Høgskulen på Vestlandet

Matematikk 3, emne 4 - Masteroppgave - Stord

MGUMA550-OST-2023-VÅR1-FLOWassign

Predefinert informasjon

Startdato:	01-02-2023 09:00 CET	**Termin:**	2023 VÅR1
Sluttdato:	31-03-2023 14:00 CEST	**Vurderingsform:**	Norsk 6-trinns skala (A-F)
Eksamensform:	Masteroppgave - Stord		
Flowkode:	203 MGUMA550 1 OST 2023 VÅR1		
Intern sensor:	(Anonymisert)		

Deltaker

Kandidatnr.:	249

Informasjon fra deltaker

Antall ord *:	36053

Egenerklæring *: Ja

Jeg bekrefter at jeg har registrert oppgavetittelen på norsk og engelsk i StudentWeb og vet at denne vil stå på vitnemålet mitt *: Ja

Jeg godkjenner avtalen om publisering av masteroppgaven min *

Ja

Er masteroppgaven skrevet som del av et større forskningsprosjekt ved HVL? *

Ja, "Mathematics learning in multiple languages"

Er masteroppgaven skrevet ved bedrift/virksomhet i næringsliv eller offentlig sektor? *

Nei

Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGÅVE

Algebraisk tenking og språk: Språket si rolle i utviklinga av elevar si evne til generalisering

Ein kvalitativ studie av elevar på sjette og sjuande trinn

Algebraic thinking and language: The role of language in the development of pupils´ generalization skills

A qualitative study of pupils in the sixth and seventh grade

Malene Grov Almås

Master i undervisningsvitskap med fordjuping i matematikk
Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett
Rettleiar: Silke Lekaus

Innleveringsdato: 31. mars 2023

Samandrag

Språklege ferdigheiter er i dagens læreplan sett på som ein viktig del av alle fag, og forsking syner at språklege ferdigheiter påverkar elevar si matematiske forståing. I denne masteroppgåva har formålet vore å auke forståinga for rolla språket kan spele i matematikkfaget. Dette er forsøkt gjort ved å undersøkje korleis elevar nyttar språk (norsk) i arbeid med matematikkoppgåver. Oppgåvene er knytt til figurmønster, algebraisk tenking og generalisering. Dei to sistnemnde emna er utfordrande for mange elevar i den norske grunnskulen, og difor finn eg det interessant å sjå på desse emna. Følgjande to forskingsspørsmål er stilt: 1) *Korleis brukar elevar ulike språklege register når dei diskuterer og arbeider med generalisering av mønster i matematikkfaget?* og 2) *Korleis kan språk verke som ein ressurs eller eit hinder i elevar sitt arbeid med generalisering?*

For å svare på forskingsspørsmåla har eg henta inspirasjon frå designen *kvalitativ case-studie.* Datamaterialet er i hovudsak transkripsjonar av tre elevgrupper sine diskusjonar av matematikkoppgåver. Dette er samla inn gjennom videoopptak, der eg hadde rolla *deltakar-som-observatør.* Kvar elevgruppe var sett saman av tre elevar på anten sjette eller sjuande trinn. Som analyseverktøy har eg nytta to teoretiske rammeverk. Det eine er Prediger & Wessel (2013) sin modell som syner ulike uttrykksmåtar og korleis desse kan relatere. Uttrykksmåtane er til dømes munnleg og skriftleg språk, grafiske representasjonar og matematiske symbol. I studien vektlegg eg det munnlege språket som modellen deler inn i språkregistra *kvardagsregister, skuleregister* og *teknisk register*. Det andre rammeverket er Radford (2003; 2010) si nivåinndeling av generaliseringar. Desse er i stigande rekkefølge av matematisk nivå *aritmetiske generaliseringar*, *faktuelle generaliseringar*, *kontekstuelle generaliseringar* og *symbolske generaliseringar*.

Resultata syner at elevane i hovudsak nytta eit kvardagsregister og eit skuleregister i oppgåveløysinga. Det høgste identifiserte generaliseringsnivået var av typen kontekstuelt, og det kan sjå ut til at kvardagsregisteret har spela ei viktig rolle i prosessen mot desse generaliseringane. Vidare kan det sjå ut til at måtane elevane omtala variablar på påverka deira matematiske forståing både på ein god og ein dårleg måte. Studien indikerer òg at det er viktig for elevane i studien å meistre eit kvardagsregister, eit skuleregister og eit teknisk register. Mangel på meistring av eitt av registera ser på ulike måtar ut til å kunne verke avgrensande i elevane sitt arbeid med generalisering her.

