Essay i vitenskapsteori

Hvilke konsekvenser kan ulike filosofisk baserte syn på matematikk få for problemer og problemløsningens rolle i matematikk?

Hvilke konsekvenser kan det få for skolematematikken og praksisen?

Gry Anette Tuset
Høgskolen Stord /Haugesund
2008

Vestnorsk Nettverk – forskerutdanningen, 10 studiepoeng

Innledning

I de siste 20-årene har læreplaner anbefalt å inkorporere problemløsning og utforskning i undervisningen i matematikk (M87, L97, LK06, NCTM,1980, 1989, 2000). Problemløsning og utforskning har fått en voksende rolle i læreplanene både nasjonalt og internasjonalt. Problemløsning kom inn i Mønsterplanen for grunnskolen 1987 [M87] som ett av ti hovedområder og skulle i tillegg være en sentral arbeidsmetode. I Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen 1997 [L97] var utforskning i matematikk en viktig arbeidsmåte, der matematikk som prosess ble vektlagt. I Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen 2006 [LK06] hører problemløsning med til den matematiske kompetansen der opplæringen skal veksle mellom utforskende, lekende, kreative og problemløsende aktiviteter og ferdighetstrening. Jeg vil argumentere for at dette har å gjøre med at det tradisjonelle synet på matematikk ble utfordret på slutten av 1980-tallet. Det tradisjonelle synet som Ernest (1991) kaller ”absoluttistisk syn,” var at matematikk kan sees på som fast, rigid, absolutt, umenneskelig, kald, objektiv, ren og abstrakt. I et absoluttistisk syn på matematikk er en opptatt av legitimering av krav om matematisk kunnskap og hvordan matematikk presenteres som ferdig produkt. Skapelse av matematikk er ikke interessant og arbeidsmåtene diskuteres ikke. Et slikt syn kan i skolesammenheng gi seg utslag i at elevene løser rutineoppgaver som involverer å bruke tidligere lærte prosedyrer som er fastlagte. En påpeker at hver oppgave har et unikt og objektivt svar som en raskt får bekreftet om er rett eller galt. Diskusjoner omkring framgangsmåter, resultater og hypoteser blir ikke vektlagt. Det alternative synet, som Ernest (1991) kaller det ”fallibilistiske synet” på matematikk, avviser ikke matematikkens logiske struktur, men at den er fiksert, permanent og unik. Innenfor dette synet ser en på matematikk som et resultat av sosiale prosesser der mennesket har en sentral rolle i utviklingen av matematisk kunnskap. Matematikken vokser gjennom en rik og dramatisk prosess av suksessive forbedringer av kreative hypoteser, menneskers forsøk på å bevise de og kritisere de. Dette synet omfavner hvordan en praktiserer og skaper matematikk, matematikkens historie, bruksområder og matematikkens plass i kulturen (Ernest, 2004). Det vil si at prosessen i matematikk blir sett på som minst like viktig som produktet.

Diskusjonen omkring hva problemløsning er og hvilken rolle den skal ha i matematikken kom på 1980-tallet, omtrent samtidig som det absoluttistiske synet på matematikk ble utfordret av det fallibilistiske synet på matematikk. Begrepet problemløsning ble et slagord på 1980-tallet som innbefattet ulik syn på hva utdanning er, hva matematikk er og hvorfor vi skal undervise matematikk generelt og problemløsning spesielt. Schoenfeld sier; "Problem solving and metacognition, …., are perhaps the two most overworked—and least understood—buzz words of the 1980's" (1992, s9). Når to personer snakket om problemløsning i matematikk, trengte de ikke å snakke om samme ting. Retorikken rundt problemløsning var så gjennomgående i matematikkdidaktikken, at kreative talere og skrivere kunne vri på ethvert emne eller aktivitet de tenkte på, og kalle det problemløsning. Vi kan si at ytterpunktene var; (a) å se på problemløsning som å løse oppgaver som primært har til hensikt å gi trening i en viss løsningsteknikk (eks. Mayer, 1985 hentet fra Grouws, 1992), (b) å se på problemløsning synonymt med matematisk tenkning (eks. Schoenfeld, 1992). Disse definisjonene kan gjenspeile hva slags syn forskerne hadde på matematikk, der den første definisjonen kan gi assosiasjoner til et absoluttistisk syn på matematikk og den andre et fallibilistisk syn. Schoenfeld (1992, s3) skrev at matematikk for han er en sosial aktivitet, der ett felleskap av matematikere involverer seg i vitenskapen om mønstre/strukturer – de gjør systematiske forsøk, basert på observasjoner, studier og eksperimenter der en prøver å finne prinsipielle regulariteter definert aksiomatisk eller teoretisk (ren matematikk) eller i modeller som er abstrahert fra reelle virkelige problemer (anvendt matematikk). I artikkelen "Learning to think mathematically; problem solving, metacognition and sense-making mathematics" (1992) argumenterer han for at synet på problemløsning er nært knyttet opp mot hva slags syn en har på matematikk, matematisk tenking og læring i matematikk.

Når en i læreplaner snakker om hvilken rolle problemløsning skal ha i skolen, blir det viktig å snakke om hva en legger i selve begrepet problemløsning. Grouws (1991) gjorde et empirisk studium som undersøkte læreres oppfatninger om hva problemløsning er. Fire kategorier oppfatninger ble identifisert, der tre av kategoriene fokuserte på å beskrive hvilke typer oppgaver som kan kalles et problem. Noen lærere oppfattet at et problem måtte være en tekstoppgave, andre mente det måtte ha praktisk tilknytning til det virkelige livet, mens noen lærere oppfattet problemløsning som å løse hvilket som helst oppgave uavhengig om de var ikke-rutineoppgaver eller rutineoppgaver. Den fjerde kategorien fokuserte på ulike nivå for matematisk tenkning og mente at problemløsning krevde at elevene måtte tenke på en annen måte, siden de ikke kunne utføre noen kjente prosedyrer for å finne en løsning (Grouws, 1992, s89). Det kan se ut som lærere er usikre på hva et problem er og hva som karakteriserer problemløsning. En annen empirisk undersøkelse som Alba Thompson (1989) gjorde omkring matematikklærerens oppfatninger om problemløsning, kan antyde at lærernes oppfatninger om problemløsning er preget av det synet læreren har på matematikk. Resultatene kan sammenfattes i fem utsagn; (1) Det er *svaret* eller løsningen som teller i matematikk og når en har kommet frem til løsningen, er problemet løst. (2) Man må få frem svaret sitt på *rett måte.* (3) Et svar på et matematisk spørsmål består vanligvis av et tall. (4) Hver kontekst (problemformulering) er knyttet til en unik prosedyre for å få, eller komme fram til et svar. (5) Nøkkelen til framgang i problemløsning er at man vet og husker hva som skal gjøres. (Björkqvist, 2003, s159). Ut fra denne undersøkelsen ser det ut som om lærerne er mest opptatt av produktet og legitimeringen. Det skal være et unikt svar og problemløsningen er styrt til å gjelde en på forhåndbestemt rett måte å gå fram på. Selve prosessen med å konstruere løsningsmåter, argumentere for dem, forbedre eller avvise de, er fraværende. En kan si at dette viser et absolutistisk syn på matematikk.

I Norge har det vært tradisjon på å definere matematiske problem og problemløsning ut fra Polyas heuristikk (1945). I dag er det i følge Björkqvist (2003, s54) vanlig å definere et matematisk problem så nært opptil betydningen av ordet ”problem” i hverdagsspråket som mulig.

