

*Om lærings syn  
i grunnskolematematikken*

*Øistein Bjørnstad*

*Om lærings  
syn  
i grunnskolematematikken*

Øistein Bjørnstad

## Forord

En kan undres på om læringssyn/læringsteori har mye å si når læreplaner og læreverker blir til. Det er matematikkfaget i grunnskolen det dreier seg om her.

Jeg har stilt meg dette spørsmålet for de læreplanene vi har hatt de siste 30 år og for noen få læreverker. Kapitlene 1 og 2 viser det svaret jeg er kommet frem til.

I tillegg tar jeg for meg litt av forhistorien til "moderne matematikk". Denne forhistorien er helt vesentlig for å forstå matematikkplanen i Mønsterplanen av 1974. Endelig forsøker jeg å få tak på viktige tendenser i tenkning omkring matematikkundervisning i dag. Jeg gir uttrykk for reserveringer både mot det som var og mot det som (kanskje) er på vei.



# 1 Læringssyn og læreplaner

## 1.1 Innledning

I lærerutdanningen har pedagogikk, derunder læringsteori, ganske stor plass. Hvor viktige er idéer herfra i skolen? Kan de etterspores i læreplanene? I læreverkene som lages til de forskjellige læreplanene?

Vi ønsker å se på situasjonen *for matematikkfaget* i vårt eget land fra om lag 1970 til om lag 2000. Men vi lar den mer generelle læreplantenkningen spille med for å gi litt perspektiv. Vi sammenholder læreplaner og noen læreverk. Dette for å danne oss en oppfatning om den eventuelle innflytelsen fra læringsteori/læringssyn på læreplaner og læreverk.

De aktuelle læreplanverkene:

- *Mønsterplan for grunnskolen*, 1974 (M74)
- *Mønsterplan for grunnskolen*, 1987 (M87)
- *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*, 1996 (L97).

## 1.2 M74

En læreplan må selvsagt vurderes mot den sammenhengen den er oppstått i. I dette korte arbeidet prøver vi å ta denne sammenhengen alvorlig, men går ikke grundig inn i den. Vi trekker ikke inn høringsuttalelser og andre forarbeider, heller ikke samtidige debatter i tidsskrifter og aviser om mønsterplanen. Når det gjelder det sterke innslaget av nymarxistisk tankegods (Frankfurterskolen, "alt er politikk") i samfunnsdebatten i siste halvdel av 1960-årene og ut på 1970-tallet, *så fikk ikke det prege M74 mye* (se [2], kapitlene IX og X). Hans Tangerud kritiserte M74 av den grunn i artikler på 1970-tallet og (mer avdempet) i [7] fra 1980. På sidene 80 og 105–07 i dette arbeidet omtaler han fagplanen for matematikk. Her lar det seg hevde at hans (alt) overordnede idémessige forankring roter diskusjonen til. Men dette kan også forklares ved at forfatteren ikke kjenner faget og er uvitende om den svært omfattende forhistorien til matematikkplanen. Det er mange misforståelser og en del eksempler på maksimalt negative tolkninger av planen.

Hva var det så som preget matematikkplanen i M74, egentlig?

Etter den andre verdenskrig var mange overbevist om at matematikkundervisningen i skolen måtte forbedres. "Sputniksjokket" understreket behovet for en bedre undervisning i matematikk (og naturfag). Men det var ingen enighet om *hvordan* reformen skulle komme i stand. Lenge dominerte en ytterst abstrakt tilnæringsmåte. En rekke betydelige matematikere førte an. Imidlertid var det andre betydelige matematikere som gjorde front mot denne tilnæringsmåten. Etter ca. 1970 var en del av idéene i reformstrevet blitt dels atskillig modifisert, dels forlatt, i de toneangivende kretsene. Men M74 gjenspeiler viktige idéer i den *tidligere* fasen i reformen, der en så for seg et sterkt innslag av temmelig abstrakte idéer i matematikkundervisningen helt fra de laveste klassetrinn.

Reformkretsene fikk etter hvert støtte fra psykologer og pedagoger. Ett av de helt store navn i utviklingspsykologien på 1900-tallet var Jean Piaget (1896–1980). Piaget hadde tidlig fattet interesse for moderne matematikk:

[I]t can be seen ... that the essential notions which characterize modern mathematics are much closer to the structures of "natural" thought than are the concepts used in traditional mathematics. (Sisert i [1], del II, s.54.)

Med "moderne matematikk" siktet Piaget ganske særlig til Bourbaki-gruppens arbeid. – Nicolas Bourbaki var pseudonym for en liten gruppe

franske matematikere som ønsket å sanere matematikken fra grunnen av. De hadde fra 1939 av publisert en lang rekke bøker (hefter) med fellestittelen

*Éléments de mathématique*. To av de matematikerne som førte an i reformarbeidet (Gustave Choquet og Jean Dieudonné) hørte til denne gruppen. Piaget hadde forøvrig truffet disse to på konferanser på 1950-tallet. – Vi tar med enda et sitat fra Piaget:

From the level of concrete operations – at about 7/8 years – another interesting convergence can be found, that is the elementary equivalent of the three "mother structures" discovered by Bourbaki [(1) algebraiske strukturer, (2) ordningsstrukturer og (3) topologiske strukturer], and this itself shows the "natural" characters of these structures. ([3], s. 84)

I de matematiske fagmiljøene og i reformkretsene var det en del (ikke alle) som så på matematikken som i første rekke *vitenskapen om formelle strukturer* ([1], del II, s. 8). Når det var snakk om strukturer i matematikken stod *mengdebegrepet* sentralt. Piaget så på dette begrepet som svært viktig og faktisk "naturlig" når en skal formalisere tanker om barns omgang med kvantitet. Mengdebegrepet kom til å kjennetegne reformen. Mange oppfattet "moderne matematikk" som synonymt med mengdelære. I M74 er mengdebegrepet svært tydelig til stede allerede på første klasses-trinn.

Hvor viktig har så læringsteori eller læringssyn vært når matematikkplanen i M74 og deretter lærebøker skulle skrives?

I de fagkretsene som hadde innflytelse på utformingen av matematikkplanen i M74 hersket et "klima" som gjør det rimelig å tro at læringsteori/læringssyn må ha vært temmelig viktig. Vi tenker på læringsteori kanalisert fra Piaget men også fra Dewey og Bruner – struktur, utviklingsstadier, elevsentrering, "learning by doing", "oppdage selv", induktiv metode, konstruktiv induktiv metode – via førende skikkelser i reformmiljøene. I Norge dreiet det seg nok særlig om to meget engasjerte og tunge fagpersoner, Stieg Mellin Olsen og Ragnar Solvang. Gunnar Gjone har dokumentert reformen utførlig i sin nærmere 800 sider store doktoravhandling [1]. I den oppsummerende del VIII, side. 2, heter det:

I den mer utviklede fasen – fra 1960 og utover, vil vi hevde at "moderne matematikk" var i hovedsak en læringspsykologisk reform.

### 1.3 M87

Matematikkplanen i M74 var en utløper av den store internasjonale diskusjonen om matematikkfaget i skolen som nådde et høydepunkt i intensitet i siste halvdel av 1960-tallet. Når det gjelder matematikkplanene i M87 fant det ikke sted noen sammenlignbar forutgående diskusjon. På den annen side var M87 resultat av et læreplanarbeid av hittil ukjent omfang i vårt land, med over 3000 høringsuttalelser mot om lag 350 for M74 (se [6], innledningen ved Alfred Oftedal Telhaug). I følge Telhaug gir planen "en klar, til dels detaljert beskjed om *hva* det skal arbeides med i skolen, om hvilken kultur som der skal formidles og skapes" ([6], s. 15). Han gir inntrykk av at M87 mer enn M74 tar pulsen på utviklingen i vårt norske samfunn, på spørsmålene om hvilket samfunn vi vil utvikle, om hva det gode liv er og om hva mennesket er ([6], s. 15–16). Men M87 er en plan fri for skarpe kanter og provoserende nytenkning. Refomtrettethet – og ikke bare for matematikkens vedkommende – var et faktum.

I matematikkplanen i M74 gikk det klart frem at en ønsket å vektlegge *innsikt* fremfor mekanisk tilegnelse av ferdigheter. Dette var i tråd med tanker i det internasjonale reformarbeidet på skolematematikkens område og hadde vært det siden i hvert fall om lag 1960. Det var også i høy grad i tråd med den oppfatningen i nyradikale kretser at servil mekanisk

innlæring ikke passet for det moderne, myndige menneske! – I det hele var planen *i noen grad* samfunnskritisk, preget nettopp av antiautoritær nyradikalisme. – Dette idémessige element, som Tangerud savnet i M74 (se [7]) er nå tydelig uttalt. Men det er ikke lenger kontroversielt: M87 har med en del av de gamle

kampsakene, "men iveren for dem er temmet som i samfunnsdebatten for øvrig" ([6], s. 19). Det signaliseres front mot konkurransementalitet. Planen legger liten vekt på lett målbare og reproducerbare kunnskaper og ferdigheter. I stedet betones selvtilit og et positivt selvbylde. Et menneske som er trygt og som tror på seg selv, vil være ivrig etter å lære ([6], s. 22). Telhaug antyder at dette er det aller mest sentrale i planen. I en annen sammenheng ([4], "Revidert Mønsterplan for grunnskolen i historisk perspektiv") peker han på indre spenninger og motsetninger i planen. Den generelle delen har sterkere innslag av tradisjonell pedagogikk enn fagplandelen. En finner positive ord både om karakterer, med konkurranse som motivasjon, og om den motivasjonen som formentlig kommer av et positivt selvbylde.

Har M87 elementer med klare konsekvenser for matematikkfaget når en sammenlikner med M74?

- Faglig sett er planen atskillig mindre ambisiøs. Det "moderne" er avstrefet. "Reformen av (den internasjonale) reformen", til stede i M74 i svært halvhjertet utgave, er nå på det nærmeste fullført
- Det skal tas hensyn til at barn som begynner på skolen, allerede har ma-tematisk kunnskap. Skolen skal ta vare på denne og bygge den ut. Elevene bør oppmuntres til å forklare hvordan de tenker når de løser oppgaver, ja til selv å lage oppgaver
- Problemløsning er kommet inn som et nytt hovedemne. Men det er klart uttalt (under "Lærestoff og progresjon") at problemløsning skal være en del av all matematikkopplæring
- Telhaug ([8], s. 72) peker på at "internasjonale konjunkturer" førte til at kunnskapsformidling var sterkere fremme i M87 enn i M74. Vi vil hevde at dette *ikke* gjaldt matematikkplanene.

## 1.4 L97

Veien frem mot L97 er preget av én mann, Gudmund Hernes. Allerede i 1986 reiste han en debatt om kvaliteten i norsk høyere utdanning. Denne fulgte han opp i 1987 med en kvalitetskritikk av hele det norske utdanningssystemet. Det holdt ikke mål, hevdet han, og etterlyste innsats og ambisjoner. Slike tanker fikk et foreløpig manifest i 1988 med innstillingen *NOU 1988:28 Med viten og vilje* [5] fra det såkalte Hernes-utvalget. Her ble kunnskapssamfunnet satt ettertrykkelig på dagsordenen. Hva slags kunnskap? Svaret var klart: vi trenger å beherske en generell basiskunnskap for å kunne orientere oss i informasjonsflommen og for å kunne tale sammen som medlemmer av demokratiet. Utvalget foreslo at læreplanene for grunnskolen ble gjort mer presise, at det ble færre valgmuligheter for elevene og at kravene til lærernes faglige kompetanse ble skjerpet. Dette var saktens tanker mot strømmen i sosialdemokratiet. Men tankene hører i høy grad hjemme i *det moderne prosjekt*. Optimismen mangler ikke heller. Var Gudmund Hernes en av de siste store modernister her på berget?

Hittil hadde departementet i svært liten grad blandet seg bort i planarbeid. Planene var i alt vesentlig skolefolks sak. Med Hernes som statsråd (fra 1990) ble dette annerledes.

L97 særpreges kanskje først og fremst av å understreke skolens forpliktelse til å fremme et felles, bredt, grunnleggende kultur- og kunnskapsgrunnlag. Bare slik kan elever rustes til å takle forandringer og

til å ta til seg kunnskap hele veien gjennom livet.

L97 fører videre viktige prinsipper i progressiv og elevsentrert pedagogikk. Det er nok et betydelig rom for lokalt tilvalgsstoff, men planen kan sies å understreke formidlingen av den felles kultur sterkere (se [8], s. 216).

En finner i L97 finner en blandingspedagogikk som på den ene side understreker kulturformidlingen og på den annen side forsøker å begrense ensidig doserende lærervirksomhet. Dette siste skjer gjennom det obligatoriske innslaget av tema- og prosjektarbeid gjennom hele grunnskolen.

Har L97 elementer med klare konsekvenser for matematikkfaget når en sammenlikner med M87?

- Matematikkens iboende progresjon nevnes men det hevdes likevel at "å lære matematikk går ikke alltid langs en rett linje, men kan snarere sammenliknes med å klatre i et tre". Dette er et utydelig signal til lære-  
bokforfattere og lærere
- "Elevene konstruerer selv sine matematiske begreper. For denne begrepsdannelsen er det nødvendig å vektlegge samtale og ettertanke." Dette er et forsiktig uttrykk for tankegods fra konstruktivistisk filosofi og pedagogikk – et meget trendy fenomen
- "I arbeidet med matematikk er elevenes egenaktivitet av største betydning." Dette er et avdempet uttrykk for Hernes' appell til vilje, entusiasme, innsats, om å "tøye sine evner", om å "ta seg selv i bruk"!
- Matematikkplanen i L97 er langt mer detaljert enn den i M87. Men ordlyden i planen lar en i uvisse om de faglige ambisjonene er hevet. (Signaler om en slik heving var nok noe en ville ha ventet).

## Henvisninger

- [1] Gjone, Gunnar. *"Moderne matematikk" i skolen: Internasjonale reformbestrebelsler og nasjonalt læreplanarbeid*. 2 b. Universitetsforlaget, Oslo, 1985.
- [2] Harbo, Torstein, Reidar Myhre og Per Solberg. *Kampen om Mønsterplanen – Språk og sak*. Universitetsforlaget, Oslo, 1982.
- [3] Howson, A.G. (red.). *Developments in Mathematical Education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education*. Cambridge University Press, 1973.
- [4] Isene, Oddvar og Erling Roland (red.). *Apropos Ny mønsterplan*. Universitetsforlaget, Oslo, 1986.
- [5] *NOU 1988:28 Med viten og vilje*. 1988
- [6] Ramvi, Øyvind (red.). *Mønsterplantimen*. Rogaland Mediesenter og Cappelen, 1987.
- [7] Tangerud, Hans. *Mønsterplanen i søkelyset*. Universitetsforlaget, Oslo, 1980.
- [8] Telhaug, Alfred Oftedal. *Utdanningsreformene – Oversikt og analyse*. Didakta Norsk Forlag, Oslo, 1997.



## 2 Læreplaner og lærebøker

### 2.1 Innledning

I det følgende tar vi for oss noen få områder av grunnskolematematikken; vi ser først på deres plass i M74, M87 og L97 og dernest på den måten de er behandlet på noen læreverk. Områdene vi har valgt er

- 1 Brøk
- 2 Likninger. Bokstav som symbol for tall. Variabel
- 3 Funksjoner
- 4 Formlikhet og kongruens

Følgende læreverk er brukt:

#### - Til M74

Myrmo, Erling, Aase Marie Aas, Gunvor Grymer og Rolf Ridar. *Matematikk for grunnskolen*. Gyldendal, flere utgaver i løpet av 1970-tallet og begynnelsen av 1980-tallet. For klassetrinnene 1–6. Stoffet er fordelt på 12 hefter, med i utgangspunktet to hefter på hvert klassetrinn. Lærerveiledningene gir et interessant innblikk i didaktisk tenkning i vårt land i tiden omkring innføringen av M74

Forfang, , Ingvald, Jan B. Ommundsen og Ragnar Solvang. *Tall og tegn*. NKI, 1975–79. For klassetrinnene 7–9. Solvang var en førende skikkelse i den norske reformbevegelsen

Myrmo og Solvang var viktige representanter for reformbevegelsen.