Summary

Language skills are shown in the current curriculum for Norwegian primary schools as an important part of all subjects. Research shows that language skills affect pupils' mathematical understanding. The purpose of this study is to increase understanding of the role that language can play in the mathematics classroom. This has been attempted by examining how pupils use language (Norwegian) when working with mathematical tasks. The tasks are in the subject of algebraic thinking and generalization. These subjects are challenging for many pupils in the Norwegian primary school and therefore I find it interesting to examine these subjects. The following two research questions have been asked: *how do pupils use different linguistic registers when discussing and working with generalization of patterns in mathematics?* and *how can language act as a resource and/or an obstacle in pupils' work with generalization?*

To answer the research questions, I have drawn inspiration from the qualitative case study design. The data material is mainly transcriptions of three student groups' discussions of mathematical tasks. This has been collected through video recording, where I had the role of participant-as-observer. Each group was made up of three pupils in either sixth or seventh grade. The tasks they worked on were about figure patterns.

As an analysis tool, I have used two theoretical frameworks. One is Prediger & Wessel's model (2013) which shows different modes of expression and how these can relate. The means of expression are, for example, oral and written language, graphic representations, and mathematical symbols. In my study, I emphasize the spoken language, which the model divides into the linguistic registers *everyday register*, *school register* and *technical register*. The second framework is Radford's (2003; 2010) levels of pupils' generalizations. These are, in ascending order of mathematical level, *arithmetic generalizations*, *factual generalizations*, *contextual generalizations* and *symbolic generalizations*. The results show that the pupils mainly used an everyday register and a school register in solving the tasks. The highest level of generalization identified was of the contextual type, and it may appear that the everyday register has played an important role in the process towards these generalizations. Furthermore, it may appear that the way students refer to variables affects their mathematical understanding in both a good and a bad way. The study also indicates that it is important for the pupils in the study to master an everyday register, a school register and a technical register. Lack of mastery of one of the registers seems to be able to have a delimiting effect in the pupils' work with generalization in various ways.

Forord

Denne masteroppgåva markerer slutten på mi femårige grunnskulelærarutdanning for 5.-10. trinn ved Høgskulen på Vestlandet. Desse åra har vore lærerike, og eg sit igjen med mange gode minne. Studietida har samstundes vore krevjande då ho vart prega av koronapandemien. Eg har fått erfare kor viktig det er å treffe medstudentar og førelesarar fysisk i ein studiekvardag.

Gjennom arbeidet med masteroppgåva har eg fordjupa meg i matematikkfaget. Eg har spesielt fått ny kunnskap om utfordringar knytt til algebra i grunnskulen, og eg har blitt meir medviten på korleis elevar sine språklege ferdigheiter kan påverke deira læring i matematikkfaget. Eg har òg fått betre innsikt i korleis forsking innan matematikkdidaktikk går føre seg. Alt dette er innsikt eg ser fram til å ta med meg ut i klasserommet.

Eg vil retta ei stor takk til rettleiaren min, Silke Lekaus, som gjennom heile prosessen har gitt meg grundige og konstruktive tilbakemeldingar. Eg vil òg retta ei takk til rektorane og lærarane som let meg besøkje klassane deira og til elevane som deltok i studien.

Til slutt vil eg takke familien min som har støtta meg i arbeidet. Spesielt takk til onkel Anders som motiverer meg på ein unik måte som berre han kan.

Malene Grov Almås

Stord/Bergen, mars 2023

Innhald

Figuroversikt

Tabelloversikt

1.0 Innleiing

Gjennom mi grunnskulelærarutdanning har eg blitt meir og meir medviten på at språk er ein viktig del av alle skulefag. Til dømes har eg gjennom praksisperiodar fått oppleve at måten eg ordlegg meg på har mykje å seie for korleis elevar oppfattar oppgåver, instruksjonar og forklaringar i ulike fag, inkludert matematikk. På same vis merkar eg korleis elevane uttrykkjer seg ulikt når dei diskuterer fag. Både digitale og ikkje-digitale læringsressursar nyttar språket for å formidle innhald. Språk er slik ein naturleg del av skulekvardagen. Forsking syner at ein medviten bruk av språk i matematikkundervisninga er viktig. Elevar sine språklege ferdigheiter påverkar nemleg kva dei oppnår i matematikkfaget, og eit fokus på å betre elevar sine språklege ferdigheiter er dermed viktig i alle emne i dette (Prediger & Wessel, 2013, s. 435). Denne masteroppgåva handlar om elevar på sjette og sjuande trinn sin bruk av språk i arbeid med å utvikle algebraisk tenking og generalisering.

