyrer til algebrakapittelet.



Figur 3.2 Oversikt over kategoriane i Faktor 8 Oppgåvebok, side 3

I tillegg til grunnbok og oppgåvebok, har Faktor 8 ei alternativ oppgåvebok. Denne boka inneheld oppgåver til kvart kapittel i grunnboka, og elevane kan skrive direkte inn i boka. I tillegg introduserer denne boka lærestoff på same måte som Grunnboka gjer, berre med mindre tekst og ei enklare framstilling. Alle oppgåvene er vist med eit døme. Denne boka er tilpassa dei elevane som synest at lærestoffet og oppgåvene i Grunnboka er vanskeleg. For kvart underkapittel er det vist til tilsvarande lærestoff i grunnboka. Når elevane har rekna seg gjennom eit kapittel, kan dei fortsetje å løyse oppgåver i Grunnboka eller gjere oppgåver under kategori 1 i oppgåveboka.

Nedanfor er det vist ein tabell over underoverskrifta i dei tre ulike lærebokene som er vorte analysert. Her ser vi at dei har dei same overskrifta i alle tre bøkene. Dette gjer det lett for elevane å finne tilbake til lærestoffet i grunnboka når dei til dømes jobbar med oppgåveboka. Det kan òg hende at nokon elevar synes at oppgåvene om taluttrykk går lett, og ynskjer å arbeide med vanskelegare oppgåver her, men igjen treng enklare oppgåver når eleven ska arbeide med likningar. At alle underoverskriftene er like, gjer det lettare å hoppe mellom dei ulike kategoriane i oppgåveboka, eller frå alternativ oppgåvebok til grunnboka.

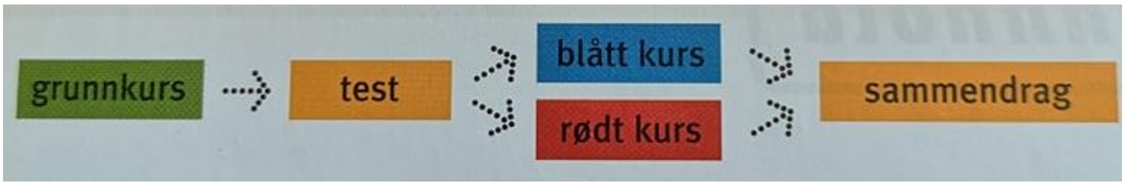
Grunnbok	**Oppgåvebok**	**Alternativ oppgåvebok**
Kapittel 6. Tal og algebra • Taluttrykk • Uttrykk med variablar • Setje inn tal i uttrykk • Rekning med bokstavuttrykk • Likningar - Å løyse likningar ved hjelp av addisjon og subtraksjon - Å løyse likningar ved hjelp av multiplikasjon og divisjon - Å setje prøve på likningar • Prøv deg sjølv • Noko å lure på • Oppsummering	Kapittel 6. Tal og algebra • Kategori 1 - Taluttrykk - Uttrykk med variablar - Setje tal inn i uttrykk - Rekning med bokstavuttrykk - Likningar • Kategori 2 - Taluttrykk - Uttrykk med variablar - Setje tal inn i uttrykk - Rekning med bokstavuttrykk - Likningar • Kategori 3 - Taluttrykk - Uttrykk med variablar - Setje tal inn i uttrykk - Rekning med bokstavuttrykk - Likningar	Kapittel 6. Tal og algebra • Taluttrykk • Uttrykk med variablar • Setje tal inn i uttrykk • Rekning med bokstavuttrykk • Likningar

Tabell 3.1: Oversikt over underoverskrifter i Faktor 8 Grunnbok, Oppgåvebok og Alternativ oppgåvebok

For kvart trinn på ungdomsskulen tilbyr læreverket fleire komponentar enn dei som er nemnt over. I tillegg til Grunnbok, Oppgåvebok og Alternativ oppgåvebok, har læreverket ei bok for læraren og ein nettstad. Læreverket tilbyr òg tilleggskomponentar; fordjupningshefte, eksamensførebuande hefte, reglehefte og tavlebok (digital versjon av grunnboka). I tillegg tilbyr dei Faktorama (nettstad) og temahefter til øving av grunnleggjande ferdigheiter (Hjardar og Pedersen, 2014)

3.2.3 Tetra

Tetra Elevbok er ei komplett lærebok med både grunnkurs med oppgåver, og ein kursdel med oppgåver i to ulike vanskegradar. Tetra er eit læreverk for ungdomstrinnet. I denne analysen er Tetra 8 Elevbok undersøkt, samt Tetra 8 Treningshefte. Kvart kapittel i Tetra 8 Elevbok bygd opp som vist i figuren nedanfor:



Figur 3.3 Kapitteloppbygging i Tetra 8 Elevbok, side 3

Kvart kapittel er innleia med to sider som skal inspirera eleven til å nå måla for kapittelet. Måla er òg presentert på desse to sidene. I grunnkurset finn vi lærestoff og oppgåver som skal gjenspegla måla for kapittelet. Nokon oppgåver i grunnkurset er merka med ei stjerne rundt oppgåvenummeret. I læreboka står det at dette er oppgåver som krev litt meir tankeverksomheit. I slutten av grunnkurset er det ei oppgåva som skal løysast på PC. På den måten skal elevane få øving i å vurdera når PC er eit eigna hjelpemiddel. Undervegs i kapittelet er det oppgåver som er merka «samarbeid». Desse skal gjerast i lag med andre elevar. Slike oppgåver vert undersøkt for seg sjølv, då desse ofte fell under andre kategoriar for matematisk kompetanse. Dette er oppgåver som vert framheva av lærebokforfattarane då dei ikkje er merka med oppgåvenummer, men heller eigne overskrifter. Etter grunnkurset finn ein «sant eller usant?» - oppgåver. Desse er i følgje læreboka meint som ein rask repetisjon av det ein har lært gjennom grunnkurset, før testen. Oppgåvene under «test deg sjølv» er meint som ein peikepinn på kva for eit kurs eleven bør velje. Dersom «test deg sjølv» - oppgåvene er for vanskeleg, treng eleven meir øving og bør velja blått kurs. Eleven vel raudt kurs dersom «test deg sjølv» går bra. I raudt kurs får eleven arbeide med meir utfordrande oppgåver og nokon nye emne (sjå tabellen nedanfor). Til blått og raudt kurs er det eigne mål. Oppgåver som er nivådifferensierte vert òg analysert for seg sjølv for å sjå om det dei ulike kategoriane, både i Faktor og Tetra, legg vekt på dei same områda innanfor matematisk kompetanse eller om elevane som vel vanskelegare kurs/kategori får jobba med andre områder for matematisk kompetane enn dei som vel lettare kurs/kategoriar. Til slutt i kapittelet i Tetra 8 Elevbok finn ein eit «samandrag» som repeterer hovudpunkta i kapittelet. Dersom elevane treng noko ekstra å bryna seg på, er det «grublis»- oppgåver etter testen, og «utfordring» etter samandraget. I tillegg finn ein «Abels hjørne» på slutten av raudt kurs. Dette er oppgåver som er henta frå Abel-konkurransen. Oppgåver som er merka «grublis», og andre oppgåver som vert framheva av lærebokforfattarane vert analysert for å sjå om dei stimulerer til andre aktivitetar enn dei oppgåvene som eleven møter i grunnkurset. Til kvart kapittel finner vi 3-5 lekser lengre bak i boka. Algebrakapittelet har 5 lekser. Oppgåvene i leksa er delt inn i oppgåver frå grunnkurset og frå raudt og blått kurs. Bakerst i læreboka finn vi verktøykassen, som er ein oppslagsdel der eleven kan finne tips til blant anna rekneoppstillinga, hovudrekning og omrekning av einingar. I tillegg til fasit for kvart kapittel (Dahl m.fl, 2008).

Tetra 8 Treningshefte er rekna som eit tillegg til læreboka, og er tenkt til dei elevane som treng enklare utfordringar enn det grunnkurset gjev. I tillegg til der det blå kurset er for kort og eventuelt for vanskeleg. Hensikta med heftet er å samla nokon få, men grunnleggande hovudpunkt som kan auka forståinga til elevane. I treningsheftet finn ein enklare forklaringar, og mindre tekst. Elevane kan skriva rett inn i boka (Dahl m.fl, 2008). Kvar bok i kvart læreverk vert analysert for seg sjølv i den kvantitative delen av analysen. I den kvalitative delen av analysen vert det gjeve dømer frå oppgåver i lærebøkene.

Nedanfor er det vist ein tabell for underoverskriftene ein finn i dei to lærebøkene til Tetra. Som vi ser er ikkje underoverskriftene like frå grunnkurset til blått og raudt kurs. Dette fordi oppgåvene skal legga til rette for elevar med ulik forståing. Ein ser òg at underoverskriftene i treningsheftet er ulike, men at ein finn igjen dei same momenta i Tetra 8 Elevbok. I den kvantitative analysen vert det sett om oppgåvene i dei to kursa stimulerer til dei same algebraiske aktivitetane, og om oppgåvene legg til opp til at eleven får utvikla fleire områder for matematisk kompetanse i raudt kurs enn i blått kurs.

<table>
<tr><th>Elevbok</th><th>Treningshefte</th></tr>
<tr><td>Kapittel 3. Algebra
Grunnkurs:
- Uttrykk med fleire rekneartar
- Uttrykk med ein variabel
- Uttrykk med fleire variablar
- Tolking av uttrykk
- Finn riktig uttrykk
- Uttrykk med variablar og tal
- Botntal
- Multiplikasjon med variablar
- Å finne tallmønster: fyrstikkfigurer
- Å finne tallmønster: personar rundt eit bord
- Sant eller usant
- Test deg sjølv

Blått kurs:</td><td>Kapittel 3. Algebra
• Fleire rekneartar
• Å rekna med bokstavar for tall
• Forenkling
• Frå bokstav til tall
• Å tolke og skrive uttrykk
• Verdien av eit uttrykk
• Multiplikasjon av variablar
• Test deg sjølv</td></tr>
</table>

- Uttrykk med bokstaver - Uttrykk kan forenklast og gis ein verdi - Tolking av uttrykk - Multipliksjon med variablar - Fleire fyrstikker - Mønster i talfølger Rødt kurs: - Ein variabel - Uttrykk med ulike variablar - Verdien av eit uttrykk - Meir om multipliksjon av variablar - Mønster i tallfølger - Fleire fyrstikker Lekse 9-13 Algebra	

Tabell 3.2: Oversikt over underoverskrifter i Tetra 8 Elevbok og Treningshefte.

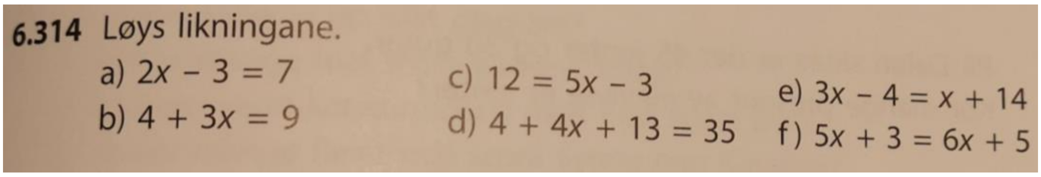
I tillegg til Tetra 8 Elevbok og Tetra 8 Treningshefte tilbyr læreverket fleire komponentar for kvart årstinn på ungdomsskulen. Læreverket består blant anna av ei d-bok for både elevboka og treningshefte, som er ein digital versjon av papirutgåva. I tillegg har læreverket Tetra 8 ei lærarrettleiing der ein finn arbeidsark til alle kapittel, pluss repetisjonsoppgåver, prøver (inkl. fasit) og fleire «grublisar». Læreverket har òg eit fagnettstad (tetra.fagbokforlaget.no) som er tilgjengeleg for alle. Her finn ein ulike ressursar og oppgåvestoff frå kvart emne i matematikk (Fagbokforlaget, u.d).

3.2.4 Pilotprosjekt

Før eg gjekk i gang med å analysere heile kapittelet som handla om algebra, bestemte eg meg for å gjennomføre eit pilotprosjekt for analysering av oppgåver. Eg valte tilfeldig ut oppgåver får Tetra 8 Elevbok, Faktor 8 Grunnbok, Tetra 8 Treningshefte og Faktor 8 Oppgåvebok. Til saman analyserte eg ca 60 oppgåver i pilotprosjektet. Dette gav meg mogelegheit for å sjå kva for nokon matematiske kompetansar som var gjennomgåande for det kapittelet, og sjå kva for ein algebraisk aktivitet flest oppgåver stimulerte til. Ved å gjennomføre eit pilotprosjekt fekk eg eit innsyn i korleis oppgåvene er utforma, og eventuelle vanskar som skulle dukke opp. På den måten kunne eg gjere endringar på metoden allereie i denne fasen. I det neste avsnittet vil eg gjere greie for problema eg møtte ved å kategorisera oppgåvene i læreveka.

3.2.5 Vanske ved kategorisering av oppgåver

Før eg byrja å kategorisera oppgåver, måtte eg ta stilling til kva eg skulle definere som ei oppgåve. I lærebøka er det fleire oppgåver som består av deloppgåver. Til dømes har oppgåve 6.312 i Faktor 8 Oppgåvebok seks deloppgåver, merka som *a, b, c, d, e* og *f* (sjå figur 3.4).



6.314 Løys likningane.

a) $2x - 3 = 7$

b) $4 + 3x = 9$

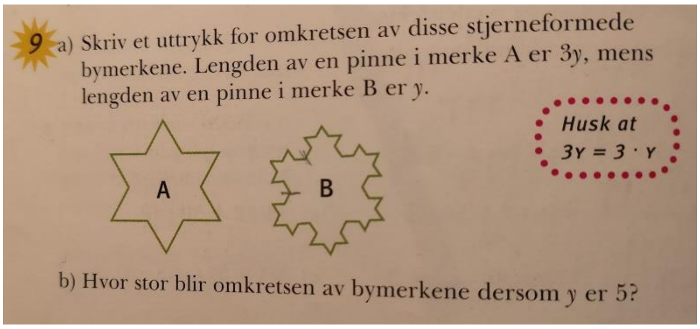
c) $12 = 5x - 3$

d) $4 + 4x + 13 = 35$

e) $3x - 4 = x + 14$

f) $5x + 3 = 6x + 5$

Figur 3.4 Oppgåve 6.314 i Faktor 8 Oppgåvebok, s. 129



9 a) Skriv et uttrykk for omkretsen av disse stjerneformede bymerkene. Lengden av en pinne i merke A er $3y$, mens lengden av en pinne i merke B er y.

b) Hvor stor blir omkretsen av bymerkene dersom y er 5?

Figur 3.5 Oppgåve 9 i Tetra 8 Grunnbok, grunnkurs, side 90

Dette er deloppgåver som ikkje har nokon relasjon til kvarandre. Ein finn òg oppgåver som har fleire deloppgåver, som heng saman og der ein må løyse *a* for å kunne løyse *b*. Slik som i oppgåve 9, henta frå Tetra 8 Elevbok (sjå figur 3.5). Her må elevane fyrst skrive eit uttrykk for omkretsen av figurane A og B (*a*), og deretter rekne ut omkretsen når dei får oppgjeve kva den ukjente er (*b*). I deloppgåve *b* må dei bruke det uttrykket dei kom fram til i *a*. Eg vurderte fyrst å rekne alle deloppgåvene som ei oppgåve, ettersom dei ulike deloppgåvene kan innehalde fleire kategoriar av matematisk kompetanse. Dette vart revurdert då eg såg at det kan gjere at fordelinga av oppgåver mellom dei like kategoriane, kan gje eit feilaktig resultat. Til dømes ville då oppgåve 6.314 i Faktor 8 Oppgåvebok gje seks oppgåver, som går under same kategori for matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet. Medan oppgåve 9 i Tetra 8 Elevbok vil kun gje to oppgåver. Eg valte derfor å telle alle deloppgåvene under ei oppgåve, som ei oppgåve. Til dømes vert då oppgåve 6.314 frå Faktor 8 Oppgåvebok og oppgåve 9 frå Tetra 8 Elevbok rekna som ei oppgåve. Gjennom pilotprosjektet vart eg då gjort merksam på at mange oppgåver vil gå under to eller fleire kategoriar for matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet. Dette gjeld for alle rammeverka som er brukt i denne studien.

Som sagt, inneheld begge læreverka oppgåver eller ulike aktivitetar som ikkje er nummererte. Alle desse oppgåvene vert tatt med i analysen, då dei vert rekna som oppgåver av læreverka. Oppgåver som ikkje er nummererte er blant anna frioppgåver i Faktor og samarbeidsoppgåver og PC- oppgåver i Tetra.

3.3 Matematisk kompetanse

Gjennom oversiktsstudien og pilotprosjektet fekk eg ein oversikt over oppgåvene og utforminga på oppgåvene i lærebøkene. I dei to neste delkapitla vert det vist kva for nokon kriterier som er brukt for rammeverka til Niss og Kilpatrick, i tillegg til døme frå oppgåver som er plassert under dei ulike delkompetansane og komponentane. Oppgåvene som vert vist kan gå under fleire komponentar og delkompetansar, men her vert det berre forklart kvifor oppgåva går under den spesifikke kategorien.

3.3.1 Kilpatrick sitt rammeverk for matematisk kompetanse

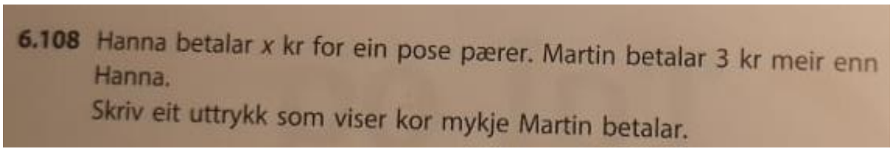
Kilpatrick utvikla fem komponentar som han meinte måtte utviklast parallelt for at elevane skal få utvikla den matematiske kompetansen sin. I dette avsnittet vert kriteriene for kvar kategori skildra og det vert gjeve døme frå oppgåver som går under kvar kategori. Kriteriene vart utvikla på grunnlag av Kilpatrick m.fl (2001) sin skildring av kategoriane.

Forståing

Den fyrste komponenten i rammeverket til Kilpatrick for matematisk kompetanse er *forståing*. Denne komponenten handlar å kjenne omgrep og reglar som gjeld for matematikken. Det inneberer blant anna å kunne veksle mellom ulike representasjonar. Oppgåva i figur 3.6 er henta frå kategori 1 i Faktor 8 Oppgåvebok. Denne oppgåva er plassert under *forståing* ettersom eleven må lage eit uttrykk som representerer ein situasjon. Det vart tatt eit val om å plassere slike oppgåver under *forståing* ettersom Kilpatrick hevdar at å kunne veksle mellom og bruke ulike representasjonar går under denne komponenten.

Kriterier for komponenten *forståing:*

- Oppgåver der elevane må kjenne til omgrep og reglar som gjeld for matematikken og kunne bruke dei.
- Oppgåver der elevane må bruke og veksle mellom ulike representasjonar (t.d. tekstoppgåve -> algebraisk uttrykk)
- omgrepsforståing – relatera nye ting ein lærer til det ein allereie kan frå før av (til dømes bruke noko dei lærte i eit anna kapittel i lag med det dei har lært i dette kapittelet).
- Dette inkluderer blant anna:
  - Lage uttrykk (taluttrykk, bokstavuttrykk)
  - Omgrep som ukjent, variabel, likskapsteiknet
  - Oppgåver der elevane må bytte mellom ulike representasjonar


6.108 Hanna betalar *x* kr for ein pose pærer. Martin betalar 3 kr meir enn Hanna.
Skriv eit uttrykk som viser kor mykje Martin betalar.

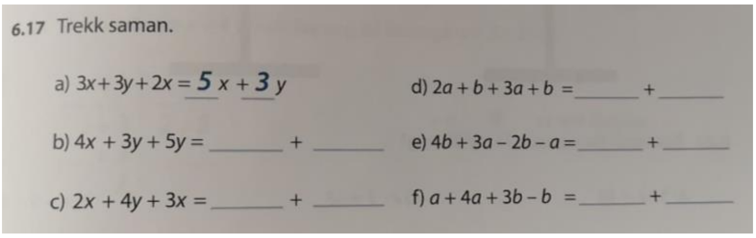
Figur 3.6: Oppgåve 6.108 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 1, side 120

Berekning

Kriterier for komponenten *berekning*:

- bruke ulike prosedyrar (reknereglar, formlar og algoritmar), utføre dei fleksibelt og veksla mellom dei som er mest hensiktsmessig for den oppgåva
- forstå kva for ein prosedyre som er best egna til å løysa oppgåva
- grunnleggande rekning (reknerekkefølgje)
- Dette inkluderer blant anna:
  - Løysa likningar
  - «rekn ut» oppgåver
  - «trekk saman» oppgåver/samle like uttrykk
  - Rekne ut omkrins/areal
  - Fyll inn tal som manglar i likningar
  - Undersøkje om eit tall er løysinga på likninga

Den andre komponenten i rammeverket til Kilpatrick er *berekning*. Denne komponenten handlar om å kunne bruke ulike prosedyrar. Her vart det tatt eit val om å plassere oppgåver der eleven må nytta reknereglar, formlar og algoritmar. Dette inkluderer blant anna å løysa likningar og typiske «rekn ut»- og «trekk saman» -oppgåver. Oppgåva vist i figur 3.7 er henta frå Faktor 8 Alternativ oppgåvebok. Her ser vi at elevane skal skrive rett inn i boka, og at døme på korleis eleven skal løyse oppgåva er vist i deloppgåve a. Dette er ei typisk «trekk saman»- oppgåver, der ein skal rekne med bokstavuttrykk. Ein ser òg at oppgåva krev to bokstavuttrykk ettersom etter likskapsteiknet er det ein strek eleven skal skrive på. Etterfylgt av eit plussteikn og eit ny strek. På den måten kan det verte klarare for eleven at ein ikkje kan trekke saman bokstavuttrykk som har ulik variabel. Denne oppgåva går under *berekning* i Kilpatrick sitt rammeverk, ettersom eleven må bruke reglar som gjeld for bokstavrekning, og fordi eleven må ha kunnskap om grunnleggande rekning.


6.17 Trekk saman.

a) $3x + 3y + 2x = 5\,x + 3\,y$
b) $4x + 3y + 5y =$ ___ + ___
c) $2x + 4y + 3x =$ ___ + ___
d) $2a + b + 3a + b =$ ___ + ___
e) $4b + 3a - 2b - a =$ ___ + ___
f) $a + 4a + 3b - b =$ ___ + ___

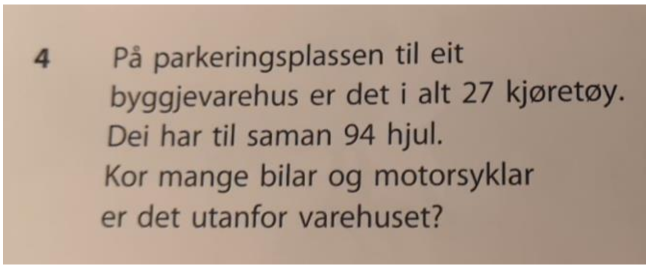
Figur 3.7: Oppgåve 6.17 i Faktor 8 Alternativ Oppgåvebok, side 79

Anvendelse

Kriterier til komponenten *anvendelse*:

- Kunna formulera matematisk problem, og løysa dei
- Problemløysing og problemformulering
- laga strategiar for korleis ein kan løysa eit matematisk problem (problem frå kvardagen og på skulen (ofte ferdigformulerte problem))
- kunna vurdera løysing
- Dette inkludere blant anna:
  - Legga merke til relasjonar/strukturar/mønster
  - Ikkje-rutineproblem (oppgåver som ikkje kan svarast ved å bruka rutineferdigheit eller standardalgoritmar
  - Kan løysast algebraisk eller ved «gjett og sjekk»
  - Proporsjonalitet
  - Modelleringsoppgåver (lesa av graf, samanlikning av mobilabonnement, osv)

Komponenten *anvendelse* handlar om å kunne formulera, representera og løysa matematisk problem. Under denne komponenten vart det tatt eit val om å plassera oppgåver som ikkje kan løysast ved å nytta seg av rutineferdigheiter eller standardalgoritmar. Oppgåva i figur 3.8 er henta frå Faktor 8 Grunnbok, «Noko å lure på». Grunnen til at denne oppgåva er plassert under *anvendelse* er fordi oppgåva kan løysast algebraisk eller ved «gjett og sjekk» - metoden. Elevane har ikkje lært å sette opp å rekne ut likningssett, så for ein elev i 8.klasse er dette ei oppgåve som gjerne ikkje kan løysast ved å bruke rutineferdigheiter eller standardalgoritmar. På den måten må eleven sjølv lage ein strategi for korleis han kan løyse oppgåva. Under denne komponenten vart det òg tatt eit val om å plassera oppgåver som går på å arbeide med strukturar og relasjonar, som til dømes talfølgjer og mønster.