> Det innebærer at et problem ses som en matematisk oppgave som skal utføres, med det tilleggsvilkåret at det i den innledende fasen skal være uklart for problemløseren hvilke løsningsmetoder som kan brukes. (Björkqvist, 2003, s54)

Denne definisjonen er individrelatert. Det innebærer at en oppgave som kan være et problem for en person, trenger ikke være det for en annen. Den kan og relateres til matematikkens læreplaner, som ofte spesifiserer en mengde rutiner og algoritmer. Definisjonen inneholder et ekstraarbeid for individet, slik at hun må være villige til å gå inn i dette arbeidet, ”et viktig tilleggsaspekt er hvorvidt problemet oppleves som problemløserens ”eget”, eller om det ”tilhører” en annen” (Björkqvist, 2003, s55). Dette kan medføre didaktiske fordeler som motivasjon, tilknytning til tidligere erfaringer, osv. Derfor er det ønskelig å ta med eierforholdet i definisjonen. En kan også se for seg at et problem ikke kun er individrelatert, men at det er en gruppe elever som ser på dette som et problem. Alle disse relasjonene mellom individet, eller gruppen, den sosiale konteksten, målene og oppgaven viser seg å være komplekse (Ernest, 1991). Problemløsning blir sett på som den aktiviteten som skjer når en forsøker å finne en vei til svaret. Denne prosessen trenger ikke å forutsette et unikt svar, fordi spørsmålet kan ha flere løsninger, eller ingen løsninger, som krever et høyere nivå på løsningen av problemet. Å se på prosessen i problemløsningen som en vei å gå for å finne en løsning, er en geografisk metafor som sier noe om en banebrytende vei til et bestemt sted

(Ernest, 1991). Denne metaforen gjør at stegene i prosessen kan representeres, der de alternative veiene og løsnningene er integrert i representasjonen. Dersom en betrakter alle bevegelsene mot en bestemt og unik løsning som en lukket mengde, også de som ikke ennå ikke er kreert, som om de allerede eksisterer og venter på å bli oppdaget, kan en slik metafor implisere et absoluttistisk syn på matematikk (Ernest, 1991). Den blir da absoluttistisk, fordi vi lukker mulighetene for å tenke nye løsninger og hypoteser, forbedringer eller avvisninger av disse, og dermed åpner vi ikke for utvikling av matematikk. En måte å unngå dette på er å åpne problemene, slik at elevene får en større frihet i for eksempel ”veivalget” og svarene. En kan for eksempel bruke ”åpne” oppgaver, det vil si oppgaver som ikke entydig fastslår hva som skal gjøres, men overlater en del av målsetningen til eleven selv (Björkqvist, 2003).

Et annet syn på problemløsning er å betrakte problemløsning som selve hjertet til matematikken. Stanic og Kilpatrick (1989) identifiserte det som ”problem solving as art.” Schoenfeld (1992) strekker seg lengre og sier at det er problemformuleringer og problemløsning som er matematikk. Dette synet vektlegger prosessaspektet i matematikken i større grad enn innholdet, når en skal beskrive hva som karakteriserer matematikk. Det betyr ikke at aksiomene, teoremene, bevisene, definisjonene, formlene, metodene, osv ikke eksisterer, men som Halmos sier i Schoenfeld (1992, s15):

> Mathematics could surely not exist without these ingredients; they are all essential. It is nevertheless a tenable point of view that none of them is at the heart of the subject, that the mathematician’s main reason for existence is to solve problems, and that, therefore, what mathematics *really* consists of is problems and solutions.

Dette synet på problemers og problemløsningens rolle i matematikken er preget av et fallibilistisk syn på matematikk. Jeg har i denne innledningen prøvd å vise at ulike syn på matematikk påvirker synet på problemløsningens rolle i matematikk. Jeg vil nå gå litt nærmere inn på de ulike filosofisk baserte synene på matematikk og prøve å tydeliggjøre mine påstander ovenfor. Til slutt vil jeg presentere noen senarioer der en ser på hvilken rolle problemer og problemløsning kan ha i skolematematikken og kort skissere noen konsekvenser dette kan få i praksis.

Ulike filosofisk baserte syn på matematikk

Filosofien omkring matematikk er en gren i filosofien som reflekterer omkring og gjør rede for matematikkens natur. Dette er en del av epistemologiens oppgave, som består i å gjøre rede for menneskelig kunnskap generelt (Ernest, 1991). Tradisjonelt sett har filosofien omkring matematikk vært opptatt av matematisk kunnskap, dens sannhet[1] og legitimering. En velkjent oppfatning av matematisk kunnskap er i følge Ernest (1991) at den kan representeres ved en rekke påstander som legitimeres av beviser, som igjen avhenger av matematiske aksiomer og logikk. Det vil si matematisk kunnskap har en deduktiv logisk struktur. Siden matematiske bevis er basert på resonnering alene (a priori), har matematisk kunnskap tradisjonelt blir sett på som den mest sikre av all kunnskap (Ernest, 1991).

Jeg vil presentere to grunnleggende forskjellige epistemologiske perspektiver i matematikken. Det absoluttistiske synet på matematisk sannhet som er absolutt sikker på at matematikk består av sikker, udiskutabel og objektiv kunnskap og det fallibilistiske synet som mener matematisk sannhet kan endres og som aldri kan sette seg selv over revisjoner og rettelser (Ernest, 1991). Disse to synene ser ulikt på matematisk kunnskap, menneskenes innvirkning og hvilken rolle skapelsen av matematikk har. Jeg vil prøve å belyse disse forskjellene nedenfor. Problemer har alltid hatt et stort fokus i matematikk som vitenskap. De er ikke bare interessante som mangeårige utfordringer, men ofte representerer de teknikkene som blir utviklet for å løse de, et stort framskritt i matematikkfaget. Problemer og problemløsning har ulike roller i de to filosofiske synene. Jeg vil prøve å komme inn på dette i presentasjonen av disse to synene.

Absoluttistisk syn på matematikk

Det er en rekke perspektiver i filosofien omkring matematikk som kan karakteriseres som absoluttistiske (Ernest, 1991). Disse ser på matematikk som objektiv, absolutt og som består av en mengde sikre og urettbare kunnskaper som hviler på fundamentet om deduktiv logikk. I et absolutistisk syn består matematisk kunnskap av bestemte og uforanderlige sannheter.

[1] Definisjoner på "sannhet i matematikk" vil jeg ikke komme nærmere inn på i dette essayet. Synet på sannhet har endret seg i matematikken. I følge Ernest (1991) kan vi skille mellom tre sannhetsrelaterte begreper i matematikk. (1) Det tradisjonelle synet på sannhet, nemlig at det er noe som beskriver verden slik den er og er en idealisering av verden. (2) En påstand er sann om den er tilfredsstilt i en tolkning eller en modell av teorien. Dvs. sannhet eksisterer bare i en modell. (3) En påstand er logisk sann om den er tilfredsstilt i alle modellene til en teori.

Aksiomene som er basisen for bevisene blir sett på som sanne, definisjonene blir sett på som sanne, de logiske aksiomene blir akseptert som sanne. De logiske reglene bevarer sannhet, slik at de lar sannhet blir dedusert fra sannhet. Derfor er enhver påstand i et deduktivt bevis, inkludert konklusjonen sann. Siden alle matematiske teoremer er etablerte ved deduktive bevis, er de sanne. Dette er grunnlaget for at filosofene innenfor et absoluttistisk syn sier at matematisk sannhet er sikker sannhet.

Absolutistene har ikke vært opptatt av å beskrive matematikk og matematisk kunnskap fordi de var opptatt med det epistemologiske prosjektet å tilføre rigide systemer en fullstendig sikker matematisk kunnskap. Mange av påstandene om matematisk kunnskap kom fra forsøkene på å identifisere rigide logiske strukturer og ble introdusert i forbindelse med dette arbeidet. Legitimeringen av krav til matematisk kunnskap var det viktigste og ikke hvordan matematikk skapes. Skapelsen av matematikk (”context of discovery”) tilhørte derfor psykologien og sosiologien (Ernest, 1991).