Algebraisk tenking er eit omfattande omgrep, noko definisjonen eg har valt å ta utgangspunkt i syner. Denne er gitt av Kieran (2004) og lyder:

> Algebraic thinking in the early grades involves the development of ways of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool, but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any lettersymbolic algebra at all, such as analysing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting (s. 149)

Ut i frå denne definisjonen kan ein sjå at algebraisk tenking inneber mange ulike kompetansar. På ei side handlar algebraisk tenking om å utvikle ein tenkemåte til bruk for algebra som involverer bokstavar som symbol. På den andre sida er algebraisk tenking noko som kan inngå i aktivitetar som ikkje krev at ein brukar bokstavar. Desse aktivitetane kan då handle om å analysere forhold mellom mengder, finne strukturar, sjå korleis noko endrar seg, generalisere, løyse problem, modellere, grunngi matematiske påstandar, bevise matematiske påstandar og føreseia ulike hendingar. Algebraisk tenking kan altså, slik definisjonen eksplisitt skildrar, skje i mange ulike aktivitetar, og det er dermed mykje ein som lærar kan inkludere i undervisning for å legge til rette for at elevar utviklar ei slik tenking.

Grunna omfanget på studien min har eg valt å avgrense undersøkinga av elevar si algebraiske tenking gjennom deira evner til *generalisering*, som i følgje Kieran (2004, s. 141) er éin av aktivitetane algebraisk tenking kan skje gjennom. Utvikling av algebraisk tenking hjå elevar er vidare forsøkt lagt til rette for gjennom matematikkoppgåver basert på figurmønster som eg kjem tilbake til i teksten sin teoridel (kapittel 3).

For å undersøkje språket som elevar nyttar i arbeidet med generalisering kategoriserer eg ord, fraser og setningar i ulike *språklege register*. Dette vert gjort i forskingslitteratur, til dømes av Halliday (1978, s. 31-32), Duval (2006, s. 110) og (Prediger & Wessel, 2011). Språklege register kan forklarast som «variasjonar i språket» som kjem av at ein brukar språket på ulike måtar (Halliday, 1978). I matematikkfaget kan dette sjåast dersom ein til dømes skal uttrykkje reknestykket 10 : 5 = 2 med ord. Formuleringar som «10 vert delt på 5 og så blir svaret 2», «ein dividerer 10 på 5 og får 2» og «dersom dividenden er 10 og divisoren er 5 blir kvotienten 2» skildrar alle reknestykket. Desse kan vidare uttrykkast munnleg og skriftleg. Min studie handlar i hovudsak om det verbale munnlege språket, og transkriberte elevdiskusjonar utgjer den største delen av datamaterialet mitt. For å analysere datamaterialet i studien tek eg utgangspunkt i Prediger & Wessel (2011) si kategorisering av verbale register i matematikkfaget. Dei kategoriserer det verbale språket i eit *kvardagsregister*, eit *skuleregister* og i eit *teknisk register*, og peiker på at ei veksling mellom registera vil kunne støtte elevar i deira utvikling av matematiske ferdigheiter. Studien tek òg utgangspunkt i Radford (2003; 2010) som løftar fram språk som eit viktig verkemiddel i matematikkfaget og syner korleis bruken av språk påverkar elevar sitt arbeid med generalisering.

Vidare i innleiingskapittelet vil eg no presentere bakgrunnen for val av tema, studien sine forskingsspørsmål og målet med forskinga. Deretter kjem korte utgreiingar av relevante omgrep brukt i studien. Masteroppgåva mi er del av eit større forskingsprosjekt ved Høgskulen på Vestlandet (HVL) som òg blir presentert kort i innleiingskapittelet. Innleiingskapittelet vert avslutta med ei oversikt over struktur og innhald i dei følgjande kapitla.

1.1 Bakgrunn for val av tema

Bakgrunnen for val av tema i studien er sett saman av kva tidlegare forsking har funne, læreplanar og svake prestasjonar hjå elevar i emnet algebra i den norske skulen. Her gjer eg greie for dei to sistnemnde, og tidlegare forsking vert presentert i kapittel to.