Fra Myrmos hånd har vi også *Hva er moderne matematikk? Nye matematiske begreper i grunnskolen – En innføring for lærere og foreldre*. Gyldendal, 1971.

Når det gjelder Forfang, Ommundsen og Solvangs verk, så har vi dessverre ikke fått tak i læreboken for 9. klassetrinn. Vi har riktignok tilgjengelig en lærerveiledning for 9. klassetrinn, men denne har en defekt fra trykkeriet (sidene 17–32 mangler!).

#### - Til M87

*Regnereisen*. Aschehoug. Dette verket var omarbeidet fra tre svenske læreverk – *Småstegsmetoden* for klassetrinnene 1–3, *Räkneresan* for trinnene 4–6 og *Möte med matte* for trinnene 7–9, dels med de samme forfatterne. Bøkene for klassetrinn 1–6 var omarbeidet av Rolf Venheim, bøkene for klassetrinn 7–9 av Trygve Breiteig. Dette verket, rost og omstridt, har vært "annerledes" enn de øvrige verkene på markedet, noe krevende og med mye tekst

#### - Til L97

*Regnereisen*. Omarbeidet av Rolf Venheim fra de svenske læreverkene *Småstegsmetoden* og *Räkneresan*. Se ovenfor under M87

*Matematikk 8–10*. Omarbeidet av Trygve Breiteig fra det svenske læreverket *Möte med matte*. Se ovenfor under M87

*Regnerreisen* fra M87-perioden var et helstøpt verk. Vi har valgt å ta for oss oppfølgeren under L97 for å se om innføringen av ny læreplan hadde konsekvenser utover justeringen som måtte til i forbindelse med at skolestart for 6-åringene ble innført.

## 2.2 Behandlingen av noen begreper i utvalgte læreverk etter M74, M87 og L97

### 1 Brøk

(Tall i parenteser står for klassetrinn)

#### M74 med tillegg 1976 (7–9)

- (3) Forberedelse til bruk av brøk ved at halvdel, tredel, firedel o.a. brukes, først i konkrete sammenhenger.
- (4) Brøktall klargjøres, likeverdige brøker.
- (5) Brøk og blandet tall. Utviding og forkorting. Addisjon og subtraksjon av ens- og uensbenedvnte brøker.
- (6) Brøk og blandet tall, innføring av multiplikasjon og divisjon, omgjøring til desimaltall. Regning med brøk som forberedelse til arbeid med forhold, prosent.
- (7) Øving i de fire regneartene med rajonale tall.
- (8) Øving i de fire regneartene.
- (9) Mer øving i de fire regneartene. Oversikt over reglene for brøkregning

#### M87

- (4–6) Addisjon og subtraksjon med brøker. Multiplikasjon av brøk med naturlige tall. Forkorting (kalt forkorting) og utviding av brøker
- (7–9) Arbeid med de fire regneartene.

#### L97

- (3) [Elevene skal] bruke enkle brøker som en halv og en kvart i praktiske sammenhenger.
- (4) [Elevene skal] arbeide med enkle brøker og desimaltall i praktiske sammenhenger.
- (5) [Elevene skal] arbeide med addisjon to subtraksjon av enkle brøker i praktiske situasjoner.
- (6) [Elevene skal] arbeide mer med brøk, med likeverdige brøker på en praktisk måte, med å addere og subtrahere. Arbeide med multiplikasjon av brøk som gjentatt addisjon.
- (7) [Elevene skal] ... bruke brøk som ren tallstørrelse, som en del av en størrelse og som forhold mellom hele tall.
- (8) [Elevene skal] arbeide med sammenhengen mellom brøk og desimaltall, prosent og promille.
- (9) [Elevene skal] gjerne ... [arbeide] med brøk som periodisk desimalbrøk, og regne med forhold og proporsjoner.
- (10) [Elevene skal] bruke og behandle enkle bokstavuttrykk, herunder brøkuttrykk med et ledd i nevner.

### Læreverker

Myrmo, o.a.: *Matematikk for grunnskolen*. Hefte 4 (2. klassetrinn): Begrepene en halv, en firedel og en tredel innføres.

Også symbolene  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  og  $\frac{1}{3}$ .

Hefte 6 (3. klassetrinn): Teller og nevner. Brøker som  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$  og  $\frac{4}{4}$ . Sammenlikning av brøker. Ekvivalente brøker (uten at denne betegnelsen er brukt). Begrepet 'tidel av'.

Hefte 7 (4. klassetrinn): Brøk som del av mengde. Brøk på tallinjen.

Hefte 8 (4. klassetrinn): Utdyping av emnene brøk som del av en hel eller av en mengde, av brøk på tallinjen, av sam-

*Regnerreisen*.

3b: Brøk er først omtalt i 3b. Begrepene halv, tredel, ... , tidel innføres ved hjelp av sirkelformede og rektangulære gjenstander.

4b: Repetisjon av halvdel, firedel, seksdel ... via mange eksempler. Begrepet brøk illustreres som del av rektangulære og

Venheim o.a.: *Regnerreisen*.

4B: Vesentlig uforandret..

5B: Uforandret.

menlikning av brøker og av likeverdige brøker.

Hefte 9 (5. klassetrinn): Addisjon og subtraksjon av brøker med samme nevner. Blandede tall. Utdyping av forståelsen av likeverdige brøker med for å forbedre forståelse av forkorting (kalt forenkling) og utviding av brøker.

Hefte 10 (5. klassetrinn): Utdyping av stoffet fra hefte 9. Utviding av brøker. Addisjon og subtraksjon av brøker med ulike nevner. Forkorting av brøker.

Hefte 11 (6. klassetrinn): Subtraksjon også med blandede tall og forskjellige nevner. Prinsipper for forkorting. Multiplikasjon av brøk med naturlig tall. Multiplikasjon av brøk med brøk ("brøkdel av ..."). Men selv ikke lærerveiledningen har noen klar begrunnelse av *hvorfor*  $\frac{a}{b}$  av  $\frac{c}{c}$

bør være det samme som  $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ .

Hefte 12 (6. klassetrinn): Brøker som desimaltall. Utdyping av emnene fra hefte 11. Inverse tall (også brøker). Brøk dividert med naturlig tall. Brøk dividert med brøk (omvei om multiplikasjon).

Forfang o.a.: *Tall og tegn*.

7. klassetrinn: Repetisjon av reglene for regning med brøk. Lærerveiledningen begrunner eller sannsynliggjør reglene for multiplikasjon og divisjon av brøker. (Dette tyngre stoffet er ikke med i elevboken). Lærerveiledningen har gode kommentarer til *bruken* av blandede tall.

8. klassetrinn: Repetisjon av brøkregning i overensstemmelse med spiralprinsippet.

9. klassetrinn: Repetisjon av brøk under algebraisk synsmåte. Det understrekes at fortrolighet med forkorting er viktig ved brøkrekning og at parenteser kan forkortes som andre faktorer. Fremgangsmåte ved utregning av bruddne brøk.

sirkelformede gjenstander og av papirstrimler og annet. Disse siste brukes til å addere brøker. Etter den første tilvenningen til de nye begrepene innføres brøknotasjonen.

5b: Sammenlikning av brøker, addisjon av brøker med samme nevner, brøker som tall på tallinjen og multiplikasjon av brøk med naturlig tall og av naturlig tall med brøk. (Det siste momentet er ikke sannsynliggjort men forsøkt "smuglet inn" uten at elevene merker det. Lærerveiledningen går inn på begrunnelsen.)

6B: Vesentlig uforandret.

7a og 7b: Repetisjon av brøk i 7b. Multiplikasjon og divisjon med brøk. Det er eksplisitt sagt at f.eks.  $\frac{3}{4} \cdot 12$  må oppfattes

som  $\frac{3}{4}$  av 12. Øvinger med divisjon av tall med brøk i betydningen målingsdivisjon (men dette ordet er ikke nevnt). Sammenhengen mellom brøk og desimaltall er omtalt. Forkorting og utviding av brøker er behandlet. Addisjon og subtraksjon av brøker med lik nevner og med ulik nevner.

Breiteig o.a.: *Matematikk 8: Vesentlig uforandret*.

Breiteig o.a.: *Matematikk 10: Omfattende repetisjon av brøk*.

## 2 Likninger. Bokstav som symbol for tall. Variabel

(Tall i parenteser står for klassetrinn)

### M74 med tillegg 1976 (7–9)

- (1)  $+ 4 = 8; 3 > \dots$
- (2) Bruk av forskjellige bokstaver for den ukjente.
- (3)  $3x = 12, 2x < 6$ .
- (4) Enkle tekstoppgaver løses vha. likninger og ulikheter.
- (6) Metodisk løsning av enkle likninger av 1. grad med én ukjent. Negative tall forsøkes unngått.
- (7) Systematisk løsning av likninger av

### M87

- (1–3) Løsning av enkle likninger gjennom utprøving
- (4–6) Øvinger i forbindelse med praktiske oppgaver, først gjennom utprøving. Enkle øvinger med bokstaver som symboler for tall. Innsetting av tall for bokstaver.
- (7–9) Likninger av første grad med én

### L97

1. grad med én ukjent ved å forenkle og bruke hovedlovene.
- (8) Fortsatt løsning av likninger og ulikheter av 1. grad med én ukjent. Enkle eksempler på likninger med den ukjente i nevneren ... Kvadratiske likninger som f.eks.  $5x^2 = 35$  ved å bruke kvadratrottabell.

ukjent – oppstilling og løsningsmåte. Likninger av første grad med to ukjente – hovedvekt på grafisk løsning. Kvadratiske likninger med én ukjent uten førstegradsledd. Algebraisk løsning, grafisk løsning, løsning ved tilnæringsmetoder.

- (9) [Elevene skal] øve seg i å tolke, beskrive, vurdere og bearbeide situasjoner og praktiske problemer både ved bruk av ord og ved å oversette til formler, likninger og ulikheter.

- (9) Enkle likninger av 1. grad med to ukjente. Løsning ved grafisk fremstilling og ved regning.

- [Elevene skal] finne frem til metoder for å løse likninger og ulikheter av første grad med én ukjent
- (10) [Elevene skal] stille opp og tolke likninger med to ukjente, arbeide med varierte løsningsmetoder og kontrollere og vurdere løsninger.

Tilleggsstoff 7–9:

Øving i litt mer kompliserte oppgaver. I noen eksempler med likninger bør ordingen føre til  $0 \cdot x = 0$  og  $0 \cdot x = t$  ( $t \neq 0$ ).

## Lærebøker

Myrmo, o.a.: *Matematikk for grunnskolen*.

Hefte 1 (1. klasstrinn): Åpne utsagn av typen  $3 + \_ = 5$  for å lære å konstruere sanne utsagn og for å finne en ukjent addend. Også skrivemåten  $3 + \_ = 5$  brukes. Subtraksjon med manglende subtrahend, som f.eks.  $6 - \_ = 2$ .

Hefte 5 (3. klasstrinn): Begrepet *variabel* innføres. Oppgaver av typene  $x + 4 < 9$ ,  $y - 4 > 10$  og  $x + y = 5$ .

Hefte 6 (3. klasstrinn): Øvinger av typen  $3 \cdot \_ = 15$  som forberedelse for divisjon.

Hefte 7 (4. klasstrinn): Likninger av typene  $15 + x = 31$ ,  $55 - x = 25$  og  $5 \cdot x = 15$  (men også "med  $x$  først"). Begrepet likning defineres. Tekstoppgaver løst vha. likninger.

Hefte 8 (4. klasstrinn): Likninger av typen  $\frac{28}{x} = 7$  eller  $28 : x = 7$ .

Hefte 9 (5. klasstrinn): Likninger av kjente typer, men med bruk av forskjellige bokstaver for den ukjente.

Hefte 11 (6. klasstrinn): Mer systematisk om løsning av likninger av 1. grad med én ukjent.

Forfang o.a.: *Tall og tegn*.

7. klasstrinn: *Likninger og ulikheter* behandles ved å ta for seg utsagn, særlig åpne utsagn som "I dag møter det opp  $x$  elever i klassen."  $x$  omtales under navnet *variabel* og det presenteres en *grunnmengde* for  $x$  bestående av de verdiene  $x$  tillates å ha. Til orientering (med liten skrift) finner en stoff om logiske konnektorer (symbolisert ved  $\wedge$  for 'og',  $\vee$  for 'eller', for 'medfører' og for 'er ensbetydende med'). Det gis forenklingslover for likninger ("Vi kan addere like mye på begge sider av likhetsegnet", osv.). Gjennomarbeidede eksempler.

8.klasstrinn (8b): Løsningsstrategiene for likninger av 1. grad repeteres. Det gis eksempler på praktisk bruk av likninger. Likninger med den ukjente i nevner behandles. Enkle kvadratiske likninger behandles. Tilleggsstoff: likninger

*Regnereisen*.

1a og 1b: Oppgaver av typene  $3 + \_ = 4$ ,  $8 + \_ = 8$  og  $2 + \_ = 10$  (tiervenner). Senere også  $\_ + 5 = 9$ .

Venheim o.a. *Regnereisen*.

2A og 2B: Vesentlig uforandret.

7A: Vesentlig uforandret

6a: I "spor 2" innføres  $x$  for ukjent tall:  $33 + x = 50$ ,  $30 - x = 25$ ,  $4 \cdot x = 20$ . Ordet 'likning' innføres.

8a og 8b: Løsning av enkle likninger ved å bruke forenklingslover for likninger.

Breiteig o.a.: *Matematikk 9*. Vesentlig uforandret.

av typene  $x(x + a) = 0$  og  $(ax+b)(cx+d) = 0$ .  
Ulikheter er også tatt med.

9. klasstrinn: Ikke tilgjeng.

9a og 9b: Løsningsmetode for lineære likninger med én ukjent. Grafisk løsning av sett av to lin. likn. med to ukjente. Løsn. av sett av to lineære likninger med to ukjent etter innsettingsmetoden og etter eliminasjonsmetoden.

Breiteig o.a.: *Matematikk 10*: Ingen vesentlige endringer, men rekkefølgen av emnene er noen steder litt annerledes.

### 3 Funksjoner

(Tall i parenteser står for klasstrinn)

#### M74 med tillegg 1976 (7–9)

- (3) Ordnete par innføres. Koordinat-system innføres på foreløpig vis (men bare 1. kvadrant).
- (4) Fortsatt arbeid med stoffet fra 3. klasstrinn.
- (5) Enkle forskrifter for sammenheng mellom tallmengder som  $y = x + 3$ ,  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  studeres.
- (6) Innføring av flere kvadranter. Tolkning av grafer og tabeller fra aviser o.l.
- (7) Funksjonsbegrepet. Lineære funksjoner. Proporsjonalitet. Funksjoner gitt ved tabeller. Illustrasjon ved koordinatsystem. Bruk av grafer til å løse likninger av typen  $ax + b = c$ .
- (8) Mer øving med funksjoner. Øving med proporsjonalitet. En tegner grafer etter ulike typer av forskrifter og bruker disse grafene til å løse enkle oppgaver.
- (9) Noen eksempler på funksjoner av typen  $y = a/x$ . Omvendt proporsjonalitet.

Tilleggstoff 7–9.

Eksempler på åpne utsagn i to variabler som definerer funksjoner og som ikke definerer funksjoner. Bokstavsymbol for funksjoner som  $f$ ,  $g$  og andre, tilsvarende for funksjonsverdier –  $f(x)$ ,  $g(x)$  og andre. Definisjonsmengde og verdimengde. Funksjoner av typen  $y = a/x + bx$ . En tegner grafer til funksjoner av 2. grad. Fastsettelse av maksimum eller minimum ved avlesning.

