Høgskulen på Vestlandet

HVL-notat nr. 2
2023

Bevis det!

Av Odd-Eivind Holo

Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett (FLKI)
Institutt for språk, litteratur, matematikk og tolking

Høgskulen på Vestlandet
2023

HVL-notat frå Høgskulen på Vestlandet nr. 2023-2

ISSN 2703-710X
ISBN 978-82-8461-018-4

Forord

Som matematikklærar kan ein, litt som ei likning, ofte bli satt på prøve. Sjølv når du har lagt fram ei god forklaring av eit matematisk fenomen vil nokre elevar kunne spørje «men, *kvifor* er det slik?», og du kan raskt måtte finne gode argument eller vise på nye måtar det du nettopp har forklart. Då må du som lærar vere godt nok rusta til å gi argument som kan medverke til å stadfeste forklaringa di.

I klasserommet kan du bli utfordra på alt frå å forklare matematikk av heilt grunnleggande art, til matematikk for dei meir vidarekomne. I begge tilfelle kan algebra, på eit eller anna nivå, vere med på å gi elevane det vesle ekstra som trengs for å bygge ei djup matematisk forståing. Algebra er eit viktig verktøy i matematikken, og ved å meistre algebraiske lovar og reglar vil ein stå betre rusta når ein vert utfordra matematikkfagleg i klasserommet.

Noko av det fleire lærarar tykkjer er krevjande er nettopp å argumentere godt nok eller å bevise noko matematisk på ein tilstrekkeleg god måte. For kva skil å *vise* frå å *bevise*? Kva kvalifiserer som gode argument, og når har du eigentleg bevist at noko alltid er gyldig? Dette vonar eg at du vil få ei klarare oppfatning av etter å ha arbeidd deg gjennom dette heftet.

Innleiingsvis peiker eg på nokre matematiske verktøy du som lærar kan få bruk for, og vidare syner eg nokre matematiske samanhengar det kan vere kjekt å kjenne til og eventuelt arbeide med eller utforske i lag med elevar. Alt frå det 'grunnleggande', som kvifor den generelle formelen for partal er slik som den er, til å vise ved induksjon kvifor ein kan nytte formelen for trekanttal når ein summerer dei naturlege tala.

Det aller meste av det eg har skrive i dette heftet er mogleg å arbeide med innanfor grunnskulematematikken, og gjerne noko du vil møte på, på ein eller annan måte, uansett kor du underviser frå 1.-10.klasse. Både bevis og utleiing av formlar er utarbeidd med støtte i matematikkfagleg litteratur. For å auke lesbarheita er ikkje desse referert til i bevisa, men samla opp avslutningsvis.

Lukke til.

Innhald

Verktøy for å kome i gang med å bevise

Start med å forklare kva du skal bevise og lag deg gjerne ei hypotese du vil teste. Sjekk om du har belegg for hypotesa di ved å leite etter nokre enkeltdøme. Ikkje gå i fella med å tru at du har bevist berre fordi du har *vist* til nokre døme på at tilfellet kan stemme (dømet si makt). Dersom du har belegg for hypotesa di, leit etter nokre generelle føresetnader som må gjelde for at dette skal kunne stemme og nytt desse vidare i resonnementet ditt. Føresetnadane kan til dømes ta utgangspunkt i dei generelle samanhengane du finn i tabellen under. Desse kan nyttast som byggesteinar når du skal argumentere, generalisere og bevise.

	Oversikt over nokre generelle samanhengar					
Plassnummer	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\boldsymbol{n}$
Partal	2	4	6	8	10	$2n$
Oddetal	1	3	5	7	9	$2n-1$
Trekanttal	1	3	6	10	15	$\frac{n(n+1)}{2}$
Kvadrattal	1	4	9	16	25	n^2

Ofte treng me å manipulere matematiske uttrykk slik at me får dei til å stå fram på den måten me vil. Dette kan me gjere ved å nytte eigenskapar ved dei algebraiske lovane

- *Kommutativ lov,* $a+b=b+a$ og $ab=ba$
- *Distributiv lov,* $ab+ac=a(b+c)$
- *Assosiativ lov,* $a+b+c=a+(b+c)$ *og* $abc=(ab)\cdot c$

... eller ved å setje opp ei likning og syne at eit uttrykk kan skrivast på to ulike måtar utan at verdien vert endra. Då er gjerne prinsippet om *substitusjon* lurt å ha med seg, sidan det gir oss moglegheit til å bytte ut eit uttrykk med eit anna eller eit uttrykk mot ein ny variabel.

Det kan òg vere lurt å nytte seg av setningar i matematikken som allereie er etablerte og bevist tidlegare, som til dømes:

- *Kvadratsetningane og konjugatsetningen*
  1. $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$
  2. $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$
  3. $(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$
- *Pytagoras læresetning*
  - $a^2+b^2=c^2$

- *Aritmetikken si fundamentalsetning*
    - *Eit samansett tal kan skrivast som eit produkt av primtalsfaktorar på ein og berre ein måte, sett vekk frå rekkjefølgja av faktorane.*

Vurder òg kva bevistype som er mest føremålstenleg for tilfellet ditt:

- Uttømmande bevis, dersom det er eit overkommeleg tal tilfelle du skal forsøke å bevise at gjeld. Du finn då alle enkelttilfelle som kvalifiserer, og argumenterer for at det ikkje kan vere fleire tilfelle enn desse.
- Algebraisk bevis (direkte bevis), dersom du skal bevise ein generell samanheng som alltid vil gjelde. Bruk då bokstavar og formaliser døma dine med algebraiske uttrykk. Leit etter kva som varierer og kva som er konstant når du skal lage uttrykka.
- Bevis ved moteksempel, dersom du greier å finne eitt eller fleire tilfelle som gjer at påstanden ikkje kan vere sann. Hugs at det er nok med *eitt* døme på at tilfellet ikkje kan stemme for å falsifisere påstanden.
- Induksjonsbevis, dersom du skal bevise at ein samanheng gjeld for alle naturlege tal eller ei uendeleg lang rekkje tal.
- Visuelle bevis (geometriske bevis), dersom det du skal bevise kan visualiserast ved hjelp av modellar som gjer at ein kan generalisere for andre modellar av same tilfelle (Hana, 2013).