Absolutistene mente at matematisk kunnskap er tidløs, selv om en kan finne nye teoremer og sannheter. Den er overmenneskelig og ikke-historisk, fordi matematisk historie er uvesentlig for legitimeringen av kunnskapen. Matematisk kunnskap er en ren isolert kunnskap, som er en fordel med hensyn til den universelle validiteten og den er verdifri og kulturfri av samme grunn. Faget representeres ved et innhold og arbeidsmåter som en ikke stiller seg kritisk til. Et resultat av dette er derfor et filosofisk basert syn på matematikk som rigid, fiksert, logisk, absolutt, umenneskelig, kald, ren, abstrakt, fjernliggende og ultra rasjonell (Ernest, 1996)

Flere absolutistiske filosofer har identifisert problemer og problemløsning som sentral i vitenskapens virksomhet. De vedkjenner viktigheten av problemer for å få en progresjon i vitenskapen, men de har hatt hovedfokus på legitimeringen og presentasjonen av matematikken som et deduktivt logisk system. En absolutist var ikke opptatt av selve problemløsningen, siden det lå innenfor psykologien og ikke innenfor logikken. I følge Ernest (1991) finnes det en historie om skapelsen i matematikk, men den er ikke så kjent i matematikkens historie, fordi absolutistene ikke vektla den type kunnskap.

Helt fra den greske antikken har en sett at en systematisk tilnærming kan forenkle oppdagelser i matematikken og siden renessansen har en rekke forskere prøvd å systematisere skapelse. I 1960 foreslo Bacon en induktiv metode for å komme fram til en hypotese som deretter ble satt

under testing (Ernest, 1991). For å kunne forenkle skapelsen av induktive hypoteser, systematiserte han resultater og fakta i tabeller for å vise forskjeller og likheter. Dette foregrep heuristikken i moderne forskning på matematisk problemløsning. I 1628 publiserte Descartes et arbeid som inneholdt 21 "rules for direction of the mind" (Ernest, 1991, s291). Disse inkluderer blant annet å forenkle spørsmålet, symbolisering av sammenhenger, bruk av diagram som hjelp til å forstå problemet, osv. Whewell skrev i 1830 ”On the philosophy of discovery”, som ga en fremstilling av naturvitenskapelig oppdagelse (Ernest, 1991, s291).
Han presenterte en modell for oppdagelse som gikk over tre faser (1) avklaring (”clarification”) (2) induksjon (”colligation”) og (3) verifisering (”verification”). Modellen inneholdt også metoder for hver fase. Disse eksemplene ble forløpere til mye av heuristikken som ble publisert senere som hjelp til å undervise i problemløsning. Det er en påfallende analogi mellom Whewells modell av oppdagelse og det Polya presenterte i 1945 i boka ”How to solve it”. Hvis en slår sammen to av fasene til Polya, var hans resultat (1) å forstå problemet, (2) å finne en plan og gjennomføre den og (3) å se tilbake (Polya, 1945)
Dette viser at mange av tankene omkring matematisk oppfinnelse og problemløsning både i psykologien og i didaktikken har blitt foreslått i historien og i filosofien omkring matematikk og naturvitenskap, men de er ikke anerkjent i matematikkens historie. Absolutistene mystifiserte heller prosessen og fremhevet ofte intuisjonens rolle og det ubevisste i matematisk skapelse, som implisitt foreslo at flinke matematikere hadde en spesiell begavelse. Det absoluttistiske synet blir også bekreftet i hva som blir sett på som viktige verdier i matematikk. For en absolutist vil formell matematikk være forbeholdt legitimeringen og ha stor status, mens skapelse og aktivitet er på det uformelle nivået og har derfor lavere status (Hersh, 1988, hentet fra Ernest, 1991).

Polya (1945) er kanskje mest kjent for å utvikle en heuristikk som studerte metoder og regler for oppdagelser og oppfinnelser i matematikk. Han sier i forordet:

> This sort of study, called *heuristic* by some writers, is not in fashion nowadays but has a long past and, perhaps, some future" (Polya, 1945, s vii).

Han sier videre at han forventet å få kritikk fra flere hold og var klar over sine begrensninger, som han sier om seg selv: ”He has some experience in solving problems and in teaching mathematics on various levels" (Polya, 19945, s vii). Polya (1945) reformulerte, utvidet og illustrerte ulike ideer om oppdagelse i matematikken på en slik måte at lærerne kunne forstå og bruke de. Han mente at matematikk ble presentert deduktivt i læreverk, men det karakteriserte ikke hvordan matematikk kunne gjøres. Han mente videre at ”ferdig” matematikk krever demonstrativ resonnering, mens matematikk som utvikles krever plausibel resonnering. Dersom vi ønsker at elever skal bruke plausibel resonnering, må de lære hvordan det gjøres (Kilpatrick & Stanic, 1989, s 16). Han mente videre at å kunne matematikk er det å kunne gjøre matematikk. For Polya besto matematikk av informasjon og det å kunne løse problemer (Kilpatrick & Stanic, 1989). Schoenfeld (1992) mener Polya er best kjent for å konseptualisere matematikk som problemløsning og gjøre problemløsning til undervisningen i matematikk. I følge Schoenfeld (1992) var Polyas matematisk epistemologi og pedagogikk dypt flettet sammen.

Absolutismens fall

De matematiske teoriene og byggverket ble etter hvert så rike og kompliserte at matematikerne fikk problemer med den absoluttistiske kunnskapsoppfatningen (Ernest, 1991). Paradokser og motsigelser utfordret den absoluttistiske gyldigheten og det resulterte i at en fikk tre skoler innenfor filosofien omkring matematikk. Logisismen, formalismen og intuisjonismen prøvde alle å redegjøre for synet på matematikk og reetablere matematikkens gyldighet (Ernest, 1991). De tre skolene brukte deduktiv logikk for å demonstrere sannhet i teoremene, og dermed feilet de i følge Ernest (1991), fordi deduktiv logikk overfører sannhet, men inngir ikke sannhet. Konklusjonene av et logisk bevis er derfor på det beste så sikkert som den svakeste premiss, og aksiomenes sannhet kan utfordres. Lakatos (1962) argumenterte for at søken etter gyldighet i matematikk leder til en ond sirkel, der nye antakelser hele tiden blir prøvd bevist for å sikre sannhet. For uten bevis, vil antagelsene forbli falsifiserbare oppfatninger og ikke sikker kunnskap. Alt vi kan gjøre er i følge Lakatos (1962) å minimalisere de ved å akseptere aksiomene uten bevis, det vil si å bryte den onde sirkelen på bekostning av sikkerhet. Dette var det sentrale argumentet mot sikker kunnskap i matematikk og som motsier den absoluttistiske påstanden (Ernest, 1991).

Kritikken er avgjørende for det absoluttistiske synet på matematikk. Det er likevel mulig å akseptere kritikken uten å adoptere en fallibilistisk filosofi. En kan akseptere en form for et hypotetisk-deduktivt system som avviser det å kunne gjøre forbedringer i matematikken og muligheten for dyptliggende feil i matematikken. En ser på aksiomene som hypoteser, der teoremene er logisk-dedusert, og dermed er teoremene relative sanne. Det vil si at selv om aksiomene er tentative, vil teoremer som utvikles ved logikk sikre en sikker utvikling av matematikken. De progressive absolutistene har et slikt syn. De åpner for nødvendig tilpasninger av det aksiomatiske grunnlaget for en teori når det er behov for det. De ser på matematikk som et resultat av menneskers streving mot å finne sannhet, og der menneskenes aktivitet bidrar til det dynamiske når ny kunnskap og teori utvikles i den progressive absolutismen. Progresjonen i en slik prosess er å erstatte tidligere teorier med mer overordnede teorier som kan gjøre rede for de tidligere teoriene. Hver progressive teori nærmer seg den matematiske sannhet mer og mer (Confrey, 1981 hentet fra Ernest, 1991). Kritikken ovenfor åpner for muligheten til fallibilistisk kritikk og et annet syn på matematikk.