4 På parkeringsplassen til eit byggjevarehus er det i alt 27 kjøretøy. Dei har til saman 94 hjul. Kor mange bilar og motorsyklar er det utanfor varehuset?

Figur 3.8 Oppgåve 4 i Faktor 8 Grunnbok, "Noko å lure på", side 202

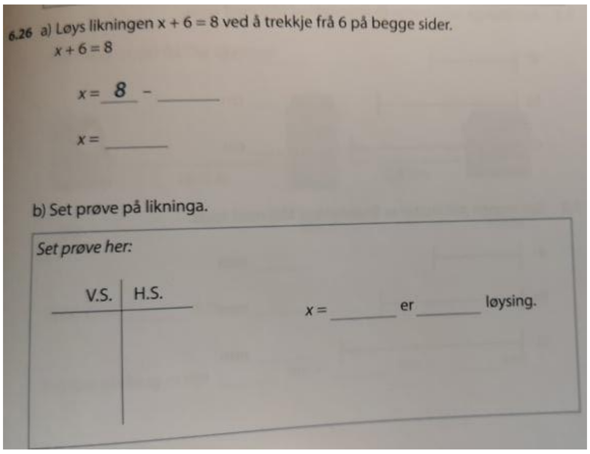
Resonnering

Den nest siste komponenten i rammverkert til Kilpatrick for matematisk kompetanse er *resonnering*. Denne komponenten innebærer å kunne tenkja logisk, kunne sjå og forklara samanhengar mellom ulike matematisk omgrep. I tillegg handlar den om å kunne reflektera og argumentera for matematiske resonnement. Kriterier for denne komponenten er vist nedanfor. Det vart tatt val om å plassera oppgåver der eleven må forklara det dei har gjort, det dei skal gjere, eller korleis dei tenkte når dei løyser oppgåva. I tillegg er oppgåver der eleven skal undersøkje om eit svar er rett.

Kriterier for komponenten *resonnering*:

- kunne tenkja logisk
- reflektera og argumentera for eigen matematiske resonnement og forklara til andre
- oppgåver der elevane må forklara og grunna val av strategiar og framgangsmåte
- kunna bruka ny kunnskap i lag med tidlegare lært kunnskap, og sjå samanhengen mellom matematisk fakta, prosedyrar, omgrep og løysingmetodar
- Dette inneberer blant anna:
    - Oppgåver der eleven vert bed om å forklara, begrunna eller bevisa
    - Oppgåver der elevane må forklara korleis dei tenkjer (skriftleg eller munnleg)
    - Oppgåver der elevane må bruke omgrep eller kunnskap dei har lært tidlegare, i lag med algebra for å løyse oppgåva
    - Oppgåver med mønster der elevane må forklare kva dei vil gjere for å laga neste figur
    - Algebrapyramide
    - Oppgåver der elevane vert bed om å undersøkje om eit svar er rett

Oppgåva i figur 3.9 er henta frå Faktor 8 Alternativ Oppgåvebok. Denne er plassert under *resonnering* i rammeverket til Kilpatrick ettersom det vart tatt eit val om å plassere oppgåver der elevane skal setje prøve på likningar under denne komponenten. I ei slik oppgåve skal eleven sjekke om utrekninga av likninga er rett. Ettersom elevane som løyser desse oppgåvene går i 8.klasse vert det sett på som ei grunngjeving for at likninga er riktig.



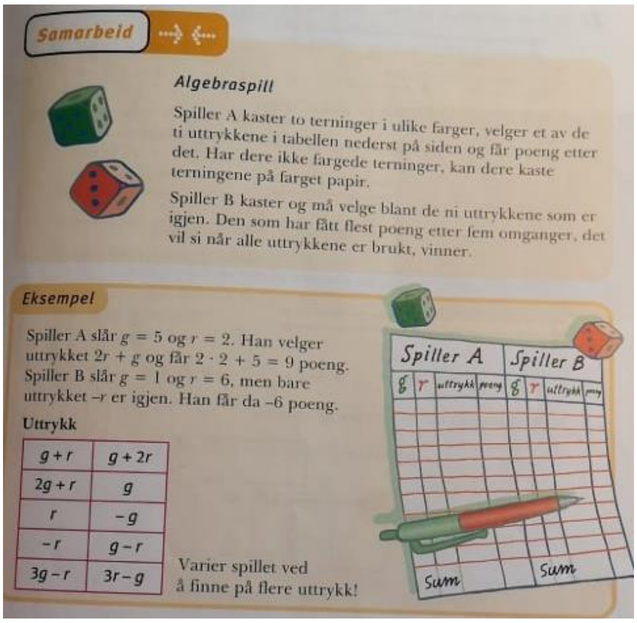
Figur 3.9: Oppgåve 6.26 i Faktor 8 Alternativ Oppgåvebok, side 81

Engasjement

Den siste komponenten til Kilpatrick, kallar han engasjement. Dette er ein komponent som kan vere vanskeleg å finne i ei lærebok. Kva elevane føler om matematikkfaget kan ikkje denne studien seie noko om. Det vart likevel tatt eit val om å plassera oppgåver som vert framheva av lærebokforfattaren under denne kategorien. Oppgåva i figur 3.10 er eit algebraspel, der to elevar skal samarbeide. Spelet er henta frå Tetra 8 Elevbok. Denne er plassert under kategorien *engasjement* fordi det er eit spel, der elevane jobbar med algebra, utan å løyse typiske «rekne» oppgåver. Det vart tatt eit val om å plassere desse oppgåvene under *engasjement*. Dette gjeld alle oppgåver som ikkje er nummererte, men heller merka med til dømes

Kriterier for komponenten *engasjement:*

- inkluderer å sjølv tru ein kan verte god i matematikk og at arbeide ein legg til grunne bidrar til læring.
- Sjå matematikk som meiningsfult, verdifult og som eit nyttig fag
- Dette inkluderer blant anna:
  - Oppgåver som elevane kan relatera til kvardagen sin
  - Oppgåver som vert framheva av lærebokforfattaren (samarbeidsoppgåver, frioppgåver, grubleoppgåver, pc-oppgåver



Figur 3.10: «Samarbeid» i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 93

«grublis», «noko å lure på», «utfordring», frioppgåve, PC- oppgåver, samarbeidsoppgåver. Altså oppgåver som er meint for å skapa interesse for faget. Det er òg viktig å poengtere at dette kan vera individuelt.

3.3.2 Kompetansemodellen til Niss

I rammverket til Niss m. fl. er det åtte kompetansar, og dermed åtte kategoriar innanfor matematisk kompetanse. Desse 8 delkompetansane hevdar Niss at eleven må arbeida med for å ha mogelegheit til å utvikla matematisk kompetanse. Ved å analysera eit kapittel i eit læreverk, vil ein kanskje ikkje møte på alle dei matematiske delkompetansane i like stor grad. For å lage kriterier til kvar av delkompetansane vart det tatt utgangpunkt i Niss m.fl (2002) sin skildring av delkompetansane. I dette delkapittelet vert kriteriene presentert, samt døme på ei oppgåve som illustrerer kva som høyrer under dei enkelete kategoriane.

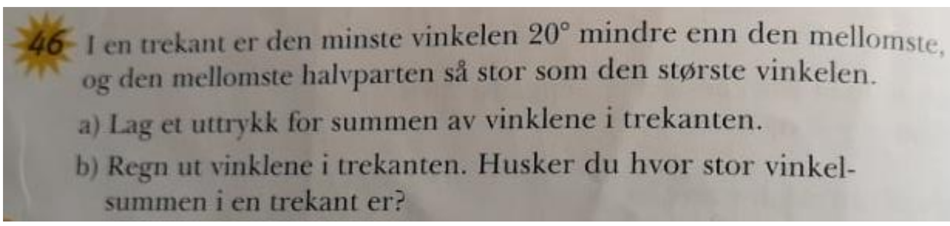
Dei fire fyrste delkompetansane; tankegangs-, problembehandlings-, modellerings-, og resonneringskompetansen handlar om spørsmål og svar i matematikken.

Tankegangskompetanse

Tankegangskompetansen handlar om å kunne stille spørsmål og ha innblikk i kva svar ein kan forventa. Dette kan fyrst og fremst sjåast ved dialog mellom lærar og elev. Den handlar likevel om å kunna handtera matematiske omgrep, og formulera eigne problem og hypotesar. Oppgåva i figur 3.11 er plassert under *tankegangskompetanse* fordi elevane må kjenne til vinkelsummen i ein trekant. Dette er ikkje oppgjeve i oppgåva eller i algebrakapittelet. Dermed må eleven bruke gamal og ny kunnskap saman, for å løyse oppgåva. Denne delkompetansen har nær tilknyting til

Kriterier for *tankegangskompetanse*:

- Vera klar over kva for nokon typar spørsmål som er karakteristisk for matematikk, kunna stilla slike spørsmål og ha eit blikk for svar som vert forventa
- Kjenna til, forstå og handtera matematiske omgrep
- Kunna utvida eit omgrep (abstrahere)
- Dette inkluderer blant anna:
    - Oppgåver der elevane vert bedt om å formulera eigne problem eller eigne hypotesar
    - Oppgåver der elevane vert bedt om å forklara omgrep
    - Generalisering
    - Kjenna til grunnomgrep som: ukjent, variabel
    - Kunna forklara matematisk symbol i ein situasjon


46 I en trekant er den minste vinkelen 20° mindre enn den mellomste, og den mellomste halvparten så stor som den største vinkelen.
a) Lag et uttrykk for summen av vinklene i trekanten.
b) Regn ut vinklene i trekanten. Husker du hvor stor vinkelsummen i en trekant er?

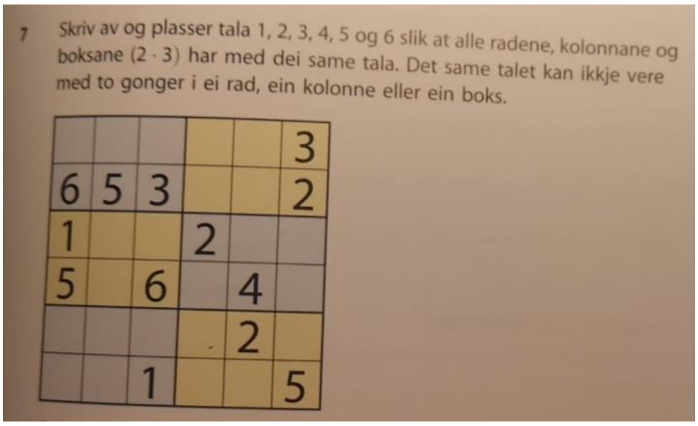
Figur 3.11: Oppgåve 46 i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 98 resonnementskompetansen , som igjen er knyta til modellerings-, og problemløysningskompetansen.

Problembehandlingskompetanse

Den andre delkompetansen i rammeverket til Niss for matematisk kompetanse er *problembehandlingskompetansen.* Den handlar om å kunne løyse matematiske problem. Likevel må det presiserast at i denne oppgåva vil ikkje matematiske problem som kan løyast ved å bruka rutineferdigheiter eller standardalgoritmar gå under denne kategorien. For å hamne under denne kategorien krev det ei matematisk undersøking for å koma fram til svaret. Løysingar på matematiske problem som kan svarast med rutineferdigheiter eller standardalgoritmar vil gå under kategorien for symbol- og formalismekompetanse. Oppgåve i figur 3.12, er henta frå Faktor 8 Grunnbok, «Noko å lure på». Denne oppgåva er plassert under *problemløysingskompetanse* i Niss sitt rammeverk, ettersom ein sudoku kan reknast som eit matematisk problem som ikkje kan løysast ved rutineferdigheiter eller standardalgoritmar og på den måten kan oppgåva reknast som ei problemløysingsoppgåve.

Kriteriet for *problembehandlingskompetanse:*

- Formulera og løysa matematiske problem
- Finna og formulera matematiske problemstillingar
- Løysa matematiske problem som er formulert
- Dette inkluderer blant anna:
  - Oppgåver som krev ein matematisk undersøking for å koma fram til svaret
  - Matematiske problem – kan ikkje løyast ved å bruka rutineferdigheiter eller standardalgortimar
  - problemløysingsoppgåver



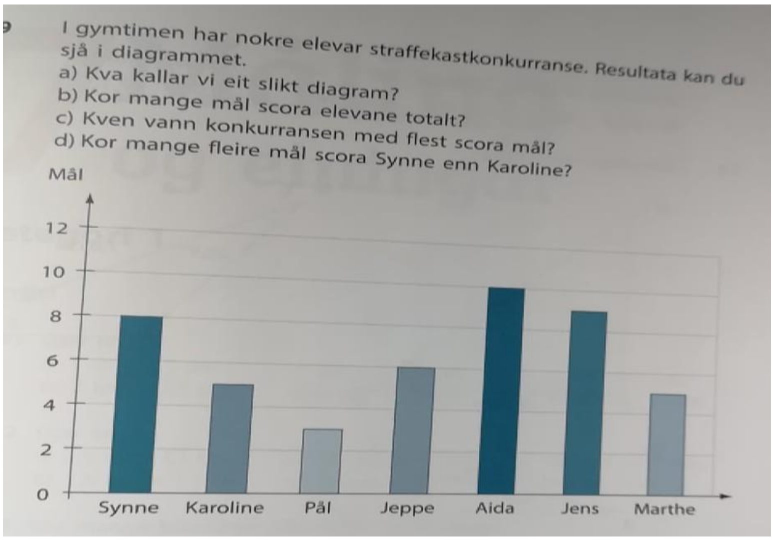
Figur 3.12: Oppgåve 7 i Faktor 8 Grunnbok, "Noko å lure på", side 203

Modelleringskompetanse

Modelleringskompetanse kan vi til dømes finne i oppgåver der elevane må laga ein modell, og analysere den eller svare på spørsmål knyt til grafen. Til høgre er kriteriene for at ei oppgåve skal hamne under denne kategorien. Oppgåva vist i figur 3.13 er henta frå Faktor 8 Oppgåvebok, «litt av kvart». Denne oppgåva er plassert under *modelleringskompetanse* i Niss sitt rammeverk ettersom eleven må kunne lese grafen for å kunne svare på spørsmåla i oppgåva.

Kriterier for *modelleringskompetanse*:

- Kunna analysera modeller
- Kunna bedømma modellen sin gyldighet
- Kunna utføra modellbygging (laga modellar frå ein situasjon, oversetta objekt, relasjonar og problemstillingar)
- Dette inkluderer blant anna:
  - Oppgåver der ein skal laga ein modell (t.d grafisk), og skal svara på oppgåver som kan lesast frå grafen
  - Oppgåver der ein må analysera ein modell (undersøka til dømes forventa levealder)
  - Undersøking av kor dyrt det er å snakka i mobiltelefon (evt forskjell frå ulike abonnement)


9 I gymtimen har nokre elevar straffekastkonkurranse. Resultata kan du sjå i diagrammet.
a) Kva kallar vi eit slikt diagram?
b) Kor mange mål scora elevane totalt?
c) Kven vann konkurransen med flest scora mål?
d) Kor mange fleire mål scora Synne enn Karoline?

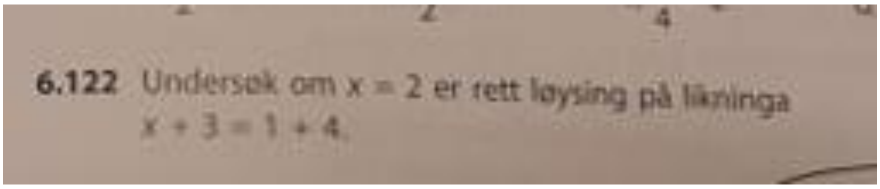
Figur 3.13: Oppgåve 9 i Faktor 8 Oppgåvebok, "Litt av kvart", side 130

Resonneringskompetanse

Resonneringskompetansen handlar om å kunne følgje og gjennomføra uformelle og formelle matematiske resonnement. I tillegg handlar det om å kunne bedømma gyldigheten til matematiske påstandar, setningar og reglar og forstå kva eit matematisk bevis er. På grunnlag av dette vart det tatt eit val om å plassera oppgåver som går på å vurdera svar, bevisa og der eleven må forklara reglar eller setningar under denne kategorien. Oppgåva vist i figur 3.14 er henta frå kategori 1 i Faktor 8 Oppgåvebok. Denne oppgåva er plassert under *resonneringskompetanse* ettersom eleven vert bedt om å vurdera om x=2 er riktig svar på likninga. I denne oppgåva kan eleven velje mellom å løyse likninga eller setje prøve på den. Det vart tatt eit val om at for elevar på 8.trinn var dette eit bevis for at x=2 er riktig løysing på likninga.

Kriterier for *resonneringskompetanse:*

- Kunna forstå, bedømma og laga argument som svar på matematiske spørsmål
- Kunne følgja og bedømma eit matematisk resonnement (kva er eit bevis og korleis det skil seg frå andre matematiske resonnement.)
- Kunne rekne ut og gjennomfører resonnement (resonnement -> gyldig bevis)
- Rettferdiggjøre matematiske setningar
- Bedømma haldbarheitane til matematiske påstandar (blant anna reglar og setningar)
- Dette inkluderer blant anna:
  - Vurdera om eit svar er rett eller galt
  - Bevisa
  - Oppgåve som går på rutineoperasjoner dersom oppgåva legg opp til oppfinnsomhet eller analyse (til dømes reflektera over rutineoperasjoner, kvifor gjer vi det slik..)
  - Forklara kvifor ein regel eller setning er som den er


6.122 Undersøk om $x = 2$ er rett løysing på likninga $x + 3 = 1 + 4$.

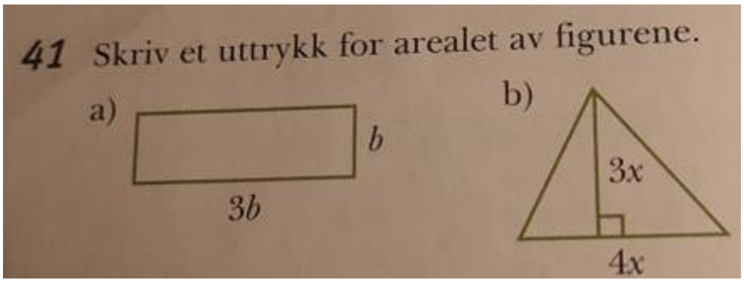
Figur 3.14: Oppgåve 6.122 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 1, side 121

Representasjonskompetanse

Representasjonskompetanse handlar om å om å kunna veksle mellom ulike representasjonar for ein matematisk situasjon. Det inneberer å kunne avkoda, fortolka og skilja mellom symbolske (spesielt algebraiske) og andre representasjonar. Oppgåver der elevane må nytte seg av ulike representasjonsformer og lage til dømes uttrykk som representerer ein matematisk situasjon vert plassert under denne kategorien. Oppgåva i figur 3.15 er henta frå Tetra 8 Elevbok, og er plassert under *representasjonskompetanse*. I denne oppgåva skal eleven skrive eit matematisk uttrykk som representerer arealet for figurane. Tetra 8 Elevbok anbefaler elevane å teikna figurane når dei skal finne uttrykk for til dømes areal eller omkrins. På den måten kan det vorte lettare for elevane å sjå samanheng mellom uttrykk og figur. Ved å arbeide med slike oppgåver får elevane utvikla kompetanse som omhandlar representasjonar, i tillegg til å vorte kjent med omgrep som *variabel og ukjent*.

Kriterier for *representasjonskompetanse:*

- Bruke ulike representasjonar for ei oppgåve (t.d. symbolske (algebraiske), grafiske, verbale, osv.), og sjå samanhengar mellom dei
- Kunne tolka ulike representasjonar (forklare kva dei representerer)
- Representera noko algebraisk
- Dette inkluderer blant anna:
  - Lage eit uttrykk frå ei tekstoppgåve som representerer situasjonen
  - Bokstavuttrykk som representerer omkrins og areal
  - Oppgåver som krev at elevane må veksla mellom forskjellige representasjonar og velja kva for ein som er best egna.



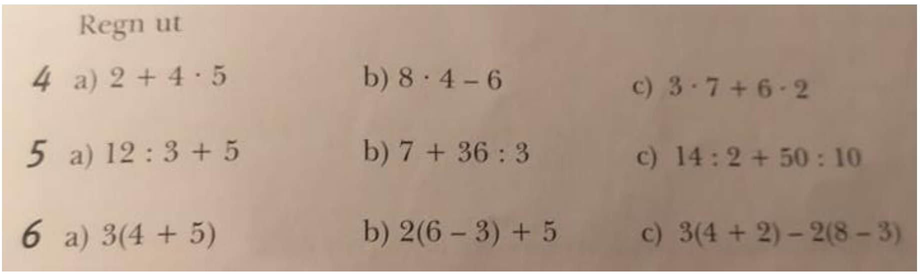
Figur 3.15: Oppgåve 41 i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 98

Symbol – og formalismekompetanse

Symbol – og formalismekompetanse handlar om å kunne oversetta og veksla mellom matematisk symbolspråk og naturleg språk. Den handlar ikkje berre om bokstavrekning og utrekning, men inkluderer òg formelle sider ved elementær rekning. På bakgrunn av dette vart oppgåver som blant anna går på å løyse likningar, laga uttrykk, rekning med bokstavar og ha forståing for dei matematiske symbola plassert under denne kategorien. Oppgåva i figur 3.15 er henta frå Tetra 8 Elevbok, og plassert under denne delkompetansen. Å kunne rekne ut taluttrykk går under denne kategorien ettersom eleven må ha kunnskap om reknerekkjefølgje og elementær rekning.

Kriterier for *symbol – og formalismekompetanse:*

- Kunna handtera representasjonar som vert utgjort av symbol og formalisme
- Kunna avkode symbol og formelspråk
- Kunna oversetta fram og tilbake mellom symbolholdig matematisk språk og naturleg språk
- Bruka uttrykk og formlar
- Kunne bruke dei matematiske spelereglane
- Vite kva symbola står for (både avanserte matematiske symbol og basale teikn i forbindelse med rekneoperasjonar)
- Dette inkluderer blant anna:
    - Bokstavrekning
    - Utrekning («rekn ut» oppgåver»
    - Lage uttrykk (bruka symbola)
    - Løyse likningar
    - «trekk saman» oppgåver (samla like uttrykk eller forenkla)
    - Vite kva ein skal rekne fyrst (reknerekkjefølgje
    - Formelle sider av elementære rekning


Regn ut

4 a) $2 + 4 \cdot 5$ b) $8 \cdot 4 - 6$ c) $3 \cdot 7 + 6 \cdot 2$

5 a) $12 : 3 + 5$ b) $7 + 36 : 3$ c) $14 : 2 + 50 : 10$

6 a) $3(4 + 5)$ b) $2(6 - 3) + 5$ c) $3(4 + 2) - 2(8 - 3)$

Figur 3.16:Oppgåve 4, 5 og 6 i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 89

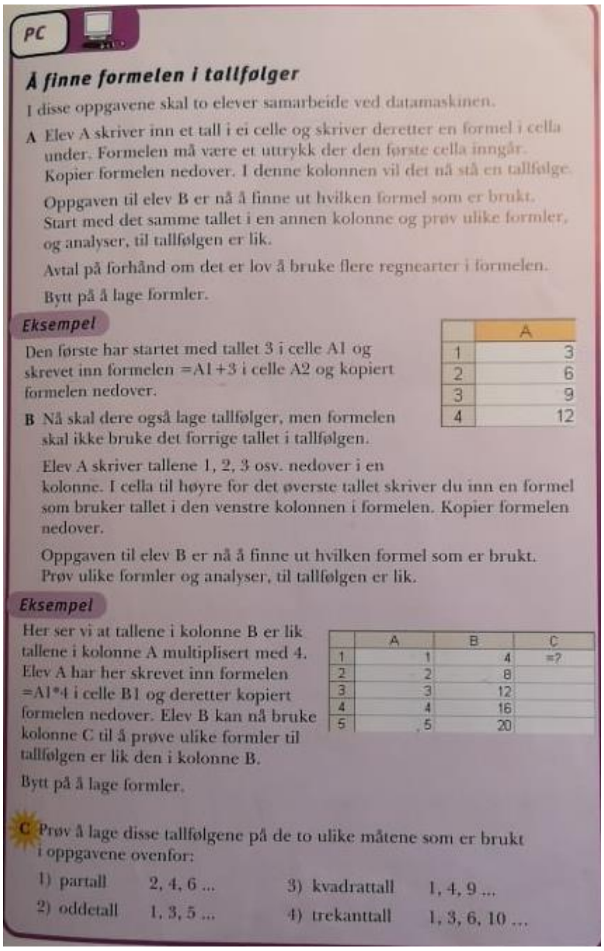
Kommunikasjons – og hjelpemiddelkompetanse

Kriterier for *kommunikasjonskompetanse:*

- Kunne kommunisera om matematikk og tolke andre sine forklaringar (skriftleg, munnleg eller visuelt)
- Kunna uttrykka seg om ei oppgåve
- Dette inkluderer blant anna:
  - Samarbeidsoppgåver
  - Oppgåver der eleven må forklara noko (skriftleg eller munnleg)
  - Diskusjonsoppgåver

I denne studien vert ein oppgåve kun kategorisert under denne kategorien dersom oppgåva legg opp til kommunikasjon med andre (elev, lærar)

Kommunikasjonskompetansen handlar om å kommunisera matematikk, både skriftleg og munnleg. I eit klasserom kan elevane samarbeid om å løysa oppgåver, men skal ein tru forskinga gjort på område, arbeider elevane ofte åleine med oppgåver i læreboka. Ettersom eg ikkje veit kva som skjer i klasserommet, då eg tek utgangspunkt i lærebøkene til elevane, avgrensar eg denne kategorien til å gjelde for oppgåver der elevane vert bedt om å samarbeide eller diskutere for å løyse oppgåva. I tillegg til å gjelde oppgåver der elevane må forklara enten til nokon andre eller skrifteleg. Til dømes vil PC- oppgåva (i figur 3.17), henta frå Tetra 8 Elevbok, gå under *kommunikasjonskompetansen*. Dette fordi det står i oppgåva at to elevar skal samarbeide for å løyse den.