Det å argumentere, resonnere og generalisere vil som regel ha ein bit av problemløysing i seg. Det kan difor vere lurt å ha eit knippe strategiar for problemløysing i bakhand til hjelp på vegen (Bjørnestad m.fl, 2013, s. 273):

- Sjå etter eit mønster
- Lag ein systematisk tabell
- Lag ei visualisering
- Gjett og sjekk
- Løys ein del av problemet
- Arbeid baklengs
- Tenk på eit tilsvarande problem
- Forenkle problemet
- Endre perspektiv

Vidare i dette notatet vil du bli presentert for nokre generelle formlar og korleis ein kan finne desse. Fleire av desse formlane kan igjen nyttast som byggesteinar når ein skal bevise og argumentere for andre og meir samansette ting i matematikken. Nokre formlar vert både utleia (korleis ein kan kome fram til dei), samt bevist på fleire måtar – både algebraisk og/eller geometrisk, då dette er to matematiske perspektiv som utfyller kvarandre godt. Det er meint å vere ein viss progresjon i oppsettet, slik at det skal vere mogleg å bygge kunnskapen stegvis.

Formel for partal

Me har rekkja med partal, 2, 4, 6, 8,.., og skal argumentere for at alle desse kan skrivast på forma $2n$.

- For å få oversikt kan me setje opp ein systematisk tabell og sjå på samanhengen mellom partalet, nummeret det har i rekka, og partalet skriven på faktorisert form:

Partal	2	4	6	8	
Nummer i rekka av partal	1	2	3	4	
Faktorisert form	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot n$

- Me ser at kvart tal kan faktoriserast som 2 gonger plasseringa det har i rekka av partal. Sidan plasseringa i rekka svarer til utviklinga av dei naturlege tala, n, kan me bytte ut plasseringa med denne variabelen.

Dette gir oss at formelen $2n$ alltid vil gi oss det $n'te$ partalet.

Formel for oddetal

Me har rekkja med oddetal, 1, 3, 5, 7, 9,.., og vil argumentere for at alle desse kan skrivast på forma $2n - 1$.

- Me kan nytte oss av det me allereie veit om partal, nemleg at alle partal kan skrivast som det doble produktet av nummeret dei er i rekka, altså $2n$.
- Vidare veit me at oddetal alltid gir 1 i rest ved dividering på to, då dette er ein grunnleggande eigenskap ved oddetal.
- Om me ser på rekka av oddetal og samanliknar med nummeret det har i rekka, kan me observere at til dømes $3 = 2 \cdot 1 + 1$ og at $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Dette kan generaliserast til $2n + 1$

Me testar ut om den generelle samanhengen $2n + 1$ gir oss oddetal:

$$2n + 1 = 3$$

$$2n = 3 - 1$$

$$\frac{2n}{2} = \frac{2}{2}$$

$$n = 1$$

I tilfellet over finn me at $n = 1$ når me arbeider med oddetalet 3, men sidan 3 er det *andre* oddetalet (ikkje det fyrste), må me korrigere formelen slik at den også gjeld for det førre oddetalet. Sidan oddetal skal ha 1 til rest ved deling på 2, kan dette skildrast både som +1 og som -1. Me kan difor justere formelen til:

$$2n - 1$$

Me testar om denne stemmer for grunntilfellet av oddetal:

$$2n - 1 = 1$$

$$2n = 1 + 1$$

$$\frac{2n}{2} = \frac{2}{2}$$

$$n = 1$$

Formelen stemmer no også for grunntilfellet, og me har ein formel som alltid vil gi oss det n'te oddetalet.

Produktet av to vilkårlege partal vert eit nytt partal

I den uendelege rekka med partal, 2, 4, 6, 8,.., skal me bevise påstanden om at *produktet av to vilkårlege av desse alltid vil gi oss eit nytt partal*.

- Me testar med to døme for å sjekke om me har belegg for påstanden:
    - $2 \cdot 4 = 8 \rightarrow$ partal
    - $4 \cdot 6 = 24 \rightarrow$ partal

Til å hjelpe oss i dette beviset nyttar me det me veit om partal, nemleg at:

- Partal kan på generell form skrivast $2n$

- To vilkårlege partal kan me til dømes skrive som $2s$ og $2t$
    - Produktet av desse kan me rekne ut slik:

$$2s \cdot 2t = 4st$$

- Dette kan me faktorisere slik:

$$4st = 2(2st)$$

- Me kan no (ved substitusjon) bytte ut uttrykket $2st$ med m, altså $2st = m$, og sjå at me står igjen med noko som liknar det opphavelege uttrykket for partal

$$2(2st) = 2 \cdot m = 2m$$

Sidan både uttrykket $2(2st)$ og $2m$ inneheld *minst ein* faktor 2, må talet vere eit partal. Me har dermed bevist at to vilkårlege partal multiplisert med kvarandre alltid vil gi oss eit nytt partal.

$Q.E.D.$

Produktet av to vilkårlege oddetal vert eit nytt oddetal

I den uendelege rekka med oddetal, 1, 3, 5, 7, 9,.., skal me bevise påstanden om at *produktet av to vilkårlege av desse alltid vil gi oss eit nytt oddetal.*

- Me tester med to døme for å sjekke om me har belegg for påstanden:
  - $1 \cdot 3 = 3 \rightarrow \text{oddetal}$
  - $3 \cdot 5 = 15 \rightarrow \text{oddetal}$

Til å hjelpe oss i dette beviset nytter me det me veit om oddetal, nemleg at:
  - oddetal på generell form kan skrivast $2n - 1$

- To vilkårlege oddetal kan me til dømes skrive som $(2s - 1)$ og $(2t - 1)$
  - Produktet av desse kan me rekne ut slik:

$$(2s - 1)(2t - 1) = 4st - 2s - 2t + 1$$

- Dette kan me faktorisere slik:

$$4st - 2s - 2t + 1 = 2(2st - s - t) + 1$$

- Me kan no (ved substitusjon) setje $(2st - s - t) = k$ og sjå at me står igjen med noko som liknar det opphavelege uttrykket for oddetal:

$$2(2st - s - t) + 1 = 2k + 1$$

På lik linje med $2k - 1$ vil også $2k + 1$ alltid gi oss oddetal, sidan tala alltid vil ligge *ein* høgare $(+1)$ enn eit partal $(2n)$, og dermed alltid gi *ein til rest* ved deling på 2.