1.1.1 Læreplanar

Både algebraisk tenking og språklege ferdigheiter har ein viktig plass i gjeldande læreplan, Kunnskapsløftet 2020 (Kunnskapsdepartementet, 2019). Momenta i Kieran (2004, s. 149) sin definisjon på algebraisk tenking, vist over og som eg tek utgangspunkt i, inngår i fleire av kompetansemåla for elevar i matematikk på fleire trinn i grunnskulen (Kunnskapsdepartementet, 2019). Kieran hevdar nemleg at algebraisk tenking finn stad når elevar analyserer forhold mellom mengder. Dette kan sjåast igjen i kompetansemålet for 2. trinn, som seier at elevane skal kunne «utforske og beskrive generelle eigenskapar ved partal og oddetal» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Vidare kan algebraisk tenking i følgje Kieran finne stad når elevar leiter etter og finn ulike mønster, undersøkjer endringar og generaliserer. Dette finn ein også i kompetansemåla for 6. og 8. trinn som høvesvis seier at elevane skal kunne «bruke variablar og formlar til å uttrykkje samanhengar i praktiske situasjonar» og «utforske algebraiske reknereglar og beskrive og generalisere mønster med eigne ord og algebraisk» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Vidare skal matematikkfaget «bidra til at elevane utvikler et presist språk for resonnering, kritisk tenking og kommunikasjon gjennom abstraksjon og generalisering» (Kunnskapsdepartementet, 2019). Her kan ein òg sjå at algebraisk tenking skal vere ein del av matematikkfaget i den norske skulen, då det vert vist at det skal leggast til rette for arbeid med blant anna generalisering. Av dette kompetansemålet kan ein òg sjå at ein som lærar i den norske skulen skal legge til rette for at elevar kan utvikle gode språklege ferdigheiter i matematikkfaget.

Vidare er ikkje algebra berre ein viktig del av matematikkfaget i Noreg. National Council of Teachers of Mathematics, som er ein profesjonell organisasjon for skulelærarar i USA med mål om å betre standardane for matematikk, peiker på at algebra spelar ei viktig rolle i elevar sitt arbeid med matematikk, allereie frå deira første møte med faget (2000, s. 29).

1.1.2 Svake resultat i algebra frå elevar i den norske skulen

Basert på eiga erfaring frå praksisperiodar gjennom grunnskulelærarutdanninga vil eg hevde at algebraisk tenking og generalisering er ein utfordrande del av matematikkfaget for mange elevar i grunnskulen. Dette syner òg den internasjonale undersøkinga, TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) frå 2015, som viser at norske elevar på 9. trinn sine prestasjonar på emneområdet algebra er svært dårlege (Bergem, 2016, s. 22).

1.2 Formål med studien og forskingsspørsmål

Målet med denne studien er å auke forståinga for rolla språket kan spele i matematikk-klasserommet og spesielt i elevar sitt arbeid med generalisering. På bakgrunn av dette har eg formulert følgjande to forskingsspørsmål:

1) *Korleis brukar elevar ulike språklege register når dei diskuterer og arbeider med generalisering av mønster i matematikkfaget?*

2) *Korleis kan språk verke som ein ressurs og/eller eit hinder i elevar sitt arbeid med generalisering?*

Ved å svare på desse forskingsspørsmåla i studien min ynskjer eg å bidra til forskingsfeltet og til matematikklærarar i deira arbeid med å legge til rette for at elevar skal kunne utvikle algebraisk tenking og språklege ferdigheiter. I det første forskingsspørsmålet synleggjer eg korleis elevar brukar språket i diskusjon og i løysing av matematikkoppgåver. I det andre spørsmålet knyter eg funna mine til tidlegare forsking om generalisering og språket si rolle i matematikk. Eg håpar difor oppgåva mi kan vere med på å inspirere og motivere lærarar til å bli medviten på bruk av språk i matematikkfaget, samt støtte og utvide forskingsfelta eg byggjer studien min på.

1.3 Kort om metode

For å svare på forskingsspørsmåla mine har eg henta inspirasjon frå case-design (Yin, 2018). Datamaterialet mitt er film av elev-grupper på sjette og sjuande trinn som diskuterer matematikkoppgåver knytt til generalisering av figurmønster. Oppgåvene (vedlegg 1 og 2) er inspirert av det klassiske bord-og-stol-problemet, vist av til dømes Carraher et al. (2008).

Transkripsjonar av elevdiskusjonane er vektlagt mest, men eg har òg sett på korleis elevane nyttar kroppsspråk, konkretar eller andre verkemiddel i kombinasjon med språket for å uttrykkje seg. Eg gjennomførte to rundar med datainnsamling med om lag fem månadars mellomrom. Oppgåvene elevane fekk vart justerte i andre runden. Informantane var nye i den andre datainnsamlinga. Datamaterialet er samla inn av meg og ein nyleg ferdigutdanna lærar. For å analysere datamaterialet har eg tatt utgangspunkt i Prediger og Wessel (2011) sin modell for relasjonar og veksling mellom språklege register og Radford (2003; 2010) si inndeling av elevar si evne til generalisering på ulike nivå.