PC

Å finne formelen i tallfølger

I disse oppgavene skal to elever samarbeide ved datamaskinen.

A Elev A skriver inn et tall i ei celle og skriver deretter en formel i cella under. Formelen må være et uttrykk der den første cella inngår. Kopier formelen nedover. I denne kolonnen vil det nå stå en tallfølge.

Oppgaven til elev B er nå å finne ut hvilken formel som er brukt. Start med det samme tallet i en annen kolonne og prøv ulike formler, og analyser, til tallfølgen er lik.

Avtal på forhånd om det er lov å bruke flere regnearter i formelen.

Bytt på å lage formler.

Eksempel

Den første har startet med tallet 3 i celle A1 og skrevet inn formelen =A1+3 i celle A2 og kopiert formelen nedover.

	A
1	3
2	6
3	9
4	12

B Nå skal dere også lage tallfølger, men formelen skal ikke bruke det forrige tallet i tallfølgen.

Elev A skriver tallene 1, 2, 3 osv. nedover i en kolonne. I cella til høyre for det øverste tallet skriver du inn en formel som bruker tallet i den venstre kolonnen i formelen. Kopier formelen nedover.

Oppgaven til elev B er nå å finne ut hvilken formel som er brukt. Prøv ulike formler og analyser, til tallfølgen er lik.

Eksempel

Her ser vi at tallene i kolonne B er lik tallene i kolonne A multiplisert med 4. Elev A har her skrevet inn formelen =A1*4 i celle B1 og deretter kopiert formelen nedover. Elev B kan nå bruke kolonne C til å prøve ulike formler til tallfølgen er lik den i kolonne B.

	A	B	C
1	1	4	=?
2	2	8	
3	3	12	
4	4	16	
5	5	20	

Bytt på å lage formler.

C Prøv å lage disse tallfølgene på de to ulike måtene som er brukt i oppgavene ovenfor:

1) partall 2, 4, 6 ...
2) oddetall 1, 3, 5 ...
3) kvadrattall 1, 4, 9 ...
4) trekanttall 1, 3, 6, 10 ...

Figur 3.17: «PC- oppgåve» i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs side 101

Denne oppgåva vil òg gå under *hjelpemiddelkompetansen,* som handlar om å kunne bruke ulike tekniske hjelpemiddel. Her vart det og tatt eit val om at oppgåver berre vert plassert under denne kategorien når elevane vert bedt om å bruke eit teknisk hjelpemiddel, som til dømes PC eller kalkulator.

Kriterier for *hjelpemiddelkompetanse:*

- Kunne bruke ulike tekniske hjelpemidler for matematisk virksomhet
- Dette inkluderer blant anna:
  - Å kunne bruke kalkulator, PC, rekneark, tabell, reknestokk, kuleramme ,linjal, passar, vinkelmålar

I denne studien vert ikkje oppgåver kategorisert under denne kategorien med mindre oppgåva ber elevane bruke eit hjelpemiddel.

For å halda oversikt over alle oppgåvene, lage eg eit dokument der eg skreiv ned kvar enkelt oppgåve. På den måten vart det lettare å arbeide systematisk gjennom lærebøkene. Eg noterte i kolonner kva for ein matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet oppgåva var innanfor, bak oppgåvenummeret. Nokon oppgåver var vanskeleg å plassere, og passa gjerne godt innanfor fleire kategoriar. Eg såg òg at ei oppgåve innehaldt fleire matematiske kompetansar. Dette noterte eg ned for å lettare kunne gå tilbake til den oppgåva. På den måten fekk eg moglegheit til å gå tilbake til desse oppgåvene dersom eg fant likande oppgåver seinare i kapittelet eller i ein av dei andre bøkene.

3.3.3 Samanhengen mellom rammeverka

I rammeverket til Kilpatrick m.fl. presenterer dei fem komponentar som til saman utgjer matematisk kompetanse. Denne kompetansemodellen kan ikkje direkte koblast til Niss m.fl sin kompetansemodell, ettersom dei to har eit litt ulikt fokus. Niss fokuserer meir på kva det vil seie å lære matematikk, altså på matematiske aktivitetar, medan Kilpatrick m.fl fokuserer meir på kva oppgåvene bør innehalde for at elevane skal mestre matematikk. Likevel kan ein dra nokon parallellar mellom dei to rammverka.

Forståing i rammeverket til Kilpatrick m.fl, kan ikkje direkte knytast opp mot nokon av dei åtte kompetansane til Niss. Er det ein som ligg nært, er det tankegangskompetansen, som handlar om å kjenna til, forstå og handtera matematiske omgrep. Den kan òg koplast opp mot representasjonskompetansen til Niss, ettersom Kilpatrick beskriver komponenten forståing som å kunne bruka og veksla mellom ulike representasjonar.

Berekning og symbol- og formalismekompetansen går begge på blant anna reknereglar og rekneoperasjonar, og ein kan derfor trekke parallellar mellom dei to. Likevel fokuserer Kilpatrick meir på å kunne utføre operasjonar på ein fleksibel måte, medan Niss fokuserer på symbol- og formelspråk.

Anvendelse handlar om å kunne formulera, representera og løysa matematisk problem, og vurdera løysingar. Denne komponenten kan vi finne i både problemløysingskompetansen og modelleringskompetansen, ettersom dei høvesvis handlar om å formulera, avgrensa og presisera ulike matematiske problem, og kunne døma gyldigheita til eit matematisk problem.

Det Kilpatrick kallar resonnering og Niss kallar resonneringskompetanse, går veldig mykje på det same. Begge handlar om å kunna reflektera og argumentera rundt løysingar og gyldigheita av løysingar.

Den siste kompetansen til Kilpatrick m.fl kallar han engasjement. Den handlar om å sjå matematikk som meiningsfylt og ha tru på at arbeidet ein legg til grunn bidreg til læring. Denne kompetansen er ikkje inkludert i Niss m.fl sitt rammeverk. Det kan vere fordi den i utgangspunktet ikkje handlar om å lære matematikk, men går på å ha tru på seg sjølv. På den andre sida kan det argumenterast for at dette er ein viktig komponent å inneha når ein blant anna skal utvikla problemløysings – og modelleringskompetanse. Ettersom desse to handlar om løysa matematiske problem og kunna døma resultat. Oppgåver som elevane kan relatere til kvardagen sin, eller oppgåver som er framheva av lærebokforfattaren, vil komme under denne kategorien, ettersom slike oppgåver kan få eleven til å sjå matematikk som eit nyttig fag.

Hjelpemiddel- og kommunikasjonskompetanse er heller ikkje direkte inkludert i Kilpatrick m.fl sitt rammverk. Likevel kan ein bruka hjelpemiddel som til dømes kalkulator og ulike PC program for å løysa oppgåver tilhøyrande komponenten berekning. Å kunna kommunisera eigne og andre sine utsegn, og å kunna uttrykka seg på ulike måtar i, med og om matematikk kan påverke både resonneringskompetansen til Niss m.fl, og Kilpatrick sin komponent anvendels.

Grunninga for at eg vel å legge to rammverk til grunne for analysen er at dei har nokon ulike aspekt. Likevel handlar begge om matematisk kompetanse, og gjev ei grunngjeving for kva det vil sei å meistra matematikk. Det eine rammeverket har noko det andre rammeverket ikkje har, og omvendt. Til saman meiner eg dei utfyller kvarandre, og kan gje meg eit betre bilde for kva for ein matematisk kompetanse oppgåvene i læreverka gjev i algebrakapittelet.

3.4 Algebraisk aktivitet

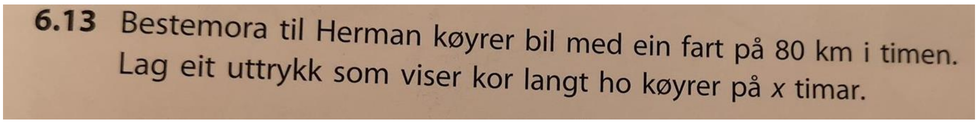
I tillegg til å sjå på kva for ein matematisk kompetanse oppgåvene legg til rette for, ynskjer eg å undersøka om oppgåvene er eigna til å stimulera algebraisk aktivitet. Eg vil bruke Kieran sin modell for algebraisk aktivitet. Ho deler skulealgebraen inn i genererande aktivitet, transformerande aktivitet og resonnerande aktivitet. For å kunna analysera oppgåvene i læreverka opp mot algebraisk aktivitet, laga eg òg her kriterier for kvar aktivitet. Kriteria er basert på Kieran sin beskriving av dei ulike aktivitetane. I dette delkapittelet vert kriteria presentert, samt eit døme på ei oppgåve som viser kva som høyrer til under dei enkelete kategoriane. I denne delen av studien valte eg òg å rekne eit oppgåvenummer som ei oppgåve, og ikkje sjå på kvar enkelt deloppgåve. Det eg oppdaga gjennom pilotprosjektet var at mange av oppgåvene innehaldt berre ein av dei tre aktivitetane. Likevel finn ein sjølvsagt unntak.

Genererande aktivitet

I den *genererande aktiviteten* vert situasjonar, forhold og mønster tolka, og deretter representert algebraisk. Denne aktiviteten inneber òg å ha forståing for ulike matematiske omgrep. På bakgrunn av Kieran sin skildring av denne aktiviteten vert blant anna oppgåver der elevane må veksle mellom ulike representasjonar og generalisera plassert under denne aktiviteten. Oppgåva til i figur 3.18 er henta får Faktor 8 Grunnbok, og stimulerer til *genererande aktivitet.* I denne oppgåva må eleven skrive eit uttrykk med som representerer situasjonen algebraisk.

Kriterier for *genererande aktivitet*

- Forhold, situasjonar og mønster skal tolkast, og deretter presenterast algebraisk
- Likningar som inneheld ukjente -> representerast algebraisk (ein situasjon eller problem)
- Generalisera uttrykk frå geometriske eller numeriske følgjer
- Representera funksjonar ved bruk av graf, tabell, eller bokstavsymbol
- Forståing av likskapsteiknet
- Forståing og bruk av omgrep som: variabel, ukjent, likeverdighet, likningsløysing
- Representera tekstoppgåver/verbale representasjonar -> algebraisk


6.13 Bestemora til Herman køyrer bil med ein fart på 80 km i timen. Lag eit uttrykk som viser kor langt ho køyrer på x timar.

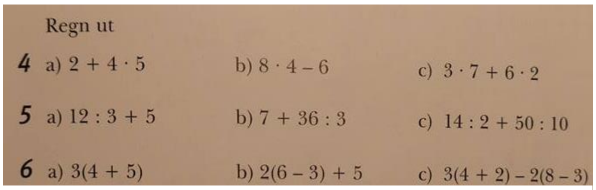
Figur 3.18: Oppgåve 6.13 i Faktor 8 Grunnbok, side 187

Transformerande aktivitet

Den *transformerande aktiviteten* handlar om dei reknetekniske prosessane i algebra. Dette inneber blant anna å samla like uttrykk, rekning med bokstavar, løysa likningar og typiske «rekn ut» - oppgåver. Oppgåva som er vist i figur 3.19 er henta frå Tetra 8 Elevbok. Desse tre oppgåvene stimulerer til den transformerande aktiviteten ettersom det krev at eleven har kunnskap om reknetekniske prosessar som reknerekkjefølgje og rekning med dei fire rekneartane.

Kriterier for *transformerande aktivitet:*

- Reknetekniske prosessar i algebra
- Samla like uttrykk
- Faktorisering
- Utviding
- Erstatte
- Lette til
- Løysa likningar
- Forenkla uttrykk
- Endra form på eit uttrykk for å oppretthalda likeverdighet


Regn ut

4 a) $2 + 4 \cdot 5$ b) $8 \cdot 4 - 6$ c) $3 \cdot 7 + 6 \cdot 2$

5 a) $12 : 3 + 5$ b) $7 + 36 : 3$ c) $14 : 2 + 50 : 10$

6 a) $3(4 + 5)$ b) $2(6 - 3) + 5$ c) $3(4 + 2) - 2(8 - 3)$

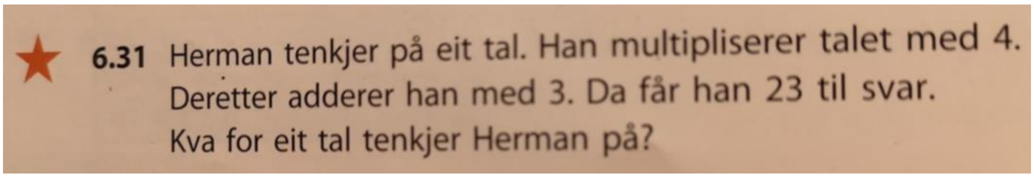
Figur 3.19: Oppgåve 4, 5 og 6 i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 89

Resonnerande aktivitet

Den *resonnerande aktiviteten* inkluderer dei oppgåvene der algebra vert nytta som eit verktøy. Denne aktiviteten krev ikkje at eleven bruker formell algebra for å løysa ei oppgåve og gjeld ikkje berre algebraiske prosessar, men òg meir generelle matematiske prosessar. I figur 3.20 er det vist ei oppgåve som stimulerer til *resonnerande aktivitet*. Denne oppgåva er henta frå Faktor 8 Grunnbok. Her kan elevane nytte algebra for å finne ei løysing, men dei må ikkje. Fleire elevar vil kanskje her bruke ein «gjett-sjekk»- metode. Denne oppgåva er kanskje enkel å resonnere seg fram til utan å bruke formell algebra. Oppgåver som går under kategorien *resonnerande aktivitet*, vil handla om oppgåver som krev problemløysing, bevis, sjå etter relasjonar eller struktur. Kort fortalt; oppgåver der ein ikkje nødvendigvis treng å nytta formell algebra, men kan.

Kriterier for *resonnerande aktivitet:*

- Generelle matematiske prosessar
- Algebra vert brukt som eit verktøy
- Problemløysing
- Modellering
- Arbeid med å generalisera mønster
- Bevisa
- Sjå etter relasjonar eller strukturar
- Treng ikkje nødvendigvis bruka formell algebra for å løysa ei oppgåve



6.31 Herman tenkjer på eit tal. Han multipliserer talet med 4. Deretter adderer han med 3. Da får han 23 til svar. Kva for eit tal tenkjer Herman på?

Figur 3.20: Oppgåve 6.31 i Faktor 8 Grunnbok, side 194

Til saman i denne studien har fire lærebøker vorte undersøkt, der fokuset er på kapittel som handlar om algebra. Dermed totalt fire kapittel. I Tetra 8 Elevbok har kapittel 3. Algebra vorte analysert, inkludert tilhøyrande lekser lengre bak i boka. Totalt 200 oppgåver. Tetra treningshefte inneheldt 45 oppgåver. I Faktor 8 Grunnbok har kapittel 6. Tal og algebra verta analysert. Den inneheldt i dette kapittelet 60 oppgåver. Faktor 8 Oppgåvebok inneheld totalt 83 oppgåver fordelt på tre ulike nivå. I tillegg har læreverket Faktor 8 ein alternativ oppgåvebok, som inneheld 26 oppgåver. I denne studien har totalt 414 oppgåver vorte analysert.

3.5 Reliabilitet og validitet

Reliabilitet går på kor påliteleg studien sine data er. Altså kva data som vert brukt, måten dei vert samla inn på, og korleis dei vert arbeida med (Christoffersen & Johannessen, 2012). Analysen metoden som er vorte utvikla til denne studien gjer at eg får mogelegheit til å nytta både kvantitativ og kvalitativ metode for å analysera datamaterialet. Dette har vore nyttig for å undersøka dei ulike sidene av læreverket og informasjonen det gjev. Fordelen med å velja dokumentanalyse, er at desse ikkje endrar seg. Derfor skal det vere mogleg å undersøka det dei same dokumenta, og få dei same resultata.

Faktorar i oversiktsstudien, som går på boktittel, forfattarar, forlag, kapittelnavn, sidetal, antal oppgåver, andre ressursar som høyrer til læreverket og vidare, er henta direkte frå lærebøkene. Dermed kan denne informasjonen reknast som å ha høg reliabilitet, ettersom det her ikkje er rom for tolking.

Ved kategorisering av oppgåver er det mogleg at andre ville fått eit anna resultat enn det eg får, ettersom me kan tolka oppgåvene ulikt. Likevel har eg prøvd å auka reliabiliteten til studien ved å tydeleg gjere greie for kva som har vorte gjort, slik at andre som vil undersøke det same, kan bruke dei same kriteriane til dei ulike kategoriane for matematisk kompetanse og algebraisk aktivitet, som det eg har gjort. Derfor er det vorte tatt med nokon dømer på oppgåver som går under dei ulike kategoriane tidlegare i metodekapittelet. I tillegg er dømer frå lærebøkene tatt med for å gi ein peikepinn på kva forfattaren forventar av dei ulike oppgåvene, og kriteriene til kvar kategori inneheld ein grundig beskriving. Oppgåver som eg var usikker på, vart diskutert med andre lærarar og rettleiarane mine. Ved å diskutere med andre får ein gjerne eit nytt perspektiv på oppgåva, noko som kan gjere det klart for meg kva kategori oppgåva passa best under.

I analysen vert oppgåvene kategorisert, og eit utval av oppgåver vil ha ein grunngjeving for kvifor dei vart plassert i denne kategorien. I tillegg vert oppgåver telt opp for dei oppgåvene som høyrer til same kategori. Det kan sjølvsagt ha vorte talt feil ved oppteljing, men resultata frå den kvantitative metoden vil i liten grad ikkje utgjøre ein stor del av det totale resultatet.

Validitet seie noko som kor relevant datamaterial representerer eit fenomen. Data som er samla inn er dermed ein representasjon av verkelegheta, men ikkje sjølve verkelegheta (Christoffesen & Johannessen, 2012). Problemstillinga til denne studien er: *Kva for nokon matematisk kompetansar legg algebrakapittelet i to læreverk på 8. trinn til rette for?*. På grunnlag av at eg berre tek for meg to læreverk, kan eg ikkje generalisera resultata. Eg kan heller ikkje sei noko om andre læreverk. Resultata mine er basert på to læreverk, der et tar utgangspunktet i algebrakapittelet. Derfor vil eg heller ikkje kunna sei noko om den matematisk kompetansen elevane utviklar ved å arbeide med heile læreverket, eller på andre klassetrinn. Resultata i denne studien har gjeve svar på kva for nokon matematiske kompetansar oppgåvene i læreverka *Faktor 8* og *Tetra 8* legg til rette for på 8. trinn i algebrakapittelet.

Ved å bruka to rammeverk for matematisk kompetanse får eg grundig undersøkt kva for nokon matematiske kompetansar læreverka legg til grunne. Samtidig som eg få undersøkt kva for ein algebraisk aktivitet oppgåvene kan stimulere. Dette kan ha noko å seie for kor instrumentelt arbeidet med oppgåvene vert. Dette vert ikkje dekka av Niss og Kilpatrick sitt rammeverk for matematisk kompetanse. Dermed vert modellen til Kieran nytta for å analysere oppgåvene etter algebraisk aktivitet. Ved å bruke desse tre rammeverka, i tillegg til oversiktsstudien, får eg eit større bilete av dei to læreverka sitt emne *algebra*.

Ved kategorisering av innhald i lærebøkene vil det alltid vere ein moglegheit for å plassera oppgåvene under feil kategori av matematisk kompetanse eller algebraisk aktivitet. Før eg byrja kategoriseringa vart det laga ein grundig skildring av dei. Kriterier var utvikla for kvar kategori, slik at det skulle vere lettare å analysera oppgåvene, i tillegg til at metoden skulle vere så truverdig som mogleg. Likevel er det ingen garanti for å gi eit riktig bilete av lærebokene sitt innhald, spesielt ettersom berre eit emne i kvar lærebok er vorte analysert. Kriteriene er laga på bakgrunn av min forståing av Niss sine åtte matematiske kompetansar, Kilpatrick sine fem trådar for matematisk kompetanse og Kieran sin modell for algebraisk aktivitet. Då det er eg som har laga analysemetoden med dei ulike kriteriane for kvar kategori kan det vere det ligg bevisste føringar for metoden som kan føre til feil i analysen.

3.6 Forskingsetiske omsyn

Forskingsetikk handlar om grunnleggjande verdiar og normer, som har sitt grunnlag i vitenskapleg allmennmoral. Dei forskingsetiske retningslinjene gjeld all forsking og er forpliktande (NESH, 2016). Det er dermed mange omsyn å ta når ein skal forska. Kort fortalt handlar retningslinjene om at ein informant har rett til sjølvbestemmelse og autonomi, forskaren er pliktig til å respektera privatlivet til informanten og at forskaren har eit ansvar for å unngå skade (Christoffersen & Johannessen, 2012). I denne studien er det vorte undersøkt oppgåver i læreverk, og eg har ikkje hatt direkte kontakt med menneske. Derfor er ikkje personopplysningar eller anna sensitiv informasjon vorte arbeida med. På bakgrunn av dette er ikkje dette prosjektet meldepliktig til NSD. Likevel er det faktorar ein forskar må ta omsyn til ved dokumentanalyse. I dei forskingsetiske retningslinjer står det at «alle forskarar og studentar skal følgje god henvisninsskikk» (NESH, 2016). Eg har derfor vert grundig når eg har vist til læreverka, og ført opp alle forfattarar i kjeldelista. I denne studien er lærebøker vorte analysert, og då er det viktig at forfattarane av lærebøkene vert behandla på ein ærleg og heiderleg måte. Studien tar berre for seg eit kapittel av eit heilt læreverk. Dermed er ikkje mitt føremål å omtala eit læreverk som betre enn eit anna. I tillegg vil eg vere forsiktig med å kritisere læreverka, ettersom eg ikkje har sett meg inn i heile læreverket.

4. Analyse

Analysen er delt inn i to delar. Fyrst vert resultata frå den kvantitative delen av forskinga presentert. Her er hensikta å sjå kor mange oppgåver som går under dei same kategoriane for algebraisk aktivitet og matematiske kompetanse i kvar lærebok. I tillegg vert det sett på kor mange av dei nivådifferensierte oppgåvene som går under dei ulike kategoriane. Til slutt vert det sett nærare på oppgåver i grunnboka/grunnkurset, nivådifferensierte oppgåver og oppgåver som er framheva av lærebokforfattarane. I tillegg vert det grunna kva for ein algebraisk aktivitet oppgåvene stimulerer til, og kva for ein matematisk delkompetanse elevane får utvikla ved å arbeide med slike oppgåver.

4.1 Kvantitativ analyse

Her vil resultata frå den kvantitative delen av analysen verte presentert. Resultata er basert på totalt 414 oppgåver henta frå fem lærebøker frå to ulike læreverk. Dei fem lærebøkene og kor mange oppgåver kva av dei inneheld er vist nedanfor:

Faktor 8 Grunnbok:	60 oppgåver
Faktor 8 Oppgåvebok:	83 oppgåver
Faktor 8 Alternativ oppgåvebok:	26 oppgåver
Tetra 8 Elevbok:	200 oppgåver
Tetra 8 Treningshefte:	45 oppgåver

Totalt har Faktor 8 sitt læreverk 169 oppgåver, medan Tetra har totalt 245 oppgåver. Som vi ser er det 75 oppgåver som skil desse to læreverka i antal oppgåver. Grunnen til ein slik skilnad kan vera at Faktor 8 i tillegg har eit fordjupningshefte som ikkje er vorte analysert i denne studien.