$Q.E.D.$

Produktet av eit vilkårleg partal og eit vilkårleg oddetal vert eit partal, direkte bevis

Me skal bevise påstanden om at *produktet av to vilkårlege tal, der det eine er eit oddetal og det andre er eit partal, alltid vil gi oss eit nytt oddetal.*

- Me tester med to døme for å sjekke om me har belegg for påstanden:
  - $3 \cdot 4 = 12 \rightarrow$ partal
  - $5 \cdot 6 = 30 \rightarrow$ partal

Til å hjelpe oss i dette beviset nytter me det me veit om oddetal og partal:
  - Partal kan på generell form skrivast $2n$
  - Oddetal kan på generell form skrivast $2n - 1$

- Eit vilkårleg partal og eit vilkårleg oddetal multiplisert med kvarandre kan skrivast:

$$2s \cdot (2t - 1)$$

- Utrekna gir dette oss:

$$2s \cdot (2t - 1) = 4st - 2s$$

- Me kan faktorisere, og ved hjelp av distributiv lov setje felles faktor utanfor parentes:

$$= 2(2st - s)$$

- Me kan no setje $(2st - s) = k$ og sjå at me står igjen med det opphavelege uttrykket for partal:

$$2(2st - s) = 2k$$

Me kan òg argumentere for at sidan det faktoriserte uttrykket $2(2st - s)$ inneheld minst ein faktor 2, må heile uttrykket kunne delast på 2 og dermed vere eit partal.

$Q.E.D.$

Kvadratet av eit partal vert eit nytt partal

Me skal bevise påstanden om at *når du kvadrerer eit partal vil dette alltid gi eit nytt partal.*

- Me tester med to døme for å sjekke om me har belegg for påstanden:
  - $2 \cdot 2 = 4 \rightarrow$ partal
  - $4 \cdot 4 = 16 \rightarrow$ partal

Til å hjelpe oss i dette beviset nytter me det me frå før veit om partal:
  - Partal kan på generell form skrivast $2n$

- Kvadratet av eit vilkårleg partal skriv me då slik:
$$2k \cdot 2k = (2k)^2$$

- Dette kan me òg skrive som:
$$(2k)^2 = 4k^2$$

- Me faktoriserer det slik:
$$4k^2 = 2(2k^2)$$

- Sidan uttrykket $2(2k^2)$ inneheld minst ein faktor 2 må talet vere delelege med 2 og dermed vere eit partal.

- Me kan eventuelt byte ut faktoren $(2k^2)$ med variabelen t, $(2k^2 = t)$ og sjå at me har fått eit uttrykk som er lik den generelle forma for partal

$$2(2k^2) = 2t$$

$Q.E.D.$

Kvadratet av eit vilkårleg oddetal vert eit oddetal

Me skal bevise påstanden om at *når du kvadrerer eit oddetal vil dette alltid gi eit nytt oddetal.*

- Me tester med to døme for å sjekke om me har belegg for påstanden:
    - $1 \cdot 1 = 1 \rightarrow$ oddetal
    - $3 \cdot 3 = 9 \rightarrow$ oddetal

Til å hjelpe oss i dette beviset nytter me det me veit om oddetal, nemleg at:
- Oddetal kan skrivast på generell form $2n - 1$

- Kvadratet av eit vilkårleg oddetal kan då til dømes skrivast slik:

$$(2t-1)^2 = (2t-1)(2t-1)$$

$$= 4t^2 - 4t + 1^2$$

- Dette kan me ved faktorisering manipulere til:

$$= 2(2t^2 - 2t) + 1^2 \qquad (1)$$

- Me kan no ved substitusjon setje $(2t^2 - 2t) = k$ og sjå at me står igjen med det opphavelege uttrykket for partal:

$$2(2t^2 - 2t) = 2k$$

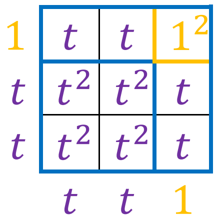
- Me nytter dette (1) og ser at me alltid vil få oddetal:

$$2(2t^2 - 2t) + 1^2 = 2k + 1$$

$Q.E.D.$

Kvadratet av eit vilkårleg oddetal vert eit oddetal, geometrisk bevis

Me lagar oss eit kvadrat, der kvar av sidene er sett saman av tre ledd, $(t + t + 1)$, altså $2t + 1$.



Figur 1: Geometrisk framstilling av oddetal multiplisert med oddetal.

- Når me multipliserer dei to sidene saman får me ni nye boksar med kvart sitt produkt inni.
- Sidan arealet av eit kvadrat både kan sjåast på som produktet av sidene, s^2, og som summen av delane inne i kvadratet, kan me no legge saman dei ulike delane.
- Me ser at me då har fire t^2 kvadrat $(4t^2)$, fire rektangel som til saman er $4t$, og til slutt ein einsleg $1^2 = 1$, noko som gjer til at dette kvadratet er eit oddetal.
- Me har dermed bevist at kvadratet av eit vilkårleg oddetal alltid vil vere eit oddetal.