#### M87

- (4–6) Innføring av funksjonsbegrepet via praktiske eksempler. Koordinatsystemet i første kvadrant
- (7–9) Grafisk fremstilling av funksjoner. Variablebegrepet. Lineære funksjoner, proporsjonalitet, omvendt proporsjonalitet.

#### L97

- (9) [Elevene skal] øve seg i å tolke, beskrive, vurdere og bearbeide situasjoner og praktiske problemer både ved bruk av ord og ved å oversette til formler, likninger og ulikheter.  
[Elevene skal] finne frem til metoder for å løse likninger og ulikheter av første grad med én ukjent
- (10) [Elevene skal] stille opp og tolke likninger med to ukjente, arbeide med varierte løsningsmetoder og kontrollere og vurdere løsninger

### Lærebøker

Myrmo, o.a.: *Matematikk for grunnskolen*. Hefte 3 (2. klasstrinn): Her innføres en "maskin" som tar mot tall som "input" og gjør noe med tallet (f.eks. adderer 5). Maskinen brukes foreløpig til å utføre addisjon eller subtraksjon med et fast tall. Ordene "variabel" og "funksjon" brukes ikke ennå.

Hefte 6 (3. klasstrinn): Funksjonsmaskinen brukes nå også til å multiplisere med et fast tall.

Hefte 8 (4. klasstrinn): Funksjonsmaskinen omtales nøye. Tegning av funk-

Venheim o.a. *Regnereisen*.

sjonsgraf i et koordinatsystem forberedes. Lærerveiledningen omtaler lineære funksjoner. Elevboken har eksempler men bruker ikke uttrykket 'lineær funksjon'.

Hefte 9 (5. klassetrinn): Øvinger som forbereder  $y = x + \text{tall}$ , men "y" brukes ikke ennå.

Hefte 10 (5. klassetrinn): Ordet 'funksjon' brukes fritt. Øvinger omkring lineære funksjoner. Første akse eller x-akse. Koordinater.

Hefte 12 (6. klassetrinn): Repetisjon av funksjoner. Andre akse eller y-akse.

Forfang o.a.: *Tall og tegn*.

7. klassetrinn: Funksjoner innføres via eksempler på sammenhenger mellom mengder (f.eks. utslag på fjærvekt når det henges på 1, 2, ..., 5 lodd). Sammenhenger representeres ved pildiagrammer og ved punktmengder i et koordinatsystem. Forskjellen mellom sammenhenger som er og som ikke er funksjoner understrekes og illustreres ved pildiagrammer og grafer. "Funksjonsmaskiner" med input og output brukes til å illustrere funksjoner. Funksjoner som modeller av praktiske situasjoner er også med. Lineære funksjoner drøftes inngående

6a: En finner sammenhenger mellom to størrelser fremstilt ved tabeller og diagrammer. Ordet 'funksjon' innføres. Aksesystem, grafisk fremstilling eller graf, funksjonsgraf.

7a og 7b: I 7b repeteres funksjonsbegrepet. Standard terminologi omkring koordinatsystemer innføres. Proporsjonale størrelser. Lineære funksjoner (også uttrykket). Trappfunksjon. Ordet "variabel". "Funksjonsmaskin".

8a og 8b: En del eksempler på funksjoner finnes bortgjemt i avsnittene *På reise* (f.eks. omregning mellom utenlandske og norske penger, tid-veg-fart) og *Matematiske sammenhenger*.

9a og 9b: I 9b tar "rute 2" for seg det generelle uttrykket  $y = ax + b$  for en lineær funksjon. Betydningen av  $a$  og  $b$  er forklart. Spesielle uttrykk for  $a$  og  $b$  er ikke innført.

7A: Som i 6a i 87-utgaven, men ordet 'funksjon' er ikke innført.

Breiteig o.a.: *Matematikk 8*: Vesentlig uforandret fra M87-utgaven. (Ordet 'funksjon' er først innført her.)

Breiteig o.a.: *Matematikk 9*: Repetisjon av funksjoner. Ordet 'stigningstall' innføres. Tolkning av grafer. Fremstilling av to lineære funksjoner i samme koordinatsystem. Tolkning av grafen.

Breiteig o.a.: *Matematikk 10*: Proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet. Kvadratiske funksjoner. Ellers vesentlig uforandret..

#### 4 Formlikhet og kongruens

(Tall i parenteser står for klassetrinn)

##### M74 med tillegg 1976 (7–9)

- (3) Forestillinger om kongruens.
- (4) Forestillinger om formlikhet via forstørring eller forminsking
- (5) Fortsettelse fra 4. klassetrinn.
- (6) Formlikhet, forstørring og forminsking i bestemte forhold. Kart og arbeidstegninger.
- (7) Formlikhet er ikke eksplisitt nevnt.
- (8) Enkle kongruensavbildninger. Formlikhet. Forstørring og forminsking i bestemte forhold.
- (9) Sammensetning av kongruensavbildninger. Formlikhet, arealforhold.

##### M87

- (7–9) Først her er nevnt formlike trekanter, kart og arbeidstegninger. Kongruensavbildning nevnes.

##### L97

- (6) [Elevene skal] arbeide med målestokk, kart og enkle arbeidstegninger
- (8) [Elevene skal] arbeide mer med målestokk, med kart og med å lage og bruke enkle arbeidstegninger.
- (9) [Elevene skal] arbeide med begrepene formlikhet og kongruens
- (10) [Elevene skal] gjøre erfaringer med målestokk, kongruens og formlikhet.

#### Lærebøker

Myrmo, o.a.: *Matematikk for grunnskolen*.

Hefte 6 (3. klassetrinn): Begrepet kongruens, og også uttrykket 'kongruens', innføres. Kongruente figurer omtales som slike som har samme *form* og samme størrelse.

*Regnereisen*.

3a og 3b: Forstørring og forminsking streifes i 3a. I 3b er det et eksempel på målestokk (tegning i målestokk 1 : 10).

Venheim o.a.: *Regnereisen*.

4A og 4B: I 4A er forstørring og forminsking ikke lenger nevnt. I 4B er figuren som viste målestokk tatt ut, men oppgavene omkring målestokk er med.

Hefte 8 (4. klassetrinn): Kongruens tas opp igjen.

4a og 4b: Forstørring og forminsking knyttet til omkrets og areal av figurer.

5A og 5B: Det står mindre her inn i M87-utgaven om forstørring og forminsking, men en finner oppgaver knyttet til målestokk (2 sider i 5A).

6A og 6B: Vesentlig uforandret fra 87-utgaven.

5a og 5b: Oppgaver med forstørring av trekanter i en viss målestokk. Konsekvenser av forstørringen for omkretsen og arealet.

Forfang o.a. *Tall og tegn*.

6a og 6b: Om forstørring, forminsking, omkrets og målestokk i 6a. Om forstørring, forminsking, areal og målestokk i 6b.

7A og 7B: I 7A er det en liten reduksjon i forhold til M87-utgaven ved at "målestokk og areal" ikke lenger er med.

I 7b omtales kongruens mellom trekanter. Tre kongruenssetninger er tatt med.

I 8b behandles formlikhet under perspektivet avbildning via begrepene forstørring, forminsking og målestokk. Begrepet formlikhet problematiseres ikke ("Vinklene i trekantene er parvis like store. Det må de være for at trekantene skal ha samme form."). Eksempler med figurer der den ene er en forstørring av den andre legger til rette for tanken om at par av samsvarende sider i de to figurene har samme forhold til hverandre. Dette settes til slutt frem som en setning. (Lærerveiledningen omtaler dette som spesielt vanskelig stoff.)

Breiteig o.a.: *Matematikk 9*: Formlikhet og kongruens,  $\sim$  og  $\cong$ . Trekanter med parvis like store vinkler er formlike. Formlikhet og målestokk.

9a og 9b: Ordene 'formlik' og 'formlikhet' nevnes første gang i 9a. Kongruens. Regning med formlike trekanter vha. forhold mellom samsvarende sider. I "rute 2" konstateres det at dersom vinklene i to trekanter er parvis like store, da er trekantene formlike.

Breiteig o.a.: *Matematikk 10*: Vesentlig uforandret.

## 2.3 Kommentarer

I lærerveiledningen til hefte 1 i Myrmo o.a., *Matematikk for grunnskolen*, fremgår noen av de tanker som lå i tiden. Riktig nok er disse streift allerede i avsnitt 1.3, men i denne lærerveiledningen har vi mulighet for å føle tiden nøyere på pulsen:

- *Elevsenter undervisning*. Det hentes støtte hos Montessori, Cuisenaire og Dienes for det syn at undervisningen i matematikk bør sikte mot at elevene blir aktive, at deres kreativitet blir utnyttet, at individualitet blir respektert og lagt til grunn for differensiering. Elevene bør få erfaringer og innsikt ved selv å få arbeide med egnet laborativt materiell.

I denne sammenhengen er det rimelig å nevne begrepet *induktiv undervisning*. Vi har funnet det omtalt i lærerveiledningen til hefte 11.

En tenker seg følgende progresjon

En belyser problemet med konkrete eksempler fra elevenes erfaringsområde

Elevene må selv få prøve å finne løsninger. Samtale, diskusjon

Elevene prøver selv å arbeide seg inn i stoffet. Etter hvert gjennomgåelse i samlet klasse

Rikelige og varierte øvinger

- *Pensum på barnetrinnene blir mer omfattende enn før*. Grunnleggende innføring i f.eks. koordinatsystem, fortegnstall, potenser, relasjoner, statistikk ...
- Tanker hos *Piaget* trekkes frem: Ledet aktivitet med konkrete hjelpemidler for å bygge opp forestillinger omkring *kvantitet*. Bruk av *sym-*

*bol*er først når elevene har utviklet klare forestillinger om kvantitet. For det tidlige arbeidet med *geometri* understrekes betydningen av å beherske de generelle "topologiske" begrepene over – under, øverst – nederst, først – sist, osv.

- *Relasjonsbegreper* som *større enn*, *mindre enn*, *like store*, *like tunge*, ...
- *Mengdebegreper* (også den tomme mengde), men uten bruk av symboler i starten.

Det er tydelig samsvar mellom M74 og de læreverkene vi har tatt for oss. Dette er snautt til å undres over, siden læreverkene er forfattet av sentrale personer i reformarbeidet.

M87 og *Regnereisen*: Matematikkplanen i M87 er svært lite detaljert, og opererer dessuten med 3-årsbolker. Det har vært uproblematisk å følge læreplanen. Sammenlikner en med bøkene etter M74 ser bl.a. at mengdebegrepet ikke lenger forekommer eksplisitt. "Moderne matematikk" er stort sett borte!

L97 og *Regnereisen* samt *Matematikk 8–Matematikk 10*: Her kan en konstatere at endringene fra "M87-utgaven" er minimale. En har selvsagt lagt til stoff for å komme 6-åringene i møte, men utover det består endringene i forsiktige justeringer.

---



## 3 Et blikk tilbake: tanker bak reformen

### 3.1 Innledning

Som sagt i avsnitt 1.3 ble *mengdebegrepet* svært sentralt i reformarbeidet, arbeidet for en ny og bedre matematikkundervisning. Ja, "moderne matematikk" var for mange synonymt med mengdelære. *Hva var egentlig tankene bak?*

Bent Christiansen (1921–96) var fra slutten av 1960-årene den fremste representanten i Norden for den internasjonale reformbevegelsen. *Maal og midler i den elementære matematikkundervisning* fra 1967 (norsk utgave i 1972 [2]) var en innflytelsesrik bok. Den representerte på et vis den mer radikale fløy av reformbevegelsen, men var uten de nesten fanatiske trekk som også fantes innenfor bevegelsen. (På 1970-tallet beveget Christiansen seg bort fra de mer radikale "moderne matematikk"-synsmåtene.) I årene forut for M74 ble mengdelæren saktens *omtalt* som en hjelpedisiplin men nok i virkeligheten tillagt en betydning langt ut over den det er rimelig å tillegge en hjelpedisiplin. I [2], s. 44, heter det:

Ved behandlingen av stoffet må hjelpebegrepene fra mengdelæren anvendes fra første stund.

I [2], s. 50, omtaler forfatteren nyere undervisningsprogrammer i matematikk

som fører barnet frem til tallbegrepet gjennom en konsekvent og vidtgående anvendelse av begrepene fra mengdelæren.

Og på s. 59:

Oppnåelse av innsikt i og forståelse av begrep som:

Mengde, delmengde, snitt, union, mengdedifferens, mengdeprodukt, relasjon, funksjon, komposisjon innenfor en mengde

blir fundamentale avledede mål for matematikkundervisningen

Men var det nå rimelig å se på mengdelæren som et sesam-sesam som skulle åpne porten til matematikkens eventyrland for massene?

### 3.2 Et skudd over mål?

Omkring 1900 ble det stilt store forventninger til mengdelæren (innført fra ca. 1873 av Georg Cantor). Riktig nok hadde det allerede fra 1895 dukket opp problemer i mengdelæren. Noen ble oppdaget av Cantor selv. Og i 1902 presenterte Bertrand Russell et paradoks, en fundamental motsigelse som angår selve grunnlaget for mengdelæren (og logikken). Krisen var åpenbar for den matematiske verden. Cantors såkalte "naive" definisjon av mengdebegrepet kunne ikke opprettholdes. Etter noen få år etablerte det seg forskjellige skoler, hver av dem med sitt eget program for å unngå eller omgå paradoksene (for det var flere).

Bourbakis program for å sanere matematikken fra grunnen av (se avsnitt 1.2) hører hjemme under overskriften *aksiomatisk mengdelære* eller *den mengdeteoretiske skolen* (den siste betegnelsen er brukt av Morris Kline i [5]).

Abraham A. Fraenkel var et kjent navn innen matematisk grunnlagsforskning. I en oversiktsartikkel fra 1967 skriver han:

Thus, the modern development of set theory seems to shatter mathematics altogether ... New axioms apparently need to be introduced, corresponding to a deeper understanding of the primitive concepts underlying logic and mathematics. Yet nobody has so far succeeded in discovering even a direction in which such axioms might be sought. [4]

I 1980 uttrykte Kline seg i liknende vendinger (se [5]).

Skal tro om ikke også dette bør være med når en overveier hvordan barn og unge skal føres inn i matematikken? Det var kanskje galt å forespeile lærere, foreldre og elever at innføring av mengdelære på tidlige trinn i undervisningen skulle føre til større innsikt i faget og en sikrere retning i undervisningen. Et begrep (mengdebegrepet) som når det kommer til stykket er beheftet med stor uklarhet og uoverskuelige problemer, kan det forventes å gi klarhet?

Nå lar det seg innvende at dette er å skyte en god del over målet. Tross alt er det mengdebegrepet det er aktuelt å operere med i grunnskolen av ganske triviell karakter, og uten de problemene vi har streift ovenfor.

La oss se på hvordan Piaget fremstiller barns representasjon av *kvantitet* for seg selv. Vi skal se at han, sant nok, bare opererer med ganske "trivielle" aspekter ved mengdebegrepet.

### 3.3 Tall og mengder hos Piaget

I [7] begynner forfatterne med å understreke hvor viktig det er i en enhver rasjonell virksomhet at konserveringsprinsipper (bevarelsesprinsipper)er "på plass":

All erkjennelse, vitenskapelig eller dagligdags, forutsetter eksplisitt eller implisitt konserveringsprinsipper.

...

Det overordentlig viktige begrepet permanent gjenstand forutsetter helt fra persepsjonen av [i den antatte sekvensen av mentale operasjoner som utgjør erkjennelse] at det foreligger et konserveringsprinsipp, uten tvil det mest grunnleggende av alle prinsipper [relatert til erkjennelse].

[K]onservering er et nødvendig vilkår for enhver rasjonell aktivitet ...

(Toute connaissance, qu'elle soit d'ordre scientifique ou relève du simple sens commun suppose un système, explicite ou implicite, de principes de conservation.

...

[D]ès la perception, le schéma si essentiel de l'objet constant, ... suppose l'élaboration d'un vrai principe de conservation, le plus primitif sans doute de tous.