I den kvantitative analysen vert det vist ei fordeling av dei oppgåvene som går under dei ulike kategoriane for algebraisk aktivitet og matematisk kompetanse. Her vil ein kunne sjå at fleire oppgåver går innanfor ein eller fleire kategoriar for dei ulike rammeverka som er brukt.

4.1.1 Algebraisk aktivitet

Resultat i tabellen nedanfor viser fordelinga av oppgåver innanfor dei ulike kategoriane av algebraisk aktivitet, i dei to læreverka. Kvar lærebok har ei eiga søyle, som viser ei prosentvis fordelinga av oppgåver innanfor algebraisk aktivitet for kvar lærebok. Fleire av oppgåvene kunne ikkje beskrivast med ein kategori, men var passa under fleire. «Resonnerande aktivitet og andre aktivitetar» tyder at oppgåvene stimulerer til resonnerande aktivitet i tillegg til enten ein av dei andre aktivitetane eller begge.

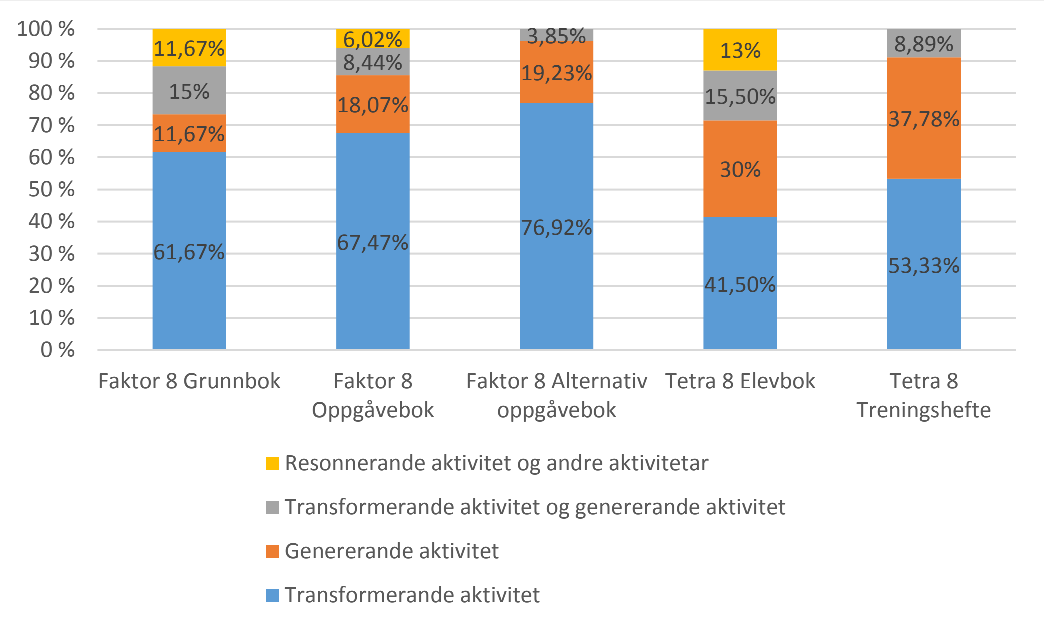


Diagram 4.1: Resultat frå kvantitativ analyse – fordeling av oppgåver innanfor algebraisk aktivitet

Som vi ser ut i frå diagrammet, stimulerer dei fleste oppgåvene i alle læreverka til genererande og transformerande aktivitet, eller ein kombinasjon av dei to. Når vi ser på søyla til Faktor 8 Alternativ oppgåvebok og Tetra 8 Treningshefte, ser vi at desse lærebøkene ikkje inneheld oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet. Oppgåvene i alternativ oppgåvebok og treningshefte, stimulerer berre til genererande, transformerande eller både genererande og transformerande aktivitet. Dette kan ha samanheng med at desse lærebøkene er meint for elevar som synest det er vanskelege oppgåver i Grunnboka eller Elevboka. Transformerande aktivitetar, og til dels genererande aktivitetar, er oppgåver som ofte tar relativt kort tid å løyse. Dei består gjerne av typiske «rekn ut» oppgåver, eller «finn eit uttrykk». I Faktor 8 Grunnbok består 88,34 % av alle oppgåvene av genererande og/eller transformerande aktivitetar, mot 93,97% av alle oppgåvene i Faktor 8 Oppgåvebok. Ser vi på søylene som gjeld for Tetra, ser vi at i elevboka stimulerer 87% av oppgåvene til genererande og/eller transformerande aktivitet. I Tetra 8 Treningshefte og Faktor 8 Alternativ oppgåvebok går alle oppgåvene under desse aktivitetane. Det er tydleg frå diagrammet at mange oppgåver er transformerande. I fylgje Wilson (2003) er det òg nettopp denne aktiviteten som har fått stor merksam i skulen. I tillegg til at transformerande oppgåver er gjennomgåande, består ofte slike reknetekniske oppgåver av fleire deloppgåver. Den transformerande aktiviteten, vert gjerne kalla den *reglebaserte* aktiviteten (Kieran, 2014), og den kan koblast til det Skemp

(1978) skriv om instrumentell forståing. Ved å arbeide med transformerande aktivitetar lærer elevane å bruka reglane og algoritmane riktig, men dei veit gjerne ikkje kvifor det vert gjort på den måten.

Oppgåver som stimulerer til genererande aktivitet, er som sagt, gjerne å sjå i lag med dei transformerande aktivitetane. Likevel er det ein stor del av oppgåvene som stimulerer til berre genererande aktivitet i alle lærebøken. I Tetra 8 finn ein fleire oppgåver som stimulerer til genererande aktivitet enn i Faktor 8. I Tetra 8 Elevbok stimulerer 30% av oppgåvene til denne aktiviteten, og 37,78 % av oppgåvene i Tetra 8 Treningshefte. I tillegg er det fleire oppgåver som går under både transformerande og genererande aktivitet. I Faktor 8 Grunnbok stimulerer 11,67% av oppgåvene til genererande aktivitet. I tillegg til at 15% av oppgåvene stimulerer til både genererande og transformerande. I Faktor 8 Oppgåvebok finn vi at 18,07% av oppgåvene går under genererande aktivitet, mot 19,23% i Faktor 8 Alternativ Opppgåvebok.

Å arbeide med resonnerande aktivitetar, kan gi motivasjon til å arbeide med oppgåver som stimulerer genererande og transformerande aktivitet, i følgje Kieran (2014). Oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet finner vi berre i Faktor 8 Grunnbok, Faktor 8 Oppgåvebok og Tetra 8 Elevbok. Faktor 8 Alternativ Oppgåvebok og Tetra 8 Treningshefte inneheld ingen oppgåver i kapittelet om algebra som stimulerer til resonnerande aktivitet. Oppgåver som kun stimulerer til resonnerande aktivitetar er veldig få. I Faktor 8 Grunnbok stimulerer 11,67% av oppgåvene til resonnerande aktivitetar og andre aktivitetar, medan i Faktor 8 Oppgåvebok stimulerer 6,01% til den kategorien. I Tetra 8 Elevbok finn ein at 13% av oppgåvene stimulerer til resonnerande aktivitetar. Dette er oppgåver der elevane ikkje nødvendigvis treng å nytta formell algebra for å komme fram til løysinga. Det kan vere problemløysingsoppgåver der elevane til dømes vert bedt om å generalisera mønster eller sjå etter relasjonar og mønster (Kieran, 2014). Ein ser at Tetra 8 Elevbok har fleire oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet enn Faktor 8 Grunnbok. Dette kjem mest sannsynleg av at Tetra 8 Elevbok har blått og raudt kurs inn denne boka, medan Faktor 8 har dei nivådifferensierte oppgåvene i ei eiga bok.

4.1.2 Matematisk kompetanse

I den kvantitative delen av analysen for matematisk kompetanse, vert det brukt to rammeverk for å analysera oppgåver. Niss og Kilpatrick har kvar sitt rammeverk med ulike komponentar som dei meiner elevane må få kompetanse innan for å oppnå matematisk kompetanse. Ettersom det vart tatt eit val å rekne ei oppgåve inkludert alle deloppgåvene for ein enkelt oppgåve, vil ei oppgåve kunne gå under fleire kategoriar innan begge rammeverka. Det har ført til at dei nye kategoriane inneheld fleire delkompetansar.

Ved å bruke rammeverket til Niss for matematisk kompetanse ser ein at eit tydeleg fleirtal av oppgåvene går under symbol – og formalisme kompetanse. I dei tre lærebøkene frå Faktor 8 går over halvparten av oppgåvene i kvar lærebok under denne delkompetansen. I Tetra 8 Elevbok går 44% av alle oppgåvene under symbol – og formalismekompetanse. Tetra 8 Treningshefte finner vi at 53,33% går under den same kompetansen. Dei restrerande 46,67% går under både symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse. Som vi ser frå tabellen nedanfor ser vi at dei fleste oppgåver i alle læreverka går under enten berre symbol – og formalisme kompetanse eller symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse. Det er desse to delkompetansane ein finn gjennomgåande i dei fleste oppgåver i dei fem lærebøkene som er analysert.

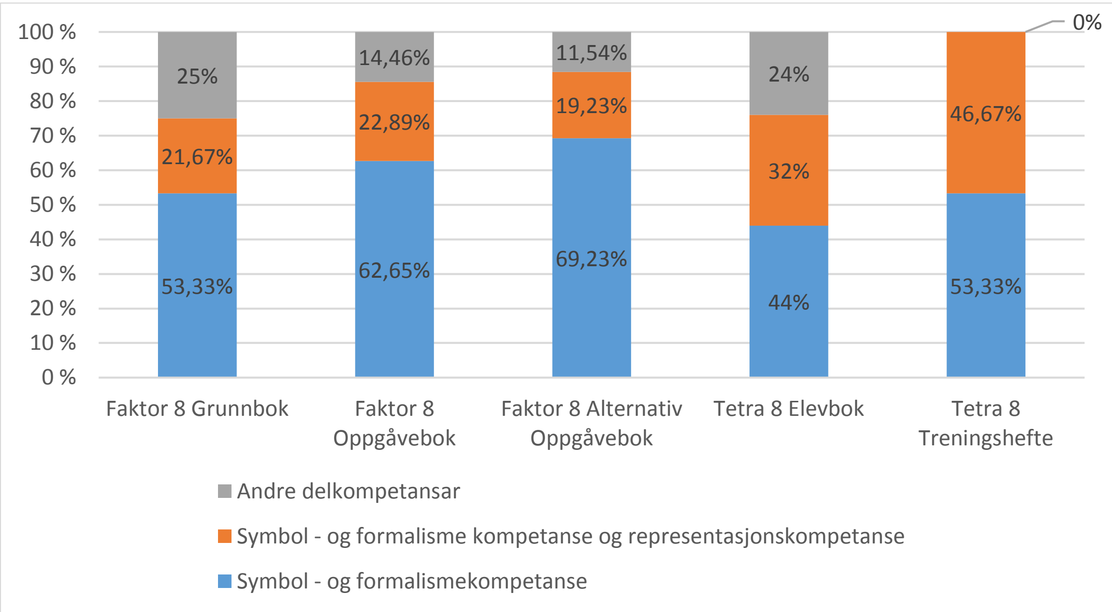


Diagram 4.2: Resultat frå kvantitativ analyse - fordeling av oppgåver innanfor Niss sitt rammeverk for matematisk kompetanse

I Faktor 8 Grunnbok går til saman 75% av oppgåvene under kategorien symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse. Dei 25% som er igjen, er fordelt jamt mellom ulike delkompetansar. Blant anna går fleire oppgåver under tankegangskompetansen og resonneringskompetans, men då ofte i lag med symbol – og formalismekompetanse. Mykje av den same trenden seg vi i Faktor 8 oppgåvebok. I Faktor 8 Alternativ oppgåvebok går 88,46% av oppgåvene under kun symbol – og formalismekompetanse og symbol- og formalismekompetanse saman med representasjonskompetanse. Dei restrerande oppgåvene går under symbol – og formalismekompetanse saman med tankegangskompetanse eller resonneringskompetanse.

I Tetra 8 Elevbok går 76% av oppgåvene under symbol – og formalismekompetanse eller symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse. 3,5 % av oppgåvene går under tankegangskompetanse og symbol – og formalismekompetanse, medan 8% går under dei tre nemte delkompetansane. Ytterligare 8,5 % går under dei same nemnte tre delkompetansane, i tillegg til problembehandlingskompetansne. Få oppgåver går under modelleringskompetanse, kommunikasjonskompetanse, resonneringskompetanse og hjelpemiddelkompetanse. Likevel er dei å finne i nokre oppgåver. I Tetra 8 treningshefte finn vi berre oppgåver som går under symbol – og formalismekompetanse og symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse. Dette kan vere fordi denne læreboka legg opp til at elevane skal få mogelegheit til å arbeide med ekstra med viktige moment. Det tenkjast at lærebokforfattaren ser på å arbeide med symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse som viktig i algebra i 8.klasse.

Ved å bruke Kilpatrick sitt rammeverk ser vi mykje av den same trenden som ein såg ved å bruke Niss sitt rammeverk (sjå tabellen nedanfor). I tabellen som er vist nedanfor ser vi ein prosentvis fordeling av oppgåvene innanfor dei ulike kategoriane i rammeverket til Kilpatrick.

Dei to komponentane, *forståing* og *berekning*, kan på mange måtar samanliknast med Niss sine symbol- og formalismekompetanse og representasjonskompetanse. Ein ser ut i frå tabellen at 78,33% av oppgåvene i Faktor 8 Grunnbok , 84,33 % av oppgåvene i Faktor 8 Oppgåvebok og 92,31% av oppgåvene i Faktor 8 Alternativ oppgåvebok går under forståing og/eller berekning. Det stemmer ganske godt opp mot analysen som er gjort med rammeverket til Niss. Grunninga for at det ikkje er nøyaktig same prosentdel som går under dei komponentane i begge rammeverka er at kvar komponent inneheld ein del andre kriterier som den andre kanskje ikkje har.

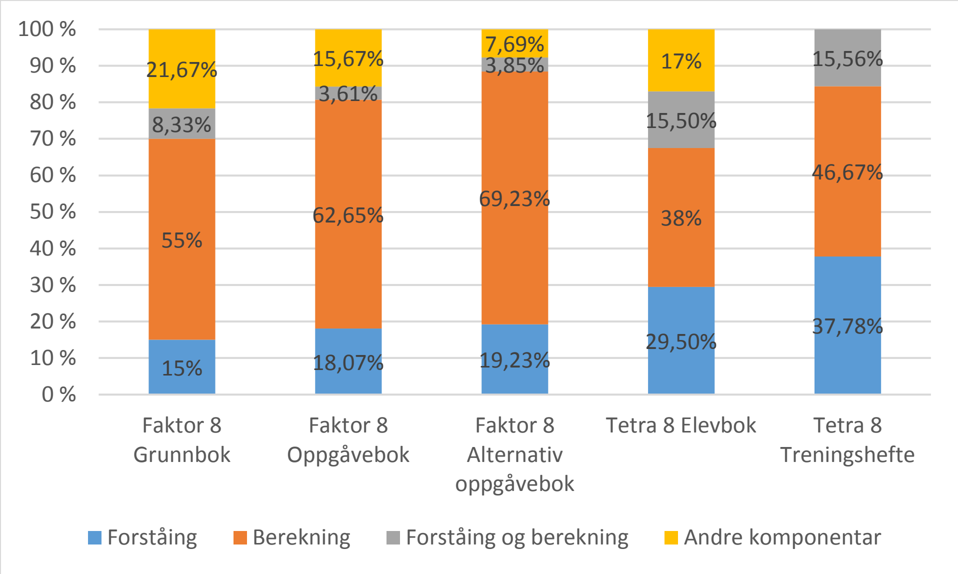


Diagram 4.3: Resultat frå kvantitativ analyse - fordeling av oppgåver innanfor Kilpatrick sitt rammeverk for matematisk kompetanse

I Tetra 8 Elevbok 83% av oppgåvene under forståing og/eller berekning. I Tetra Treningshefte går alle oppgåvene under enten ein av dei to komponentane, eller begge. Vi ser ut i få tabellen at begge læreverka har omtrent same fordeling av oppgåver innanfor dei same komponentane.

4.1.3 Nivådifferensierte oppgåver

Diagramma nedanfor viser fordelinga av dei ulike kategoriane for algebraisk aktivitet og matematisk kompetanse for dei nivådifferensierte oppgåvene. Det vil seie frå oppgåvene i kategori 1, 2, og 3 i Faktor 8 Oppgåvebok og frå blått og raudt kurs i Tetra 8 Elevbok.

Diagrammet nedanfor viser fordelinga av dei ulike kategoriane for algebraisk aktivitet. I Faktor 8 Oppgåvebok ser vi at i kategori 1 stimulerer 75% av oppgåvene til transformerande aktivitet, medan oppgåver som stimulerer til denne aktiviteten avtar med vanskegraden på kategorien. I kategori 3 er det til dømes 13,89 % færre oppgåver som stimulerer til den transformerande aktiviteten. På den andre sida er det fleire oppgåver i kategori 3, som stimulerer til både transformerande og genererande aktivitet. Likevel utgjer oppgåvene som stimulerer til transformerande, eller transformerande og genererande aktivitet, ein mindre prosentdel i kategori 3. Oppgåver som stimulerer berre til genererande aktivitet er fleire i kategori 1 og 3 enn i kategori 2. Den resonnerande aktiviteten er ikkje å finne i kategori 1. I kategori 2 stimulerer 6,67% av oppgåvene til denne aktiviteten, og 11,11 % i kategori 3. Her ser vi at jo vanskelegare kategori eleven vel, jo fleire resonnerande aktivitetar får eleven arbeide med.

I Tetra 8 Elevbok ser ein at 67,86 % av oppgåvene stimulerer til transformerande og/eller genererande aktivitet i blått kurs. I raudt kurs stimulerer 64% av oppgåvene til transformerande og/eller genererande aktivitet. Her kan det tenkjast at lærebokforfattarane har lagt meir vekt på den genererande aktiviteten åleine i blått kurs, og meir på den transformerande og genererande i raudt kurs. Ein ser òg at fleire oppgåver i raudt kurs stimulerer til den resonnerande aktiviteten, i tillegg til andre aktivitetar , enn i blått kurs. I tillegg kan det sjå ut som Tetra 8 Elevbok (blått og raudt kurs) fokuserer meir på denne aktiviteten enn Faktor 8 Oppgåvebok. I begge kursa i Tetra er det blant anna fleire oppgåver der eleven må arbeide med strukturar og relasjonar, i tillegg til å generalisera mønster. Det ser ut som det på bakgrunn av dette gjer at fleire oppgåver stimulerer til den resonnerande aktiviteten. Ein ser òg ein forskjell på Tetra og Faktor. Til dømes har Faktor 8 Oppgåvebok betydleg fleire oppgåver som stimulerer til transformerande aktivitet, enn det Tetra 8 Elevbok har.

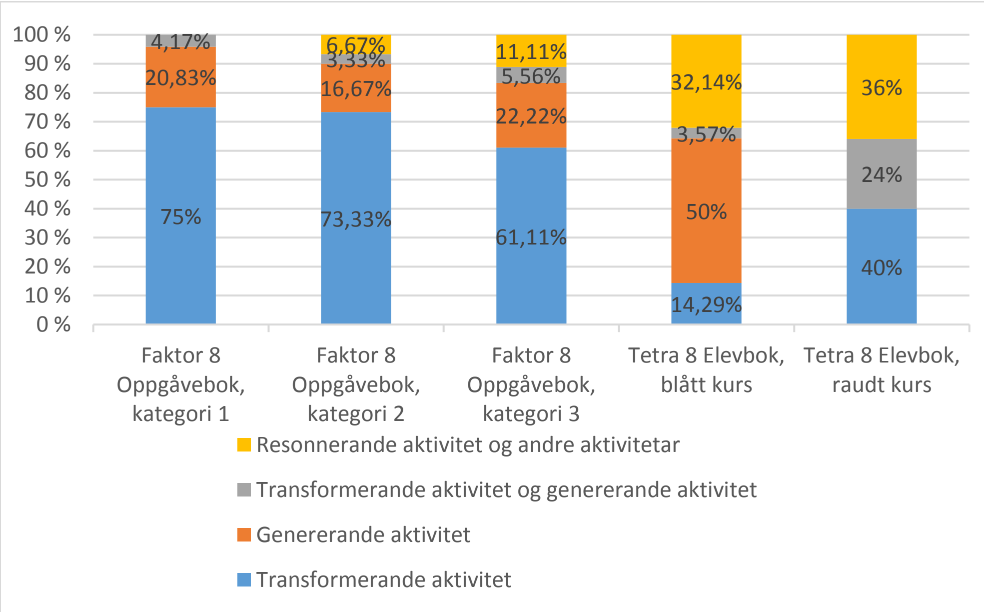


Diagram 4.4: Resultat frå kvantitativ analyse - fordeling av nivådifferensierte oppgåver innanfor algebraisk aktivitet

I rammeverket til Niss for matematisk kompetanse ser ein at i Faktor 8 Oppgåvebok stimulerer dei fleste oppgåvene til symbol – og formalismekompetanse eller symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse i alle kategoriane. Oppgåver som berre stimulerer til symbol – og formalismekompetanse minker frå kategori 1 og 2 til kategori 3. Medan oppgåver som stimulerer til symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse auker frå kategori 2 til kategori 3. Når det gjel dei andre delkompetansane ser vi ei lita auking frå kategori 1 til kategori 2, og ei litt større auking til kategori 3. I alle kategoriane i Faktor 8 Oppgåvebok møter eleven andre enn dei ovannemnte delkompetansane, men i kategori 3 møter eleven fleire oppgåver som gjer at eleven kan utvikla sin matematiske kompetanse på andre områder enn innanfor symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse.

I dei nivådifferensierte oppgåvene i Tetra 8 Elevbok ser vi at få oppgåver stimulerer til symbol – og formalisme kompetanse i blått kurs i forhold til raudt kurs. Det kan kome av at raudt kurs introduserer nytt fagstoff, noko dei ikkje gjer i blått kurs. På bakgrunn av dette kan det sjå ut som det blå kurset fokuserer meir på både symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse i lag, enn det raudt kurs gjer. Likevel kan det vere raudt kurs har fleire oppgåver som gjev symbol – og formalismekompetanse ettersom det er typisk for begge lærebøkene å ha slike oppgåver når dei introduserer nytt fagstoff (i grunnboka og grunnkurset). Begge kursa har ein del oppgåver som går under andre delkompetansar. Blått kurs har nokon færre enn raudt kurs. For begge kursa er dette oppgåver som blant anna går under problembehandlingskompetanse. Dersom vi samanliknar Faktor og Tetra, ser vi og ein viss forskjell. Til dømes har Faktor 8 Oppgåvebok ein større prosentdel av oppgåver som går under symbol – og formalismekompetanse enn det Tetra 8 Elevbok (blått og raudt kurs) har. Både blått og raudt kurs i Tetra 8 har òg fleire oppgåver som går under «andre delkompetansar» enn det Faktor 8 Oppgåvebok har. Dei andre delkompetansane består av i størst grad av *tankegangskompetanse* og *problembehandlingskompetanse*, saman med symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse.

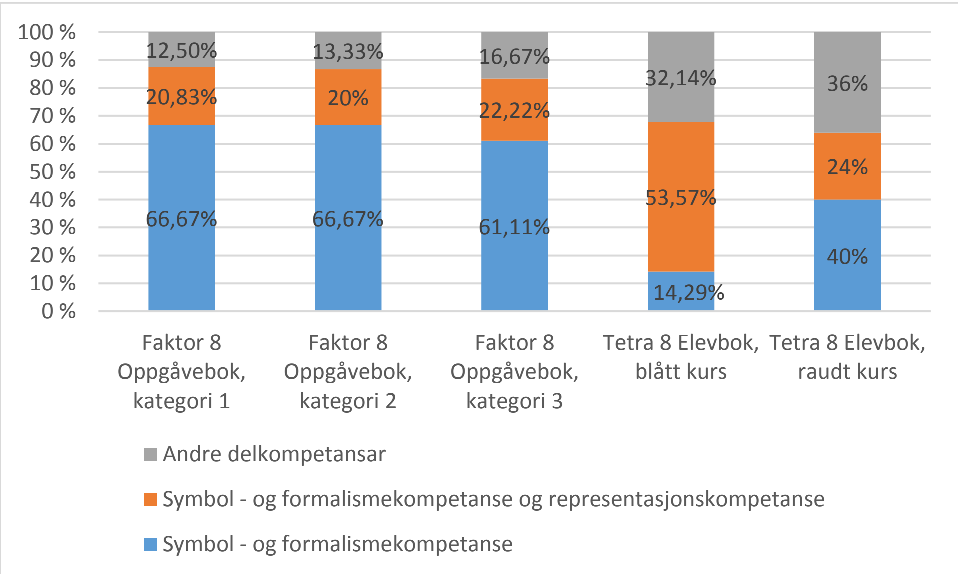


Diagram 4.5 Resultat frå kvantitativ analyse - fordeling av nivådifferensierte oppgåver innanfor Niss sitt rammeverk for matematisk kompetanse

I rammeverkert til Kilpatrick for matematisk kompetanse er fordelinga av dei ulike kategoriane som vist i diagrammet nedanfor. Her ser vi at i Faktor 8 Oppgåvebok er fordelinga av oppgåver som gjev kompetanse i forståing og berekning omtrent den same i kategori 1 og 2. I kategori 3 går 61,11% under berekning medan 22,22% går under forståing. Fleire oppgåver går under «andre komponentar» i kategori 3, enn i kategori 1 og 2. Det kan tyde på at dei elevane som vel kategori 3 får arbeide fleire oppgåver som gjer at elevane får utvikla matematisk kompetanse på andre områder enn forståing og berekning.