$Q.E.D.$

Sum av naturlege tal (trekanttal), utleie formel

Summen av dei n fyrste naturlege tala, S_n, kan me finne med formelen $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Me byrjar med å skrive opp summen av dei n fyrste naturlege tala i stigande rekkjefølgje.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + .. + (n-2) + (n-1) + n$$

- Me nytter verktøy frå arbeid med aritmetiske rekkjer, og skriv rekkja opp på ny i synkande rekkjefølgje. Me har då to rekkjer som me kan addere saman ved ein såkalla *parvis addisjon*:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + .. + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + ..3 + 2 + 1$$

- Me legg saman ledd som står ovanfor kvarandre på same plass i dei to rekkjene, $1 + n$, $2 + (n-1)$, osb, og får då:

$$2S_n = (1+n) + \big(2 + (n-1)\big) + \big(3 + (n-2)\big) + .. + \big((n-2) + 3\big) + \big((n-1) + 2\big) + (n+1)$$

- Når me legg saman dei to rekkjene, ser me altså at me får ei lang rekkje med like uttrykk:

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + .. + (n+1) + (n+1) + (n+1)$$

- Dei to rekkjene addert saman gir oss n parentesar med summen $(n+1)$, noko me kan skrive slik:

$$2S_n = n(n+1)$$

- Sidan me berre er ute etter summen av *ei* av rekkjene må me dividere på 2:

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

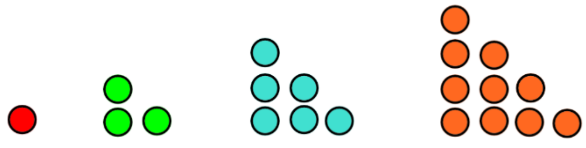
Den eksplisitte formelen for summen av dei n fyrste naturlege tala er dermed gitt ved:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$Q.E.D.$

Argumentasjon for formel for sum av naturlege tal, geometrisk framstilling

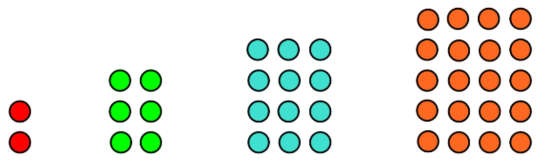
Summen av dei naturlege tala, $1 + 2 + 3 + 4 + .. + n$, kan ein finne ved å nytte formelen $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Korleis ein kjem fram til denne kan ein også argumentere for geometrisk, ved å setje kvart nye ledd under dei førre ledda slik at dei bygger stadig nye etasjar i ein trekant – altså trekanttala.



Figur 2: Trekanttala illustrert.

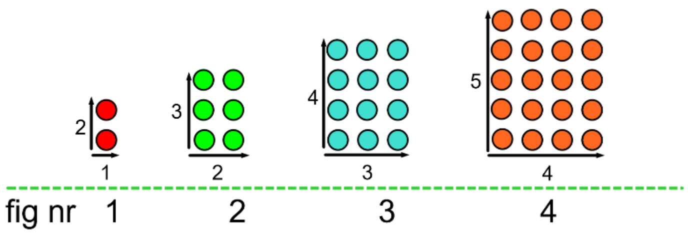
Me veit frå geometrien at dei geometriske figurane trekant og rektangel er nært knytt saman, sidan arealet av ein trekant alltid vil vere halvparten av arealet til eit rektangel, gitt at grunnlinje og høgd er lik i dei to figurane.

Dersom me doblar summen av dei naturlege tala, $2S(n)$, og lagar rektangelet som svarer til desse mengdene, er det kanskje enklare å kome i gang med ein formel. Me kan kalle rekka me får for *Rektangeltala*.



Figur 3: Rektangeltala, svarer til det dobbelte av trekanttala, eller 2S(n).

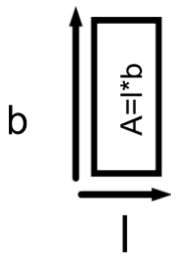
Når me nyttar det geometriske perspektivet til hjelp kan me òg nytte oss av kjente formlar frå geometrien, nemleg formel for areal av rektangel $(A = lb)$ og areal av trekant $\left(A = \frac{gh}{2}\right)$. Figurane i *Rektangeltala* har lengd og breidd som er slik at breidda stadig er *ein større* enn lengda.



Figur 4: Lengd, breidd og figurnummer.

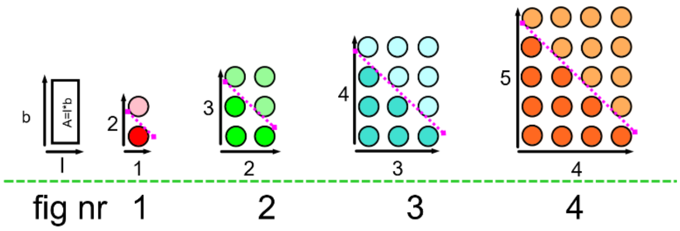
Når lengda er 1, er breidda 2. Når lengda er 2 er breidda 3, osb. Me ser òg at lengda alltid svarer til kva nummer figuren har i rekka, og at breidda alltid er *ein større* enn dette. Det gir oss at dersom lengda er n, vil breidda vere $(n + 1)$.

I vårt tilfelle er n ein faktor som kan sjåast på som ei lengd og $(n + 1)$ ein faktor på lik linje med breidda.



Figur 5: Rektangel med lengd og breidd.

Me bytter ut variablane l og b med n og $(n + 1)$. Dette gir oss at formelen for rektangeltal er gitt ved $2S(n) = n(n + 1)$. Men, sidan me berre er interessert i halvparten av rektangelet må me dividere dette på 2.



Figur 6: Halvering av Rektangeltala.

Denne operasjonen forklarer me algebraisk slik:

$$\frac{2S(n)}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$Sn = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Her kunne me òg ha nytta formelen for areal av trekant, og putta inn dei same variablane n og $(n + 1)$ for g og h. Dette gir oss at i staden for $A = \frac{gh}{2}$ får me $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Dermed har me argumentert for at formelen $\frac{n(n+1)}{2}$ kan nyttast for å finne summen av dei n fyrste naturlege tala.