...

[L]a conservation constitue une condition nécessaire de toute activité rationnelle ... ([7], s. 6)

Spesielt,

Et tall er ikke forståelig uten for så vidt som det forblir det samme uansett hvordan enhetene det er sammensatt av er arrangert: det er dette en har kalt tallets "invarians".

...

[O]m det dreier seg om kontinuerlige eller diskrete størrelser, om kvantitative forhold oppfattet i det sansbare univers eller mengder og tall dannet av tanken, om det dreier seg om de aller enkleste forbindelser mellom telleaktivitet og erfaring eller om de mest abstrakte aksiomatiseringer av noe intuitivt oppfattet – overalt og bestandig er konserveringen av ett eller annet forutsatt av tanken som nødvendig betingelse for enhver matematisk forståelse.

(Un nombre n'est ... intelligible que dans la mesure où il demeure identique à lui-même quelle que soit la disposition des unités, dont il est composé: c'est ce qu'on a appelé l'"invariance" du nombre.

...

[Q]u'il s'agisse de quantités continues ou discontinues, des aspects quantitatifs perçus dans l'univers sensible ou des ensembles et des nombres conçus par la pensée, qu'il s'agisse des contacts les plus primitifs de l'activité nombrante avec l'expérience ou des axiomatisations les plus épurées de tout contenu intuitif, partout et toujours la conservation de quelque chose est postulée par l'esprit à titre de condition nécessaire de toute intelligence mathématique. ([7], s. 7)

De to første kapitlene i [7] omhandler utviklingen av konserveringsprinsippet, først for kontinuerlige størrelser, deretter for diskrete størrelser.

Tredje kapittel dreier seg om enentydig samsvar og likeverdighet

mellom mengder. Dette er viktig fordi

å sammenlikne to størrelser betyr i virkeligheten enten å sammenlikne deres dimensjoner eller å opprette samsvar mellom dem element for element. Denne siste fremgangsmåten ser ifølge Cantor faktisk ut til å konstituere de hele tall, siden den er det aller enkleste og aller mest direkte mål på likeverdighet mellom mengder.

(Comparer deux quantités, c'est, en effet, ou mettre en proportion leurs dimensions, ou mettre en correspondance terme à terme leurs éléments. Or, ce dernier procédé apparaît, depuis Cantor, comme constitutif du nombre entier lui-même, puisqu'il fournit la mesure la plus simple et la plus directe de l'équivalence des ensembles. ([7], s. 50))

Forsøkene beskrevet i dette kapitlet er gjort

med det ene formål å finne ut om det samsvaret element for element som barnet etablerer selv eller som en oppretter sammen med det nødvendigvis i barnets sinn fører til idéen om en varig likeverdighet mellom de tilsvarende mengdene.

(... dans le seul but d'établir si la correspondance terme à terme opérée par l'enfant lui-même ou effectuée avec lui, entraîne nécessairement dans son esprit l'idée d'une équivalence durable entre les ensembles correspondants. ([7], s. 51))

En lar barnet tilordne flasker til glass, deretter blomster til vaser og egg til eggeglass. De mengdene som det skal etableres samsvar mellom, som glass og flasker, blir arrangert på forskjellige måter, med gjenstandene tett sammen, langt fra hverandre, osv. Det etablerer seg stadier: (1) hverken nøyaktig samsvar eller likeverdighet (ekvivalens), (2) samsvar element for element men ingen varig likeverdighet mellom mengdene og (3) samsvar element for element og varig likeverdighet mellom mengdene. Barnets tallbegrep er ufullstendig på stadiene (1) og (2):

Selv når barn som tror at blomster samlet i en bukett er færre enn de vasene blomstene har samsvart med medgir at blomstene nok kunne settes tilbake i vasene én for én, er det ikke ennå tale om noen operasjon som kan logisk reverseres ...

([M]ême lorsque les petits, qui croient les fleurs serrés moins nombreuses que les vases avec lesquels elles ont correspondu, admettent cependant que l'on pourrait les replacer une à une dans les vases, il n'y a pas encore là une opération logiquement réversible... ([7], s. 67))

Men på stadium (3) er nevnte reversibilitet på plass:

Fet (5 år og 5 måneder) legger 10 blomster foran vasene og setter dem så oppi. En tar blomstene opp og holder dem samlet i hånden: "Er det fremdeles det samme?" "Ja" "Og slik (blomstene spres ut)?" "Ja." "Hvorfor?" "Fordi de var oppi [vasene]."

(Fet (5; 5) aligne 10 fleurs devant les vases puis les y introduit. On les sort et on les mets en tas: "Est-ce que c'est encore la même chose? – *Oui*. – Et comme ça (espacées à distance)? – *Oui*. – Pourquoi? – *Parce qu'elles étaient là dedans*." ([7], s. 66))

Piaget har beskrevet barns begynnende forståelse av kvantitative og numeriske forhold ved begreper fra mengdelæren. I og med etableringen av konserveringsprinsipper er begrepene 'enentydig og "reversibel" korrespondanse' og 'likeverdighet eller ekvivalens (mellom mengder)' operative begreper. Piaget forstår det slik at etableringen av tallbegrepet i et barns sinn er uttrykk for etablering av et mengdebegrep i denne betydningen:

En mengde er en samling av "gjenstander" (individuelle sådanne eller delmengder) som ses på som likeverdige uavhengig av om de måtte være forskjellige seg i mellom.

(Une classe est en effet une réunion de termes (individus ou sous-classes) considérés comme équivalents indépendamment de leurs différences. ([7], s. 121))

Det er disse resultatene og tolkningene hos Piaget som ligger bak en god del av de bestrebelsene som ble gjort for å fornye matematikkundervisningen. Det var da ikke så merkelig at mengdelæren kom til å stå sentralt.

### 3.4 Er reservasjone-

Forkjemperne for "moderne matematikk"/"new math"/"mengdelære" vant ikke frem. Hvorfor?

## ne mot reformen gyldige i dag?

Motstanderne av den ekstreme fløyen av reformbevegelsen var de samme som motsatte seg isolasjonen av den "rene" matematikk fra alt som het anvendelser av matematikk. Vi kan si at disse "hadde beina på jorda". *Hva skulle så det bety?* Flere trakk frem at mengdelære stort sett er noe som hører hjemme i et svært spesielt forskningsfelt, og ingen andre steder. Ovenfor, i avsnitt 3.2, stilte vi spørsmålet om det var å skyte over målet når vi trakk frem problemene ved mengdebegrepet. De som stod i striden på 1960- og 1970-tallene opplevde det ikke slik. Vi trekker inn Richard Phillip Feynman (1918–88), teoretisk fysiker, Nobelpris-vinner (1965) og legendarisk lærer. I 1964 gjennomgikk han, som medlem av California State Curriculum Commission, et stort antall lærebøker i matematikk for trinnene 1–8 i kalifornisk grunnskole. I [3] skriver han blant annet:

Many of the books go into considerable detail on subjects that are only of interest to pure mathematicians. Furthermore, the attitude toward many subjects is that of a pure mathematician. But we must not plan only to prepare pure mathematicians. In the first place, there are very few pure mathematicians and, in the second place, pure mathematicians have a point of view about the subject which is quite different from that of the users of mathematics. A pure mathematician ... is purposely *disinterested* in ... the meaning of the symbols and letters and ideas; he is only interested in logical interconnections of the axioms, while the user of mathematics has to understand the connection of mathematics to the real world.

Whether it is wise to use "new," in the sense of very modern, mathematics is questionable. Mathematics which is used in engineering and science – in the design, for example, of radar antenna systems, in determining the position and orbits of the satellites, ..., and in the most esoteric forms of theoretical physics – is really old mathematics, developed to a large extent before 1920.

"Ord":

When we come to consider the words and definitions which children ought to learn, we should be careful not to teach "just" words. It is possible to give an illusion of knowledge by teaching the technical words which someone uses in a field ... without at the same time teaching any ideas or facts using these words. Many of the math books that are suggested now are full of such nonsense – of carefully and precisely defined special words that are used by pure mathematicians in their most subtle and difficult analyses, and are used by nobody else.

...

It will be very easy for students to learn the new words when, and if, they become pure mathematicians ...

Presist språk:

The real problem in speech is not *precise* language. The problem is *clear* language. It is only necessary to be precise when there is some doubt as to the meaning of a phrase, and then the precision should be put in the place where the doubt exists. It is really quite impossible to say anything with absolute precision, unless that thing is so abstracted from the real world as to not represent any real thing.

Pure mathematics is just such an abstraction from the real world, and pure mathematics does have a special precise language for dealing with its own special and technical subjects. But this precise language is not precise in any sense if you deal with the real objects of the world, ...

It will perhaps surprise most people who have studied the textbooks to discover that the symbol  $\cup$  or  $\cap$  representing the union and intersection of sets and the special use of the brackets  $\{ \}$  and so forth ... almost never appear in any writings in theoretical physics, in engineering, in business arithmetic, computer design, or other places where mathematics is being used. I see no need or reason for this all to be explained or to be taught in school. ... It is claimed to be precise, but precise for what purpose?

Max Black (1909–88), fremragende analytisk filosof, skrev i 1970 en artikkel, "The elusiveness of sets" [1]. Black mente at mengdelærens teknisk sjargong blir brukt av de fleste – elev som lærer – med bare en illusjon av forståelse. I [1] går han til litteraturen om mengdelære og påpeker at det rår kaos om hva mengdebegrepet betyr. Han konsentrerer seg om motsetningen

mellom dem som snakker om mengder ved å appellere til intuisjonen ("the lowbrow view") og dem som snakker om mengder som "abstrakte ting"

("the highbrow view").

Bak det påståtte definisjonsmessige kaoset ser han "an outmoded and inadequate conception of the purposes of definition" ([1], s. 616). Black vil be matematikere forklare hvordan de *braker* ordet 'mengde', spesielt hvis de har til hensikt å avvike fra dagligtalens bruksmåter. Det følgende antyder hvordan han tenker om definisjon:

A word is, among other things, an instrument for expression, communication, and reference, and synonymous words can be viewed as verbal instruments having the same specific uses. But the use of a tool is not usually explained by producing an equivalent tool: nobody would be foolish enough to insist on having the use of a hammer explained by som hammer-substitute; then why not be as liberal in our demands on explanations of meaning? Perhaps 'set' cannot be defined, upon some restrictive interpretation of definition; but its employment can surely be elucidated. The point is not to "define" the word, but to delineate its functions – and that, too, deserves to be called "definition." ([1], s. 616f)

À propos den aksiomatiske mengdelæren:

Professional mathematicians are often content to treat 'set' as primitive og "undefinable," in the sense in which 'point', 'between', and other primitive terms of an axiomatic geometry are undefinable. Well, we do have elegant axiomatic set theories – but they are used, "applied," outside those theories. Otherwise, 'set', for all that mathematicians cared, could mean any objects we pleased – footballs or walking sticks – that satisfied the set-theoretical axioms. (And no axiomatic theory can preclude such deviant interpretations.) But when we have occasion to talk about "the set of integers," we intend to mean something definite. A set must be something better than "the ghost of a departed quantity" (to borrow Berkeley's splendid phrase). So back to the rigors of "honest toil."

If we are to be satisfied with something other than a formal definition of 'set', than what are we to demand? ([1], s. 617)

Som ledetråd tar han begrepet 'naturlig tall':

To have mastered the primary uses of 'number' means *inter alia*: to know when and how to count and how to get the answers right. ... The correspondingly modest requirement upon the concept of set are: to know when and how to exhibit specific sets; and to know how to calculate with sets ... ([1], s. 617)

Black studerer i detalj en rekke av de "definisjonene" og forklaringene av mengdebegrepet han har funnet i litteraturen. Vi tar med Cantors forklaring,

Med en 'mengde' forstår vi enhver sammenfatning til et hele  $M$  av bestemte og vel atskilte ting i vår anskuele og tanke.

og Blacks innvendinger:

Suppose som "objects" really exist; then that suffices to make them eligible elements of a set. Whether we perceive them, think about them, name them, or describe them, has nothing to do with their capacity to generate authentic sets. Sets are not thought or designated into existence. ... So we can simply expunge the references to perception and thought in Cantor's formula. ...

So Cantor's formula, stripped to essentials, runs quite simply: "A set is an assembly into a whole of (well-defined) objects." Here, the phrase, "assembly into a whole," certainly suggests that something is *to be done* to the elements, in order for the "whole" ... , which *is* the set to result. But *what* is to be done, if not merely thinking about the set? And what difference can thought make to distinct objects? ([1], s. 618–19)

Ut fra litteraturen kommer han til at

... a set may be regarded, "if this helps," as a collection of things that are not collected – or an aggregate of things that are not aggregated, a combination of things that are not combined. I do not think this "helps." ...

If talk about "assembling" or "unifying" is irredeemably figurative, what literal sense, if any, lurks behind it? ...

The truth is that once the elements of a set have been identified, *nothing* need or can be done to produce the corresponding set." ([1], s. 619–21)

Hvordan foreslår så Black selv å snakke om mengder. Han viser til at i dagligtalen er vi faktisk i stand til å identifisere mengder og resonnerer omkring dem "whithout the inconveniences of a superfluous mythology". Hvordan

*snakker* vi om mengder? Black omskriver spørsmålet: Hvordan er vi i stand til å *snakke om flere ting samtidig*? Språket har midler til å referere til flere ting samtidig: 'Bjørnson og Ibsen' eller 'birkebeinerne'. Forfatteren trekker paralleller mellom vanlige "singular descriptions" og det han foreslår å kalle "plural descriptions", og argumenterer for at bruk av de sistnevnte kan raffineres til å erstatte snakk om mengder.

Black hevder til slutt at hans program for å bygge mengdeterminologi på dagligtalens "plural referring expressions" er pedagogisk gjennomførbar.

Collective terms such as 'herd', or 'team', or 'orchestra', etc. have the sense of *a number of things ... such that so-and-so*. We need only drop the such-that clause, and the specific information it conveys, to get the abstract notion of a set as *a number of things considered together* (cf. the French name for a set, *ensemble*) or *several things referred to at once*. This is the nearest we need to approach a formal definition and if it helps to elucidate the technical notion ... that will suffice. ([1], s. 634)

Vi vil si litt mer om Bourbaki. Som antydnet i avsnitt 1.2 var dette en innflytelsesrik gruppe med et svært ambisiøse program.

Eventually they conquered essentially the entire world of mathematics, even trying to breach the walls of high school in the disastrous episode of the 'new math'. (David Mumford, 1991; se [8])

I grunnlagsspørsmål hører de til den mengdeteoretiske skolen (én av de fire store skoledannelsene i denne sammenheng – den logisistiske, den intuisjonistiske, den formalistiske og altså den mengdeteoretiske, som noen riktig nok regner med til den formalistiske). Helt fra starten av ble de anklaget for å være nonsjalante i spørsmål om filosofisk og logisk basis. Spørsmålene om teorien er konsistent (er "fri for innebygde motsetninger") bekymret dem ikke: "We simply note that these difficulties can be surmounted in a way which obviates all the objections and allows no doubt as to the correctness of the reasoning" ([5], s. 257). Motsigelser har det vært før og de er blitt overvunnet. Slik vil det fortsatt være, forsikret de.

"Bourbaki did not adopt formalism with full philosophical commitment, but rather as a facade to avoid philosophical difficulties." ... Bourbaki gave the impression of elevating their choices in mathematics above all dispute: but that was all it was – just an impression. [8]

Er da reservasjonene mot reformen gyldige i dag?

De mengdene som forekom i Piagets forsøk er ytterst enkle: noen blomster, noen vaser, noen drikkeglass, ... alt sammen slikt som det er rimelig å referere til under ett i gitte sammenhenger. For meg ser det ut til at det ikke er noe som helst i Piagets arbeider som gir grunnlag for en massiv presentasjon av abstrakt matematikk i skolen.