Fallibilistisk syn på matematikk

Rollen til filosofien omkring matematikk er å reflektere over og gjøre rede for matematikkens natur. Absolutistiske filosofier har prøvd å foreskrive redegjørelsen av matematikkens natur. De har i følge Ernest (1991) vært mest opptatt av å beskrive matematikk slik den bør være og ikke slik den er. I løpet av de siste tiårene har en ny bølge av fallibilistiske filosofier omkring matematikk vokst fram. De foreslår et annet og motstridende syn på matematikk som menneskelig, rettbar, historisk og foranderlig (Davis og Hersh, 1980, Ernest, 1994, Lakatos, 1976, Tymoczko 1986). I et fallibilistisk syn vil derfor filosofien omkring matematikk kunne lokalisere matematikken innenfor konteksten av menneskelige tanker og historie. Uten denne konteksten vil i følge Lakatos (1976) filosofien omkring matematikk miste sitt innhold. Ernest (1991, s28) skriver at filosofien omkring matematikk innenfor et fallibilistisk syn bør omhandle mer enn matematisk kunnskap, dens sannhet og legitimering. Den bør i tillegg omhandle skapelsen av matematisk kunnskap, objektene i matematikken og deres opprinnelse og matematikkens anvendelse og praksis.

Fallibilistene mener at matematisk kunnskap er falliserbar, siden kunnskapen kjennetegnes ved at den kan forkastes som gyldig. En kan derfor ikke se på kunnskap som evig sann eller perfekt. Matematisk kunnskap er forstått å være feilbar og konstant åpen for revisjon, både i dens beviser og begreper (Lakatos, 1976). Lakatos betegner seg selv som en kvasi-empirist. Empiristen kommer frem gjennom synspunktet om at matematisk kunnskap har empiriske røtter, men siden matematikken bygger på teoretiske slutninger, reduseres empirien til kvasi-empirisme.

Et fallibilistisk syn avviser ikke rollen logikk og struktur har i matematikk, men det at den er unik, fiksert og permanent. Det vil si fallibilistene ser på matematikken som et hypotetisk-deduktivt system, men ikke på samme måte som de progressive absoluttistene. De fokuserte på overføring av sannhet fra sanne premisser til konklusjoner, mens fallibilistene fokuserer på nyoverføring av usannheter fra usanne konklusjoner til hypotetiske premisser (Ernest, 1991).

I følge Ernest (1991) kan ikke et fallibilistisk syn unngå å fokusere på skapelsen og veksten av kunnskap, siden de vedkjenner at matematikk er feilbar og åpen for revisjon. I dette arbeidet er mennesket et viktig bidrag. De mener at matematikk er et resultat av sosiale prosesser. Lakatos (1976) vektlegger dialogen mellom mennesker som redskap i arbeidet for å søke gyldig kunnskap. Det er dialogen som blir sentral når setninger bevises og forkastes gjennom nyskapninger og teoretiske slutninger. Dialogen blir viktig i utviklingen av kunnskaper. Ernest (1991, s43) bygger på Lakatos sin kvasi-empirisme og mener det er en sosial interaksjonisme som er basis for matematikkunnskaper. Han bygger og sin filosofi på Wittgensteins konvensjonalisme, som aksepterer at menneskets språk, regler og enighet spiller en avgjørende rolle i å etablere og legitimere sannhet i matematikk. Han kaller sin filosofi ”sosial konstruktivisme”, der han bringer det epistemologiske og ontologiske perspektivet sammen, fordi han mener kunnskaper utvikles hos mennesket og mellom mennesker gjennom sosial interaksjon, og de kommer til uttrykk gjennom denne interaksjonen. Årsaken til at Ernest (1991, s 43) beskriver matematisk kunnskap som en sosial konstruksjon er at matematisk kunnskap er basert på språklig kunnskap som er en sosial konstruksjon, mellommenneskelige sosiale prosesser som trengs for å gjøre subjektive kunnskaper, gjennom publisering, til objektiv kunnskap og til slutt at objektivitet i seg selv er en sosial kategori.

Fallibilistene avviser dermed at matematikk er en kropp av ren og abstrakt kunnskap som ikke er knyttet til mennesker og historien. I stede er matematikken assosiert med ulike sosiale praksiser som for eksempel skolematematikken og akademia som har sin egen historie, personer, institusjoner, symbolsk form, hensikt, verdi og relasjoner. De er likevel opptatt av hverandre siden den symbolske produksjonen av ens praksis er ofte rekonseptualisert og reprodusert i hverandre (Dowling, 1988, hentet fra Ernest, 1996).

For Lakatos er teorien omkring skapelsen av matematikk selve hjertet i hans filosofi. Han bygger på Polyas ”heuristikk” og Poppers ”logic of discovery” (Lakatos, 1976, s3). Lakatos er uenig i Popper at ”context of discovery” tilhører psykologien. I følge Lakatos (1976, s143) deler Popper ”context of discovery” og ”context of justification” mellom psykologi og logikk på en slik måte at det ikke er plass for heuristikken som et uavhengig utforskningsområde. Han gjør et poeng i at en ikke kan skille ”context of justification” og ”context of discovery” fordi begge er menneskeskapte og falsifiserbare (Lakatos, 1976, s 143). Lakatos (1976) sier at matematikk er hva matematikere gjør. Det vil si at selve prosessen i å utvikle matematikk er sentral, siden matematikk kan bli sett på som et resultat av sosiale prosesser der mennesker formulerer og løser matematiske problemer. Han presenterer i ”Proof and Refutation” (1976) diskusjoner mellom en lærer og hans studenter der de foreslår ulike løsninger på noen matematiske problemer og undersøker deres svakheter og styrker. Gjennom denne diskusjonen viser Lakatos hvordan matematikken vokser gjennom en rik og dramatisk prosess av suksessive forbedringer av kreative hypoteser, menneskers forsøk på å bevise de og kritisere de. Ernest (1991, s43) bygger videre på Lakatos sin filosofiske påstand om at matematisk kunnskap vokser gjennom konjunksjoner og motsigelser. Han sier at skaping av matematisk kunnskap er viktigere enn dens legitimering. I tillegg er et avgjørende kjennetegn på skaping av matematisk kunnskap for han overføringen fra publisert, representert subjektiv kunnskap til objektiv kunnskap, det vil si kunnskap som er sosialt akseptert. Denne overføringen avhenger av at kunnskapen overlever prosessen med offentlig gransking og kritikk. Denne prosessen skjer gjennom Lakatos sin heuristikk. I følge Ernest (1991) vil sosial konstruktivismen knytte subjektiv og objektiv kunnskap i sirkler der begge bidrar til å fornye hverandre. Det skaper et dialektisk forhold mellom det subjektive og det objektive, der det objektive skaper det subjektive og det subjektive skaper det objektive.

I et fallibilistisk syn på matematikk verdsettes problemer og problemløsning i matematikk høyt. Lakatos (1976, s105) sier ”scientific inquiry begins and ends with problems.” Ernest (1991) sier vi kan identifisere alle lærende i matematikk som skapere av matematikk i et fallibilistisk syn. Han sier videre at matematisk aktivitet for alle lærende, forutsatt at den er produktiv, involverer formuleringer og løsning av problemer på lik linje med profesjonelle matematikere. Ikke-produktiv matematikk har ikke samme parallellen, siden den i hovedsak er reproduktiv i motsetning til kreativ.

Problemer og problemløsningens rolle i skolematematikken

Vi har sett at ulike filosofiske syn på matematikk påvirker problemers og problemløsningens rolle i matematikk. Ut fra dette kan det være interessant å skissere noen senarioer som viser hvilke konsekvenser dette kan få for hvilken rolle problemer og problemløsning kan ha i skolematematikken. Jeg vil nedenfor presentere tre ulike perspektiver der problemer og problemløsning er vektlagt ulikt og skissere noen konsekvenser dette kan få i praksis.