$Q.E.D.$

Bevis for formel for sum av naturlege tal, ved induksjon

Me skal bevise ved induksjon påstanden om at *formelen* $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ *alltid vil gi oss summen av dei naturlege tala, altså trekanttala.*

- Me testar om formelen gjeld for grunntilfellet, altså når $n = 1$:
$$S(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- Me får verifisert at formelen gir oss *summen* av dei naturlege tala opp til n når $n = 1$, men me vil sjekke om formelen også gjeld for tala *etter* n. Me etablerer ein ny variabel, k, og tek for gitt at formelen også gjeld for $n = k$. Me har då at for:
$$S(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + .. + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

- Så kjem induksjonssteget: Me vil no sjekke om dette òg gjeld for $(k+1)$. Det gir oss rekkja:
$$S(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + .. + k + (k+1)$$

- Sidan me allereie har ein etablert formel for summen av dei naturlege tala $1 + 2 + 3 + 4 + .. + k$ kan me bytte ut tala i rekkja med denne (hugs at no er $n = k$):
$$S(k+1) = S(k) + S(k+1)$$
$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

- For å kunne trekke formelen vidare saman må me utvide $(k+1)$ slik at me også får det som ein brøk med nemnar 2:
$$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

- Sidan det er lik nemnar i brøkane kan me setje dei saman på ein og same brøkstrek:
$$S(k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

- Me ser at $(k+1)$ er felles faktor i dei to uttrykka, og jf. distributiv lov kan me setje faktoren utanfor ein parentes med dei resterande ledda inni:
$$S(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

- Sidan me innleiingsvis sette $n = k$, kan me no bytte attende og sjå at me har fått ein formel for *det neste* trekanttalet etter n, altså for $n + 1$:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- Me testar om formelen gir oss summen av dei 2 fyrste naturlege tala når me testar for grunntilfellet, og set $n = 1$:

$$S(1+1) = \frac{(1+1)(1+2)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

- Sidan me veit at $1 + 2 = 3$, og 3 er det andre trekanttalet i rekkja (1, 3, 6, 10, 15,..,) har me no fått stadfesta at formelen stadig vil gi oss det *neste* trekanttalet.

Dermed veit me at når formelen $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ gir oss summen av dei naturlege tala når $n = 1$ må den også gjelde for $n = 2$, og når den gjeld for $n = 2$ må den også gjelde for $n = 3$, osb. Uansett kor langt n går vil formelen alltid kunne gi oss summen av dei naturlege tala.

$Q.E.D.$

Summen av dei n fyrste oddetal vert det n'te kvadrattalet, utvikling av formel

Me har ein påstand om at summen av dei n fyrste oddetal gir oss det n'te kvadrattalet, og vil utvikle ein formel for dette.

- Me tester med to døme for å sjekke om me har belegg for påstanden:
  - $1 + 3 = 4 = 2^2 \rightarrow$ kvadrattal
  - $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \rightarrow$ kvadrattal

Til å hjelpe oss med å få til dette treng me den generelle formelen for oddetal, $(2n - 1)$ som eit verktøy.

- Me byrjar med å legge saman oddetala, heilt opp til det $n'te$ oddetalet.
  $$S_{2n-1} = 1 + 3 + 5 + .. + (2n - 5) + (2n - 3) + (2n - 1)$$

- Me nyttar grep kjent frå arbeid med aritmetiske rekkjer, og set rekkja opp på ny i synkande rekkjefølgje:
  $$S_{2n-1} = (2n - 1) + (2n - 3) + (2n - 5) + .. + 5 + 3 + 1$$

- Me adderer så desse to rekkjene (stigande + synkande) slik at me får to summar med dei n fyrste oddetala:

$$\begin{aligned} 2S_{2n-1} = & \big(1 + (2n - 1)\big) + \big(3 + (2n - 3)\big) \\ & + \big(5 + (2n - 5)\big) + .. + \big((2n - 5) + 5\big) + \big((2n - 3) + 3\big) \\ & + \big((2n - 1) + 1\big) \end{aligned}$$

- Dette gir oss n ledd som alle gir lik sum, $2n$, altså:

$$2S_{2n-1} = n \cdot 2n$$

- Sidan me ikkje er ute etter summen av *to rekkjer med oddetal,* men berre den eine rekkja, må me dividere summane på to:

$$\frac{2s_{2n-1}}{2} = \frac{2n^2}{2}$$

- Me står då igjen med den eksplisitte formelen for summen av dei n fyrste oddetala, altså kvadrattala:

$$S_{2n-1} = n^2$$

Summen av dei n fyrste oddetal vert det n'te kvadrattalet, direkte bevis

Me skal bevise påstanden om at *summen av dei n fyrste oddetala,* $S_{(2n-1)}$*, kan me finne med formelen* $S_{(2n-1)} = n^2$

- Me byrjar med å legge saman oddetala, heilt opp til det $n'te$ oddetalet.
$$S_{2n-1} = 1 + 3 + 5 + 7 + .. + (2n - 1)$$

- Vidare kan me omskrive kvart av ledda i rekkja til å vere på den generelle formen for oddetal:

$$S_{2n-1} = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) + .. + (2n - 1)$$

- Me leiter no etter mønster i rekkja, og ser etter kva som varierer og kva som er konstant slik at me kan generalisere. I kvar parentes har me talet 2 multiplisert med det n'te naturlege talet. Det vert òg trekt frå 1 i kvar parentes, noko som vert gjort n-tal gonger. Fargene hjelper oss med å systematisere:
$$S_{2n-1} = \big((2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) + (2 \cdot 5 - 1) + .. + (2 \cdot n - 1)\big)$$

- Sidan 2 skal multipliserast med kvart av dei naturlege tala frå 1 og opp til n kan me setje denne utanfor ein parentes. Me kan òg skrive at 1 skal trekkast frå n gonger.
$$S_{2n-1} = 2(1 + 2 + 3 + 4 + .. + n) + n(-1)$$

- Summen av dei naturlege tala har allereie ein etablert formel (trekanttal), og me kan setje denne inn i staden for dei naturlege tala. Resten av uttrykket trekk me saman med hjelp av vanlege algebraiske reknereglar:
$$S_{2n-1} = 2\frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$S_{2n-1} = \frac{2n^2}{2} + \frac{2n}{2} - n$$

$$S_{2n-1} = n^2 + n - n$$

$$S_{2n-1} = n^2$$

Me har dermed bevist at summen av dei n fyrste oddetala vert det $n'te$ kvadrattalet.