Et annet moment har å gjøre med barns *evne* til å foreta abstraksjoner og på styrken og varigheten i barns *motivasjon* for å foreta abstraksjoner. Disse to tingene, som ikke er uavhengige av hverandre, ble berørt av Jean Kuntzmann i en bok som kom ut under stridens hete, i 1967 [6]. Her heter det (s. 62):

Ett av målene med denne forskningen [det siktes til franske undervisningsprosjekter opp mot tiden da boken ble skrevet] er å fastlegge i hvilken alder barn kan forstå de og de begreper. For en rekke begreper som er nye i skolen har en funnet at de har kunnet innføres ganske mye tidligere enn en før har trodd. Men en må være forsiktig med å trekke raske konklusjoner her. Når elever, selv de som ikke er særskilt flinke, blir med i slike forsøk, vil de være litt nysgjerrige. Ja, de kan være smigret over å få kjennskap til ting som deres jevnaldrende ikke får del i og tilegnelsen går ganske greitt. Senere blir de nevnte grunnene borte og tilegnelsen blir mer møysommelig enn noen kunne ha trodd.

En skal lete lenge etter en mer presis forutsigelse.

## Henvisninger

- [1] Black, Max. "The Elusiveness of Sets." *The Review of Metaphysics*, **24** (1971), 614–36.
  - [2] Christiansen, Bent. *Mål og midler for matematikkundervisning i grunnskolen*. Dreyer, Oslo, 1967.
  - [3] Feynman, Richard P. 'New textbooks for the "new" mathematics.' *Engineering and Science Magazine* (California Institute of Technology), mars, 1965.
  - [4] Fraenkel, Abraham A. "Set Theory", i P. Edwards (red.). *The Encyclopedia of Philosophy*, Macmillan and Free Press, New York, 1967.
  - [5] Kline, Morris. *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford University Press, 1980.
  - [6] Kuntzmann, Jean. *Où vont les mathématiques?* Hermann, Paris, 1967.
  - [7] Piaget, Jean og Alina Szeminska. *La genèse du nombre chez l'enfant*. Delachaux & Niestlé, Neuchâtel og Paris, 1941.
  - [8] Weintraub, E. Roy og Philip Mirowski. "The Pure and the Applied: Bourbakism Comes to Mathematical Economics."  
<<http://www.econ.duke.edu/~erw/Preprints/debreu.bourbaki.html>>
-

## 4 Forsøk på et blick fremover: "nye" tanker

### 4.1 Ett nytt ord: konstruktivisme

Vi hører mye om konstruktivisme i undervisningskretser. Det er ikke alltid klart hva begrepet innebærer. Skjuler det seg bak navnet innhold og holdninger som vi kan ønske å gjøre til våre egne? Dette vil vi prøve å finne ut av.

Der hvor 'konstruktivisme' bare er et ord som svirrer i luften, et trendy ord, kan en møte uttalelser som denne fra en kanadisk lærerstudent (se [9], s.53):

Jeg ser frem til å komme til klassen min og undervise naturfag. Konstruktivismen har lært meg at jeg ikke trenger å kunne naturfag for å undervise det. Jeg lar rett og slett elevene mine finne ut av sakene selv, for jeg vet at det ikke finnes noe *rett* svar.

Kan det være at "konstruktivisme" virkelig har slike dovne konsekvenser? Eller er det noen som har misforstått ett eller annet? Vi vil prøve å finne ut.

Ordet 'konstruktivisme' brukes med varierende innhold og rekkevidde. For *radikale konstruktivister* dreier det seg om en verdensanskuelse. I den andre enden av spekteret finner en folk innenfor undervisning som bare har kommet til at tradisjonelle undervisningsmåter ofte er svært lite effektive. Idéer fra især Dewey, Piaget, Bruner og Vygotskij kan se løfterike ut. Vi tar for oss dem på den sistnevnte fløyen først.

### 4.2 Konstruktivisme i undervisning

Felles for konstruktivister som er opptatt av å "gjøre noe med undervisningen" er ifølge [9], s. 3, den oppfatningen at

- konstruktivismen er en teori om hvordan læring skjer og mening skapes
- mennesker skaper sin egen forståelse ved et samvirke mellom det de allerede vet eller tror og fenomener eller idéer de møter.

Dessuten skal de fleste konstruktivister være enige om at "den tradisjonelle undervisningsmåten" – angivelig bygd på den oppfatningen at kunnskap *overføres* fra lærer til elev – hverken fremmer samvirke mellom "gammel" og "ny" kunnskap eller den samtale og diskusjon som er nødvendig for internalisering og dyp forståelse.

Bidragstyperne til [9] understreker at konstruktivismen er en *beskri-vende* teori, en teori om hvordan læring kommer i stand og mening skapes, *ikke* en teori som gir forskrifter for praktisk undervisning (se forordet). Det viser seg at dette viktige momentet ofte ikke er forstått. Vi prøver oss på et eksempel på hva det dreier seg om:

En tysk pedagog het Basedow. Det ligger nær å uttale dette navnet "på engelsk". Navnet ser jo litt engelsk ut. Vi vil videreføre den innsikten at navnet uttales b'a:z•do (med trykk på første stavelse, lang a, stemt s, "slapp" e og lukket o, stum w). Vi uttaler navnet i vitners nærvær. Hvordan skulle konstruktivistiske synsmåter komme inn her? Bare i tanker om *hvordan våre sinn, vår "bevissthet", bearbeider det som høres*.

Som en må forvente, er det uenighet om hvordan en konstruktivistisk grunnholdning skal komme til syne i undervisningen. Det er lett å forstå at det vil være uenighet. Undervisning og læring er jo ikke bare psykologiske prosesser i ett, eventuelt to, individer, men finner sted i en sosial sammen-



heng, i et klasserom med et mangfold av personlige egenheter og uforutsigbare situasjoner (og i et samfunn med dets egenheter).

Konstruktivister er uenige om *undervisningens fokus*:

- Noen fokuserer på den enkelte eleven når denne konstruerer eller rekonstruerer mening
- Andre fokuserer på den sosiale og kulturelle sammenhengen eleven står i
- Atter andre mener at det individuelle og det sosiale/kulturelle begge bør være til stede når en gjør seg tanker omkring undervisning.

Konstruktivister er også uenige om *hvilken rolle formell kunnskap skal ha i undervisningen*:

- Noen ser på formell kunnskap som et mål
- Andre mener at formell kunnskap bare er et redskap for å nå frem til felles forståelse (*shared understandings*) i klassen.

I [9] hevdes det at disse uenighetene lar seg påvise *både mellom og innenfor* to temmelig forskjellige konstruktivistiske leirer, den *Piaget-inspirerte kognitive konstruktivismen* og den *Vygotskij-inspirerte sosialkonstruktivismen*.

Et konkret dilemma for konstruktivistisk orientert undervisning gjelder den plassen formell kunnskap skal ha i den praktiske skolehverdag. – Med 'formell kunnskap' menes begreper, grunnoppfatninger og "forståelse" som det er betydelig enighet om i en større sammenheng enn klasserommet: blant matematikere, blant pedagoger, osv. Det er kunnskap som en finner i lærebøker, læreplaner, blant lærere, osv. – Ubesvarte spørsmål her skaper dilemmaer for den som vil skape et konstruktivistisk læringsmiljø: Hvordan forholde seg til spørsmål om "rett svar"? Skal læreren gi forklaringer? Osv. En forfatter (Deborah Ball) spør:

*Hvordan kan jeg få til erfaringer hos mine elever som knytter an til det de akkurat nå vet og er opptatt av, men som også går utover øyeblikket? Hvordan møter jeg med interesse det de er opptatt av og knytter dette sammen med idéer og tradisjoner som kommer fra århundrer av matematisk utforskning og oppfinnelser? (Siteret i [9], s. 4.)*

Hvorfor er det strid om bruk og omfang av formell kunnskap blant konstruktivister? Det henger sammen med et dyptliggende problem som hefter ved all konstruktivistisk tenkning. Konstruktivister tror at mening skapes og omformes ved at gammel forståelse samvirker med nye inntrykk. I [9], s. 4, stilles følgende spørsmål: Formell kunnskap i en lærebok lest av tretti elever vil bli forstått på tretti forskjellige måter. Hva er da formell kunnskap? Hvordan kan formell kunnskap bli felleseie i en klasse dersom alle har forskjellig forståelse av den? Og hva om det i klassen skulle bli utviklet en felles forståelse som er ute av takt med formell kunnskap innenfor faget? Hvem har autoritet til å dømme om meninger og oppfatninger i klasserommet?

### 4.3 Kognitiv konstruktivisme

Dette er former for konstruktivisme som nokså direkte tar utgangspunkt hos Piaget. Elevene utvider og omformer den forståelsen de for øyeblikket har ved å restrukturere sine *kognitive skjemaer*. Dette skjer ved at elevene (og mennesker i utvikling i det hele tatt) utfører aktiviteter med ting i sine omgivelser.

Lærerens oppgave (når det gjelder å hjelpe elevene til ny kunnskap) blir

- å legge til rette for at elevene utsettes for en viss "kognitiv dissonans"

- å lage oppgaver som han håper kan føre til omorganisering av eksisterende kognitive skjemaer hos elevene.

Hvordan har dette vært gjort i praksis? Stort sett ved å legge opp til "hands-on"-aktiviteter, å gi oppgaver som er ment å utfordre elevenes begreper og tankemønstre og å sette spørsmål ved elevenes oppfatninger. Dette i en atmosfære som ikke virker truende.

I det siste tiåret eller så har en forresten pekt på at den *samtale* og *diskusjon* som foregår i klassen for å nå frem til felles oppfatninger jo er en hjelp til å oppnå den kognitive dissonansen som hos elevene kan føre til omorganiseringen av eksisterende kognitive skjemaer (tilegnelse av ny kunnskap). Dermed er det sosiale ikke lenger helt utenfor horisonten i den Piaget-inspirerte kognitive konstruktivismen.

Hva er opplæringens mål? Jennifer A. Vadeboncoeur minner i [9], s. 15, om at en i det 20. århundre har hatt to forskjellige svar på dette spørsmålet. Ett syn har hatt fokus på det enkelte barn. Den enkelte skal utdannes i overensstemmelse med sine interesser og behov. Bakom ligger en individualistisk teori om kognitiv utvikling. Det andre synet har hatt fokus på sosial omforming i overensstemmelse med demokratiske idéer. Det er basert på en teori om kognitiv utvikling som trekker inn barnets sosiale og kulturelle omgivelser og ser på samspillet mellom barn og omgivelser som motoren i utviklingen. Kognitiv konstruktivisme mer eller mindre i Piagets ånd hører sammen med førstnevnte syn på opplæringens mål. Det andre synet fører oss til former for såkalt sosialkonstruktivisme.

#### 4.4 Sosialkonstruktivisme

Denne betegnelsen brukes helst om former for konstruktivisme som bygger på Vygotskijs idéer. Her hevdes det at "det sosiale" er viktig, eventuelt vesentlig, for den enkeltes læring.

Jennifer A. Vadeboncoeur omtaler i sitt bidrag til [9] to utforminger av Vygotskijs "sosiohistoriske" syn. Den ene omtaler hun som en *sosiokulturell* tolkning. Den har som sin arena stort sett Vygotskijs *soner for proksimal utvikling* (en term som er blitt innført i oversettelser av Vygotskij til engelsk; på norsk kan vi si *sonen for den nærmeste utvikling*, for det er betydningen av det russiske uttrykket). Det dreier seg om psykologisk utvikling, språk og tilegnelse av begreper og "høyere mentale funksjoner". Vadeboncoeur omtaler også en annen utforming av Vygotskijs syn. Hun omtaler den som en *emansipatorisk* tolkning. Den utstrekker sitt virkeområde til sosial og politisk handling og kritikk. Vadeboncoeur ser det slik at det bare er den sistnevnte tolkningen som fullt ut tar konsekvensene av Vygotskijs ansatser.

Den nevnte sosiokulturelle tolkningen utelukker saktens ikke den større sosiale og historiske sammenhengen, men denne blir stort sett oppfattet som en gitt størrelse, ikke analysert ("kritisert") med henblikk på hvordan maktforhold og politikk har innflytelse på hvilken kunnskap som får levevilkår, og hvorfor.

Jennifer Vadeboncoeur lever i en sammenheng (USA) med store sosiale forskjeller, der noen elever i skolen (de som kommer fra hvite middelklassehjem) fremstår som privilegerte. Dette får store konsekvenser for hva elevene lærer i skolen, og hvordan. De ikke-hvite, ofte fattige, får ofte en undervisning som er på siden av deres verden. Hun aksepterer ikke denne tingenes tilstand, har lett etter et fundament for en pedagogisk praksis som kan endre på ting og har funnet et slikt fundament i det hun kaller den emansipatoriske tolkningen av Vygotskijs konstruktivisme.

I denne formen for konstruktivisme dreier det seg om mer enn læring

i tradisjonell forstand. Også forhold omkring makt og privilegier trekkes inn. Skolen blir et redskap for politisk, sosial og kulturell endring.

I et samfunn som det norske, der problemer omkring urettferdig fordeling og undertrykking er mindre påtrengende enn de fleste andre steder i verden, kan en fremdeles se at det er rom for Vadeboncours (eller kanskje heller Vygotskijs) anliggende. Men på en noe annen måte. La oss tenke på alle meninger og påstander som omgir oss. Disse fremstår lett som selvsagte, hvis vi ikke venner oss til å stille spørsmål ved dem. Vi er for eksempel omgitt av sosiale og kulturelle tabuer: handlinger og holdninger som tidligere de fleste ikke fant det passende å snakke om, men som nå er aksepterte og samtidig lagt lokk over. Hvordan oppmuntre elever til å begynne å stille spørsmål? Det emansipatoriske potensialet av Vygotskijs tenkning kommer etter mitt syn mer overbevisende frem dersom vi ser bort fra de sammenhengene Vadeboncoeur har lagt sine tanker inn i. I stedet for å spørre hvordan skolen skulle forholde seg til spørsmål omkring urettferdig fordeling og urettmessige privilegier, kunne vi "dekontekstualisere" og spørre hvordan vi kan hjelpe elever til å stille spørsmål i åpenhet og frihet og til å gjennomskue forsøk på manipulering eller forførelse. Hvordan kunne vi hjelpe elevene til å gripe dypere enn til det tidsriktige og politisk korrekte? Vi vil trolig finne at det ikke bare er spørsmål om refleksjon (metakognisjon) – dvs. å stille spørsmål om vår egen tenkning – men om *mot*. Når vi begynner å skrape på tingene, havner vi fort utenfor snevre tradisjonelle grenser for hva som er aktuelt å diskutere.

I [9], s. 11, hevder Virginia Richardson at sosialkonstruktivistiske alternativer i undervisning fremdeles ikke er godt beskrevet eller utviklet. Hun antyder at slike programmer ikke lett lar seg realisere i dagens skole ... (Men se nedenfor, i avsnittet **Praktiske konsekvenser for undervisning?** og videre der under **Sosialkonstruktivisme**.)