I Tetra 8 Elevbok går 50 % av oppgåvene i blått kurs under forståing, medan raudt kurs har ingen oppgåver som går berre under denne komponenten. I raudt kurs går 40% av oppgåvene under berekning, medan berre 14,29% går under denne komponenten i blått kurs. Igjen, det kan tyde på at det er slik fordi raudt kurs introduserer nytt fagstoff. I tillegg legg raudt kurs meir vekt på oppgåver der forståing og berekning kjem til syne i same oppgåver. Under «andre komponentar» går 32,14% av oppgåvene i blått kurs, medan 36% av oppgåvene i raudt kurs går under denne kategorien. For berre læreverka ser ein at elevar som vel den vanskelegaste kategorien eller kurset, får arbeide med fleire oppgåver som går under dei tre andre komponentane i rammeverket til Kilpatrick.

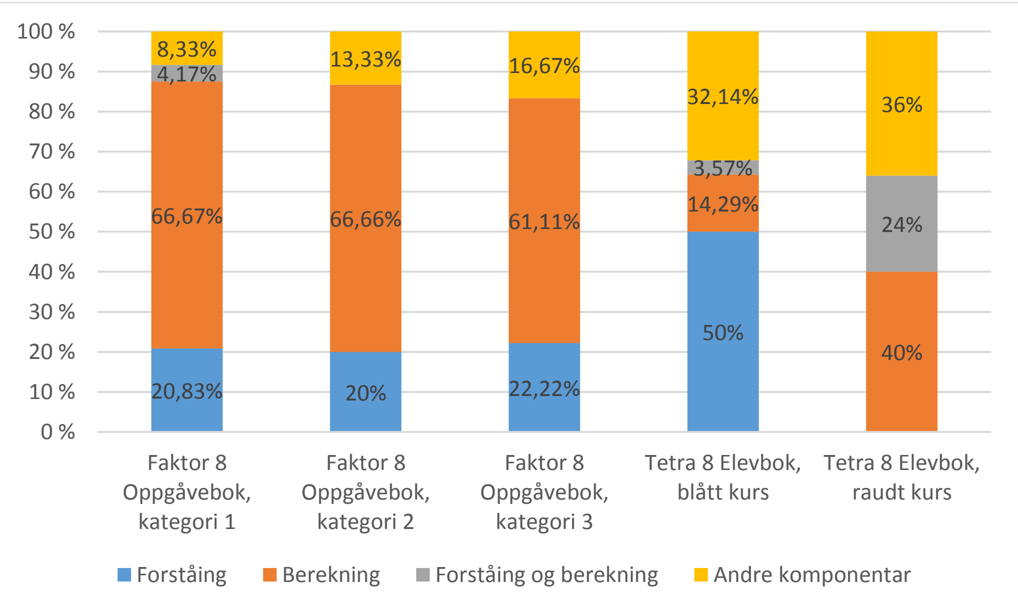


Diagram 4.6: Resultat frå kvantitativ analyse - fordeling av nivådifferensierte oppgåver innanfor Kilpatrick sitt rammeverk

Ved å analysera dei nivådifferensierte oppgåvene fekk ein eit innsyn i korleis oppgåvene innanfor kvar kategori og kurs er fordelt. Ein ser at oppgåvene i kategori 3 og raudt kurs gjev elevane moglegheit til å arbeide med fleire oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet.

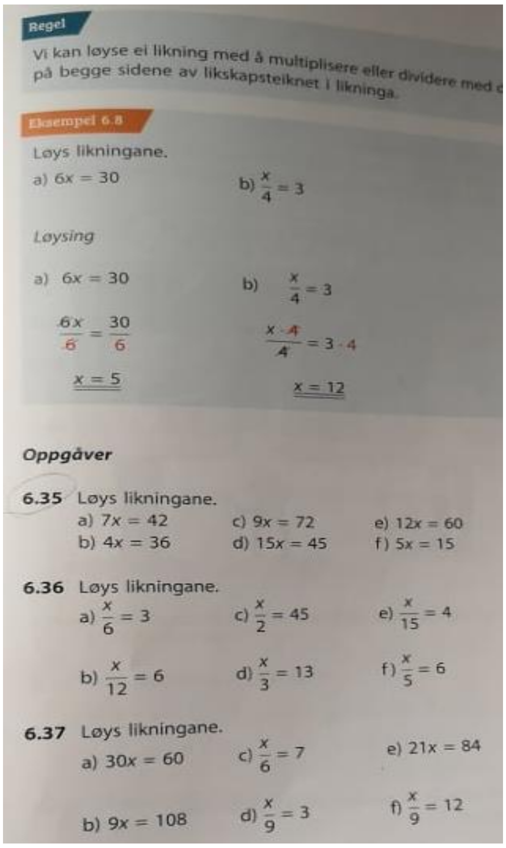
I tillegg ser ein at elevane i større grad får utvikla sin matematiske kompetanse utover symbol – og formalismekompetanse, og representasjonskompetanse i Niss sitt rammeverk, og utover forståing og berekning i Kilpatrick sitt rammeverk. Det vil seie at i kategori 3 og raudt kurs, finn vi eit større spenn av matematisk kompetansar og algebraisk aktivitet, enn i kategori 1 og 2 og blått kurs.

4.2 Kvalitativ analyse

I denne delen av analysen vert det presentert oppgåver frå dei ulike delane i algebrakapittelet. Fyrst vert det sett på oppgåver som ein finn i grunnboka til Faktor 8 og grunnkurset til Tetra 8 Elevbok. Deretter vert det sett på oppgåver som er nivådelte, og til slutt oppgåver som er framheva av lærebokforfattarane. For kvar del vert det vist nokre oppgåver, og sett på kva for ein aktivitet dei stimulerer til og kva for ein matematiske kompetanse oppgåvene legg til rette for.

4.2.1 Oppgåver og lærestoff

Både i Tetra 8 Elevbok (grunnkurs) og Faktor 8 Grunnbok vert det presentert lærestoff og oppgåver for kvart tema i kapittelet. Ein ser at begge lærebøkene har det same preget, når det gjeld å presentera nytt lærestoff, og deretter oppgåver som eleven skal løysa. Oppgåvene rett etter døma er ofte lagt opp for at elevane kan bruka døma veldig direkte når dei skal løysa oppgåvene. Det er berre å byta ut tala i dømet, og følgja framgangsmåten. Eg vil her visa nokre døme på at lærestoff og oppgåver heng tett saman, og kva algebraisk aktivitet og matematisk kompetanse desse oppgåvene legg til rette for.


Regel

Vi kan løyse ei likning med å multiplisere eller dividere med
på begge sidene av likskapsteiknet i likninga.

Eksempel 6.8

Løys likningane.

a) $6x = 30$ b) $\frac{x}{4} = 3$

Løysing

a) $6x = 30$

$\frac{6x}{6} = \frac{30}{6}$

$\underline{\underline{x = 5}}$

b) $\frac{x}{4} = 3$

$\frac{x \cdot 4}{4} = 3 \cdot 4$

$\underline{\underline{x = 12}}$

Oppgåver

6.35 Løys likningane.

a) $7x = 42$ c) $9x = 72$ e) $12x = 60$

b) $4x = 36$ d) $15x = 45$ f) $5x = 15$

6.36 Løys likningane.

a) $\frac{x}{6} = 3$ c) $\frac{x}{2} = 45$ e) $\frac{x}{15} = 4$

b) $\frac{x}{12} = 6$ d) $\frac{x}{3} = 13$ f) $\frac{x}{5} = 6$

6.37 Løys likningane.

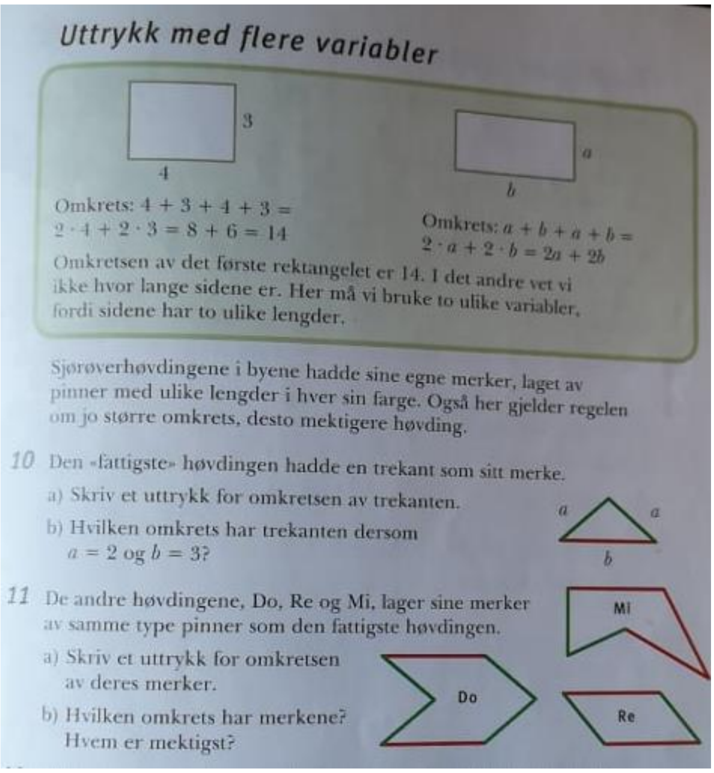
a) $30x = 60$ c) $\frac{x}{6} = 7$ e) $21x = 84$

b) $9x = 108$ d) $\frac{x}{9} = 3$ f) $\frac{x}{9} = 12$

Figur 4.1: Oppbygging av lærebok i Faktor 8 Grunnbok, side 197

Oppgåvene i figur 4.1 er henta frå Faktor 8 Grunnbok. Her ser vi eit typisk døme på korleis læreboka er bygd opp, og korleis elevane møter læreboka. Eit nytt emne vert fyrst introdusert med ein regel, døme og deretter fleire oppgåver der ein kan bruke nøyaktig same framgangsmåte som vist i døma. Desse oppgåvene går under *berekning* (Kilpatrick) og *symbol – og formalismekompetanse* Niss), ettersom eleven kan følgje ein algoritme, og må kunne grunnleggjande rekning, og dei matematiske spelereglane. Vi ser at mange oppgåver går under desse to kategoriane. Det kan sjåast i samanheng med det Naalsund (2012) hevdar; at skulealgebraen er den delen av matematikken der vi oftast møter algoritmar og hugsereglar, og at på den måten har mange norske elevar ei instrumentell forståing av algebra. Oppgåver som dette stimulerer til *transformerande aktivitet*, ettersom dei omhandlar reknetekniske prosessar i algebra. Spesielt dei fyrste oppgåvene i kapittelet stimulerer i stor grad til transformerande aktivitet. Det kan koma av at det ligg eit læringssyn bak, at ein må kunne prosedyreferdigheiter før ein kan byrje å jobbe med resonnering eller problemløysing.

Figur 4.2 viser eit døme på dette i Tetra 8 Elevbok. Ein ser at det her er mykje meir tekst enn i Faktor 8 Grunnbok, dette er noko som er gjennomgåande i heile kapittelet. Tetra 8 Elevbok har få oppgåver der reknestykker er sett opp, og eleven skal løyse dei. Derimot har dei mange tekstoppgåver, der det er laga ein historie rundt oppgåvene. Her ser vi at læreboka fyrst gjer eit døme på korleis ein reknar ut omkrets, både når ein veit lengda på alle sidene, og når lengda består av variablar. Deretter kjem det ein «historie» om sjørøverhøvdingar. Deretter vert historien trekt inn i oppgåvene. Begge desse oppgåvene stimulerer til genrerande og transformerande aktivitet, ettersom oppgåve krev at eleven lagar eit uttrykk som representerer omkretsen til trekantane, og fordi dei skal rekne ut omkretsen når dei veit kva tal variablane står for. Ved å arbeide med slike oppgåver får eleven øving innan *symbol – og formalismekompetanse* og *representasjonskompetanse* i rammverket til Niss. I rammeverket til Kilpatrick går desse oppgåve under *forståing* og *berekning*.


Uttrykk med flere variabler

Omkrets: $4 + 3 + 4 + 3 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 8 + 6 = 14$

Omkrets: $a + b + a + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2a + 2b$

Omkretsen av det første rektangelet er 14. I det andre vet vi ikke hvor lange sidene er. Her må vi bruke to ulike variabler, fordi sidene har to ulike lengder.

Sjørøverhøvdingene i byene hadde sine egne merker, laget av pinner med ulike lengder i hver sin farge. Også her gjelder regelen om jo større omkrets, desto mektigere høvding.

10 Den «fattigste» høvdingen hadde en trekant som sitt merke.
a) Skriv et uttrykk for omkretsen av trekanten.
b) Hvilken omkrets har trekanten dersom $a = 2$ og $b = 3$?

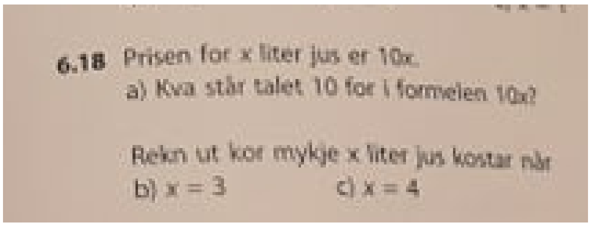
11 De andre høvdingene, Do, Re og Mi, lager sine merker av samme type pinner som den fattigste høvdingen.
a) Skriv et uttrykk for omkretsen av deres merker.
b) Hvilken omkrets har merkene? Hvem er mektigst?

Figur 4.2: Oppbygging av lærebok i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 91

I begge læreverka finn vi dei overnevnte delkompetansane og komponentane i starten på algebrakapittelet. Ut i frå resultata såg ein at når eleven vert introdusert for nytt lærestoff følgjer det med oppgåver som stimulerer til transformerande og genererande aktivitet. Mot slutten av kapittelet i Faktor 8 Grunnbok og mot slutten av grunnkurset i Tetra 8 Elevbok er det ei auking av genererande aktivitetar, og nokon resonnerande aktivitetar. Dermed får eleven utvikle sin matematiske kompetanse på fleire områder. Likevel er det ein del av desse oppgåvene som går under «oppgåver som er framheva av lærebokforfattaren», og desse vil eg komma nærare tilbake til i kapittel 4.2.3.

Når det gjeld Faktor 8 Grunnbok er det eit par oppgåver som går under *tankegangskompetanse* i rammeverket til Niss. Eit døme på ei slik oppgåve er vist i figur 4.3.

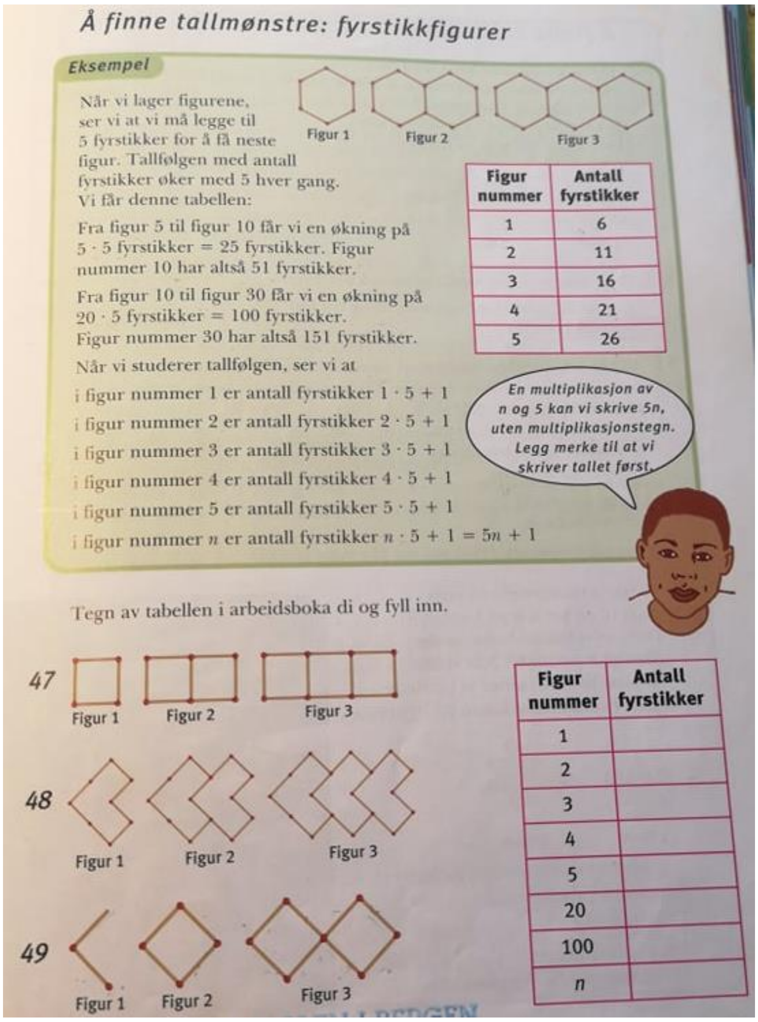
Deloppgåve *a)* går under denne delkompetansen fordi eleven må forklara delar av eit uttrykk ut i frå ein gjeven situasjon. Den går under *forståing* i rammeverket til Kilpatrick, medan deloppgåve *b)* går under symbol – og formalismekompetanse og berekning. I tillegg finn ein i Faktor 8 Grunnbok nokre oppgåver som er plassert under *resonneringskompetanse* i rammeverket til Niss og under *resonnering* i rammeverket til Kilpatrick. Dette er oppgåver der eleven skal undersøkje om eit svar er løysinga på likninga.


6.18 Prisen for x liter jus er $10x$.
a) Kva står talet 10 for i formelen $10x$?

Rekn ut kor mykje x liter jus kostar når
b) $x = 3$ c) $x = 4$

Figur 4.3: Oppgåve 6.18 i Faktor 8 Grunnbok, side 189

I Tetra 8 Elevbok ser ein mykje av det same som i Faktor 8 Grunnbok. Dei same komponentane og delkompetansane går igjen i starten av kapittelet i grunnkurset, medan det mot slutten kjem nokre oppgåver som bidreg til å utvikla elevane sin matematiske kompetanse på andre områder enn symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse og forståing og berekning. Til dømes har Tetra 8 Elevbok slike oppgåver som vist i figur 4.4 på slutten av kapittelet


Å finne tallmønstre: fyrstikkfigurer

Eksempel

Når vi lager figurene, ser vi at vi må legge til 5 fyrstikker for å få neste figur. Tallfølgen med antall fyrstikker øker med 5 hver gang. Vi får denne tabellen:

Figur nummer	Antall fyrstikker
1	6
2	11
3	16
4	21
5	26

Fra figur 5 til figur 10 får vi en økning på $5 \cdot 5$ fyrstikker = 25 fyrstikker. Figur nummer 10 har altså 51 fyrstikker.

Fra figur 10 til figur 30 får vi en økning på $20 \cdot 5$ fyrstikker = 100 fyrstikker. Figur nummer 30 har altså 151 fyrstikker.

Når vi studerer tallfølgen, ser vi at
i figur nummer 1 er antall fyrstikker $1 \cdot 5 + 1$
i figur nummer 2 er antall fyrstikker $2 \cdot 5 + 1$
i figur nummer 3 er antall fyrstikker $3 \cdot 5 + 1$
i figur nummer 4 er antall fyrstikker $4 \cdot 5 + 1$
i figur nummer 5 er antall fyrstikker $5 \cdot 5 + 1$
i figur nummer n er antall fyrstikker $n \cdot 5 + 1 = 5n + 1$

Tegn av tabellen i arbeidsboka di og fyll inn.

Figur nummer	Antall fyrstikker
1	
2	
3	
4	
5	
20	
100	
n	

Figur 4.4: Oppgåve 47, 48 og 49 i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 99

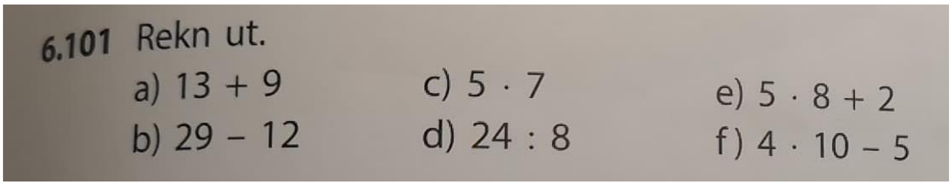
Dei tre oppgåvene i figur 4.4 stimulerer til resonnerande aktivitet ettersom elevane jobbar med å generalisera mønster, og finne ein formel som gjer at ein kan finne antal fyrstikker ut i frå figur nummeret. I rammeverket til Niss går desse oppgåvene under *tankegangskompetanse*, *resonneringskompetanse*, *representasjonskompetanse* og *symbol – og formalismekompetanse.* I rammeverket til Kilpatrick er den plassert under *forståing, berekning, anvendelse* og *resonnering.*

Frå kategoriseringa av oppgåver viser det at oppgåvene som kjem i slutten av kapittelet krev at eleven tar i bruk fleire komponentar eller delkompetansar på same tid, for å løysa ei oppgåve. Ein ser at dei aller fleste oppgåvene stimulerer til genererande og transformerande aktivitetar, og relativt få til resonnerande aktivitetar. I tillegg ser ein at oppgåvene som kjem mot slutten av kapittelet ofte inneheld tekstoppgåver, medan dei fyrste oppgåvene elevene møter i kapittelet ofte er «rekn ut» - oppgåver. Det kan vere ein grunn for at elevane ser algebra som abstrakt og prosedyreorienter. Tidlegare i kapittelet finn ein nokre oppgåver som skal vere meir utfordrande etter kvart tema som vert presentert. Dette er ofte typiske «rekn ut»- oppgåver. Desse oppgåvene går som regel under dei same delkompetansane og komponentane som dei andre oppgåvene i byrjinga av kapittelet. Forskjellen er at dei inneheld fleire ledd i ein rekneoperasjon.

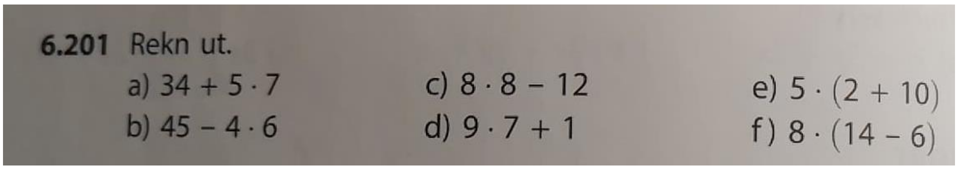
4.2.2 Differansiering av oppgåver

Både Tetra og Faktor har oppgåver som er nivådifferensierte. Faktor har ei eige oppgåvebok der elevane kan velje mellom tre ulike kategoriar, der kategori 1 består av enkle oppgåver og kategori 3 består av meir utfordrande oppgåver. Tetra 8 Elevbok har eit blått og eit raudt kurs etter grunnkurset. Der blått kurs inneheld enklare oppgåver og raudt kurs inneheld nytt lærestoff og meir utfordrande oppgåver.

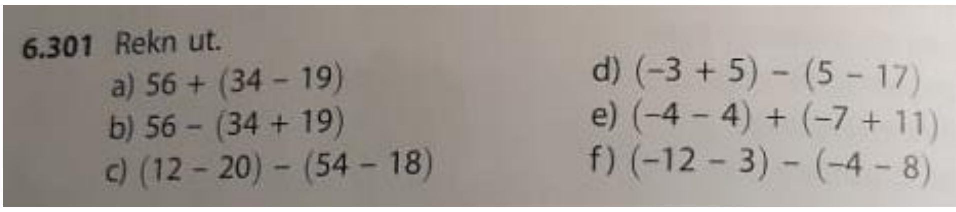
I Faktor 8 Oppgåvebok har kvar kategori same inndeling med tanke på underoverskrifter som grunnboka har (sjå metodekapittel). Dersom vi ser på dei oppgåvene elevane møter fyrst i kvar kategori, finn vi oppgåvene som er vist nedanfor.