$Q.E.D.$

Summen av dei n fyrste oddetal vert det n'te kvadrattalet, ved induksjon

Me skal bevise at formelen som fortel oss at *summen av oddetal vil gi kvadrattal ikkje berre gjeld for alle tal opp til* $2n-1$*, men også for oddetala over dette.*

- Me testar om formelen gjeld for grunntilfellet, altså når $n = 1$:
$$S(1) = 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

- Me får verifisert at formelen gjeld for grunntilfellet, men vil no sjekke om denne formelen også gjeld for tala *etter* n. Me etablerer ein ny variabel, k, og tek for gitt at formelen også gjeld for $n = k$.
- Me veit at summen av oddetal er gitt ved formelen:
$$S_{2n-1} = n^2$$
Dette gir då at:
$$S_{(2k-1)} = k^2$$

- Me tek for gitt at formelen òg må gjelde for $(k+1)$, slik at formelen stadig vil gi oss *det neste* kvadrattalet. Me set altså $(k+1)$ inn i summasjonen vår, i tillegg til at me legg til *det neste* oddetalet etter det *siste* i rekka.
    - Sidan alle oddetal kan skrivast som $(2n-1)$, og differansen frå eit oddetal til det neste er 2, vil *det neste* oddetalet kunne skrivast som $(2n-1)+2 = 2n+1$.

Me får då at:

$$S(2(k+1)-1) = 1+3+5+..+(2k-1)+(2k+1)$$

$$S(2k+1) = 1+3+5+..+(2k-1)+(2k+1)$$

Sidan me allereie har eit etablert uttrykk for summen av oddetal opp til $(2k-1)$, kan me bytte ut denne talrekkja med det kjente uttrykket:

$$S(2k+1) = k^2 + (2k+1)$$

Me kan manipulere uttrykket vårt ved hjelp av fyrste kvadratsetning og sjå om me nærmar oss eit kvadrat, sidan det er *det* me er ute etter å bevise:

$$S(2k+1) = k^2 + 2k + 1^2$$

Me har funne noko me kan faktorisere ved hjelp av fyrste kvadratsetning:

$$S(2k+1) = (k+1)(k+1)$$

$$S(2k+1) = (k+1)^2$$

Me har no vist at siden summen av også det *neste* oddetalet kan skrivast på forma av eit kvadrat, må også summen av det *neste*, og det *neste*, og det *neste* oddetalet bli kvadrat.

$Q.E.D.$

Sum av to etterfølgjande trekanttal vert eit kvadrattal, direkte bevis

Me skal bevise påstanden om at summen av to etterfølgjande trekanttal vert eit kvadrattal, gitt ved uttrykket $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$.

- Me tester med to døme for å sjekke om me har belegg for påstanden:
  - $1 + 3 = 4 = 2^2 \rightarrow$ kvadrattal
  - $3 + 6 = 9 = 3^2 \rightarrow$ kvadrattal

- Til å hjelpe oss i dette beviset nytter me det me veit om trekanttal, nemleg at me finn det n-te trekanttalet ved formelen $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Det *neste* trekanttalet må naturlegvis vere *ein* større enn det førre, og me lagar så eit uttrykk for dette ved å addere 1 til n. Me får då uttrykket:

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- Me legg saman dei to formlane for T_n og T_{n+1}, og reknar ut:

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+2)}{2}$$

$$= \frac{2n^2 + 2n + 2n + 2}{2}$$

- Me trekk saman variablane og kortar brøken:

$$= n^2 + 2n + 1$$

- Me faktorisere uttrykket ved hjelp av fyrste kvadratsetning:

$$= (n+1)(n+1)$$

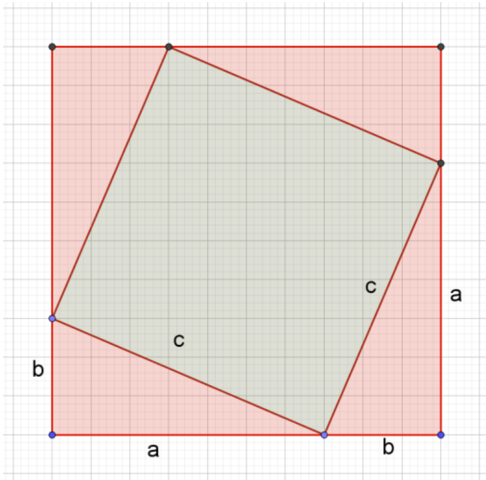
$$= (n+1)^2$$

Sidan me endar opp med eit kvadratisk uttrykk har me bevist at to etterfølgjande trekanttal alltid vil gi eit kvadrattal.

$Q.E.D.$

Bevis for Pytagoras' læresetning 1, direkte

Me skal bevise at arealet av dei fire kongruente trekantane med grunnlinje **a** og høgd **b** er like stort som arealet av kvadratet med sider **c**.



Figur 7: Kvadrat i kvadrat, med sider lik a, b og c.