1.4 Avklaring av omgrep

Generalisering i matematikk

I denne studien ser eg på generalisering i matematikk slik Carraher et al. (2008) gjer det. Dei hevdar at:

> Mathematical generalization involves a claim that some property or technique holds for a large set of mathematical objects or conditions. The scope of the claim is always larger than the set of individually verified cases; typically, it involves an infinite number of cases (e.g., ‘‘for all integers’’). (s. 3)

I følgje Carraher et al. handlar altså matematisk generalisering om å finne påstandar om at ein eller annan eigenskap eller teknikk gjeld for eit stort sett med matematiske gjenstandar eller forhold. Denne påstanden gjeld alltid for eit større omfang av matematiske objekt eller matematiske forhold enn dei ein har fått oppgitt og verifisert. Dette vert ofte vist i generaliseringa med uttrykk som til dømes «for alle heiltall…» som vist i sitatet frå Carraher et al. i dette avsnittet. Ein påstand som inkluderer dette uttrykkjet gjeld då for eit uendeleg tal av heiltal, fleire enn dei ein eventuelt har fått oppgitt i ei matematikkoppgåve, og er potensielt ei matematisk generalisering. Ein slik påstand kan òg kallast ein hypotese då det ikkje er naudsynt at påstanden gjeld i alle tilfella når ein er i ein generaliseringsprosess.

Språk

Den vanlegaste måten å forstå språk på er å sjå på språk som eit system av reglar for danning av ytringar som er felles for ei gruppe menneske. Dette regelsystemet vil skifte frå samfunn til samfunn, og det finst dermed eit stort tal forskjellige språk (Simonsen et al., 2021). Eg tek utgangspunkt i dette og ser i denne oppgåva på språk som ulike måtar å kommunisere på. Med *språk* refererer eg med andre ord ikkje til utvalde språkgrupper, som til dømes norsk, svensk eller tysk, men til kommunikasjonsmåtar. Med utgangspunkt i forklaringa til Simonsen et al. kan språk sjåast på som noko skriftleg og noko munnleg. I innleiinga har eg avgrensa studien min til å undersøkje elevar sitt munnlege språk.

Språklege register

I studien tek eg utgangspunkt i Halliday (1978) sitt syn på språklege register. Han hevdar det er tre variablar som avgjer kva for register ein kan identifisere: 1) det som faktisk skjer, 2) kven som tek del i det og 3) kva rolle språket spelar (s. 31). *Register* refererer med andre ord til faktumet om at språket me snakkar eller skriv varierer ut i frå kva situasjon ein er i. Andre variasjonar kan handle om fonetikk og fonologi, men då snakkar ein om ulike dialekter (Halliday, 1978, s. 32-35). Eg tek vidare utgangspunkt i Prediger & Wessel (2011) si inndeling av ulike språkregister i matematikk. Modellen deira syner ulike verbale språklege register, men eg vil òg påpeike at dei inkluderer matematiske formlar, diagram, grafar og konkretar i sin definisjon av register. Det verbale språket deler dei inn i eit kvardagsregister, eit skuleregister og eit teknisk register. Desse vil eg gjer greie for i oppgåva sitt teorikapittel.

1.5 Ein del av eit større prosjekt

Denne masteroppgåva er ein del av forskingsprosjektet «Mathematics learning in multiple languages» ved Høgskulen på Vestlandet (HVL), avdeling Bergen. Prosjektet er eit samarbeid med Det Tekniske Universitetet i Eindhoven (Nederland) og Leibniz Institute for Science and Mathematics Education (Tyskland). Prosjektet kastar lys over språklege forskjellar i matematikk-klasserom. Desse forskjellane kjem av at elevar har ulike morsmål og/eller brukar ulike språk, og av at elevar som snakkar det same språket brukar dette på ulike måtar. I min studie set eg søkjelys på forskjellar i bruken av eitt og same språk, som i dette tilfellet er norsk. I tillegg til å undersøkje dette har mi rolle i prosjektet vore å samle data, samt delta i skaping, evaluering og revidering av oppgåver til bruk i datainnsamlinga.