Avvisning av problemer og problemløsning

Det første og sterkeste negative perspektivet på problemer er å si at det er uegnet i skolematematikken, fordi skolematematikken er innholdsorientert og dens sentrale funksjon er å "innprente" matematiske ferdigheter. Problemer blir betydningsløse og opptar tiden som skal brukes til det som er viktig, nemlig trening på disse ferdighetene. Dermed vil heller ikke problemløsning være aktuelt innenfor dette synet. En har her et klart absoluttistisk syn på matematikk. Ernest (1991) sier at dette synet kan kalles dualistisk. Et dualistisk syn på matematikk innebærer her et fokus på fakta, regler, rette prosedyrer og enkle sannheter som er bestemt av autoriteter. Matematikken er fiksert, eksakt og har unike strukturer, å gjøre matematikk innebærer å følge disse reglene. Sosiale verdier har ingen plass i matematikken, som er fullstedig nøytral og består av et objektivt innhold som tall og regning (Ernest, 1991).

Ole Skovsmose og Helle Alrø (2002) kaller et læringsmiljø der læreren, læreboka og fasiten innehar autoriteten for hva som er feil/rett og korreksjonen refereres eksplisitt eller implisitt til den autoriteten, for et byråkratisk enevelde ("byreaucratic absolutism"). Elevene møter ikke argumenter for og imot. Feilene blir oppfattet som absolutte og elevene etterspør heller ikke argumentene. "Det er bare slik." Skovsmose og Alrø (2002) prøver i boka *"Dialogue and Learning in Mathematics Education"* å beskrive hvordan kommunikasjonen foregår i et slikt læringsmiljø. De snakker om en rett/feil kommunikasjon, "sandwich" kommunikasjon og "quizzing" kommunikasjon som typiske kommunikasjonsmønstre i et slikt læringsmiljø i klasserommet.

En kan identifisere dette synet i læreplanene i forhold til ”back to basic” perioden på 1970-tallet. En kan også se igjen dette synet på den ene ytterligheten på hva problemløsning kunne tolkes som; å utføre rutineprosedyrer som trening på ferdigheter.

Problemer og problemløsning som et tillegg til innholdet

Det andre perspektivet på problemer er å behandle de som et tilleggsinnhold som støtter opp om innholdet i læreplanen. Problemer blir her oppfattet som objekter for å berike undervisningen og er ikke satt i forbindelse med den lærende sin prosess, eller den pedagogiske tilnærmingen. Problemløsning blir ikke sett på som et mål i seg selv, men for å nå andre mål. Schoenfeld (1992, s12) sier at problemløsning blir sett på som ”means to a focused end.” Dette perspektivet kan opprettholde et absolutistisk syn på matematikk, dersom målet er den ”komplette” og ”ferdige” matematikken.

Stanic og Kilpatrick (1989) identifiserte tre hovedområder som har karakterisert rollen problemløsning har hatt i skolematematikken fra antikken frem til nåtiden. To av hovedområdene vil jeg plassere inn under dette perspektivet.

Den første er å se på problemløsning som *kontekst*. Ideen er at problemene og løsningene på problemene er der med tanke på å nå andre mål. Eksempler på dette er: Problemer fra virkeligheten brukes for å rettferdiggjøre undervisingen i matematikk. Problemer brukes som motivasjon for bestemte emner. Problemer brukes for etter hvert å introdusere nye teknikker som er mer effektive. Problemer brukes som rekreasjon, der en viser at matematikk kan være gøy og at det er underholdningsverdi i de teknikkene som elevene allerede har lært. Problemer brukes for å utvikle nye ferdigheter. Spesielt valgte problemer brukes til å introdusere elevene for et nytt emne, og gi en kontekst for å diskutere teknikker i emnet. Problemer brukes for å gi trening på ferdighetene og begrepene elevene har blitt vist. I disse eksemplene er ikke problemene det som verdsettes i matematikkfaget og problemløsning som en viktig prosess i selve matematikkfaget, er fraværende.

Det andre hovedområde Stanic og Kilpatrick (1989) identifiserte er problemløsning som *ferdighet*. Ideen er at problemløsning kan sees på som en mengde ferdigheter som kan læres i skolematematikken. Selv om problemløsning i kontekst har vært sterk og dominerende, blir problemløsning som en ferdighet viktig for de som ser på problemløsning som verdifull i skolematematikken. De synes det fortjener en spesiell oppmerksomhet og ikke bare for å nå andre mål. Det var og er mange som er motvillige til å gi slipp på sitt syn på matematikk som absoluttistisk. De ser på skolematematikken som en ren hierarkisk strukturert selveksisterende kunnskapsbase. Desto høyere en kommer i hierarkiet blir matematikken renere, mer rigid og abstrakt. Målet for elevene er å klatre så høyt opp i hierarkiet som mulig ut fra sine matematiske evner. Matematikk er for eliten. Dette kan gi matematikken en eksklusiv plass i læreplanverket og en vil ikke innføre anvendte problemer i læreplanverket. En legger derfor problemløsning inn i et hierarki av ferdigheter. Der ferdighetene for å løse rutineproblemer er lavere enn å løse ikke-rutineproblemer. Siden å løse ikke-rutine problemer blir karakterisert som å operere på et høyere nivå, kommer det etter å ha løst rutineproblemer som igjen kommer etter at studentene hadde lært grunnleggende begreper og ferdigheter. Dette fører til at en utsetter å fokusere på ikke-rutine problemer som igjen medfører at kun et fåtall elever blir utsatt for slike problem. Dermed blir problemløsning en aktivitet for spesielt kapable elever og ikke for alle. Schoenfeld (1992,s14) mener at selv om problemløsning som ferdighet blir sett på som noe eget i seg selv, ser en på problemløsnings teknikker som noe elevene kan ha i sin matematiske verktøykasse, på lik linje med faktakunnskapene og prosedyrene de studerer. Problemløsningsferdighetene blir en del av elevenes absolutte matematiske kunnskap og forståelse.

I praksis blir utfordringen hvordan problemløsningsferdigheten skal utvikles hos elevene. Stanic og Kilpatrick (1989, s117) sier at ingen kan undervise problemløsning mekanisk; ”it remains a human activity that requires experience, taste, and judgment.” De sier videre at dersom en prøver å redusere tommelfingerreglene til heuristikken til prosedyremessige ferdigheter, ved å ha et algoritmisk syn på heuristikken, har problemløsning blitt redusert til problemløsing som en ferdighet. Schoenfeld (1992) gjorde studier på tidligere forskning og konkluderte med at forsøk på å lære studenter generelle problemløsningsstrategier (tegn en figur, identifiser målene, osv) ikke hadde noen generell suksess. Faktisk er det nok indikasjoner på at problemløsnings strategier i de fleste tilfellene er så problem- og student-spesifikke at det ikke er håp om å finne noen få strategier som kan læres til alle studentene (Begle,1979, hentet fra Schoenfeld, 1992). I sine studier mente Schoenfeld (1992) at mer *spesifikke problemløsningsstrategier* som er mer knyttet til ulike typer/klasser problemer vil føre til bedre resultater. I tillegg burde en studere hvordan en kan lære *metakognitive strategier*, slik at studentene bruker sine problemløsningsstrategier og kunnskapsbase mer effektivt. De metakognitive strategiene selvregulering og ”monitoring” skulle være drivkraften i problemløsningen. Han mente videre at en burde utvikle og studere måter å eliminere de *oppfatningene* elevene hadde som hindret produktivitet til mer produktive oppfatninger. Selv om Schoenfeld (1992) kunne rapportere fra sin klasseromsbaserte forskning at dette ga positive resultater på problemløsningsevnen til elevene, er det uklart hvorfor elevene ble bedre problemløsere (Lesh & Zawojewski, 2007). Det ligger et dilemma i å prøve å undervise heuristiske strategier som et verktøy når en står fast i problemløsningen. Det viser seg at for få og generelle problemløsningsstrategier blir for generelle for å bli meningsfulle i en instruksjonsprosess, mens en lang liste med spesifikke strategier blir så mangfoldig at for å vite når de skal brukes, vil være kjernen i å forstå de. Forskningen har ikke greid å vise at det å undervise i heuristiske strategier gjør elevene til bedre problemløsere. Derfor mener Lesh & Zawojewski (2007) at forskning på undervising i problemløsning må bevege seg forbi det å prøve å undervise direkte hva eksperter *gjør* i problemløsning til novisene. De mener at heuristiske strategier er mer nyttig å bruke som et språk som hjelper problemløseren å tenke tilbake på problemløsningserfaringen sin. Ved å beskrive sin egen prosess, vil elevene bruke sine refleksjoner til å utvikle fleksible prototyper av erfaringer som de kan dra nytte av i fremtidig problemløsning (Lesh & Zawojewski, 2007, s770).