- Me lagar uttrykk for arealet til kvar av figurane:

  Kvadrat: c^2

  Trekantar: $\frac{ab}{2}$

- Arealet av den samansette figuren kan me finne på to ulike måtar; som summen av alle delane, eller som arealet gitt ved formel for kvadrat, s^2. Me kan sette desse to måtane lik kvarandre og rekne ut:

$$sum\ av\ delar = formel\ for\ areal\ av\ kvadrat$$

$$\frac{4ab}{2} + c^2 = (a+b)^2$$

$$2ab + c^2 = (a+b)(a+b)$$

$$2ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Me kan ordne vidare i uttrykka til me sit att med:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

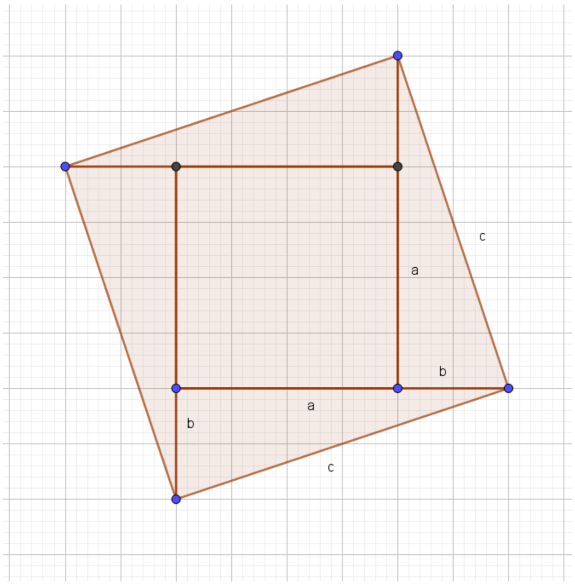
- Me kjenner att Pytagoras' læresetning, og har dermed bevist at kvadratet med side lik hypotenusen i ein rettvinkla trekant er like stort som summen av kvadrata med sider lik dei to katetane i den same trekanten.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$Q.E.D.$

Bevis for Pytagoras' læresetning 2, direkte

Me skal bevise at arealet av dei fire kongruente trekantane med grunnlinje **a** og høgd **b** er like stort som arealet av kvadratet dei omkransar.



Figur 8: Kvadrat i kvadrat, med sider lik a, b og c.

- Me lagar uttrykk for arealet til kvar av figurane:

Trekant: $\frac{ab}{2}$

Omkransa kvadrat: $(a-b)^2$

Heile kvadratet: c^2

- Arealet av den samansette figuren kan me finne på to ulike måtar; som summen av alle delane, eller som arealet gitt ved formel for areal av kvadrat. Me kan setje desse to måtane lik kvarandre og rekne ut:

$$(a-b)^2 + \frac{4ab}{2} = c^2$$

$$(a-b)(a-b) + 2ab = c^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Me kjenner att uttrykket som den generelle formelen for å rekne ut ukjente sider i rettvinkla trekantar, Pytagoras' læresetning.

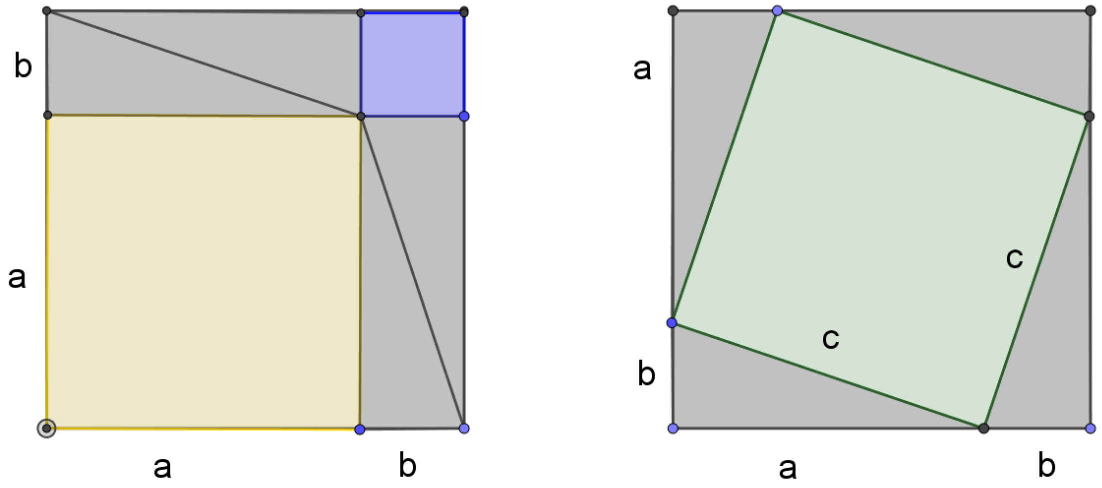
$Q.E.D.$

Bevis for Pytagoras' læresetning 3, "Det kinesiske bevis", visuelt

Me skal bevise at *i ein rettvinkla trekant er summen av kvadratet til dei to katetane lik kvadratet av hypotenusen, altså for* ΔABC *gjeld at* $a^2 + b^2 = c^2$.

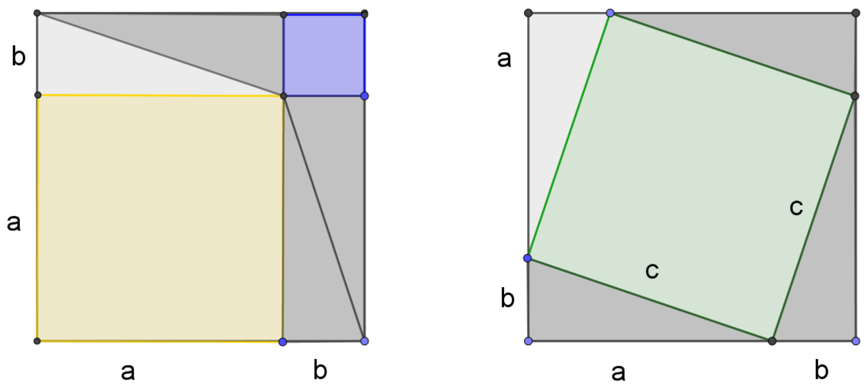
Til å hjelpe oss i dette visuelle beviset har me teikna to kongruente kvadrat, som kvar for seg er delt inn på ulike måtar.

- Kvadratet til venstre består av to kvadrat med sidelengder a og b, i tillegg til fire kongruente trekantar med grunnlinje a og høgd b.
- Kvadratet til høgre er sett saman av dei same fire kongruente trekantane som i kvadratet til venstre, i tillegg til eit kvadrat med sidelengder c.