Målet med forskingsprosjektet er å designe oppgåver som skal vere fritt tilgjengelege for matematikklærarar som underviser i fleirspråklege klasserom. Oppgåvene skal utformast for å engasjere elevar i læringa av viktige omgrep innan algebra og tar utgangspunkt i språklege forskjellar for å støtte elevane sine matematiske forståingar. Prosjektet skal avsluttast i desember 2026. Prosjektgruppa er sett saman av tilsette ved HVL, ph.d.-studentar og masterstudentar.

1.6 Eit sosiokulturelt syn på læring

Læring er eit omfattande omgrep. Kva læring er, korleis læring skjer, og korleis læring kan leggast til rette for kan sjåast på frå fleire perspektiv. I denne studien byggjer eg på Vygotsky sitt sosiokulturelle syn på læring. I følgje Vygotsky er språket er den viktigaste reiskapen menneskeet har for utvikling, og læring vil skje i ein sosial kontekst gjennom bruken av dette (Vygotsky, 1978, s. 126). Språket er den reiskapen me nyttar for å perspektivere omgjevnadane og i ulike samanhengar skildre og snakke om fenomen og objekt på ulike måtar (Säljö, 2016, s. 111). Säljö forklarer dette på ein metaforisk måte og hevdar at ein må ta avstand frå verda og kunne snu og vende på ho og sjå ho frå ulike perspektiv ved hjelp av blant anna språket. Å meistre og ta ein slik avstand er i følgje Vygotsky grunnlag for menneskeleg kunnskapsdanning (Säljö, 2016, s. 111).

1.7 Teksten si oppbygging

Teksten er bygd opp av sju kapittel. Etter innleiingskapittelet følgjer kapittel to som presenterer tidlegare forsking om språket si rolle i klasserommet og om elevar sitt arbeid med generalisering. I kapittel tre presenterer eg det teoretiske grunnlaget for studien. Dette kapittelet er sett saman av to hovuddelar, der den første handlar om algebra i skulen og den andre handlar om språket si rolle i matematikk-klasserommet. I desse delane vert dei teoretiske rammeverka eg har nytta for å analysere studien sitt datamateriale presentert. I kapittel fire skildrar eg forskinga sin design og metodane eg har valt for å samle datamateriale og å analysere dette. Her vil eg òg presentere oppgåvetypen elevane har arbeidd med under datainnsamlinga. Til slutt i kapittel fire drøftar eg etiske omsyn og forskinga sin kvalitet. I kapittel fem presenterer eg funn frå analysen av datamateriale som er relevante for studien sine forskingsspørsmål. Desse funna vil eg i kapittel seks diskutere i lys av teori og tidlegare forsking før eg i kapittel sju presenterer studien sin konklusjon.

2.0 Tidlegare forsking

Tidlegare forsking er bakgrunn for studien min. Forskinga eg presenterer her er for å skape ein samanheng mellom kva eg finn og kva tidlegare studie har funne. Studiane eg har inkludert i dette kapittelet er difor valt med grunnlag i relevans for mine forskingsspørsmål, der eg søkjer etter ei djupare forståing av språk som ressurs og/eller hinder i undervisning, samt fenomena algebraisk tenking og generalisering i ein skulesamanheng.|

2.1 Tidlegare forsking på språket si rolle i matematikklæring

Fordi studien er gjort som del av eit større prosjekt er delar av datainnsamlinga mi gjort blant elevar som både var fleirspråklege (her: snakka andre språk flytande i tillegg til norsk) og som ikkje var fleirspråklege. Dei andre språka enn norsk var imidlertid lite synlege under datainnsamlinga, og i min studie har eg valt å sjå på korleis språklege ferdigheiter spelar ei rolle for alle elevar, ikkje berre fleirspråklege. Dei følgjande avsnitta presenterer difor forsking om språket si rolle i matematikklæring. Forskingsgjennomgangen syner at gode språkkunnskapar er viktig for både fleirspråklege og ikkje-fleirspråklege elevar.