Forskningen innenfor problemløsning vet en del om hva som karakteriserer gode problemløsere i matematikk. De har derimot ikke så mye å tilby praksisfeltet når det gjelder å undervise elever i å bli gode problemløsere. Lester og Kehle (2003) oppsummerer fem viktige resultater; Elevene må løse mange problemer for å øke problemløsningskompetansen, problemløsningskompetansen utvikles sakte og over lang tid, elevene må ha tro på at læreren synes problemløsning er viktig, de fleste elevene tjener på systematisk planlagt problemløsningsinstruksjon og det å undervise elever i problemløsningsstrategier og heuristikk bidrar lite til å forbedre elevene til å løse generelle matematiske problemer. Utfordringen blir å klargjøre forholdet og sammenhengen mellom utvikling av matematisk begrepsforståelse og utvikling av problemløsningsevne. Ved å klargjøre disse forholdene kan en gi et alternativ til å behandle problemløsning som et isolert emne, separat fra læringen av substansielle matematiske begreper. Studier av problemløsning må skje i konteksten å lære matematikk og vice versa (Lesh & Zawojewski, 2007). Det gir oss en inngangsport til det siste perspektivet på problemer og problemløsningens rolle i skolematematikken.

Problemløsning og undersøkelse som pedagogikk

Det tredje perspektivet er å se på problemløsning og undersøkelse[2] som pedagogiske tilnærminger på hele læreplanen og ikke som et tillegg. Problemløsning og undersøkelse blir her forstått både som den lærendes prosess og som pedagogisk tilnærming i klasserommet (Ernest, 1991). Det vil si at problemløsning og utforskning blir viktig både i forhold til hva matematikk er og hvordan den utvikles hos eleven. Derfor kaller Ernest (1991) dette perspektivet problemløsning og undersøkelse som pedagogikk.
Stanic og Kilpatrick (1989) sitt tredje hovedområde som har karakterisert rollen problemløsning har hatt i skolematematikken fra antikken frem til nåtiden er ”problem solving as art” og er i sterk kontrast til de to foregående områdene. Her ser en på problemløsning som selve hjertet til matematikken. Derfor vil jeg plassere dette området under dette perspektivet.

Dette perspektivet har et klart fallibilistisk syn på matematikk. Her ser en på matematikk som et resultat av en sosial prosess og er opptatt av rollen mennesker har i et voksende og utviklende kunnskapsområde. Dersom vi mener at en viktig del av matematikken består av menneskeskapte formuleringer av problemer og problemløsing, må det få konsekvenser for skolematematikken og utdanningen. Ernest (1991) mener det innebærer at skolematematikken bør være sentrert rundt problemformuleringer, problemløsning, utforskning og undersøkelser. Dette bør ha en sentral plass i læreplanene, fordi de fordrer til kreativitet og skapelse i matematikk. Det burde også blitt allment anerkjent og eksplisitt tatt inn i skolematematikken at matematikken er en fallibilistisk og foranderlig menneskelig konstruksjon. Pedagogikken som brukes i dette arbeidet burde fokusere på prosess og utforsking (”inquiry”).

M87 (1986) er en læreplan som fremhever problemløsning sterkt ved at det er ett av de ti hovedområdene. Samtidig skal det være et tema som griper inn i selve arbeidsmetoden. ”Arbeidet med matematikk skal bygge på og utvikle elevenes skapende evne, og gi rom for eksperimentering og utforskning.” (M87, s 196). I veiledningen til M87 (1987, s13) fremheves det at problemløsning fremstår som et litt spesielt emne. Mens de andre

[2] Begrepet ”undersøkelse” (”investigation”) er i følge Ernest (1991) et like uklart definert begrep som problemløsning. I dette tilfelle er det definert som en undersøkelsesprosess der utgangspunktet ikke trenger å være et problem. Det kan være et spørsmål eller en situasjon. En har et mer fokus på ”reisen” i en undersøkelse enn på målet.

hovedemnene er mer avgrensede emneområder, omhandler problemløsning metoden det skal arbeides etter. Under hovedemnet problemløsning beskrives prosessen om hvordan en kan løse et problem. Prosessen er inspirert av Polyas (1945) heuristikk: Formulere problemet, analysere problemet og komme fram til en løsningsmetode, foreta nødvendige beregninger og til slutt vurdere framgangsmåte og resultater (M87, s196). M87 passer under dette perspektivet. Som beskrevet ovenfor, må en likevel passe seg for ikke å redusere heuristikken til prosedyremessige ferdigheter, ved å ha et algoritmisk syn på heuristikken.

Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen 1997 [L97] passer og under dette perspektivet med en sosiopolitisk dimensjon. Det står ikke eksplisitt i L97 at problemløsning er sentralt i matematikkfaget, men prosessaspektet blir fremhevet. "Det er viktig at elevene opplever læring i matematikk som en prosess" (L97, s153). Utforskning og eksperimentering er en sentral arbeidsform, som skal stimulere elevene til å bruke sin fantasi og kreativitet. Under kapitlet "Fagets plass i skolen" blir faget beskrevet som et fag med mange uttrykksformer og som stadig er under utvikling (L97, s153). "Utviklingen av matematikk bygger på menneskets trang til utforskning, strukturering og oversikt. Gjennom matematiske aktiviteter utvikles kunnskaper og ferdigheter som gir redskaper for dette." *Matematikk for alle* var det sentrale utgangspunktet for skolematematikken i hele grunnskolen og også i deler av den videregående skolen i Norge på denne tiden (Grønmo, 2005). Betydningen av at matematikk skulle knyttes til det å fungere som en aktiv deltaker i et demokratisk samfunn ble framhevet, mens ren matematikk ble tonet ned i L97. Matematikk i dagliglivet var første målområde i læreplanen, og en la stor vekt på matematikk som redskap og på elevenes egenaktivitet (Grønmo, 2005).

Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen 2006 [LK06] også passer inn i dette perspektivet. "Matematikkfaget i skolen medverkar til å utvikle den matematiske kompetansen som samfunnet og den einskilde treng. ….Opplæringa vekslar mellom utforskande, leikande, kreative og problemløysande aktivitar og ferdigheitstrening" (LK06, s53). Dette innebærer at undersøkelser og problemløsning er sentrale elementer i faget også som pedagogisk tilnærmelse. Nytt i forhold til L97 er at en og har vektlagt ferdighetstrening i større grad enn i LK06."The TIMSS[3] 2003 results support the premise that successful problem solving is grounded in mastery of more fundamental knowledge and skills" (Mullis

[3] TIMSS ("Trends in International Mathematics and Science Study") og PISA (Programme for International Student Assessment) er internasjonale komparative undersøkelser på matematikkunnskaper hos elever på ulike trinn i grunnskolen.

m fl, 2004, s. 61, hentet fra Grønmo, 2005). Grønmo (2005) sier at en solid faglig basis av fakta, ferdigheter og begreper er en forutsetning for anvendelse av matematikk i dagligliv og samfunnsliv eller for problemløsing i faget. Et annet interessant trekk er at om man har elementære kunnskaper i matematikk, synes ikke det å være en tilstrekkelig betingelse for å være en god problemløser i dagliglivet. Under formålet med faget står det eksplisitt at mennesket har brukt og utviklet matematikk for å utforske universet og for å forstå sammenhenger i naturen og i samfunnet.