6.101 Rekn ut.
a) $13 + 9$ c) $5 \cdot 7$ e) $5 \cdot 8 + 2$
b) $29 - 12$ d) $24 : 8$ f) $4 \cdot 10 - 5$

Figur 4.5: Oppgårve 6.101 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 1, side 119


6.201 Rekn ut.
a) $34 + 5 \cdot 7$ c) $8 \cdot 8 - 12$ e) $5 \cdot (2 + 10)$
b) $45 - 4 \cdot 6$ d) $9 \cdot 7 + 1$ f) $8 \cdot (14 - 6)$

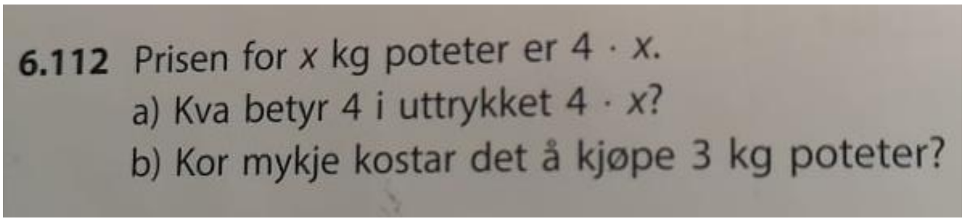
Figur 3.6: Oppgåve 6.201 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 2, side 122


6.301 Rekn ut.
a) 56 + (34 − 19)
b) 56 − (34 + 19)
c) (12 − 20) − (54 − 18)
d) (−3 + 5) − (5 − 17)
e) (−4 − 4) + (−7 + 11)
f) (−12 − 3) − (−4 − 8)

Figur 4.7: Oppgåve 6.301 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 3, side 126

Alle tre oppgåvene er plassert under transformerande aktivitetar, ettersom oppgåva ber om at taluttrykka skal reknast ut, og elevane arbeider då med reknetekniske prosessar. Å arbeide med slike aktivitetar gjev i dette tilfelle at alle tre oppgåvene er plassert under *berekning* i Kilpatrick sitt rammeverk, og under *symbol – og formalismekompetanse* i Niss sitt rammeverk. Grunnen til at alle fell under dei komponentane er fordi eleven må kunne reknereglar (reknerekkefølgje) og elementær rekning for å løyse desse oppgåvene. Som vi ser ut i frå oppgåvene er progresjonen at i kategori 1 møter ein fyrst enkle reknestykke og eit par oppgåver der eleven må vite om ein skal rekne multiplikasjon eller addisjon fyrst. I kategori 2, skal eleven øve seg på reknerekkefølgje og kva ein skal rekne fyrst og sist dersom taluttrykket inneheld ein parentes. I kategori 3 får elevane meir utfordrande oppgåver der tala er større, og har ulike forteikn. Som vi ser er oppgåvene i kategori 3 meir utfordrande enn i kategori 1 og 2. Likevel er dei plassert under den same delkompetansen eller komponenten ettersom dei gjev kompetanse i same kategori, men dei oppgåvene i kategori 3 gjev kanskje ein høgara kompetanse.

Ser vi litt lengre bak i oppgåveboka, under underoverskrifta «setje inn tal i uttrykk», finn vi desse tre oppgåvene i kvar sin kategori: Den fyrste oppgåva (figur 4.8), er henta frå kategori 1. Denne oppgåva går under *tankegangskompetanse* og *symbol – og formalismekompetanse.* Ettersom eleven vert bedt om å forklara kva 4 står for i uttrykket, og fordi eleven må bruke grunnleggjande rekning i deloppgåve b). I Kilpatrick sitt rammeverk er denne plassert under *forståing* og *berekning.* Arbeid med slike oppgåver stimulerer til genererande og transformerande aktivitet.


6.112 Prisen for x kg poteter er $4 \cdot x$.
a) Kva betyr 4 i uttrykket $4 \cdot x$?
b) Kor mykje kostar det å kjøpe 3 kg poteter?

Figur 4.8: Oppgåve 6.112 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 1, side 120

Oppgåva i figur 4.9 er henta frå kategori 2 i Faktor 8 Oppgåvebok. Denne oppgåva kan kanskje ved fyrste blikk sjå meir utfordrande ut enn den eigenleg er, på grunn av mykje tekst. Denne oppgåva er plassert under *symbol – og formalismekompetanse* (Niss) og *berekning*(Kilpatrick). Ettersom oppgåva ber om ei utrekning av uttrykket når eleven får oppgjeve kva verdi x har. Arbeid med slike oppgåver stimulerer til transformerande aktivitet.

6.215 Simen kjøper ei kasse med 24 flasker brus. Han betalar 15 kr i pant for kassen. Uttrykket $24x + 15$ viser kor mykje Simen må betale i kroner når x står for prisen i kroner per flaske brus. Kor mykje må Simen betale når
a) $x = 12$ kr b) $x = 15$ kr

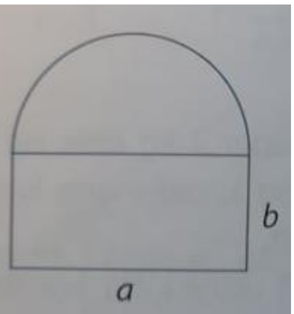
Figur 4.9: Oppgåve 6.215 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 2, side 123

Oppgåva i figur 4.10 er henta frå Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 3. I kategori 3 finn ein meir utfordrande oppgåver. Her ser vi ei oppgåve som går under fleire delkompetansar i Niss sitt rammeverk for matematisk kompetanse. *Tankegangskompetansen* kjem fram gjennom at elevane må kjenna til matematisk omgrep som *ukjent* og *pi*. *Symbol – og formalismekompetanse* kjem til syne ved at elevane i deloppgåva a) må ha kjennskap til symbola og vise kva dei står for (gjeld og basale teikn), og at eleven i deloppgåve b) må kunne setje tal inn for bokstavane og rekne ut uttrykket. *Representasjonskompetansen* kjem til syne i deloppgåve a) når elevane må kunne tolke den matematiske representasjonen som er presentert. I tillegg til at elevane må formulera med ord kva uttrykket står for, på den måten må eleven kunne byte mellom ulike representasjonar. *Resonneringskompetansen* kjem fram i oppgåva ved at elevane må forklare eit uttrykk og kva det står for. I Kilpatrick sitt rammeverk går denne oppgåva under *berekning*, av same årsaker som den går under *symbol – og formalismekompetanse.* Den går òg under *forståing* ettersom krev oversetjing frå ein

6.310 Teikninga til høgre består av ein halvsirkel og eit rektangel.

Lengda av rektangelet er a, og breidda er b.

a) Forklar kva uttrykket $a + 2b + 0{,}5a \cdot \pi$ står for.
b) Rekn ut uttrykket når $a = 10$ cm og $b = 6$ cm.

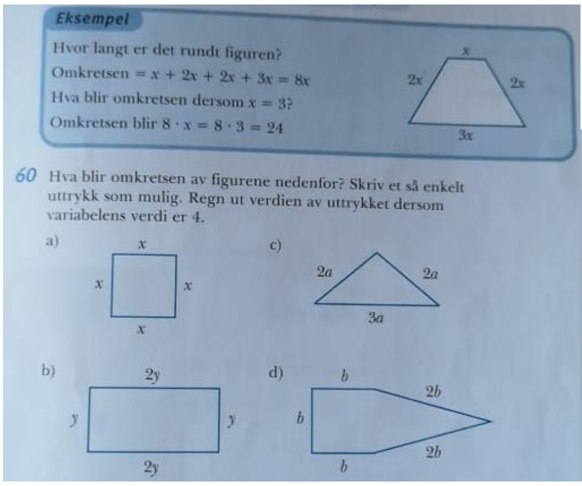


Figur 4.10: Oppgåve 6.310 i Faktor 8 Oppgåvebok, kategori 3, side 128

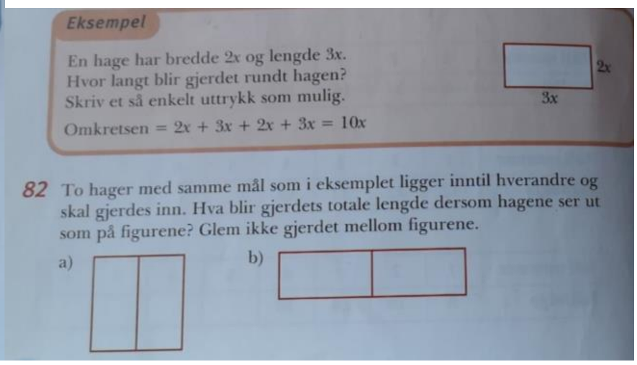
representasjon (algebraisk) til ein anna representasjon (skriftleg, naturleg språk). Oppgåva er òg plassert under resonnering ettersom oppgåva spør om ein *forklaring* på kva uttrykket står for.

Som vi ser i Faktor 8 Oppgåvebok, byrjar dei tre kategoriane med oppgåver som stimulerer til transformerande aktivitet. Mot slutten av kategoriane finn ein fleire oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet, og då flest oppgåver i kategori 3 som går under denne aktiviteten. Det same gjeld for rammeverka for matematisk kompetanse. Oppgåvene i byrjinga av kvart kapittel går mykje på ferdigheitstrening, medan jo vanskelegare kategori eleven vel, jo fleire oppgåver er det som går på andre områder for matematisk kompetanse som eleven får arbeide med.

I Tetra 8 Elevbok, kan elevane velja mellom blått og raudt kurs etter grunnkurset. I begge kursa vert det gjeve dømer på korleis elevane skal løyse dei neste oppgåvene.



Figur 4.11:Oppgåve 60 i Tetra 8 Elevbok, blått kurs, side 107

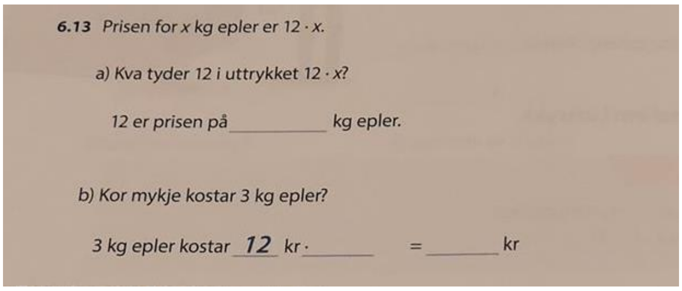


Figur 4.12:Oppgåve 82 i Tetra 8 Elevbok, raudt kurs, side 112

Oppgåve 60 i blått kurs (figur 4.11) stimulerer til transformerande og genererande aktivitet, ettersom elevane må skrive eit uttrykk for omkretsen til figurane og deretter rekne ut verdien av uttrykket når dei kjenner til verdien av variabelen. Det same gjeld for oppgåve 82 (figur 4.12). Oppgåve 60 går under *tankegangskompetanse*, *symbol – og formalismekompetanse* og *representasjonskompetanse* i Niss sitt rammeverk. I Kilpatrick sitt rammeverk går denne oppgåve under *forståing* og *berekning.* Oppgåve 82 går òg under *forståing og berekning* ettersom eleven må finne setje opp eit reknestykke med algebraiske symbol, og deretter rekne ut, og på den måten representera omkretsen til figurane algebraisk. I Niss sitt rammeverk går denne oppgåve under *representasjon* og *symbol – og formalismekompetanse.*

Vi ser at ulike delar av det å oppnå matematisk kompetanse er representert i dei ulike kategoriane, men at vi òg finn mange av dei same i alle tre kategoriane. Ei oppgåve i kategori 1 vil kanskje vere vanskeleg for nokon 8.klassingar og lett for andre 8.klassingar. Ved å arbeida med stadig meir utfordrande oppgåver får dei utvikla den matematiske kompetansen sin. Likevel er det dei elevane som vel kategori 3 som får arbeida med fleire delkompetansar og komponentar innanfor matematisk kompetanse, enn dei som vel kategori 1 og 2. Det vil seie at berre dei flinkaste elevane møter dei vanskelegaste oppgåvene. I kategori 1 og 2 finn vi at flesteparten av oppgåvene går under kategoriar for ferdigheitstrening. Det same gjeld for Tetra 8 Elevbok. I raudt kurs, møter eleven eit større spekter av matematisk kompetanse, i tillegg til at dei elevane som arbeider med desse oppgåvene vert introdusert for nytt fagstoff. Det gjer ikkje dei elevane som vel å arbeida med blått kurs. I blått kurs finn ein mykje av dei same oppgåvene vi finn i kategori 1 og 2 i Faktor 8 Oppgåvebok. Det vil seie at dei elevane som arbeider med blått kurs, ikkje får gjennomgått like mykje nytt fagstoff som dei som arbeider med raudt kurs.

I tillegg har kvart læreverk ei oppgåvebok for dei elevane som synest lærestoffet og oppgåvene i grunnkurset (Tetra) og grunnboka (Faktor) er for vanskeleg. Tetra har eit treningshefte, og Faktor har ei alternativ oppgåvebok. I begge bøkene er lærestoffet introdusert på ein enklare måte, og med mindre tekst. I tillegg kan elevane skrive direkte inn i boka. Vi ser ut i frå den kvantitative analysen at dei aller fleste oppgåver frå Tetra 8 Treningshefte og Faktor 8 Oppgåvebok går under *berekning/symbol – og formalismekompetanse* og/eller *forståing/representasjonskompetanse.* Dømer frå desse to læreverka er gjeve tidlegare. Faktor 8 Alternativ oppgåvebok har nokon oppgåver som går under «andre komponentar» eller «andre delkompetansar» (sjå kap. 4.1). Til dømes inneheld den alternative oppgåveboka oppgåver der eleven må forklara kva talet i eit uttrykk betyr. Det gjer at den oppgåva (deloppgåve a) i figur 4.13 fell under *tankegangskompetanse* i niss sitt rammeverk. I Kilpatrick sitt rammeverk går den under *forståing*. I tillegg har Faktor 8 Alternativ oppgåvebok nokre oppgåver


6.13 Prisen for x kg epler er $12 \cdot x$.

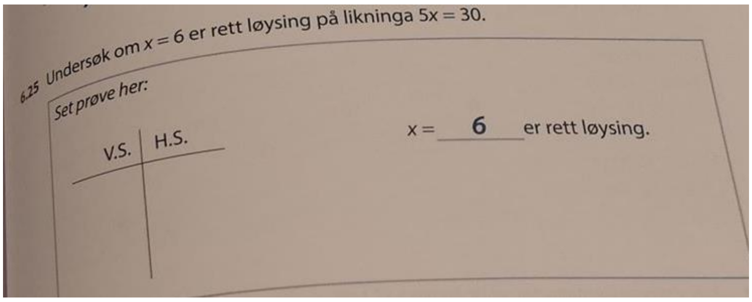
a) Kva tyder 12 i uttrykket $12 \cdot x$?

12 er prisen på ________ kg epler.

b) Kor mykje kostar 3 kg epler?

3 kg epler kostar 12 kr · ________ = ________ kr

Figur 4.13: Oppgåve 6.13 i Faktor 8 Alternativ Oppgåvebok, side 78 som går under *resonneringskompetanse* i rammeverket til Niss og under *resonnering* i rammverket til Kilpatrick. Eit døme på ei slik oppgåve er vist i figur 4.14. Som vi såg i den kvantitative analysen er det få oppgåver som går under «andre komponentar» eller «andre delkompetansar» i Faktor 8 Alternativ oppgåvebok. Medan i Tetra 8 Treningshefte går alle oppgåvene under *forståing* og/eller *berekning* i rammeverket til Kilpatrick, og under *symbol – og formalismekompetanse* og/eller *representasjonskompetanse* i rammeverket til Niss.

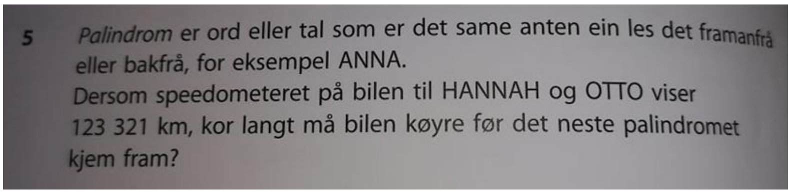


Figur 4.14: Oppgåve 6.25 i Faktor 8 Alternativ Oppgåvebok, side 81

4.2.3 Oppgåver som vert framheva av lærebokforfattarane

Innanfor Kilpatrick sitt rammeverk for utvikling av matematisk kompetanse finn vi ein komponent som han kalla *engasjement*. Denne komponenten inneber blant anna det å ha tru på at ein kan verte god i matematikk og at arbeid ein legg til grunn bidreg til læring. Ein slik komponent er vanskeleg å sjå når ein analyserer lærebøker. Kva som engasjerer og motiverer elevane kan ikkje denne oppgåva sei noko om. Likevel vart det tatt eit val om å lage kriterier til komponenten som ein kan sjå ved å analysere lærebøker. Oppgåver som vert framheva av lærebokforfattarane er vorte plassert under denne kategorien. Det gjeld oppgåver der elevane blant anna skal samarbeide, bruke PC for å løyse oppgåver, grubleoppgåver (i Tetra) og «litt av kvart»- oppgåver (i Faktor). Grunnen til at dei vert plassert under komponenten *engasjement* er at desse oppgåvene ikkje er som dei typiske oppgåvene elevane ellers møter i matematikken, og krev ein anna form for tenking, der elevane må ta i bruk kunnskap dei har lært frå før av. Slike oppgåver krev ofte andre områder for matematisk kompetanse enn dei oppgåvene som går under ferdigheitstrening. Det kan vere oppgåver som elevane kan relatera til kvardagen sin, eller oppgåver som krev diskusjon og samarbeid med andre elevar for å løyse. Oppgåver som dette er nok meint for å gje utfordringar der eleven må tenkja på ein anna måte enn når dei løyser «rekn ut» - oppgåver. På den måten kan eleven få ein djupare forståing. Slike oppgåver kan og skapa interesse for faget. Oppgåver som vert rekna som «framheva av lærebokforfattarane» inneheld andre komponentar enn berekning og forståing i rammeverket til Kilpatrick og symbol – og formalismekompetanse og representasjonskompetanse i rammeverket til Niss. Alle oppgåvene er vorte presentert her, går under komponenten *engasjement* i rammeverket til Kilpatrick. I tillegg jobbar elevane med eit større spenn av komponentar og delkompetansar i desse oppgåvene.

Relativt få oppgåver i begge læreverka stimulerer til den resonnerande aktiviteten. Her vert det vist to dømer, eit frå Tetra 8 Elevbok (figur 4.16) og eit frå Faktor 8 Grunnbok (figur 4.15). Begge oppgåvene er henta frå den delen av læreboka som vert kalla høvesvis «Grublisar» og «Noko å lure på». I Tetra 8 Elevbok kjem slike oppgåver etter grunnkurset og «test deg sjølv». I Faktor finn ein òg desse oppgåvene på slutten av kapittelet, etter «test deg sjølv».



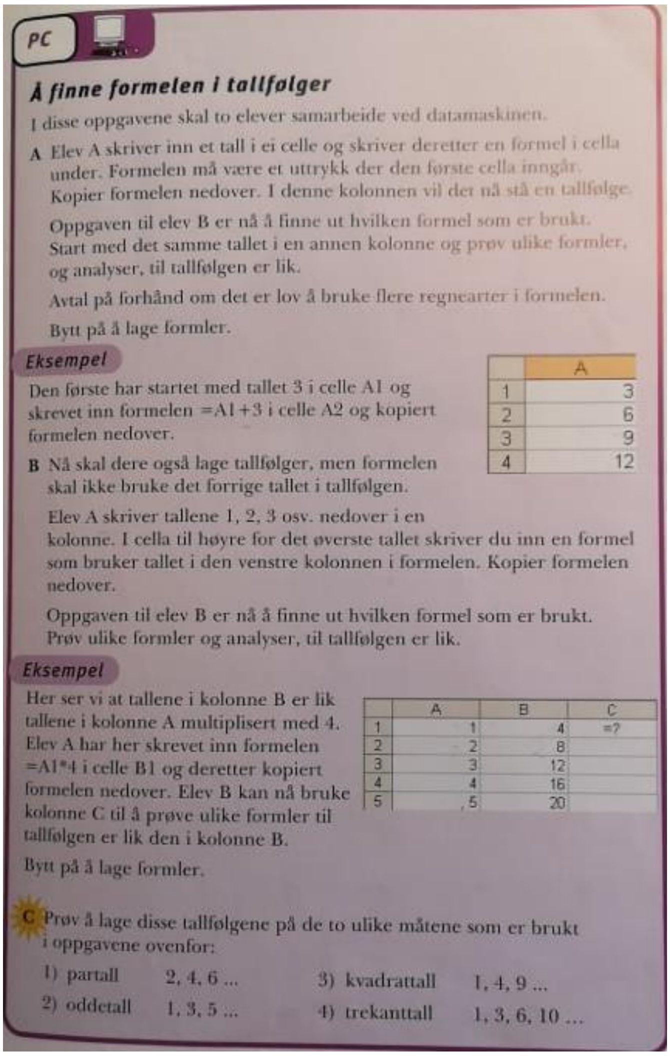
5 *Palindrom* er ord eller tal som er det same anten ein les det framanfrå eller bakfrå, for eksempel ANNA.
Dersom speedometeret på bilen til HANNAH og OTTO viser 123 321 km, kor langt må bilen køyre før det neste palindromet kjem fram?

Figur 4.15:Oppgåve 9 i Faktor 8 Grunnbok, "Noko å lure på", side 202

Figur 4.16: «grublisar» i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 105

Oppgåva om palindrom er plassert under *problembehandlingskompetanse* i rammeverket til Niss og under *anvendelse* i rammeverket til Kilpatrick. Det same gjeld for oppgåva med fyrstikker. Naalsund hever at skulealgebraen ofte er prega av ferdigheitstrening, og at norske elevar derfor har ein instrumentell forståing av algebra. Cuoco m.fl (1996) hevdar at arbeidet med algebra bør fremmja ei glede hos elevane ved å finne skjulte mønster. Ved å arbeide med slike oppgåver får elevane mogelegheit til å få ei relasjonell forståing av algebra.

Eit døme på ei oppgåve som er plassert under kategorien *engasjement* i rammeverket til Kilpatrick er vist i figur 4.17. Den er henta frå Tetra 8 Elevbok. Den er plassert under kategorien *engasjement* fordi to elevar skal samarbeide ved å løyse ei oppgåve på PC. Ved å nytte Excel får elevane trening i å bruke rekneark på PC. Dette kan gje motivasjon til å arbeide med å finne talmønster, og finne uttrykk som generaliserer talmønster. Ved at elevane lager formlar (eller uttrykk) for talfølger gjer at denne oppgåva òg fell under komponenten *forståing*. I tillegg til *anvendelse*, ettersom elevane må sjå etter mønster i talfølgja. Dette er ikkje ei «typisk lærebok» - oppgåve. Den kan ikkje løysast ved rutineferdigheiter og elevane må sjølv lage og formulera eit problem og deretter løysa det. Ved å arbeida med å generalisera mønster på denne måten får elevane arbeida med resonnerande og genererande aktvitetet.


PC

Å finne formelen i tallfølger

I disse oppgavene skal to elever samarbeide ved datamaskinen.

A Elev A skriver inn et tall i ei celle og skriver deretter en formel i cella under. Formelen må være et uttrykk der den første cella inngår. Kopier formelen nedover. I denne kolonnen vil det nå stå en tallfølge.

Oppgaven til elev B er nå å finne ut hvilken formel som er brukt. Start med det samme tallet i en annen kolonne og prøv ulike formler, og analyser, til tallfølgen er lik.

Avtal på forhånd om det er lov å bruke flere regnearter i formelen.

Bytt på å lage formler.

Eksempel

Den første har startet med tallet 3 i celle A1 og skrevet inn formelen =A1+3 i celle A2 og kopiert formelen nedover.

	A
1	3
2	6
3	9
4	12

B Nå skal dere også lage tallfølger, men formelen skal ikke bruke det forrige tallet i tallfølgen.

Elev A skriver tallene 1, 2, 3 osv. nedover i en kolonne. I cella til høyre for det øverste tallet skriver du inn en formel som bruker tallet i den venstre kolonnen i formelen. Kopier formelen nedover.

Oppgaven til elev B er nå å finne ut hvilken formel som er brukt. Prøv ulike formler og analyser, til tallfølgen er lik.

Eksempel

Her ser vi at tallene i kolonne B er lik tallene i kolonne A multiplisert med 4. Elev A har her skrevet inn formelen =A1*4 i celle B1 og deretter kopiert formelen nedover. Elev B kan nå bruke kolonne C til å prøve ulike formler til tallfølgen er lik den i kolonne B.

	A	B	C
1	1	4	=?
2	2	8	
3	3	12	
4	4	16	
5	5	20	

Bytt på å lage formler.