Allereie frå barnehagealder kan ein sjå at språklege ferdigheiter har stor samanheng med matematiske ferdigheiter (Purpura & Ganley, 2014, s. 104). Purpura & Ganley (2014) undersøkjer i sin studie korleis språklege ferdigheiter påverkar born si utvikling av matematisk tenking. Dei finn at born sine språklege ferdigheiter har ein samanheng med så å seie alle matematiske ferdigheiter ein bør ha i ein alder av 4-6 år. Med dette meiner dei at born i tidleg alder treng å kjenne til namn på tal (ha eit godt nok ordforråd), kunne forstå samanhengen mellom orda som er nemning for tala og definisjonen av talomgrepa, sjå samanhengen mellom talorda og talsymbola eller forstå meiningane med komparative ord (til dømes «større» eller «fleire») (s. 115). Dei peiker vidare på at relasjonen mellom språk og matematikk er viktig å forstå fordi språklege ferdigheiter kan spele ei nøkkelrolle når born skal tileigne seg ny kunnskap samt knytte denne til kunnskapen dei allereie har. Dersom språket er utvikla mindre enn normalt når born er 4-6 år er dette sannsynlegvis ei hindring for at dei lærer seg den matematiske kunnskapen dei ideelt sett treng i denne alderen (s. 115). Dette syner at språklege ferdigheiter påverkar læring hjå både elevar som snakkar eitt språk og hjå fleirspråklege elevar.

At språk spelar ei rolle i tenking og læring generelt er godt kjent (Prediger et al., 2016, s. 199), også for born eldre enn barnehagealder. Prediger & Wessel (2013, s. 435) hevdar språklege ferdigheiter påverkar kva elevar oppnår i matematikkfaget, og dei meiner difor at eit fokus på å betre elevar sine språklege ferdigheiter er viktig i alle emne i faget. Dette gjeld både for fleirspråklege elevar og for ikkje-fleirspråklege elevar (Prediger & Wessel, 2011). I forskingslitteratur kan ein òg lese at perspektivet på språk dei siste to tiåra har endra seg frå «language as a problem» til «language as a resource» (Planas, 2018, s. 215). Prediger og Wessel (2013) skildrar språk som «a tool for thinking and constructing knowledge via constructing meanings" (s. 436) og viser i sin studie korleis språklege ferdigheiter kan støtte elevar si forståing for brøkrekning. Studien min tek føre seg det matematiske emnet algebraisk tenking for å gi meir kjennskap om språket si rolle som verktøy for tenking i dette emnet òg.

Planas (2016, s. 24) skildrar korleis språk kan nyttast som ressurs i matematikkundervisning og viser til eit døme: Når ein lærar brukar ulike uttrykk som «hvor mange ganger», «antall ganger», «for hvor lenge» og «hvor ofte» blir denne variasjonen ein ressurs då det opnar for å diskutere omgrep og viktige førestillingar for læring av divisjon og relaterte omgrep. Planas (2016) koplar dette i hovudsak til elevar som ikkje har undervisningsspråket som sitt morsmål, men påpeiker at praksisar som søkjer å utvikle det ho kallar ei språk-som-ressurs-tilnærming ikkje kan sjåast på som universelle (s. 30). Ho peiker her på at kva for strategiar, normer og prosessar som er tilstrekkeleg for dette i eit klasserom er avhengig av elevane og kulturen dei er ein del av. Læraren må forsøkje å finne strategiar basert på språka som vert snakka i det enkelte klasserommet. Med andre ord verkar ikkje undervisningsopplegg ein innfører «utanfrå» nødvendigvis slik ein ynskjer. Forsking i ulike fleirspråklege klasserom vil likevel kunne inspirere og styrke utforsking av metodar for pedagogisk intervensjon (s. 30). Med grunnlag i dette hevdar Planas at historier om korleis elevar lærer og samhandlar i fleirspråklege matematikk-klasserom vil kunne inspirere og styrke utforsking av metodar for pedagogisk intervensjon. Eg tolkar ho difor som at hennar forskingsresultat knytt til språklege utfordringar i fleirspråklege klasserom òg kan gjelde for elevar med språklege utfordringar knytt til undervisningsspråket der dette er det same som deira morsmål.

I samband med å sjå på språk som ressurs trekker Planas (2016) fram at mangel på vokabular kan skape språkvanskar og mangel på matematisk tenking. Dersom ein elev til dømes ikkje hugsar omgrepet «oddetal» vil eleven bruke tid på å forklare omgrepet på ein annan måte, til dømes «partal pluss 1». I tillegg til å bruke ekstra tid på å forklare omgrepet hevdar Planas at denne eleven utan å kome på ordet «oddetal» vil kunne ha vanskar med å uttrykkje seg presist (Planas, 2016, s. 32). Med andre ord er det viktig å meistre språket som matematikk vert instruert på. Ein konsekvens av dette er at lærarar må ha eit språk-som-ressurs-perspektiv. For at språk skal kunne verke som ressurs må dette nemleg bli sett og brukt, og for lærarar kan dette til dømes tyde at dei må ha innsikt i elevane sine ulike språk og språklege ferdigheiter. Dermed kan lærarar utvikle forståing for kvar det trengs forklaring av ulike ord og fraser i matematikklæringa (s. 33). Igjen er Planas sitt hovudfokus på elevar som ikkje har undervisningsspråket som sitt morsmål, men av erfaring vil eg hevde det finst ikkje-fleirspråklege elevar som også har eit mangelfullt ordforråd og som til dømes ikkje kjem på eller kjenner til fagord som «oddetal». Planas (2016) sin teori kan difor overførast til språklege utfordringar hjå elevar som ikkje er fleirspråklege òg, der desse utfordringane skapar grunnlag for å diskutere omgrep og dermed bidrar til læring. Talet på språk i eit klasserom kan likevel ha noko å seie med tanke på å legge til rette for kommunikasjon slik at læringsmoglegheiter oppstår (s. 34).