Dersom en ønsker et skifte fra styrt oppdagelse, via problemløsning og til en mer undersøkende tilnærming, vil dette få konsekvenser for praksisen. Det vil involvere mer enn bare å jobbe med matematiske prosesser. Det vil involvere et skifte av roller, der læreren gir slipp på kontrollering av svar, metoder som blir brukt av elevene og innholdet i timen. En mer undersøkelsesorientert tilnærming vil i følge Ernest (1991) øke elevenes autonomi og selvregulering, og dersom klasseromsklimaet skal stemme overens med dette, må en øke elevenes selvregulering over klasserommets bevegelser, interaksjoner og tilgang til ressurser. Problemløsning og undersøkelse som undervisingstilnærmingsmåter krever at en tar hensyn til den sosiale konteksten i klasserommet og dens sterke relasjoner. Problemløsning tillater da den lærende å bruke hennes læring kreativt i ukjente situasjoner, men læreren har fortsatt kontroll over innholdet og formen for undervisning. Ernest (1991) foretrekker her undersøkelse som tilnærmelse, fordi han mener at det også tillater elevene å skape problemer og spørsmål som kan undersøkes fritt. Det vil kreve en kommunikasjon om et fallibilistisk syn på matematikk gjennom klasseromserfaringene (Ernest, 1991). En demper fokuset på entydighet og korrekthet på svarene og metodene og fokusere mer på mennesket som aktive produsenter av kunnskap. En vil ha mer fokus på de forsøkene som blir skapt.

Dersom en har en sosiopolitisk dimensjon i sitt perspektiv, vil en og være opptatt av å involvere momenter som kooperative gruppearbeid og diskusjoner, autonomi i formulering av problemer og undersøkelser, i sine undersøkende tilnærminger. I tillegg vil elevene bli oppfordret til kritisk tenkning gjennom elevens spørsmål omkring innholdet, pedagogikken og vurderingene (Ernest, 1991). En vil bruke sosiale relevante problemer og situasjoner, for å få sosial engasjement og myndiggjøring hos elevene. Ut fra et sosiopolitisk syn, vil denne pedagogikken være et middel for å utvikle ferdigheter som statsborgere i et demokratisk samfunn som krever sosial engasjement hos elevene (Ernest, 1991).

Skovsmose og Alrø (2002) kaller det læringsmiljøet som dyrkes innenfor et byråkratisk enevelde for oppgaveparadigmet. Som en kontrast til oppgaveparadigmet innfører de begrepet ”undersøkelseslandskap” som er et læringsmiljø som har en mer undersøkende tilnærming. Det er en undervisningsform som er frodig og som frister til å invitere til undersøkelse. Det er et læringsmiljø som kjennetegnes ved at læreren og elevene har en spørrende og utforskende holdning. Dersom en forlater oppgaveparadigmet og beveger seg inn i et undersøkelseslandskap, vil noen kommunikasjonsmønstre legges igjen og nye vil synliggjøres. Skovsmose og Alrø (2002) beskriver dialogen som en undersøkende prosess (”inquiry process”) som inkluderer en utforskning av deltakernes perspektiver og vilje til å utsette sin forforståelse. Dette medfører at dialogen må være undersøkende, uforutsigbar, risikofylt og likeverdig for å kunne opprettholde et undersøkelseslandskap. De prøver å gi et alternativ til de kommunikasjonsmønstrene som opprettholder et byråkratisk enevelde ved å innføre ”inquiry co-operation model” (IC-modellen) som et alternativ. Elementene i denne modellen er; komme og være i kontakt, lokalisere, identifisere, forsvare, tenke høyt, reformulere, utfordre og evaluere. Denne modellen er ikke en metodisk modell, men den kan være et bidrag til å reflektere over kommunikasjonen i klasserommet.

Det kan være nærliggende å se på om begrepene problem og problemløsning, slik de er tradisjonelt definert (se tidligere i essayet), er tilfredsstillende og dekkende innenfor dette perspektivet. Det er didaktikere som ønsker å utvide problemløsning til å omhandle matematisk aktivitet og matematisk tenkning fordi definisjonene blir for snevre. For eksempel Lesh og Zawojewski (2007) argumenterer for “a models and modelling perspective” på problemløsning. De ønsker å behandle problemløsning som viktig i utviklingen av å forstå et hvilket som helst matematisk begrep eller en prosess. De erkjenner at forskjellen mellom problemløsningen til en ekspert og en novise ikke bare er hva de gjør, men mer hvordan de tolker og omtolker en problemsituasjon, det vil si hva de *ser*. De mener at forskningen må fokusere på studentenes tolkninger, representasjoner og refleksjoner i tillegg til beregningene de gjør, de deduktive resonneringsprosessene de bruker, ferdighetene eller reglene og prosedyrene de lærer å utføre. Derfor har Lesh & Zawojewski (2007) ønske om å endre definisjonen på et problem og vil at problemløsning skal fokusere på å utvikle måter å tenke på i gitte situasjoner i stede for å finne prosedyrer. Deres forslag til definisjon på et problem er:

> A task, or goal-directed activity, becomes a problem (or problematic) when the "problem solver" (which may be a collaborating group of specialist) needs to develop a more productive way of thinking about the given situation
> (Lesh & Zawojewski, 2007, s782)

For å utvikle en produktiv måte å tenke på, mener de at problemløseren trenger å involvere seg i en prosess der en fortolker situasjoner, i matematikk betyr det matematisk modellering. Problemløsning blir da definert som prosessen i denne fortolkningen der en gjør situasjonen matematisk. Dette involverer iterative sirkler som består av utvikling av representasjoner, testing og revidering av matematiske oversettelser og tolkninger, integrering, modifisering, revidering, eller foredling av klynger av matematiske begreper fra forskjellige emner innenfor og utenfor matematikken. Dette står i kontrast til å se på problemløsning som prosessen mot å lete etter prosedyrene ved å traversere fra utgangspunktet til målet i et problem. Lesh & Zawojewski (2007) mener denne definisjonen ser på problemløsing som iterative sirkler for å forstå utgangspunktet og målet til problemet. De mener at et slikt perspektiv resulterer i et mer autentisk syn på studentens kognisjon når de er i et aktivt klasserom og i komplekse realistiske situasjoner. De ønsker å fokusere mer på matematisk problemløsning som å "se" (tolke, beskrive, forklare) situasjoner matematisk.

Avslutning

Vi har sett at ulike filosofisk baserte syn på matematikk får konsekvenser for hvilken rolle problemer og problemløsning har i matematikk. Problemer og problemløsning har en større rolle i et fallibilistisk syn på matematikk enn i at absoluttistisk syn. Hvis vi støtter oss til Lakatos (1976), sier han at matematikk er hva matematikere gjør. Det vil si at selve prosessen i å utvikle matematikk er sentral og matematikk kan bli sett på som et resultat av sosiale prosesser, der mennesker formulerer og løser matematiske problemer.