## 4.5 Radikal konstruktivisme

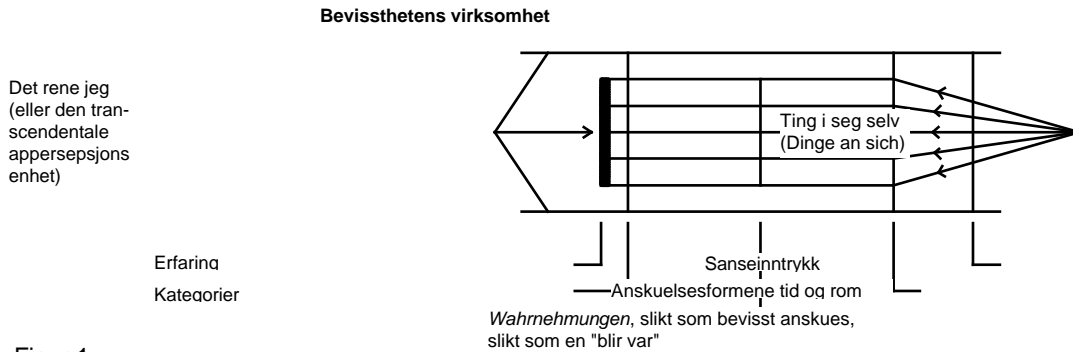
Det som i begynnelsen av avsnittet 4.2 ble sagt om hva konstruktivisme er, må sies å være en slags minimumsvariant. Hos Piaget har en nok egentlig å gjøre med atskillig mer vidtrekkende tanker. Utvikling skjer hos et barn idet det tilpasser (adapterer) etablerte kognitive skjemaer til den ytre verden. Men denne ytre verden har vi ikke direkte tilgang til. Vi konstruerer den ved hjelp av de adaptive prosessene, assimilasjon og akkomodasjon (metaforer hentet fra biologien). Sinnets (eller bevissthetens) struktur bestemmer vår forståelse av virkeligheten, ville Piaget si. Piaget mente forøvrig at logiske funksjoner er *universelle*: de endrer seg ikke fra den ene sosiale sammenhengen til den andre eller fra kultur til kultur.

Såkalte radikale konstruktivister går lenger enn Piaget i å understreke røttene til disse idéene. Disse er å finne først og fremst hos filosofen Immanuel Kant (1724–1804). I Kants bevissthetsteori heter det at bevissthetens strukturer mottar inntrykk fra "noe" (sanseintrykk). Dette "noe" (bestående av "ting i seg selv" – *Dinge an sich*) kan vi kalle 'den ytre verden', *if that makes us feel comfortable*. Dette "noe" finnes ikke i tid og rom, for tid og rom er noe som våre sinn forsyner sanseintrykkene med. (Dette synspunktet uttrykker Kants såkalte "kopernikanske revolusjon": ifølge ham er det slett ikke slik at våre sinn oppfatter den ytre verdens struktur; tvert imot er det våre sinn som forsyner den "ytre verden" med en struktur.)

Hos filosofihistorikere av såkalt analytisk orientering kan en finne "rasjonale rekonstruksjoner" av filosofiske oppfatninger – tolkninger og presiseringer med detformål å få frem hva filosofen egentlig har ment og dessuten blottstille svakheter ved oppfatningene. En filosofihistoriker som arbeidet på denne måten var svenske Anders Wedberg (1913–78). I [10], s. 165–67, skriver han om Kants bevissthetsteori i til-

slutning til figur 1 nedenfor.

En gjenstand (f.eks. et tre) som vi ser, er bare et fenomen i bevisstheten. Men til dette fenomenet svarer en "ting i seg selv" (*Ding an sich*). Det rene jeg er hos Kant et slags aktivt sentrum i bevisstheten. Det kan av og til virke som om han med 'bevissthet' rett og slett mener en bevissthet slik som din og min. Men av og til er 'bevissthet' noe uklart noe som han ikke forteller hva er, "bevisstheten overhodet". Tingen i seg selv kan vi ikke vite noe som helst om, egentlig. Men Kant har likevel en del å si om den. Tingen i seg selv påvirker bevisstheten slik at det oppstår sanseintrykk, som er et slags råstoff for bevissthetsens virksomhet. Når bevisstheten



Figur 1.

får foreta sin første bearbeidelse av sansintrykken, blir vi var noe (det oppstår en *Wahrnehmung*). Men sanseintrykkene er nå blitt ordnet ved hjelp av "anskuelsesformene" tid og rom. Senere blir disse *Wahrnehmungen* ordnet ved hjelp av begreper som er innebygd i bevisstheten, de såkalte kategoriene (substans, kausalitet, ...). Slik oppstår fenomener, erfaringer.

Bevisstheten er altså å forstå som en slags fabrikk. Erfaringer tilvirkes av et råmateriale, sanseintrykkene. Wedberg fortsetter:

"Hur besynnerlig denna lära är, inser man genast, om man bara ställer sig frågan: Vilka konstaterbara psykologiska fakta vill Kant beskriva? Hur skall man pröva, om hans beskrivning är riktig eller oriktig?"

I själva verket er beskrivningen ännu konstigare än vad denna fråga avslöjar. Ty medvetandets fabrik är en fabrikk, som fungerar utanför tid och rum. Tid och rum är ju blott de två i fabriken inbygda 'åskådningsformerna', med vilkas hjälp de inkommande intrycken preliminärt ordnas. Medvetandet är en fabrikk i evighetens värld."

Hos Kant og i all tenkning som står i gjeld til ham blir vi hengende i en håpløs tvil når det gjelder den "ytre verden". (Hos hans etterfølger Fichte er den helt borte). Den er uerkjennbar, men forutsettes altså å tre i interaksjon med oss via sanseintrykk. Tar vi Kant alvorlig, så balanserer vi hele tiden på randen av den kunnskapsteoretiske *solipsisme*: Det eneste som *er*, er denne bevisstheten (min og din?) som konstruerer sin virkelighet på mysteriøst vis. Alt er sinnets produkt. Hva med andre *jeg* som synes å presentere seg for vår bevissthet? Disse har ikke mer virkelighet ved seg enn personer som vi drømmer opp – eller hva? Vi kan ikke vite.

Noen regner med at Kant har funnet ut noe viktig om hvordan vi erkjenner (får ny kunnskap): Det heter at "Kant har vist at ..." , eller i det minste at Kant har ytt et verdifullt bidrag til vår forståelse av hvordan sinnet arbeider. Kant var en kolossalt innflytelsesrik filosof. Mange (ikke alle) ser ham i tillegg som en av de største tenkere vi har hatt. Noen hevder at forestillingene om hva han har utrettet ikke skal overvurderes.

For den som mister søvnen på grunn av disse spørsmålene finnes det en bok: *Kants Begründung der "Deutschen Philosophie"*, av en sveitsisk filosof, Magdalena Aebi (Basel, 1947). Nevnte bok er hennes doktoravhandling (1943, utgitt på ny 1947), der hun tar for seg Kants argumentasjon i lys av formell logikk. Boken vakte stor oppsikt da den kom. Den er et formidabelt arbeid som avdekker fundamentale logiske brist i Kants fornuftkritikk (dvs. hans undersøkelse omkring den menneskelige fornufts rekkevidde).

Blant radikale konstruktivister er Ernst von Glasersfeld den som nevnes oftest i pedagogiske sammenhenger. På nettsiden [6] svarer von Glasersfeld på spørsmål. La oss ta frem svaret på et spørsmål om hvilke

praktiske konsekvenser en kan trekke av konstruktivismen. Von Glasersfeld sier at de viktigste konsekvensene ser han i sitt eget personlige liv. Dette, hevder han, er blitt mye enklere etter at han for alvor begynte å tenke konstruktivistisk. Noe av det aller viktigste er at han ikke lenger finner det nødvendig å ha rett.

Når noen kommer og sier at dette eller hint ikke stemmer, da behøver det ikke å

bekymre meg. Fint, den andre har en annen erfaringsverden, der hans måte å tenke på stemmer. ... Når jeg i privatlivet setter meg det mål å unngå konflikter, så kan jeg bare si at konstruktivismen fungerer glimrende for meg. I samlivet med en annen person – så lenge jeg er meg bevisst at for meg eksisterer denne andre personen bare for så vidt som jeg har konstruert personen ut fra mine erfaringer med vedkommende ... – kan jeg alltid si at når denne konstruksjonen i ett øyeblikk eller i én situasjon ikke er godt brukbar ("viabel"), så er ikke det fordi den andre har forandret seg. Det er fordi jeg ikke har forstått vedkommende rett. Jeg har ikke konstruert rett. Og det tar brodden ut av motsetningene nesten på forhånd.

For meg står dette ikke som toppen av visdom, men som alminnelig sunn fornuft i samliv med andre mennesker (nemlig at det går an å misforstå en samtalepartner, og at det går an å rette på slikt) *staset opp med Kants besynderlige bevissthetsteori*.

Dersom von Glasersfeld og likesinnede bare hadde hatt det ærlige og mer beskjedne mål å unngå å trekke inn unødvendige antakelser i sin befatning med "virkeligheten", da burde de etter mitt syn ha gitt den filosofiske overbygningen på båten. Den radikale konstruktivismen fungerer svært ofte som en livs- og verdensanskuelse. Og en verdensanskuelse som ikke vil settes i bås! På et spørsmål ("Ist Konstruktivismus auch als Kritik an sich selbst als wissenschaftliche Disziplin zu verstehen?") svarer von Glasersfeld blant annet:

Den radikale konstruktivismen betrakter seg som en modell, og dens brukbarhet ("Viabilität") kan bare bedømmes ut fra anvendelser. Da gis det ikke noe "sant" og "falskt" og ikke noe "riktig" og "galt". Konstruktivismen er brukbar ("viabel") dersom dens tenkemåte lykkes. ... Så ofte ønsker en å se på konstruktivismen som ett blant de andre filosofiske systemene, som en avbildning av én eller annen verden. Og det mener jeg den hverken ønsker å være eller kan være. Den kommer bare med forslag om hvordan en kan tenke på dette eller hint. ... Forslagene kan De [spørsmålsstilleren] ta opp og prøve ut, og det er det jeg aller helst vil. Prøv dem ut! Dersom de for Dem virker brukbare ("viable"), glimrende! Hvis ikke, da må De tenke annerledes.

I den radikale konstruktivismen nekter en å gå inn på diskusjoner om hvordan noe *er*. Den klassiske letingen, i vitenskap og filosofi, etter sannhet om hvordan saker og ting egentlig henger sammen, er avblåst. For i konstruktivismen finner en ikke ut av ting, *en finner dem opp!* (Se for eksempel [5].) Jeg avslutter med et sitat fra Bertrand Russell (riktig nok i en annen sak):

[De] ser ut til å ha gått lei av seriøst tankearbeid og å ha funnet opp en lære som gjør en slik aktivitet unødvendig. Ikke for ett øyeblikk tror jeg at en lære som har slike dovne konsekvenser er sann ...

Ønsket om å forstå verden er, mener de, en foreldet tåpelighet.

## 4.6 Praktiske konsekvenser for undervisning?

La oss prøve å finne ut litt om hvordan det kognitiv-konstruktivistiske og det sosialkonstruktivistiske læringsmiljøet kan ta seg ut.

Et nettsted [2] laget ved College of Education, University of Houston, USA, har en hel del stoff om konstruktivisme.

Under **Kognitiv konstruktivisme** understrekes to prinsipper for undervisning og læring:

- *Læring er en aktiv prosess*, avhengig av direkte erfaring, prøving og

feiling og leting etter løsninger. Elever må få anledning til selv å konstruere sin kunnskap. De kan ikke få den meddelt av læreren

- *Læring bør være autentisk og "reell".* Mening skapes når barn forholder seg på meningsfulle måter til verden omkring. Det bør være liten vekt på læring av isolerte ferdigheter. Også disse skal læres, men de læres best når de forekommer i sammenhenger som er interessante og meningsfulle for elevene.

Nettstedet gir uttrykk for stor tro på moderne hjelpemidler: at en via video og CD-ROM tilrettelegger realistiske problemsituasjoner. (En kan diskutere hvor realistiske de er.) I [3] finner en seks grupper av undervisnings-/læringssituasjoner. I én av gruppene finner en *ChemLab*. Et kjemilaboratorium simuleres på skjermen. Bilder av vanlig laboratorieutstyr manipuleres: en utfører en "virtuell" kjemiøving. Redskaper og ingredienser til øvingen velges fra menyer. – Er dette "hands-on"-erfaringer? Kan det erstatte erfaringer gjort på et virkelig laboratorium? Noen hevder faktisk at virtuelle erfaringer ikke er mindre verdifulle enn erfaringer med fysisk apparatur. Snarere tvert om. Tanken er at disse siste ofte kan ha så mye "støy" ved seg (farlige kjemikalier, søl, apparatur som ikke virker, osv.) at de med fordel kan erstattes av øvinger på skjerm. Dessuten tar de de virtuelle øvingene langt kortere tid.

Et eksempel fra en annen av de seks gruppene er en serie på 24 15-minutters videoer som beskriver en reise over hav til Mexico. Vitenskapelige og matematiske begreper står sentralt.

En må jo spørre seg om ikke det store omfanget av virtuelle virkemidler må bli svært kostbart og kanskje forbeholdt de privilegerte deler av verden.

Det kreves opplagt en skikkelig utprøving og vurdering av det virtuelle klasserommet.

Under **Sosialkonstruktivisme** fremhever dette nettstedet at det er atskillig overlappning med den kognitive konstruktivismen. Det legger frem fire prinsipper for undervisning/læring i et Vygotskij-inspirert klasserom:

- *Læring og utvikling er en sosial aktivitet preget av samarbeid.* Samvirket (interaksjonen) mellom barn og voksen og mellom barna er av kritisk betydning. Bruk av teknologi for å øke og berike kommunikasjon, kontakt og samarbeid vil da være positivt, forutsatt at det ikke bare dreier seg om overlevering av informasjon. For ingen kan egentlig lære noen noe. Eleven kan bare nå frem til kunnskap og forståelse ved å konstruere disse i sitt eget sinn. Denne prosessen fremmes ved samarbeid
- *Sonen for den nærmeste utvikling* ("sonen for proksimal utvikling" – se ovenfor, under Sosialkonstruktivisme) *kan brukes som rettesnor* ved utarbeidelse av læreplaner og planlegging av undervisning. Elever når frem til forståelse gradvis, og fornuftig støtte underveis kan ytes av lærer så vel som andre elever og elektroniske medier. Læreren kan hjelpe en elev med å streve seg gjennom en kompleks sammenheng ved å forenkle problemene de møter for å bringe dem inn i sonen for den nærmeste utvikling. Etter hvert som eleven utvikler forståelse og sonen for den nærmeste utvikling flytter seg "oppover", kan kompleksiteten økes
- *Læring på skolen bør foregå i meningsfulle sammenhenger.* Disse vil ofte være de sammenhengene der kunnskapen har sin naturlige anvendelse (eventuelt simulert på skjerm)
- *Erfaringer utenfor skolen bør trekkes inn i skolehverdagen.*

Vi merker oss at det Vygotskij-inspirerte klasserommet ser ut til å ha mer plass for en aktiv og involvert lærer enn det Piaget-inspirerte klasserommet. Læreren er en av bærerne av den kulturen som omgir barnet

og som gir barnet de kognitive redskapene det trenger i sin utvikling. Disse redskapeneer kulturhistorien med dens nedslag i barnets omgivelser, videre sosiale sammenhenger og ganske særlig *språk*. De nettstedene vi har benyttet, understreker forresten gjentatte ganger de store kravene til faglighet som stilles til læreren i Vygotskij-inspirert undervisning/læring.

Som kognitivt redskap understrekes også her elektroniske informasjonskilder. I [4] finner vi seks grupper av undervisnings-/læringssituasjoner. To av gruppene er felles for kognitiv konstruktivisme og sosialkonstruktivisme. Vi må tro at det først og fremst er lærerens grad og type av engasjement som skiller mellom undervisnings-/læringssituasjoner etter de to konseptene.

Når en leser nettsteder om konstruktivistiske læringsmiljøer (svært mange av dem stammer fra USA) får en lett inntrykket av en *all-out craze* for konstruktivisme! Kan det her ligge en viss overreaksjon? Svært mange av disse nettstedene understreker inntil det kjedsommelige at kunnskap ikke *overføres* fra lærer til elev, men *konstrueres*. Kanskje noe av bakgrunnen er behaviorismen, som ikke engang har begrepet mental funksjon, og der elevens sinn er en "black box" med kontrollerbar input og observerbar output. Denne psykologiske teorien har jo hatt svært stor innflytelse i USA.