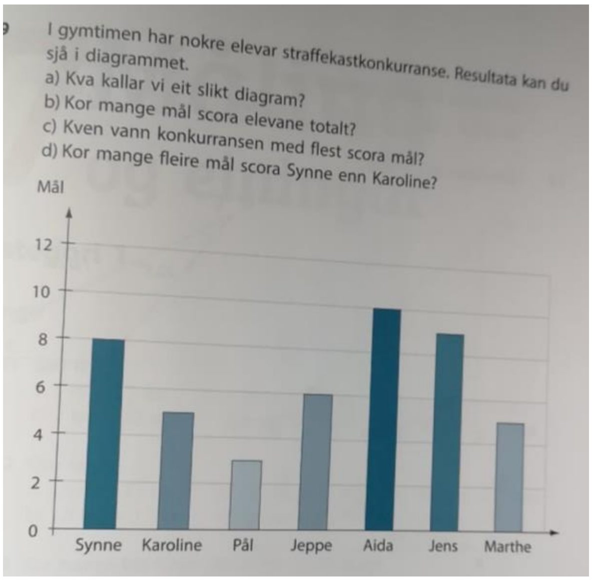
C Prøv å lage disse tallfølgene på de to ulike måtene som er brukt i oppgavene ovenfor:

1) partall 2, 4, 6 ...
2) oddetall 1, 3, 5 ...
3) kvadrattall 1, 4, 9 ...
4) trekanttall 1, 3, 6, 10 ...

Figur 4.17: «PC – oppgåve» i Tetra 8 Elevbok, grunnkurs, side 101

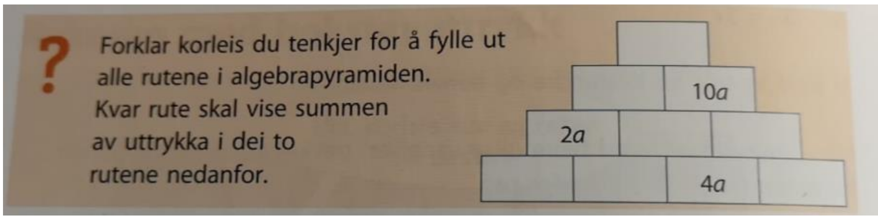
Ved å arbeide med resonnerande aktivitetar, kan elevane få motivasjon til å arbeide med transformerande aktivitetar. I Niss sitt rammeverk fell denne oppgåva under *kommunikasjonskompetanse* – ettersom elevane må samarbeide om oppgåva og då kommunisere om matematikk. Den fell òg under *hjelpemiddelkompetansen* ettersom elevane bruker PC og Excel. På den måten få dei kompetanse til å sjå kva for nokon hjelpemiddel som kan brukast for matematisk verksomheit, og finne Excel som eit nyttig verktøy. I tillegg fell PC- oppgåva under *problemløysingskompetanse* og *tankegangskompeanse. Tankegangskompetanse* – fordi elevane må arbeida med å generalisera talfølgjer. *Problemløysingskompetanse* – fordi elevane må finna og formulera ei talfølgje og ein formel. På den måten krev oppgåva ein matematisk undersøking som ikkje kan løysast ved å nytta rutineferdigheiter.

Oppgåve vist i figur 4.18 er plassert under *modelleringskompetanse* i rammeverket til Niss. Dette er den einaste oppgåva som er plassert under denne delkompetansen etter analysen av algebrakapittelet i Tetra 8 og Faktor 8. Denne oppgåva finn ein under «litt av kvart» i Faktor 8 Oppgåvebok. I Kilpatrick sitt rammeverk går den under *anvendelse*, ettersom eleven må svare på spørsmål som ein må lese av grafen. I tillegg til *engasjement.* I følgje Kaput, Carraher & Blanton (2008) er ein mogleg tilnærmingsmåte til algebra å sjå på algebra som ein samling av modellerande språk både innanfor og utanfor matematikken.



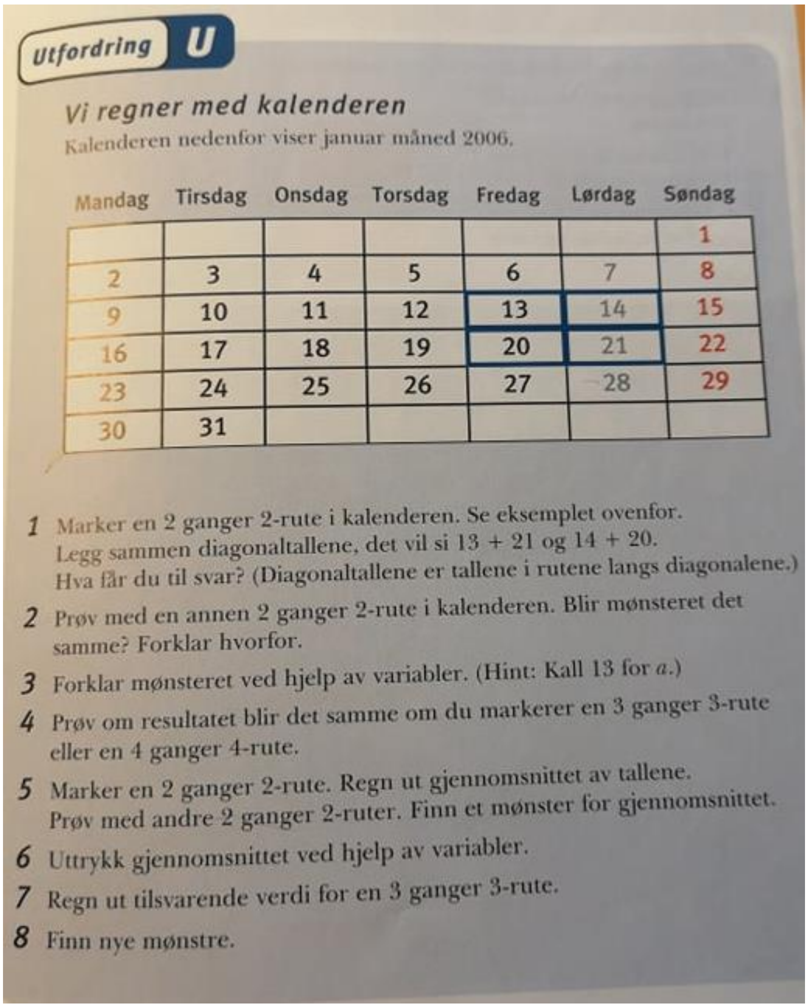
Figur 4.18: Oppgåve 9 i Faktor 8 Oppgåvebok, "Litt av kvart", side 131

I Faktor 8 Grunnbok finn ein innimellom lærestoff og oppgåver, frioppgåver, som vist i figur 4.19. Denne oppgåve stimulerer til resonnerande aktivitet, og er plassert under *tankegangskompetanse* og *resonneringskompetanse* i rammeverket til Niss. I Kilpatrick sitt rammeverk er den plassert under *anvendelse*, *resonnering*, og *engasjement.*



Figur 4.19: «Frioppgåve» i Faktor 8 Grunnbok, side 192

Det siste ein møter i kapittelet om algebra i Tetra 8 Elevbok, er ei utfordring. Denne oppgåva (figur 4.20) stimulerer til resonnerande aktivitet. Ettersom eleven må rekne ut diagonaltala og lage matematiske uttrykk for mønster, er den plassert under *symbol – og formalismekompetanse* og *representasjonskompetanse*. I tillegg er den plassert under *resonneringskompetanse* og *tankegangskompetanse* og *problemløysingskompetanse* ettersom elevane må forklara svara sine og fordi oppgåva ikkje kan løysast ved rutineferdigheiter. I Kilpatrick sitt rammeverk kan den plassert under alle dei fem komponentane. I ei slik oppgåve må eleven nytte fleire områder innanfor matematisk kompetanse for å løyse oppgåve. Eleven må arbeida med grunnleggande rekning, variablar, generalisering og å sjå etter mønster. I tillegg må dei forklara mønsteret. Maseon (1996) hevdar at å arbeida med generalisering gjer at algebra vert meir tilgjengleg for elevane. Kieran (2004) hevdar at blant anna å leggja merke til strukturar og generalisering er med på å utvikle algebraisk tenking. Eleven må her studere endringar i mønster og forklare kvifor endringar skjer. I tillegg må dei bruke variablar for å forklara mønsteret. Då får elevane trening i å lage uttrykk som representerer ein situasjon (i dette tilfellet mønsteret). Typisk for begge læreverka er at slike oppgåver, der eleven må bruke fleire områder innanfor matematisk kompetanse for å løysa utfordringa, kjem i slutten av kapittelet. Gjerne då slik som her, som ei utfordring, eller som andre oppgåver som er framheva av lærebokforfattarane. Ein anna ting som er felles for berre læreverka er at slike oppgåver ikkje har oppgåvenummer. Dei kjem innimellom dei oppgåvene som er nummererte.



Utfordring U

Vi regner med kalenderen

Kalenderen nedenfor viser januar måned 2006.

Mandag	Tirsdag	Onsdag	Torsdag	Fredag	Lørdag	Søndag
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

1 Marker en 2 ganger 2-rute i kalenderen. Se eksemplet ovenfor. Legg sammen diagonaltallene, det vil si 13 + 21 og 14 + 20. Hva får du til svar? (Diagonaltallene er tallene i rutene langs diagonalene.)

2 Prøv med en annen 2 ganger 2-rute i kalenderen. Blir mønsteret det samme? Forklar hvorfor.

3 Forklar mønsteret ved hjelp av variabler. (Hint: Kall 13 for *a*.)

4 Prøv om resultatet blir det samme om du markerer en 3 ganger 3-rute eller en 4 ganger 4-rute.

5 Marker en 2 ganger 2-rute. Regn ut gjennomsnittet av tallene. Prøv med andre 2 ganger 2-ruter. Finn et mønster for gjennomsnittet.

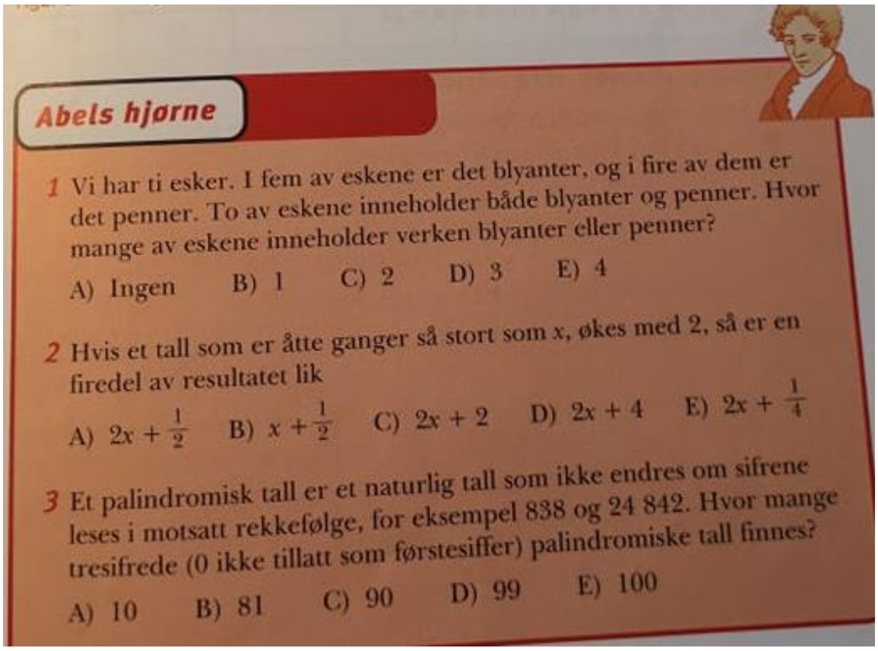
6 Uttrykk gjennomsnittet ved hjelp av variabler.

7 Regn ut tilsvarende verdi for en 3 ganger 3-rute.

8 Finn nye mønstre.

Figur 4.20: «Utfordring» i Tetra 8 Elevbok, side 119

I slutten av raudt kurs i Tetra 8 Elevbok, kjem oppgåver som er henta frå Abel konkurransen. Oppgåvene (figur 4.21) i Abels hjørne stimulerer til resonnerande aktivitet. På grunna av at elevane må prøva seg fram med rekning (oppgåve 2) er den òg plassert under transformerande aktivitet. I rammeverket til Niss er den plassert under *problembehandlingskompetanse, representasjonskompetanse* og *symbol – og formalismekompetanse.* I Kilpatrick sitt rammeverk går den under *berekning, anvendelse og engasjement.* Oppgåve 1 og 3 i dømet som vist kan tenkjast at 8.klassingar ville brukt «gjett og sjekk» - metoden på. På den måten dei kome fram til svaret, utan å bruke rutineferdigheiter.


Abels hjørne

1 Vi har ti esker. I fem av eskene er det blyanter, og i fire av dem er det penner. To av eskene inneholder både blyanter og penner. Hvor mange av eskene inneholder verken blyanter eller penner?

A) Ingen B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2 Hvis et tall som er åtte ganger så stort som x, økes med 2, så er en firedel av resultatet lik

A) $2x + \frac{1}{2}$ B) $x + \frac{1}{2}$ C) $2x + 2$ D) $2x + 4$ E) $2x + \frac{1}{4}$

3 Et palindromisk tall er et naturlig tall som ikke endres om sifrene leses i motsatt rekkefølge, for eksempel 838 og 24 842. Hvor mange tresifrede (0 ikke tillatt som førstesiffer) palindromiske tall finnes?

A) 10 B) 81 C) 90 D) 99 E) 100

Figur 4.21: «Abels hjørne» i Tetra 8 Elevbok, raudt kurs, side 117

Som sagt, vart det tatt eit val om å plassera slike oppgåver under *engasjement* i rammeverket til Kilpatrick. Det er likevel viktig å poengtera at kva som engasjerer og motiverer ein elev, er individuelt. Det som motiverer ein elev, treng nødvendigvis ikkje motivere ein anna elev. Likevel kan det å jobba med varierte oppgåver styrke motivasjonen til elevane, og at elevane på den måten kan sjå på matematikk som eit nyttig og meiningsfylt fag. Av erfaring har eg opplevd at mange elvar spør «kva skal vi bruke dette til?» når ein arbeider med matematikk. Oppgåver som denne PC- oppgåva kan kanskje hjelpe elevane til å sjå korleis ein kan nytte seg av matematiske verkemidel i dagleglivet, og dermed kan dei finna faget som meiningsfylt.

5. Diskusjon

I denne studien er det vorte undersøkt kva for nokon matematiske kompetansar algebrakapittelet i to norske læreverk legg til rette for på 8. trinn. På bakgrunn av dette har oppgåvene i Tetra 8 og Faktor 8 vorte analysert i forhold til tidlegare forsking og teorien som vart presentert i kapittel 2. I tillegg har oppgåvene vorte analysert i forhold til kva for ein algebraisk aktivitet dei stimulerer til. Dette kapittelet presenterer dei mest framtredande resultata får analysen, og diskuterer dei opp mot teorien og tidlegare forsking.

5.1 Resultat frå kvantitativ analyse

Etter å ha undersøkt 414 oppgåver i algebrakapittelet til to læreverk, har eg fått eit godt innblikk i korleis læreverka legg til rette for matematisk kompetanse, og korleis oppgåvene fordeler seg innanfor dei ulike områda for matematisk kompetanse. Gjennom å analysera oppgåvene i forhold til kva for ein algebraisk aktivitet oppgåvene fell under, har det gjeve eit bilete av kva aktivitet oppgåvene stimulerer til.

Resultata får den kvantitative analysen viser at eit stort fleirtalt av oppgåvene går under transformerande og/eller genererande aktivitet, medan færre oppgåver stimulerer til resonnerande aktivitet. I LK06 står det at «*matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er. Dette har òg språklege aspekt, som det å formidle, samtale om og resonnere omkring idear*» (Kunnskapsdepartementet, 2013). Ettersom både problemløysing, modellering, resonnering og vurdering av løysingar er nemnt i læreplanen kan det diskuterast kvifor ikkje fleire oppgåver går under resonnerande aktivitet. Modellering og omforma eit problem til matematisk form, er òg knytt til genererande aktivitet. Til tross for at ein del oppgåver inneheld den genererande aktiviteten, hevdar Wilson (2003) at denne aktiviteten er vanskeleg for elevane. Spesielt oppgåver der elevane vert bede om å representere ei tekstoppgåve algebraisk. I følgje Kieran (2014) er det i denne aktiviteten meining oppstår. At elevane synest det er vanskeleg å representera ei tekstoppgåve algebraisk kan ha samanheng med det Cai og Knuth (2011) hevdar; at å tenka algebraisk krev ein anna måte å tenkja på, enn det elevane har som vane frå aritmetikken. Det kan òg koblast til Kieran (2004) sine fem punkt (sjå kap. 2.2.2), som ein bør byrje å arbeide med på tidlegare trinn, for å kunne gjere overgangen frå aritmetikk til algebra lettare for elevane.

Innanfor rammeverka for matematisk kompetanse ser ein tydleg at dei fleste oppgåver går under komponentane *forståing* og/eller *berekning* i Kilpatrick sitt rammeverk, og under delkompetansane *symbol – og formalismekompetanse,* og/eller *representasjonskompetanse* i rammeverket til Niss. Å arbeide med slike oppgåver kan koblast til det Kunnskapsløftet kallar ferdigheitstrening. Som Bergsten m.fl (2016, s.12) skriv, er ofte bokstavrekning den synlege skilnaden mellom algebra og aritmetikk for elevane, og på den måten kan matematikken verte sett på som prosedyreorientert. Likevel er det viktig å poengtera at dersom elevane skal utvikla algebraisk tenking, må dei læra å bruka symbola som eit verktøy (Kieran, 2004), og for å kunne gjere det må dei lære å rekne med bokstavar. Slike oppgåver har ofte til felles at dei kan løysast ved å følgje algoritmar og hugsereglar. Desse er ofte introdusert i læreverket, og ein kan bruke dømet som er gjeve til å løyse dei påfølgjande oppgåvene. Dette ser vi igjen i Naalsund (2012) sin studie, då ho hevdar at dei i matematikk ofte er under algebra ein møter algoritmar og hugsereglar. Det kan vere årsaken til at mange norske elevar si forståing av algebra er instrumentell. Elevane lærer å følgje reglar og algoritmar på riktig måte, men får gjerne ikkje ein forståing av kvifor det er slik. Dei fleste oppgåvene i begge læreverka går på reknetekniske prosessar, og det kan då tenkjast at elevane i mindre grad får ein relasjonell forståing. Dette ser vi igjen i Jopperud (2015) sin studie, der ho undersøkte to læreverk på 8. trinn. Resultata hennar viste at oppgåvene i læreverka la i stor grad til rette for at elevane utvikla instrumentell forståing.

Fleire har kritisert at skulealgebraen i dag framstår som generalisert aritmetikk, og at elevane bør verte introdusert for algebraisk tenking på tidlegare trinn. Blant anna Kieran, Lins og Kaput, og Rivera. I mine resultat ser ein at oppgåvene elevane møter på 8.trinn i stor grad legg til rette for at elevane arbeider instrumentelt, og at elevane ikkje får tilstrekkeleg øving i algebraisk tenking. Grunnen til dette kan kome av at det fins mange definisjonar, forklaringar og aspekt ved algebraen, som vert vektlagt ulikt hos ulike personar. Kaput, Carraher og Blaton (2008) hevdar blant anna at elevane utviklar syntaktisk leia resonnering, og handlingar på generaliseringar utrykt i symbolsystem seinare, enn å systematisk symbolisera generaliseringar av reglemessigheit og avgrensingar. Det kan vere ein grunn til at lærebøkene i 8. klasse i stor grad legg til rette for at elevane arbeider med oppgåver, som gjev elevane kompetanse i å kunne bruka reglar, formlar og algoritmar, og i mindre grad legg opp til oppgåver det elevane må resonnera, argumentera og bevisa. Når elevane møter mykje ferdigheitstrening møter dei ikkje algebra som språk.

5.2 Nivådifferensierte oppgåver

I begge læreverka finn vi oppgåver som er nivådelte. Tetra 8 Elevbok inneheld blått og raudt kurs der ein finn oppgåver på to nivå. Faktor 8 Oppgåvebok inneheld til kvart kapittel tre ulike kategoriar med nivådelte oppgåver. I tillegg har begge læreverka ei oppgåvebok som inneheld endå enklare oppgåver enn det ein finn andre plassar i dei to læreverka.

Då dei nivådifferernsierte oppgåvene vart analysert i Faktor 8 Oppgåvebok og Tetra 8 Elevbok (blått og raudt kurs), fann ein at desse oppgåvene i liten grad var nivådelte med tanke på kva for ein matematisk kompetanse oppgåva krevde. Variasjonen mellom oppgåvene i kategoriane og kursa som skulle vera lette, og dei som skulle vere meir utfordrande, var liten. For det meste var det høgare tal, fleire ledd eller meir tekst i oppgåvene som skilte dei. Det kan vere ein av desse faktorane som gjer at svake elevar vert redde for å prøve seg på slike oppgåver, og dermed vil oppgåva verke vanskelegare for eleven.

I Faktor 8 Oppgåvebok var kategori 1 og 2 beståande av oppgåver som for det meste utvikla elevane sin *representasjonskompetanse* og *symbol – og formalismekompetanse* i rammeverket til Niss. Medan oppgåvene i desse to kategoriane gjekk under *berekning* og *forståing*. I tillegg var det eit par oppgåver som gjekk på *resonnering*, då eleven skal setje prøve på likningar. At mange av oppgåvene i kategori 1 og 2 går under dei ovannemnte delkompetansane, og komponentane for matematisk kompetane, peiker på at oppgåvene stimulerer i stor grad til transformerande og genererande aktivitet. I Petersen (2015) sin studie viste resultata frå ein kartleggingsprøve som byggjar på Kieran sin modell for algebraisk aktivitet at elevar i 10.klasse har store utfordringar med genererande oppgåver, og matematisering av verklege situasjonar i algebra. Transformerande oppgåver fekk betre resultat. Vidare hevdar ho at spreiinga i resultata var store, men at elevane scoora best på dei resonnerande oppgåvene. I følgje hennar resultat var elevane relativt gode i algebraisk tenking, og aktivitetar der det ikkje vert stilt formelle krav i oppgåveløysinga. I Faktor 8 sitt læreverk finn ein relativt få oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet i forhold til transformerande og genererande aktivitet. I kategori 3 i Faktor 8 Oppgåvebok finn ein fleire oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet enn det vi gjer i kategori 2. I kategori 1 er det ingen oppgåver som stimulerer til denne aktiviteten. Ein ser òg at i kategori 3 finne ein fleire oppgåver som går under andre delkompetansar og komponentar for matematisk kompetanse enn det ein gjer i kategori 1 og 2. Blant anna er problembehandlingskompetanse, tankegangskompetanse og resonneringskompetanse sterkare representert i kategori 3 i Niss sitt rammeverk. I Kilpatrick sitt rammeverk er anvendelse og resonnering òg sterkare representert i kategori 3, enn det ein finn andre plassar i læreverket. I tillegg til å få arbeida med andre områder for matematisk kompetanse, får elevane som arbeider med oppgåvene i kategori 3 ferdigheitstrening. På grunn av dette vil elevar med høg måloppnåing i algebra få arbeida med å utvikla sin matematiske kompetanse på andre områder enn dei elevane som vel kategori 1 og 2. På bakgrunn av dette kan ein seie at det er berre dei flinkaste elevane som møter på oppgåver som vil utvikla deira matematisk kompetanse utover dei som er representert i kategori 1 og 2.

I Tetra 8 Elevbok møter eleven to kurs der raudt kurs inneheld meir utfordrande oppgåver enn ein gjer i blått kurs. I dette læreverket ser vi mykje av det same som i Faktor 8 Oppgåvebok. Det blå kurset inneheld for det meste oppgåver som stimulerer til genererande og transformerande aktivitet. Elevane får matematisk kompetanse innan komponentane *forståing* og berekning i Kilpatrick sitt rammeverk, og innan delkompetansane *symbol – og formalismekompetanse* og *representasjonskompetanse.* Det same gjeld raudt kurs. Likevel er det på slutten av kvart kurs fleire oppgåver der elevane skal studera mønster. Elevane skal blant anna finne antal fyrstikker i ein figur, og ein formel for å finne antal fyrstikker i figur n, eller finne neste ledd og uttrykket i talfølgjer. Slike oppgåver stimulerer til genererande og resonnerande aktivitet. I rammeverket til Kilpatrick går desse oppgåvene under *anvendelse, berekning og forståing*. Rammeverket til Niss plasserer desse under *tankegangskompetanse, problembehandlingskompetanse, representasjonskompetanse* og *symbol – og formalismekompetanse.* Sjølv om oppgåvene i begge kursa går under dei same delkompetansane og komponentane, er oppgåvene meir utfordrande i raudt kurs, enn i blått kurs. Det vil i dette tilfelle seie at til dømes mønsteret som fyrstikkene dannar, er enklare oppbygd, og det er lettare å sjå samanhengen mellom tala i talfølgja i blått kurs, enn i raudt kurs. I følgje Mason (1996) tek matematisk tenking plass når elevane får øving i å generalisera. Ved å arbeide med å finne mønster og relasjonar, og å uttrykke desse, vil det i følgje Kieran (2004) hjelpe elevane til å utvikla algebraisk tenking. Ein brukar ofte symbol for å generalisera eller uttrykka eit problem, og ved å arbeide med slike oppgåver får elevane «symbolfølelse». Dei må kunne lese symbola i eit uttrykk, og kunne vite kva det står for.