Læreplanene de siste 20-årene har et tydelig fallibilistisk syn på matematikk. Vi har sett at både M87, L97 og LK06 har satt som mål at skolematematikken bør være sentrert rundt problemformuleringer, problemløsning, utforskning og undersøkelser. De fordrer til kreativitet og skapelse i matematikk. Problemløsning og undersøkelse blir og forstått som den lærendes prosess og som pedagogisk tilnærming i klasserommet. Det vil si at problemløsning og utforskning blir viktig både i forhold til hva matematikk er, hvordan den utvikles hos eleven og hvordan undervisningen blir gjennomført. Jeg har kalt dette perspektivet problemløsning og undersøkelse som pedagogikk. Et slikt syn får større praktiske konsekvenser, siden en i større grad må fokusere på skapelse og kreering i skolematematikken. Dette skaper store didaktiske utfordringer for læreren og elevene som involverer mer enn å jobbe med matematiske prosesser. Det vil involvere et skifte av roller, der læreren gir slipp på kontrollering av svar, metoder som blir brukt av elevene og innholdet i timen. Elevenes autonomi og selvregulering øker og en bør ta hensyn til den sosiale konteksten i klasserommet og dens sterke relasjoner. Problemløsning tillater da den lærende å bruke hennes læring kreativt i ukjente situasjoner, men læreren har fortsatt kontroll over innholdet og formen for undervisning. En ønsker å dempe fokuset på entydighet og korrekthet på svarene og metodene og fokusere mer på mennesket som aktive produsenter av kunnskap. En ønsker mer fokus på de forsøkene som blir skapt. Dette skaper behov for å endre dialogen i klasserommet til å være mer undersøkende, uforutsigbar, risikofylt og likeverdig.

Kirsti Klette og Svein Lie (2006) beskriver noen sentrale funn fra prosjektet PISA+, et prosjekt om lærings- og undervisningsstrategier i skolen. Dette prosjektet fokuserer i stor grad på problematiske funn i PISA og hvor nøkkelen til forbedring synes å ligge. Klette og Lie (2006) registrerer at det er mye aktivitet og elevengasjerende aktiviteter i klasserommet, men mange situasjoner synes å mangle fokus, retning og ikke minst lærerens aktive og systematiske introduksjon og oppsummering av aktiviteten. Elevoppgaver og aktiviteter blir ofte stående som enkelthendelser og blir ikke satt i en større kunnskapsmessig og faglig ramme. Dermed blir læringen privatisert og overlatt til den enkelte elev (Klette & Lie, 2006). I et fallibilistisk syn på matematikk har vi sett at både Lakatos og Ernest var opptatt av at matematikk utvikles gjennom diskusjoner, der de involverte foreslår ulike løsninger på noen matematiske problemer og undersøker deres svakheter og styrker. Det er gjennom diskusjonene at matematikken vokser. En ønsker en rik og dramatisk prosess av suksessive forbedringer av kreative hypoteser, menneskers forsøk på å bevise de og kritisere de. Ernest la i tillegg vekt på språkets rolle i utviklingen av matematiske kunnskaper. Språklig kunnskap er en sosial konstruksjon og det kreves mellommenneskelige sosiale prosesser for å gjøre subjektive kunnskaper, gjennom publisering, til objektiv kunnskap. Klette og Lie (2006) sine foreløpige resultater viser at helklassesamtalen som et særegent kollektivt rom for meningsutprøving og læring er lite systematisk utnyttet. Medelever som faglige samtalepartnere og læringspartnere blir og lite utnyttet. De sier videre at i veiledning med den enkelte elev, har læreren lite fokus på metakognitive aktiviteter for problemløsning.

Hovedsakelig er veiledningen fokusert rundt emosjonell støtte, motivering og faglige anvisninger. Klette og Lie (2006) sier at matematikktimene fortsatt er sentrert rundt lærerstyrte instruksjoner, gjennomgang og individuell oppgaveløsing. Ut fra dette kan det være legitimt å spørre om læreplanenes intensjoner er inkorporert i praksis. Hvorfor de ikke er det, er et komplisert og komplekst spørsmål som absolutt er relevant i skoledebatten i dag.

Litteraturliste

Alrø H. og Skovsmose O. (2002) *Dialogue and Learning in Mathematics Education*, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publisher

Björkqvist O. (2003) Matematisk problemløsning, I Grevholm B. (red) *Matematikk for skolen*, s 51-70, Bergen, Fagbokforlaget.

Cooney T. (1985) A beginning teacher`s view of problem solving. I *Journal for Research in Mathematics Education*, s 324-336.

Davis, P. & Hersh, R. (1981) *The mathematical experience.* Boston, Birkhauser.

Det kongelige kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet (1996), *Læreplanverket for den 10-åringe grunnskolen.*

Ernest, P. (1991) *The philosophy of mathematics education,* London,The Falmer Press

Ernest, P. (1994) *Mathematic, Education and Philosophy: An international Perspective,* London,The Falmer Press

Ernest, P. (1996) The nature of mathematics and teaching. *Philosophy of Mathematics Education Journal,* nr.9, Tilgjengelig fra: http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/ [lest 15.10.07]

Ernest, P. (2004) What is the philosophy of mathematics education? *Philosophy of Mathematics Education Journal*, nr. 18,
Tilgjengelig fra: http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/ [lest 15.10.07]

Green, T.F. (1971) *The Activities of Teaching*, Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha

Grouws D. (1996) Critical issues in problem solving instruction in mathematics, I Zhang D (red) *Proceedings of the China-Japan-US Seminar on mathematical education,* s 70-93, Board of Trustees of Southern Illinois University.

Grunnskolerådet (1987) *Veiledning til mønsterplanen for grunnskolen 1987*, Universitetsforlaget AS, Oslo

Grønmo, L.S (2005) Matematikkprestasjoner i TIMSS og PISA. *Nämnaren, tidsskrift for matematikundervisning*, Nationelt Centrum for Matematikutbildning, Göteborg Universitet, årgang 32, nr. 3, s 5-11.

Hersh, R (1979) Some proposals for reviving the philosophy of mathematics, *Advances in Mathematics*, Volum 31, s 31-50.

Kirke- og undervisningsdepartementet (1987) *Mønsterplanen for grunnskolen*, Aschehoug.

Klette, K og Lie, S. (2006) *Sentrale funn, Foreløpig resultater fra PISA+ prosjektet*, Universitetet i Oslo. Tilgjengelig fra:
http://www.pfi.uio.no/forskning/forskningsprosjekter/pisa+/publikasjoner/Sentrale%20funn.pdf [lest:10.04.08]

Kunnskapsdepartementet (2006). *Kunnskapsløftet: læreplanverket.*
Tilgjengelig fra:
http://www.utdanningsdirektoratet.no/templates/udir/TM_UtdProgrFag.aspx?id=2103 [lest 15.10.08]

Lakatos, I. (1962) Infinite Regress and the Foundations of Mathematics, I *Aristotelian Society Proceedings*, Supplementary Volume No. 36, s155-184.

Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations,* Cambridge, Cambridge University Press.

Lesh R. & Zawojewski J. (2007) Problem solving and modelling, I Lester F. (red), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the national council of teachers of mathematics,* s 763-804, USA, Age Publishing Inc.

Lester F. & Kehle P. (2003) From Problem Solving to Modeling: The Evolution of Thinking About Research on Complex Mathematical Activity, I Lesh R & Doerr H. (red) *Beyond Constructivism, Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching,* s 501-563, Mahwah, NJ, USA, Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM (1989) *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Retson, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.

Pehkonen E. (2003) Lærere og elevers oppfatninger som en skjult faktor i matematikkundervisingen, I I Grevholm B. (red) *Matematikk for skolen*, s 154-184, Bergen, Fagbokforlaget.

Polya, G. (1945) *How to solve it: A new Aspect of Mathematical Method*, 2. utg, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Schoenfeld, A. (1992) Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I Grous D. (red), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, s 334-370, New York, MacMillan.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989) Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. I Charles R & Silver E. (red.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, s1-22, Retson, VA: National Counil of Teachers of Mathematics.

Thompson A. (1984) The Relationship Between Teachers Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice, *Educational Studies in Mathematics,* Volum 15, s 105-127

Thompson A. (1989) Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. I Charles R & Silver E. (red.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, s 232-243, Retson, VA: National Counil of Teachers of Mathematics.

Tymoczko, T. (red) (1986), *New directions in the philosophy of mathematics.* Boston, Birkhauser.