## 4.7 Hva med læreplanene?

Forrige avsnitt dreiet seg om den pedagogiske hverdag i skolen. Men didaktikk er ikke bare "metodikk". Vi har i didaktikken tre spørsmål: *hva?* – *hvorfor?* – *hvordan?*. Vi skal kort ta for oss spørsmålet *hva?* Det skal vi gjøre ved å kaste et blikk på det som har skjedd i USA når det gjelder læreplaner i matematikk. Et hoveddokument har vært *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), utarbeidet av National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Dette er nå forresten avløst av *Principles and Standards for School Mathematics* (2000) [8].

*Standards* fra 1989 sto på mange måter for et oppbrudd. Konstruktivistiske tanker var svært tydelig til stede (og hadde vært det i førende utdanningskretser siden midten av 1980-årene), også når det gjaldt spørsmålet om læreplanens innhold. Vi kan få et inntrykk av hva det dreier seg om hvis vi ser på nettstedet [7]. Dette nettstedet er laget av North Central Regional Educational Laboratory, ett av USAs 10 såkalte Regional Educational Laboratories. Disse har som oppgave å drive forskning omkring undervisning og tjene som resursentre for dem som arbeider med forbedring av undervisning på lokalt nivå, statsnivå og regionalt nivå i det amerikanske samfunn. Laboratoriene støttes av U. S. Department of Education og Office of Educational Research and Improvement.

Figur 2 viser litt av en oppsummering av de endringene av innhold og vektlegging som *Standards* av 1989 la opp til (hentet fra nevnte nettsted, [7]).

### SUMMARY OF CHANGES IN CONTENT AND EMPHASIS IN 5-8 MATHEMATICS

#### INCREASED ATTENTION

##### PROBLEM SOLVING

- Pursuing open-ended problems and extended problem-solving projects
- Investigating and formulating questions from problem situations- Representing situations verbally, numerically, graphically, geometrically or symbolically

#### DECREASED ATTENTION

##### PROBLEM SOLVING

- Practicing routine, one-step problems
- Practicing problems categorized by type (e.g., coin problems, age problems)

**COMMUNICATION**

- Discussing, writing, reading, and listening to mathematical ideas

**CONNECTIONS**

- Connecting mathematics to other subjects and to the world outside the classroom
- Connecting topics with mathematics
- Applying mathematics

**NUMBER/OPERATIONS/COMPUTATIONS**

- Developing number sense
- Developing operation sense
- Creating algorithms and procedures
- Using estimation both in problem solving and in checking the reasonableness of results
- Exploring relationships among representations of, and operations on, whole numbers, fractions, decimals, integers, and rational numbers
- Developing an understanding of ratio, proportion, and percent

**PATTERNS AND FUNCTIONS**

- Identifying and using functional relationships
- Developing and using tables, graphs, and rules to describe situations
- Interpreting among different mathematical representations

**ALGEBRA**

- Developing an understanding of variables, expressions, and equations
- Using a variety of methods to solve linear equations and informally investigate inequalities and nonlinear equations

**GEOMETRY**

- Developing an understanding of geometrical objects and relationships
- Using geometry in solving problems

**MEASUREMENT**

- Estimating and using measurement to solve problems

**INSTRUCTIONAL PRACTICES**

- Actively involving students individually and in groups in exploring, conjecturing, analyzing, and applying mathematics in both a mathematical and a real-world context
- Using appropriate technology for computation and exploration
- Using concrete materials
- Being a facilitator of learning
- Assessing learning as an integral part of instruction

**COMMUNICATION**

- Doing fill-in-the-blank worksheets
- Answering questions that require only yes, no, or a number of responses

**CONNECTIONS**

- Learning isolated topics
- Developing skills out of context

**NUMBER/OPERATIONS/COMPUTATIONS**

- Memorizing rules and algorithms
- Practicing tedious paper-and-pencil computations
- Finding exact form of answers
- Memorizing procedures, such as cross-multiplications, without understanding
- Practicing rounding numbers out of context

**PATTERNS AND FUNCTIONS**

- Topics seldom in the current curriculum

**ALGEBRA**

- Manipulating symbols
- Memorizing procedures and drilling on equation solving

**GEOMETRY**

- Memorizing geometric vocabulary
- Memorizing facts and relationships

**MEASUREMENT**

- Memorizing and manipulating formulas
- Converting within and between measurement systems

**INSTRUCTIONAL PRACTICES**

- Teaching computation out of context
- Drilling of paper-and pencil algorithms
- Teaching topics in isolation
- Stressing memorization
- Being the dispenser of knowledge
- Teaching for the sole purpose of assigning grades

Figur 2.

Det er tydelig at idéer fra begge de konstruktivistiske leirene er til stede.

Det ville være av interesse å studere endringene fra *Standards* av 1989 til *Standards* av 2000. Det har jeg ikke gjort, selv om det trolig kunne lønne seg å gjøre det. For det er klart at det i USA tenkes og gjøres svært mye for å komme frem til en bedre undervisning. Vi nevner at *Standards* av 2000 er et dokument på omtrent 400 sider. Dette kan vi sammenligne med de 18 sidene som er viet matematikkfaget i L97.



## 4.8 Kritiske tanker om konstruktivisme

En kommer ingen vei ved bare å lytte til argumenter *for* en sak. Vel så viktig er det å merke seg argumenter *mot*. Nå er "alle" konstruktivister. Vi gjør klokt i å lytte også til dem som har motforestillinger.

I dette avsnittet skal vi gjengi noen tanker fra en artikkel [1] skrevet av tre kognitive psykologer ved Carnegie Mellon University (Pittsburgh, USA). En leser som ikke kjenner stort til deres fagområde – jeg er én av dem – kan her møte en terminologisk barriere. Termer og synsmåter som ser ut til å være velkjente innenfor kognitiv psykologi, kan virke fremmede. Vi gjør likevel et forsøk på å trekke tanker ut av [1].

Forfatterne hevder at en voksende trend innenfor konstruktivismen avviser *the information processing approach*, den synsmåten som benytter seg av metaforen "informasjonsbehandling" og som er den dominerende teoretiske synsmåten innenfor kognitiv psykologi. Denne avvisningen skal særlig prege "radikale konstruktivister" (se foran om disse).

Forfatterne vil nå imøtegå viktige tanker innenfor konstruktivismen som de setter frem som fire spissformuleringer:

### **1 Kunnskap kan ikke overføres fra en lærer. Den kan bare konstrueres av eleven**

Forfatterne er enige med konstruktivister i at læring bare kan være en aktiv prosess. Læring innebærer at det skjer en endring hos eleven. Denne kommer bare i stand ved det eleven gjør, ved aktiviteter vedkommende går inn i. Lærerens aktivitet er relevant for så vidt som den måtte få elever til å gå inn i aktiviteter de ellers ikke ville gå inn i, inklusive innhenting av kunnskap fra læreren eller fra bøker. Annet som inngår er øving av ferdigheter for å gjøre disse operative, dertil vekselvirkning med medelever og med læreren.

Psykologiens og pedagogikkens oppgaver i denne sammenhengen blir da å legge til rette erfaringer for elevene som vil gjøre dem i stand til å lære effektivt og å motivere dem for å gå inn i de relevante aktivitetene. Så langt melder forfatterne ingen motforestillinger. Men veiene skiller når det gjelder å stille opp ønskelige mål for undervisningen (her går artikkelen ikke i detaljer, dessverre) og å peke på erfaringer som kan føre til at målene nås. Forfatterne understreker at spørsmål om effektive fremgangsmåter ikke kan avgjøres ved filosofiske debatter, men bare ved empiriske fakta om hvordan læring faktisk foregår og hva som læres av forskjellige undervisnings erfaringer.

I konstruktivismen er Piagets skille mellom assimilasjon og akkomodasjon nøkkel til forståelse av hvordan læring og utvikling foregår. Assimilasjon betyr en relativt passiv innlemming av erfaringer i kognitive skjemaer som allerede finnes i barnets (eller den lærendes) sinn. Når gapet mellom de krav barnet står overfor og de kognitive strukturer det så langt har nådd å utvikle blir for stort, vil barnet omorganisere sine "skjemaer". Derved internaliseres ny kunnskap hos barnet. Dette er akkomodasjon. (Leser en Piaget nøye, finner en at han alltid tenker seg assimilasjon som et avgjørende viktig forberedende stadium til akkomodasjon.) Noen konstruktivister tenker seg at kognitiv psykologi bare opererer med assimilasjon, og ikke med den mer "konstruktive" akkomodasjonen, som de selv legger hovedvekten på. Dette er langt fra korrekt, hevder forfatterne. De viser til to metaforer eller "mekanismer" for kunnskapstilegnelse brukt av kognitive psykologer, metaforer som de hevder *tillater mer detaljert studium av læring* enn Piagets metaforer (men som begge godt kunne kalles akkomodasjon):

- Når en elev får en oppgave han ikke vet hvordan han skal løse, vil han noen ganger se på hvordan en lignende oppgave er løst, og så prøve å

gå frem *ved analogi*. Her vil det kunne foregå en akkomodasjonsprosess som går ut på at eleven konstruerer seg prosedyrer som gjør omveien om analogier unødvendig, ved at eleven tilegner seg et mer generelt mentalt "mønster"

- Noen ser for seg et "nett" eller en "sil" for å gjenkjenne og ta passende aksjon. Et slikt "nett" er en rekke tester som anvendes på forskjellige sider ved fenomenet. Nye tester bringes inn dersom de øvrige testene finnes å være utilstrekkelige. Etter hvert utvikler eleven en stadig mer finstilt sensitivitet til situasjoner og stimuli i vedkommendes omgivelser, i en kontinuerlig akkomodasjonsprosess.

Disse tankene sier noe om hva *konstruksjon av kunnskap* kan gå ut på. Med disse tankene som bakgrunn går forfatterne over til å drøfte konstruktivistenes påstand om at kunnskap ikke kan overføres.

- De nevnte lære-"mekanismene" kan klart nok ikke tilegnes ved passiv registrering. Men det er feil å tro at det som læres ikke påvirkes av eksplisitt undervisning. For eksempel, i læring ved analogi (se ovenfor) er undervisningen (læreren eller bøker) ansvarlig for de eksemplene som tjener til konstruksjonen av forståelsen og forsøk har vist at læreutbyttet i høy grad avhenger av den undervisningen som ledsager eksemplene
- Mye forskning viser at under noen omstendigheter husker folk bedre informasjon de har kommet frem til selv enn informasjon de er blitt "utsatt" for. Men annen forskning viser at i andre tilfeller husker folk like godt eller til og med bedre informasjon de er blitt meddelt enn den de har skaffet seg selv.
- Når elever av en eller annen grunn ikke klarer å konstruere kunnskap selv, trenger de veiledning. Forfatterne hevder at konstruktivistens insistering på at kunnskap må konstrueres, er nokså lik påstanden om at *learning by discovery* er overlegen i forhold til direkte undervisning. De hevder at det finnes så godt som ingen positiv påvisning av at *learning by discovery* er overlegen; faktisk tar denne, selv når den lykkes, svært mye tid som kunne ha vært brukt til å anvende eller øve denne kunnskapen hvis den hadde blitt undervist. Siden det meste av læringen ved *learning by discovery* finner sted *etter* at kunnskapen er konstruert, og hvis famlingen etter kunnskapen tar lang tid eller slett ikke lykkes, blir resultatet ofte at motivasjonen svikter. I 1968 summerte D.P. Ausubel opp hva forskningen på *learning by discovery* hadde vist, uten særlige omsvøp:

[A]ctual examination of the research literature allegedly supportive of learning by discovery reveals that valid evidence of this nature is virtually nonexistent. It appears that the various enthusiasts of the discovery method have been supporting each other research-wise by taking in each other's laundry, so to speak, that is, by citing each other's opinions and assertions as evidence and by generalizing wildly from equivocal and even negative findings.

- Noen ganger hevdes det at direkte undervisning fører til trivialisering av kunnskap ("bare rutine"), noe som menes å drive forståelse ut. De illustrerer med et sitat (G. Brousseau):

[J]o tydeligere jeg er når det gjelder den kunnskap jeg ønsker at mine elever skal kunne fremvise, desto sannsynligere er det at de vil vise akkurat det jeg har undervist, men uten forståelse; dvs., desto mer sannsynlig er det at de vil forveksle form med innhold.

I forlengelsen av denne påstanden måtte en også hevde at mye øving, drill, vil drive forståelse ut ("*drill and kill*"), for drill innebærer jo et budskap om hva som er viktig å kunne vise. Forfatterne hevder at denne kritikken av øving er fremtredende i konstruktivismens skrifter.

Men:

Nothing flies more in the face of the last 20 years of research than the assertion that practice is bad. All evidence, from the laboratory and from extensive case studies of professionals, indicates that real competence only comes with extensive practice.

In denying the critical role of practice one is denying children the very thing they need to achieve real competence. The instructional task is not to "kill" motivation by demanding drill, but to find tasks that provide practice while at the same time sustaining interest. Substantial evidence shows that there are a number of ways to do this: "learning-from-examples" ... is one such procedure that has been extensively and successfully tested in school situations.

## 2 Kunnskap kan ikke representeres symbolsk

Konstruktivister hevder at "forståelse er en så subtil prosess at den ikke *kan* representeres ved et sett av regler eller andre symbolstrukturer". [Dette er den mest krevende delen av artikkelen vi prøver å resymere. Påstanden har vært fremmet fra filosofisk hold, og er åpenbart blitt overtatt på konstruktivistisk hold.]

Forfatterne hevder at det bak påstanden om at kunnskap ikke kan være symbolsk, ligger blant annet den oppfatning (etter deres syn misoppfatning) at 'symbolsk' betyr 'uttrykt i ord og setninger eller i tilsvarende formelle strukturer'. Men symboler er mye mer enn formelle uttrykk. Ethvert mønster som kan lagres og kan referere til andre mønstre (f.eks. mønstre i den ytre verden) er et symbol. Og det kan prosesseres av et informasjonsbehandlingssystem. Et eksempel: Et slikt system ("nett" – for å gjenkjenne og ta passende aksjon) som vi omtalte under akkomodasjon ovenfor, kan, når en stimulus tilfredsstillende visse betingelser danne hos en person et indre symbol som viser til den type gjenstand som vi kjenner som en katt. Systemet ("nettet") kan også lære og lagre i minnet det ordet som staves k-a-t-t (også et symbol) og assosiere med dette det symbolet (mønsteret) som setter eieren av systemet i stand til å gjenkjenne en katt. Men selvsagt er ordet 'katt' og gjenstanden (katten) knyttet til helt forskjellige symboler. En katt er ikke en ord-struktur men en håret skapning som av og til kan observeres i våre omgivelser.

Forfatterne er kort innom det filosofiske spørsmålet om sinnets natur (*the nature of mind*). Noen konstruktivister presenterer konstruktivismen som et alternativ til *the representational view of mind*. Hva skulle ifølge disse konstruktivistene ligge i sistnevnte syn på sinnets natur? Jo, at "å vite er å representere nøyaktig det som er utenfor sinnet; å forstå kunnskapens natur og mulighet er da å forstå hvordan sinnet er i stand til å danne slike representasjoner". Forfatterne hevder saktens å stå for *the representational view of mind*. Men de aksepterer ikke den siterte oppfatningen av dette synspunktet. De hevder at i kognitiv psykologi opereres det ikke med et slikt vidtrekkende *representational view of mind*. Nei, det synet de selv og en majoritet av kognitive psykologer står for er forenlig med en rekke forskjellige oppfatninger av forholdet mellom sinnet og den ytre verden, hevder de. Dette synet går ut på at

[C]ognitive competence (in this case mathematical competence) depends on the availability of symbolic structures (e.g., mental patterns or mental images) that are created in response to experience.

Forfatterne slår med ettertrykk fast at dagens kognitive psykologi på ingen måte hevder at læring er en passiv prosess.

[Denne delen av artikkelen er en polemikk mot oppfatninger hevdet av visse amerikanske filosofer.]