Med tanke på dei nivådelte oppgåvene i Faktor 8 Oppgåvebok og Tetra 8 Elevbok, ser ein at dei fyrste oppgåvene ein møter i kvar kategori gjev som oftast eleven matematisk kompetanse innan dei same komponentane og delkompetansane. Fyrst i kategori 3 i Faktor 8 Oppgåvebok møter eleven andre oppgåver som utviklar elevane sin matematisk kompetanse på andre områder enn berre ferdigheitstrening. I Tetra 8 Elevbok møter eleven oppgåver som gjev matematisk kompetanse på fleire områder i begge kategoriane. Likevel ser det ut som at det læreverka legg i «meir utfordrande oppgåver» ikkje berre har med kva type algebraisk aktivitet, eller kva type matematisk kompetanse elevane får, men heller oppgåver med høgare tal, fleire ledd og meir tekst.

I Tetra 8 Treningshefte og i Faktor 8 Alternativ oppgåvebok er det ingen oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet. Oppgåvene her stimulerer i størst grad til transformerande aktivitet, i tillegg til genererande aktivitet. Alle oppgåvene i begge desse bøkene går under *berekning* og *forståing* i rammeverket til Kilpatrick og under *representasjonskompetanse* og *symbol – og formalismekompetanse* i rammeverket til Niss. I tillegg har Faktor 8 Alternativ oppgåvebok ei oppgåve som går under *tankeganskompetanse*, og eit par oppgåver under *resonnering*. Rivera (2006) hevdar at forskjellar mellom aritmetikk og algebra kan forklara kvifor eldre elevar har vanskar med å lære algebra. Vidare hevdar Rivera at oppfattinga om algebra krev eit visst nivå av abstraksjon og mental modnad som ikkje aritmetikkpensumet gjev. Det kan vere ein av grunnane til at lærebokforfattarane har laga treningshefte og alternativ lærebok, i tillegg til å kunne tilpassa opplæringa for elevar med låg måloppnåing. Stiphout m.fl (2013) hevdar at algebraisk kompetanse går frå grunnleggjande ferdigheitar til strategisk arbeid, algebraisk resonnement og forståing. På bakgrunn av det kan det tenkjast at lærebokforfattarane har lagt opp til oppgåver som stimulerer til transformerande aktivitet i desse to lærebøkene, ettersom det blant anna kan verke som Stiphout m.fl hevdar at ein må lære grunnleggjande ferdigheiter før ein kan byrje å arbeide med strategiske oppgåver. Arcavi (referert til i Stiphout m.fl) introduserte «symbolfølelse» for å dekkja dei grunnleggjande ferdigheitane i algebraisk kompetanse. Å ha symbolfølfelse kan koblast til *berekning* og *symbol – og formalismekompetanse* då desse handlar om å kunne bruke symbol og formlar. Med tanke på at desse er sterkt representert i Tetra 8 Elevbok og Faktor 8 Alternativ oppgåvebok kan det tenkjast at å kunne meistre reknetekniske prosessar i algebra, der bokstavar og tal er representert, er viktig for å kunne utvikle den matematiske kompetansen vidare.

5.3 Engasjement

Ved at fleirtalet av oppgåver går under ferdigheitstrening og er typiske «rekn ut» - oppgåver, kan algebraen verte opplevd som, i følgje Bergsten m.fl (2016), abstrakt og at det er vanskeleg å sjå meininga med den. Mange ser på algebra som synonymt med bokstavrekning. På den måten kan det tenkjast at innstillinga til matematikken er prosedyreorientert. Det kan gjere at elevar mistar motivasjonen til å arbeide med algebra. Bergsten m.fl (2016) hevdar vidare at algebra bør gjerast levande og attraktivt, slik at elevane vil engasjere seg i det.

Dei oppgåvene som er plassert under *engasjement* i rammeverket til Kilpatrick, det vil seie dei oppgåvene som er framheva av lærebokforfattarane er som oftast dei som stimulerer til resonnerande aktivitet. Dette er oppgåver som går på problemløysing, modellering, bevis, å sjå etter mønster, og oppgåver ein ikkje nødvendigvis treng å bruka formell algebra for å løyse. Ein ser òg at oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet, ofte inneheld fleire komponentar eller delkompetansar for matematiske kompetanse. På den måten må elevane ta i bruk fleire områder innanfor matematisk kompetanse for å løysa oppgåva. Desse oppgåvene er ofte unummererte oppgåver, som kjem innimellom nummererte oppgåver og lærestoff. Eventuellt at dei kjem i slutten av kapittelet. Til dømes kjem «noko å lure på» - og «litt av kvart» - oppgåvene i slutten av kapittelet i Faktor 8 Grunnbok og oppgåvebok. Medan i Tetra 8 Elevbok kjem «grublisar», «abels hjørne», spel, og PC – oppgåver innimellon dei nummererte oppgåvene. Av erfaring frå praksis og vikariat i skular, vert ofte slike oppgåver hoppa over. Ofte går læraren gjennom fagstoff og deretter skrive opp oppgåvenummer som skal gjerast på tavla. Då har eg opplevd at når eleven kjem til ei oppgåve som ikkje står på tavla og som ikkje er nummerert, at eleven hoppar over den. Slike oppgåver legg ofte opp til meir algebraisk tenking der elevane må generalisera eller studera endringar. På den måten kan slike oppgåver vere ei rik oppgåve som er med på å fremma relasjonell forståing hos elevane, dersom læraren tek tak i oppgåva. I tillegg vil undervisinga verte meir variert, noko som kan gjera algebra meir spennande. Jopperud (2015) sin studie viser òg at lærebøkene ho undersøkte i stor grad legg opp til instrumentell forståing av algebra, men at det er korleis læraren brukar lærebøkene som har mest å seie for korleis elevane forstår lærestoffet.

Ved å arbeide med resonnerande aktivitetar, får eleven utvikla sin matematiske kompetanse på fleire områder. Dei oppgåvene som går under komponenten *engasjement* er oppgåver som kan vere med på å motivere eleven til å sjå algebra som meiningsfylt. Ved at elevane får arbeide med oppgåver der dei er «mønstersniffarar», beskrivande, utforskande og oppfinnsame, kunne elevane få fremma sin relasjonelle forståing, og utvikla sin matematiske kompetanse på andre områder enn ved å arbeida med oppgåver som fremmar ferdigheitstrening. Dersom oppgåvene i tillegg fremmer ferdigheitstrening får elevane tilnærma seg algebraen ved å sjå på den som studien av strukturar og system frå berekningar og relasjonar. Ved at elevane får arbeida med problemløysing kan dei får øving i å resonnera, argumentera og bevisa. Det vil seie oppgåver som blant anna går under *resonnering* og *anvendelse* i Kilpatrick sitt rammeverk, og *problemløysingskompetanse*, *resonneringskompetanse* og *tankegangskompetanse.* På same tid må elevane nytta delar av den matematiske kompetansen som omhandlar ferdigheitstrening. I analysen såg ein at omtrent alle oppgåver krev ein form for utrekning, der elevane får kompetanse i blant anna *berekning* og *symbol – og formalismekompetanse*. Dette kan sjåast i samanheng med at

Norasti og Wæge (2015) hevdar om at elevane kan forbetra prosedyrekunnskapane sine på ein konstruktiv måte, slik at elevane kan anvenda matematikken som eit reiskap. Problemløysande oppgåver, der elevane sjølv må finne problemet og ein framgangsmåte for å løyse problemet, kan føre til at elevane engasjerer seg og knyter det opp mot noko som dei kan relatere til kvardagen sin. På den måten kan ein fremma relasjonell forståing. Naalsund (2012) hevdar at eit fokus på både ferdigheitstrening og forståing er viktig, då dei går tett saman i utviklinga av elevar sin matematiske forståing. Til dømes har Faktor 8 Grunnbok, under «noko å lure på» ein sudoku. Her får eleven arbeide med oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitet. I tillegg får eleven kompetanse innan problemløysing og anvendelse, ettersom ein sudoku ikkje kan løysast ved å bruka rutineferdigheiter.

Som sagt, er det stor variasjon i fordelinga av oppgåver innanfor for dei ulike komponentane og delkompetansane. I min studie er det det funne oppgåver som går under alle komponentane og delkompetansane. *Modelleringskompetanse* i Niss sitt rammeverk, er den det er funne færrast oppgåver under. Berre ei oppgåve i Faktor 8 sin oppgåvebok, og ingen i Tetra 8 Elevbok. Ettersom Kaput, Carraher & Blanton (2008) hevdar at ein av tilnærmingsmåtane til algebra, er å sjå på algebra som ei samling av modellerande språk, både innanfor og utanfor matematikken, kan det diskuterast kvifor ein ikkje finn fleire oppgåver som går under denne delkompetansen. Algebra er eit stort emne, og på same måte som det er vanskeleg å gje ein definisjon på kva algebra er, kan det vere fleire måtar å tilnærma seg algebra på. Ved å starte med oppgåver som synleggjer forbindelsen mellom algebra og aritmetikk kan det skape meir motivasjon for algebra.

5.4 Oppgåva si avgrensing

Denne studien har tatt utgangspunkt i to norske læreverk for 8. trinn. I dei to læreverka er det valt eit emne, algebra. Resultata er dermed berre basert på det kapittelet som omhandlar algebra i dei to læreverka. Kva for nokon lærebøker som er analysert er nevnt tidlegare. På grunn av at resultata berre er basert på eit trinn, to læreverk og eit emne, kan ikkje studien generaliserast ut over dette. Føremålet med studien var heller ikkje å generalisera, men derimot å sjå kva type algebraisk aktivitet oppgåvene i læreverka stimulerer til ,og kva for nokon områder av matematisk kompetanse elevane får utvikla ved å arbeide med oppgåvene. Derfor har berre lærebøkene som elevane har tilgang på vorte analysert. I ettertid har eg sett at Faktor har fleire komponentar som til dømes temahefter og fordjupningshefter. Desse er ikkje tatt med. Læraren si bok og nettstad til læreverkert er heller ikkje vorte analysert. Det er derfor mogleg at studien kunne hatt eit anna resultat dersom andre komponentar til læreverka hadde vore tatt med, eller dersom ein hadde analysert alle kapittelene i læreverka. Likevel kan ein ut i frå mitt resultat sjå kva type algebraisk aktivitet elevane arbeider med på skulen og kva for nokon områder av matematisk kompetanse, som er mest framtredane i læreverka.

Det teoretiske rammeverket som er brukt i studien kan òg har innverkand på resultata. I denne studien er det brukt tre rammeverk. To for matematisk kompetanse og eit for algebraisk aktivitet. Det er ein mogelegheit for at resultata kunne fått eit anna utfall dersom eg hadde brukt andre rammeverk. Spesielt med tanke på matematisk kompetanse – då det er mange definisjonar på kva ein legg i omgrepet. I tillegg er det tatt val som kan ha gjort at resultatet ville vorte annleis. Desse vala er grunna i metodekapittelet.

6. Avslutning

Forskingsspørsmålet for denne studien er:

Kva for nokon matematiske kompetansar legg algebrakapittelet i to norske læreverk til rette for at elevar på 8. trinn får utvikla?. I dette kapittelet vil eg oppsummera resultata frå studien og svara på problemstillinga.

I denne studien er det brukt to rammeverk for matematisk kompetanse for å analysera oppgåvene i læreverka. I rammeverket til Kilpatrick finn vi fem komponentar som til saman utgjer matematisk kompetanse. Dei er; *forståing, berekning, anvendelse, resonnering* og *engasjement.* Niss sitt rammeverk inneheld 8 delkompetansar som utgjer matematisk kompetanse; *tankegangskompetanse, problemløysingskompetanse, modelleringskompetanse, resonneringskompetanse, representasjonskompetanse, symbol – og formalismekompetanse, kommunikasjonskompetanse* og *hjelpemiddelkompetanse*. I min studie fann eg oppgåver som går under alle komponentane til Kilpatrick og alle delkompetansane til Niss. Likevel er det stor variasjon i kor mange oppgåver som går under kva komponent og delkompetanse. Til dømes går over halvparten av oppgåvene under *forståing* og/eller *berekning* i rammeverket til Kilpatrick og det same gjeld for *representasjonskompetanse* og/eller *symbol – og formalismekompetanse* i rammeverket til Kilpatrick. Oppgåver som går under desse komponentane og delkompetansane stimulerer i stor grad til transformerande aktivitet, og til dels genererande aktivitet.

Relativt få oppgåver går under *anvendelse, resonnering* og *engasjement* i rammeverket til Kilpatrick. Oppgåver som går under ein av desse åleine, er få. Dei kjem som oftast i lag med dei fire komponentane/delkompetansane som er nemnt over. Det same gjeld òg for rammeverket til Niss. Går ei oppgåve under ein *tankegangskompetanse, problemløsingskompetanse, resonneringskompetanse, kommunikasjonskompetanse eller hjelpemiddelskompetans*, kjem dei ofte i lag med *symbol – og formalismekompetanse* og/eller *representasjonskompetanse*. Som sagt er stort sett alle komponentane til Kilpatrick og alle delkompetansane til Niss å finne i kapittelet om algebra, men det er stor variasjon i antal oppgåver som går under kvar kategori. Elevane vil kunne få matematisk kompetanse ved å arbeida med oppgåvene i algebrakapittelet, men dei vil ikkje få utvikla alle områder av matematisk kompetanse i like stor grad. Studien sitt resultat peiker mot at lærebøkene tar for seg mykje ferdigheitstrening, og lite resonnering, argumentasjon og bevis.

Oppgåvene stimulerer i stor grad til transformerande aktivitetar og genererande aktivitetar. Det tyder òg på at elevane jobbar mykje med ferdigheitstrening. I begge læreverka stimulerer oppgåvene i liten grad til resonnerande aktivitetar. Dei oppgåvene som går under denne algebraiske aktiviteten finn ein ofte i oppgåver som er framheva av lærebokforfattarane, i kategori 3 eller i raudt kurs.

Denne studien kan ikkje seie noko om korleis undervisinga føregår i klasserommet. Det er læraren sitt ansvar å hjelpe elevane slik at dei får utvikla den matematiske kompetansen sin. I læreplanen og i rammeverka som er brukt i denne studien, inkluderer dette blant anna problemløysing, resonnering, bevise og ferdigheitstrening. Ettersom lærebøkene legg mest vekt på ferdigheitstrening, bør læraren derfor gje elevane oppgåver som utfordrar dei på delar av den matematiske kompetansen som lærebøkene ikkje legg opp til i like stor grad som ferdigheitstrening. Det kan vere oppgåver henta frå andre ressursar, eller å lysa fram fleire sider ved oppgåvene som allereie er i læreboka. Studien kan heller ikkje seie noko om kva for nokon matematiske kompetansar elevane får ved å arbeide med oppgåver frå andre kapittel i læreboka, enn algebrakapittelet. Likevel er det viktig å kunna jobba med resonnering, argumentasjon og bevis i alle emne. Spesielt med tanke på at dette skal få ein større plass i undervisinga når den nye læreplanen trer i kraft.

6.1 Studien sitt bidrag

I den nye læreplanen skal det verte meir fokus på problemløysing og å sjå samanhengar mellom ulike områder innanfor matematikken. Gjennom dette skal elevane få meir djubdelæring og auka forståing i faget. Læreplanen skal knytta seg tettare opp mot elevane sin kvardag, og lære dei å anvenda matematikken i nye situasjonar. Gjennom arbeid med metodar og tenkjemåtar skal elevane få større forståing for faget. Til dømes skal det verte lagt meir vekt på algebraisk tenking, resonnering, generalisering og representasjonar. Denne studien viser at oppgåvene i stor grad legg til rette for ferdigheitstrening, og i liten grad legg opp til at elevane er problemløysarar og utforskarar. Dette kan vere nyttig for lærarar som planlegger undervising å vere klar over. På den måten kan det auke læraren sin bevistheit rundt oppgåvene som elevane arbeider med og bruken av læreboka. I tillegg kan det verte lettare å vurdera gode oppgåver, som gjev elevane mogelegheita til å undersøkja eit matematisk problem.

6.2 Vidare forsking

I denne studien har det vorte undersøkt kva for noko matematiske kompetansar oppgåvene i to norske læreverk legg til rette for i algebrakapittelet på 8. trinn. I tillegg har det vorte undersøkt kva for ein algebraisk aktivitet oppgåvene stimulerer til. Dersom ein skulle forska meir på dette område, hadde det vore interessant å analysera heile læreverket for å sjå korleis fordelinga av oppgåvene hadde vore mellom dei ulike områda innanfor matematisk kompetanse. Denne studien har berre teke for seg lærebøker. Kongelf (2015) hevdar at god undervising kan gjere opp for mangelfulle sider ved lærebøkene. Det tyder på at det er andre faktorar enn læreboka som spelar inn på elevane sin utvikling av matematisk kompetanse. Derfor kunne det i tillegg vore interessant å observera undervisningstimar der ein kunne sjå korleis elevane arbeida med oppgåvene, og kva for nokon aktivitetar læraren legg til rette for. Det kunne gjeve eit meir reelt bilete av elevane sine matematikktimar. Med tanke på algebraisk aktivitet, kunne det vore spanande å observera undervisingstimar i algebra. Då kunne ein sett om læraren la til rette for andre algebraiske aktivitetar enn den læreboka legg mest vekt på, og om elevane får arbeide med oppgåver som stimulerer til resonnerande aktivitetar.

7. Kjelder

Aubert, K. E. (2018, 16. oktober). Algebra. Henta frå: https://snl.no/algebra

Bergem, O. Kaarstein, H. og Nilsen,T. (2016). Vi kan lykkes i realfag – resultater og analyser frå TIMSS 2015. Oslo: Universitetsforlaget

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren Tema: Algebra för alla.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: using theory, research and 'working hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics, 2002* (51), s 3-21

Borge, L-E., Nyhus O.H., Strøm, B. & Tovmo,P. (2009). *Ressurser og tidsbruk i grunnskolen i Norge og andre land* (Rapport nr 02/09). Trondheim: Kopinor.

Cai, J., Ng, S.F., Moyer, J.C. (2011). Developing Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China and Singapore. I Cai, J (Red.) & Knuth, E (Red.), *Early Algebraization* (s 25- 41). Berlin: Springer Verlag

Cappelen Damm (u.d.). Henta frå: https://www.cappelendamm.no/cappelendamm/search/search.action?query=faktor

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskingsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag

Dahl, E., Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K-B., Öberg, B. & Teledahl, A. (2008). *Tetra 8 Treningshefte.* Oslo: Det Norske Samlaget.

Fagbokforlaget (u.d.). Henta frå: https://www.fagbokforlaget.no/Ungdomstrinn/Matematikk?q=tetra&language[]=bm&upcoming=0

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. ZDM Mathematics Education, 45(5). 633-646. doi:10.1007/s11858-013-0539-x

Grønmo, L. S., Onstad, T., Pedersen,I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i vidergående skole*. Unipub. Henta frå: http://www.timss.no/rapporter%202008/Matematikk%20i%20motvind.pdf

Grønmo, S. (2016). *Samfunnsvitenskapelige metoder* (2 utg.). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS

Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K-B. & Öberg, B. (2001). *Tetra 8 – Matematikk for ungdomstrinnert.* Stockholm: Bonnier Utbildning AB

Hjardar, E. & Pedersen, J-E. (2014). *Faktor 8 Grunnbok.* Oslo: Cappelen Damm

Hjardar, E. & Pedersen, J-E. (2014). *Faktor 8 Oppgåvebok.* Oslo: Cappelen Damm

Hjardar, E. & Pedersen, J-E. (2015). *Faktor 8 Alternativ oppgåvebok.* Oslo: Cappelen Damm

Jopperud, R. (2015). *To læreverks presentasjon av algebra på 8. trinn*. (Masteroppgåve, Universitetet i Agder). Henta frå: https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/300790/Jopperud.pdf?sequence=1

Kaput, J. J., Carraher, D.W. & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the Early Grades*. New York: Taylor & Francis Group, LLC.

Kongelf , T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. Nordic Studies in Mathematics Education, 20 (3-4), 83–109

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It?. *The Mathemtics Educator, 8* (1), 139-151

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structual perspective. I Wagner, S. (Red.) & Kieran, C. (Red). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (s. 33-56). USA: The National Council of Tjerachers of Mathematics, Ink

Kieran, C. (2014). Algebra Teaching and Learning. I S Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (ss. 27-32). Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-94-007-4978-8

Kilpatrick, J. (2011). Commentary on Part 1. I Cai, J. (Red.) & Knuth, E. (Red.), *Early Algebraization* (s. 125- 130). Berlin: Springer Verlag

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). Adding it up: Helping Children Learn Mathematics. doi:10.17226/9822

Kunnskapsdepartementet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1–04).* Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Matematikk fellesfag - veiledning til læreplaner*. Henta frå: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/veiledning-til-lp/matematikk-fellesfag---veiledning-til-lareplan/

Kunnskapsdepartementet (2018a). Kjerneelementer i fag. Henta frå: https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2018b). Fornyer innholdet i skolen. Henta frå: https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/?expand=factbox2606064

Lee, L. (1996). An initation into algebric culture through generalization activities. I N. Bednarz m.fl (Red.), *Approaches to Algebra* (s 87- 106). Nederland: Kluwer Academic Publishers

Lepik, M. (2017). Practices of using textbooks in mathematics lessons: the case of Estonia. I B. Grevholdm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences – Research in Nordic and Baltic countries* (s. 407-422). Oslo: Akademisk Cappelen Damm AS

Lepik M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2017). Using textbooks in the mathematics classroom – the teachers' view. I B. Grevholdm (Red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences – Research in Nordic and Baltic countries* (s. 287-314). Oslo: Akademisk Cappelen Damm AS

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, M. (Red.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study (s. 45-70). Dordrecht, Netherlands: Springer

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz m.fl (Red.), *Approaches to Algebra* (s 65-86). Nederland: Kluwer Academic Publishers

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency.* (Doktoravhandling). Universitetet i Oslo

NESH. (2016, 27. april). Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi. Henta frå: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/innledning-formal/

Niss, M. (2017). Numeracy, mathematical literacy og matematisk kompetence. *Viden om literacy (22)*, s 4-9

Niss, M., Jensen, T. H., Bai Andersen, T., Wahlin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., Gustavsen, T., Jess, K. Lange, J., Lindenskov, L., Bonné Meyer, M., & Nissen,

K. (2002). Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. København: Undervisningsministeriets forlag

Nosrati, M. & Wæge, K. (2015). Sentrale kjennetegn på god læring og undervisning i matematikk. Henta frå: https://www.matematikksenteret.no/nettbutikk/sentrale-kjennetegn-p%C3%A5-god-l%C3%A6ring-og-undervisning-i-matematikk

NOU 2015:8. (2015). Fremtidens skole: Fornyelse av fag og kompetanser. Oslo: Kunnskapsdepartementet

Rivera, F. D. (2006). Changing the face of arithmetic: Teaching children algebra. I *Teaching Children Mathemtatics*, 12 (6), 306-311

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. . Henta frå: http://mrchadburn.co.uk/wp-content/uploads/2017/10/Skemp-Relational-and-Instrumental-Understanding.pdf

Stiphout, I. van., Drijvers, P. & Gravemeijer, K. (*2013)*. The Development of Students' Algebraic Proficiency. *International Electronic Journal of Mathematics Education,* 8 (2-3), s 62-80. Henta frå: http://www.iejme.com/download/the-development-of-students-algebraic-proficiency.pdf

Petersen, I. J. (2015). *Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert?* (Masteroppgåve, Norges arktiske universitet. Henta frå: https://munin.uit.no/bitstream/handle/10037/8120/thesis.pdf?sequence=2

Utdanningsdirektoratet. (2019, 03. januar). Nye læreplaner i grunnskolen og gjennomgåande fag i vgo – hva skjer når?. Henta frå: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/hva-skjer-nar-i-fornyelsen-av-fagene/

Watson, Anne. (2009). Algebraic Reasonning. I Nuffield Foundations (Red.) *Key understandings in mathematics learning* (kap 6.). London: Nuffield Foundation

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2003). Comparing competence in transformational and generational algebraic activities. I P. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox, Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4) (ss. 427-434). Honolulu.