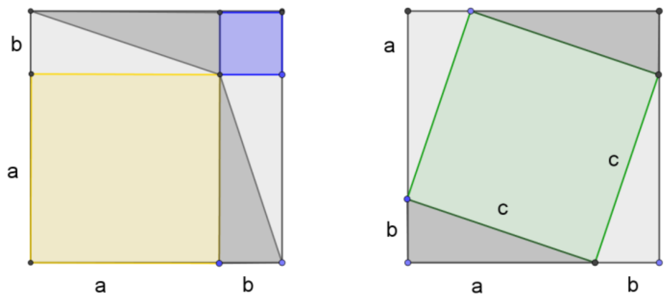


Figur 9: To kongruente kvadrat med ulik inndeling.

Me fjerner no parvis ein og ein trekant frå kvar av dei to store kvadrata:

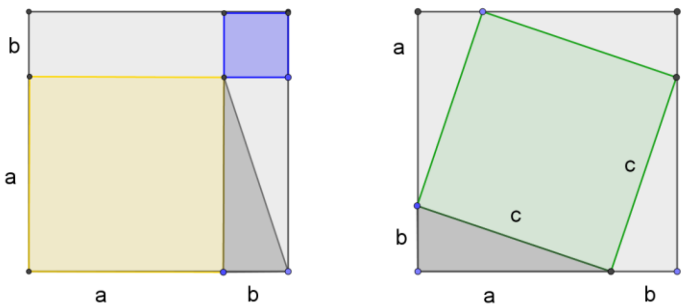


Figur 10: Ein trekant er tatt vekk frå kvar figur.



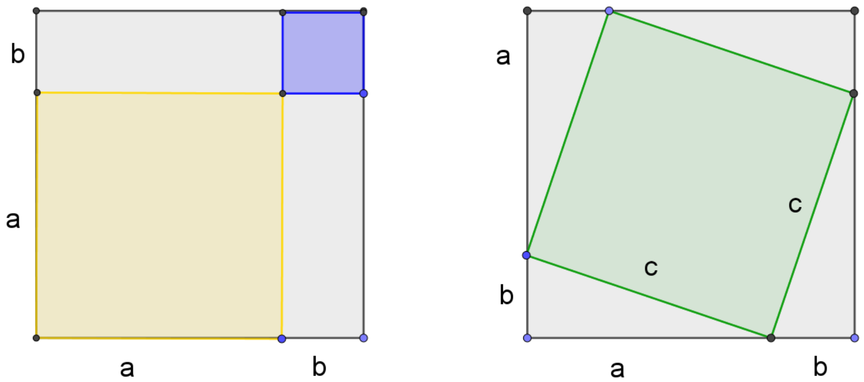
Figur 11: To trekantar er tatt vekk frå kvar figur.

Dette gjentek me til me ikkje har fleire trekantar å fjerne.



Figur 12: Tre trekantar er tatt vekk frå kvar figur.

Sidan me som utgangspunkt har at dei fire trekantane i kvar av dei to store kvadrata er kongruente, har me altså fjerna like mykje innhald frå kvar av dei store kvadrata. Det som då står att i kvart kvadrat må nødvendigvis vere like stort innhald.



Figur 13: Alle trekantane inni figurane er fjerna.

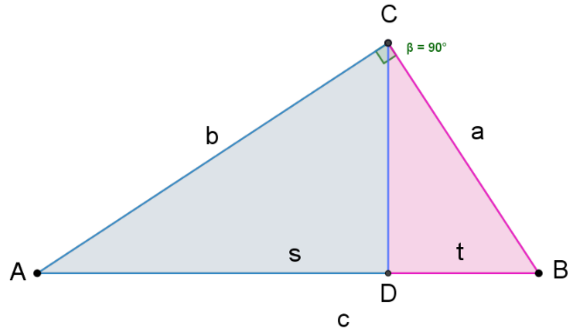
Me står altså att med to små kvadrat i kvadratet til venstre, a^2 og b^2, og eit lite kvadrat i kvadratet til høgre, c^2. Me kan dermed argumentere for at desse kvadrata i sum utgjer like stort areal, altså

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$Q.E.D.$

Bevis for Pytagoras' læresetning 4, algebraisk

Me skal bevise at *i ein rettvinkla trekant er summen av kvadratet til dei to katetane lik kvadratet av hypotenusen, altså for ΔABC gjeld at* $a^2 + b^2 = c^2$.



Figur 14: Ein rettvinkla trekant ABC, med to formlike trekantar inni.

Til å hjelpe oss i dette beviset nytter me reglar kjent frå *formlikskap*, nemleg at forholdet mellom samsvarande sider i formlike trekantar er likt. Det gir oss at:

$$\frac{a}{c} = \frac{t}{a} \qquad \text{og} \qquad \frac{b}{c} = \frac{s}{b}$$

- Me vil no lage uttrykk for a og b, og må difor multiplisere vekk brøkane:

$$\frac{a}{c} \cdot c = \frac{t}{a} \cdot c \qquad \text{og} \qquad \frac{b}{c} \cdot c = \frac{s}{b} \cdot c$$

$$a = \frac{tc}{a} \qquad \text{og} \qquad b = \frac{sc}{b}$$

$$a \cdot a = \frac{tc}{a} \cdot a \qquad \text{og} \qquad b \cdot b = \frac{sc}{b} \cdot b$$

$$tc = a^2 \qquad \text{og} \qquad sc = b^2$$

- Me har no fått kvadratiske uttrykk. Me ordnar uttrykka og får at:

$$a^2 + b^2 = tc + sc$$

- Me kan nytte distributiv lov og setje felles faktor utanfor parentes

$$a^2 + b^2 = c(t + s)$$

- Me ser på figuren at linjestykket $(t + s) = AB = c$, og me kan dermed skrive om uttrykket, slik me kjenner det frå Pytagoras' læresetning:

$$a^2 + b^2 = c \cdot c$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$Q.E.D.$

Litteratur

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R., & Myklebust, T. (2013). *Alfa. Lærebok : Matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10* (2. utgave). Fagbokforlaget.

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner. Metamatematikk for lærerutdanningen.* (1. utgave). Caspar Forlag AS.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E., & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2* (1. utgave). Gyldendal Norsk Forlag AS.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321. https://www.jstor.org/stable/30034869%0D