Denne mistolkningen av *the representational view of mind* hos konstruktivister fører til forvirring når det gjelder ytre og indre (mentale) matematiske representasjoner. Konstruktivister tillegger dem som står for *the representational view of mind* det syn at en ytre matematisk representasjon (av et matematisk innhold), som for eksempel en graf, avbildes passivt og

uten endring som en intern, mental representasjon. Men da ville skrøpelige ytre representasjoner medføre skrøpelige indre representasjoner. Tvert imot hevder forfatterne – og begrunner empirisk – at ytre representasjoner går gjennom komplekse omvandlingsprosesser ("assimilasjon og akkomodasjon"): En indre representasjon behøver på ingen måte å være "isomorf" (ensdannet) med den ytre representasjonen den svarer til.

Til alle tider har mennesker vært i stand til å lære, via forelesninger, lesing, lærlingsituasjoner og veiledning, med "teknologier" som tavle og kritt, papir og blyant. En visste ikke stort om hva som går for seg i et menneskes hjerne når det lærer. Dette kan vi kalle en slags "folkemedisin" når det gjelder læring. For å komme videre må vi følge medisinenes eksempel: Vi må bygge en teori for den indre informasjonsbehandlingen som fører til ferdigheter og dyktighet. Vi må bygge en teori for hvordan kunnskap representeres internt i det menneskelige sinn og hvordan slike interne representasjoner kommer i stand. Kognitiv psykologi *har* i dag teorier som kan brukes, og begynner å bli brukt, til å forbedre læring.

### 3 Kunnskap kan bare meddeles i komplekse læresituasjoner

For eksempel anbefaler konstruktivister at barn lærer (nesten) all sin matematikk i forbindelse med komplekse problemsituasjoner. Men prov på at dette gir effektiv undervisning *mangler*.

To problemer med denne tilnæringsmåten:

- En elev som har vansker med noen av komponentene i oppgaven blir overveldet av de kravene oppgaven stiller ham overfor
- Dersom eleven har nådd frem til å beherske en del komponenter, vil han uvegerlig bruke en masse tid på å gjenta det han allerede behersker, fremfor å ta fatt på det han ennå trenger å mestre.

Det gis grunner til å øve ferdigheter i komplekse sammenhenger, av og til. Noen av disse grunnene har med *motivasjon* å gjøre og noen ferdigheter er *egne for den komplekse sammenhengen*. En musikkelev som ønsker å spille fiolin med orkester ville vanskelig gjøre mye fremgang dersom all øving skulle skje med orkester. På den annen side, hvis vedkommende aldri øvde med orkester, ville han ikke kunne utvikle ferdigheter som har med samspill i orkester å gjøre. Med hensyn på motivasjon og læring virker det som om øving av ferdigheter av og til må skje i situasjoner av "real life"-kompleksitet, men dermed er det ikke sagt at dette må være hovedarenaen for læring.

Forfatterne tviler på om kompleks matematikk alltid er motiverende. Det slitet som er nødvendig for å gjøre virkelig fremgang er ikke motiverende for de fleste. De mener at støtte fra omgivelsene og "kulturen" er et viktig moment. Det kan hjelpe til å forklare hvorfor asiatiske barn stort sett ligger betydelig foran amerikanske barn i matematiske prestasjoner.

### 4 Det er umulig å vurdere læring ved vanlige metoder

De mest radikale konstruktivister hevder at det er umulig å vurdere en påstand om undervisning empirisk fordi enhver slik vurdering beror på tilfeldige, kulturelle, verdier. Mer moderate konstruktivister går inn for å vurdere læreprosesser mer enn resultater, taler til fordel for "autentiske" oppgaver og går inn for vurderingsformer som trekker inn flere perspektiver.

Forfatterne er enige i avvisningen av svært firkantede vurderingsmetoder og konsentrasjon om regneferdighet. På den annen side spør de om svært åpne vurderinger som alternativ vil gi mer presis eller mer kulturuavhengig vurdering. Hovedproblemene med åpne vurderinger er

- mangelen på presisjon når det gjelder hva som vurderes

- tilliten til den subjektiv dømmekraft.

Forfatterne gir eksempler på vurdering fra litteraturen. I ett eksempel var det to besvarelser som objektivt sett var noenlunde likeverdige. De som refererer eksemplet ville likevel gi den ene besvarelsen bedre karakter fordi den etter deres syn vitnet om "bedre kommunikasjonsevne". Våre forfattere trekker frem at denne besvarelsen, oppgitt å være mer langtrukken, *var penere skrevet*. "Kommunikasjonsevne" kommer vel an på øynene til den som ser. I et annet eksempel fra litteraturen, med åpen vurdering, heter det at en elev vil få 50 % for rett svar hvis begrunnelsen er umulig å forstå men vil få 100 % for feil svar dersom det ikke viser misforståelse av problem eller løsningsstrategi, men *ser ut til* bero på skrivefeil eller regnefeil. Våre forfattere har sympati for den romsligheten som kommer til syne i dette siste momentet av rettingsprinsippet, men påpeker at prinsippet åpner veien til en kulturell slagside i vurdering. Ordene "ser ut til" burde etter deres mening tenne en varselampe om at de som utfører vurderingen ikke vet hva de ser etter. Informasjonsbehandlings-synsmåten ville krevne nøyaktig presisering av hva en ser etter i besvarelsene.

Av og til heter det at det er læreren som er nybegynneren, mens eleven er den egentlige eksperten. Forfatterne viser til Ernst von Glasersfelds *Radi-*

*cal Constructivism in Mathematics Education* (1991). Lærerens oppgave skulle være å forstå og påskjønne hva eleven har lært. Fra samme retning innenfor konstruktivismen siterer forfatterne:

The approach respects that students are the best judges of what they find problematic and encourages them to construct solutions that they find acceptable given their current ways of knowing.

Våre forfattere spør: Hvis det er meningen at eleven i løpet av sine læreerfaringer skal bevege seg fra et lavere til et høyere kompetansenivå, hvorfor er da elevens bedømmelse av om en løsning er akseptabel spesielt interessant? "While we value the teacher who can appreciate children's individuality, see their insights and motivate them to do their best and to value learning, there must be definite educational goals." Mer allmennt, hvis "eleven som dommer"-holdningen skulle dominere undervisningen, *ville det ikke lenger være klart når undervisningen har slått feil og når den har lykkes*.

### Forfatternes oppsummering

"To argue for radical constructivism seems to us to engender deep contradictions." Tilhengere av dette synet er ute av stand til å argumentere for noe spesielt syn, siden de benekter at verdier kan være annet enn subjektive. Men argumentasjon for en posisjon er *alltid* verdiladet og innebærer påstander om at noe er mer gyldig eller verdfullt enn noe annet.

Det er ikke klart hvor mange konstruktivister som faktisk avviser vurdering og undervisning. En mindre radikal konstruktivisme behøver ikke å inneholde motsigelser og kan ha noe for seg. *Men en slik konstruktivisme inneholder lite som er nytt og ser bort fra en hel del som allerede er kjent*.

### Hva så?

Forfatterne gir en rekke anbefalinger for forskning og for undervisning. Noen viktige punkter:

- Det finnes empirisk støtte for at noen undervisningsmetoder, så som *læring fra eksempler* og "*learning by doing*", har fortrinn fremfor mer tradisjonelle metoder. Effektiviteten av disse ikke-tradisjonelle metodene bør utprøves i stor målestokk
- En mulig innvending: Lar det seg forsvare å utsette barn for ikke-tradi-

sjonelle metoder i noe omfang? Effektiviteten av disse metodene er jo ikke påvist. Til det er å si at også de *tradisjonelle* metodene har dette "eksperimentelle" preget: Effektiviteten av dem i sammenligning med alternative metoder er ikke påvist. For eksempel er forelesning og monoton drill mye brukt i undervisning. Og nye idéer om undervisning innføres stadig vekk stilltiende uten annen begrunnelse enn at de er politisk korrekte og virker rimelige, men uten at de har skikkelig empirisk støtte. Ansvarlig eksperimentering fortjener plass i skolen

- Kognitiv psykologi som benytter seg av informasjonsbehandlingsmetaforen ville foreslå at at enhver seriøs undervisningsmåte må begynne med en detaljert og nøyaktig analyse av kognitive oppgaver:

& Hvilken kompetanse er målet for matematikkundervisningen?

& Hvilke kognitive modeller kan fremme slik kompetanse?

Forfatterne hevder at så mange konstruktivistiske innspill slår feil her fordi detaljer og nøyaktige spesifikasjoner avvises med den begrunnelse at slikt ville inneholde nettopp ting som konstruktivister ikke tror på (dekomponering og de-kontekstualisering)

- Forfatterne hevder til slutt: Programmer for reform av undervisningen innføres med svak empirisk og teoretisk begrunnelse, mens programmer basert på kognitiv psykologi som arbeider under informasjonsbehandlings-synspunktet – programmer som er "enormt sterkere" begrunnet – er klare for utprøving og videreutvikling. Denne situasjonen burde endres, og kan endres.

## 4.9 En oppsummering

Vi som arbeider med undervisning har i (minst) ti-femten år vært utsatt for konstruktivistisk påvirkning, men lenge uten at ordet 'konstruktivisme' ble nevnt. Piagets og tildels Vygotskijs idéer er blitt nesten selvsagt pedagogisk ballast. Nå som konstruktivisme er kommet eksplisitt på dagsorden, har noen av oss begynt å reagere: Ønsker vi egentlig å kalles konstruktivister?

Dette kapitlet har vært mitt forsøk på å få et visst tak på begreper som nå møter oss over alt. Mange av idéene, ikke minst innenfor sosialkonstruktivismen, har jeg avgjort funnet tiltalende og inspirerende. Men det er først de omtalte kritiske tankene til konstruktivismen som har gitt meg en anelse om at det på dette området faktisk *er mulig å nå frem til noe som går ut over meninger og sympatier/antipatier*. Kognitiv psykologi har redskaper for detaljert *empirisk* arbeid når det gjelder læring. Og den ser ut til å ha begrunnede motforestillinger til idéer som kalles konstruktivistiske. Min holdning er da blitt at vi som arbeider med undervisning med fordel kan orientere oss mer mot empiri enn mot meninger. Vi burde bruke tid på å orientere oss om hva som er lagt frem av empiri om læring innenfor kognitiv psykologi. For det ser ut til at det bare er der vi finner empiriske undersøkelser i mer klassisk forstand, dvs. med presisjon og etterprøvnbarhet. (Dette kunne også roe ned diskusjonen om konstruktivisme.)

## Henvisninger

- [1] Anderson, John R., Lynne M. Reder og Herbert A. Simon. "Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education."  
<<http://act.psy.cmu.edu/personal/ja/misapplied.html>>  
(John R. Anderson er forfatter av *Cognitive Psychology and its Implications*. 4.utgave. W.H. Freeman and Company, New York, 1995.)
- [2] College of Education, University of Houston, (1).  
<<http://www.coe.uh.edu/~ichen/ebook/ET-IT/constr.htm>>
- [3] College of Education, University of Houston, (2).  
<<http://www.coe.uh.edu/~ichen/ebook/ET-IT/cognitiv.htm>>
- [4] College of Education, University of Houston, (3).  
<<http://www.coe.uh.edu/~ichen/ebook/ET-IT/social.htm>>
- [5] Goorhuis, Henk. "Die konstruktivistische Wissenstheorie." *unijournal*, Nr. 5 (1998). *unijournal* er *Die Zeitung der Universität Zürich*. Denne artikkelen finner en også via lenke på nettstedet  
<<http://ezwi1.uibk.ac.at/konstrukt/systemth.htm>>
- [6] "Linkothek zum radikalen Konstruktivismus,"  
<<http://ezwi1.uibk.ac.at/konstrukt/index.htm>>  
med lenke til  
<<http://ezwi1.uibk.ac.at/konstrukt/ernstvg.htm>>  
og videre til  
<<http://ezwi1.uibk.ac.at/konstrukt/ernstvgfragen.htm>>  
hvor Ernst von Glasersfeld svarer på spørsmål om radikal konstruktivisme (mai 1998). Nettstedet er laget ved *Institut für Erziehungswissenschaften* i universitetet i Innsbruck, Østerrike.
- [7] North Central Regional Educational Laboratory.  
<<http://www.ncrel.org/sdrs/areas/issues/content/cntareas/math/ma0.htm>>
- [8] National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*. Se  
<<http://standards.nctm.org/document/index.htm>>
- [9] Richardson, Virginia (red.). *Constructivist Teacher Education: Building New Understandings*. The Falmer Press, London, 1997.
- [10] Wedberg, Anders. *Filosofins historia: Nyare tiden til romantiken*. Bonniers, Stockholm, 1959.
-

## 5 Sluttord

Den som måtte ha lest helt hit, kan ha opplevd arbeidet litt baktungt i retning av "ideologi" og ha følelsen av at det skytes over målet. Noen kunne ha ventet en mer inngående drøfting og sammenlikning av lærebøker og av læreverkernes forhold til læreplanene.

I kapittel 1 gis det bare en summarisk oversikt over den idémessige substansen i M74, M87 og L97. I og med at jeg ikke (bortsett fra litt i sammenheng med M74) har studert forarbeider og forangående debatt til planene, kan det jeg sier nok være ganske overfladisk. For å kunne tolke slike dokumenter må en kjenne den sammenhengen de er oppstått i.

I kapittel 2 har jeg bare tatt for meg et fåtall av læreverk. Til overmål har jeg til M87 og L97 bare tatt for meg ett eneste læreverk, nemlig *Regnereisen*, utgitt til M87 og utgitt på ny som to atskilte verk til L97. Matematikkplanene i de tre læreplanene vi har tatt for oss er svært innholdsorienterte. Fra M74 til M87 er det et gap. Innholdet i M74-planen er ganske direkte bestemt av den ene fløyen i den debatten som gikk forut. Med M87 var luften gått ut av den ballongen. De førende tankene fra M74 er borte. Fra M87 til L97 er det for matematikkplanens vedkommende stort sett en forskjell i detaljeringsgrad. L97-planen er langt mer detaljert enn M87-planen. Men "ånden" er nokså lik, til tross for den store forskjellen i den generelle delen av læreplanene. Det relativt visjonære i den generelle delen av L97 har ikke i noen særlig grad fått nedslag i fagplanen for matematikk. En finner at *Regnereisen* (M87) og dens to etterfølgere til L97 er langt på vei identiske.

Matematikkplanene i M74 og L97 er ganske detaljerte, med lange lister over punkter som helst bør (M74)/skal (L97) undervises. Læreverk kan lojalt ha med alle disse punktene men likevel ha svært forskjellig profil. Hvordan kan dette ha seg? – Dersom vi blar tilbake til avsnitt 4.7, ser vi at det i USA er en langt mer prinsipiell tilnærming til undervisning og lærebøker. I en slik læreplantenkning vil læresynet styre *profilen* i lærebøkene sterkere enn hos oss.

Den som har lest kapitlene 3 og 4 vil skjønne at det er disse som ligger meg mest på hjertet. Når det gjelder M74 er det klare nedslag av den idédebatten som gikk forut og som er referert i kapittel 3. Men med vår læreplantenkning kommer læresynet stort sett bare frem i utvalget av emner, ikke mye i læreverkernes "ånd". Når det gjelder kapittel 4, så ligger utmyntingen av de refererte synsmåtene ennå i fremtiden. Den kommer nok. Når en leser den konstruktivistiske litteraturen kan en føle seg hensatt til den striden som raste om matematikkfaget på 1960- og litt av 1970-tallet. En har å gjøre med en idéologi med slagord som åpenbart har vid appell. En er omgitt på alle kanter! Nå skal det sies at ideologien denne gangen har et enda mer diffust grunnlag enn forrige gang og utmyntingen i praktisk undervisning er enda mer uklar.

Det er mitt håp at disse sidene kunne vaksinere noen mot de store og uklare tankene som så lett infiserer undervisningskretser. Forrige gang førte de til "the disastrous episode of the 'new math'" (sitat fra David Mumford i avsnitt 3.4). Denne gangen, med konstruktivismen, kan de innvarsle det store postmoderne tapet av sammenheng.