Nilssen (2020) undersøkjer i si masteroppgåve korleis språk kan nyttast som ein ressurs i det fleirspråklege klasserommet. Trass eit fokus på fleirspråklegheit syner studien korleis språk og matematisk forståing kan henge saman, og den er difor interessant å sjå på i samanheng med min. Nilssen tek utgangspunkt i Prediger & Wessel (2011) som ser på veksling mellom språklege register som viktig og undersøkjer korleis elevar gjer dette i arbeid med modelleringsoppgåver. Ved å bruke deira modell i analysen av elevar sitt arbeid og sin diskusjon av modelleringsoppgåver, har ho identifisert korleis veksling mellom ulike uttrykksmåtar kan bidra til å skape meining hjå elevar. Ho finn blant anna at elevane tek i bruk eit kvardagsregister for å oppklare noko, og at det ser ut til å bidra til at elevane får ei djupare forståing i matematikk dersom dei får nytte eit kvardagsregister. Skuleregister kan hjelpe elevar med å halde fokus på det matematiske problemet som skal løysast, og eit teknisk språkregister kan tydeleggjere relasjonar mellom opplysingar, samt kva oppgåva faktisk ber elevane om. I studien hennar kjem det òg fram at det i Noreg er gjort lite forsking på samspelet mellom dei ulike språkregistera i matematikkundervisning.

I forsking som har undersøkt språket si rolle i matematikkfaget er det altså identifisert samanhengar mellom språklege ferdigheiter og matematiske ferdigheiter. Det er likevel trong for meir kunnskap på feltet. I følgje Purpura & Ganley (2014, s. 108) er det gjort lite forsking som direkte undersøkjer relasjonen mellom språk og matematiske ferdigheiter. Prediger og Wessel (2013) har undersøkt språkbruk i arbeid med brøk og ser at språklege ferdigheiter påverkar dette, men dei hevdar forsking på andre matematiske emne bør gjennomførast for å utvikle deira teori (s. 455). Nilssen (2020) peiker på mangel på forsking på samspelet mellom ulike språkregister i matematikk-klasserommet både i Noreg og internasjonalt (s. 71).

2.2 Tidlegare forsking på elevar sitt arbeid med generalisering i matematikk

I forskingslitteratur er det peika på fleire utfordringar knytta til generalisering i matematikkfaget, og nokre av desse er knytt til å uttrykkje formlar og matematisere kvardagslege situasjonar. Carraher et al. (2008) undersøkte 15 elevar sitt arbeid med generalisering frå dei gjekk i tredje klasse til dei gjekk i sjette klasse. Dei fann at det er vanskeleg for elevar å kome opp med eksplisitte formlar dersom dei ikkje har kjennskap til naudsynte matematiske idéar eller konseptuelle strukturar. Ved å spørje korleis elevar skal kunne forstå noko som krev matematisk kunnskap dei ikkje allereie har problematiserer dei generalisering i matematikkfaget. Funna deira viser vidare at det er to store utfordringar med å få elevar til å uttrykkje matematiske generaliseringar av funksjonar. For det første er det ofte eit mål at elevar skal bruke eksplisitte formlar for funksjonar. Oppgåvene dei får fører likevel ofte til at elevane tenker på funksjonar som om det vert ynskja eit rekursivt uttrykk frå dei. Den andre utfordringa studien fann er at det er utfordrande å introdusere funksjonar til unge elevar gjennom formell notasjon. Dei matematiske objekta ein ynskjer at elevane skal arbeide med må oppstå frå aktivitetar og diskusjonar som i fyrste omgang er gitte sett med kvardagslege gjenstandar og relasjonar mellom talet på desse (i min studie er dei matematiske oppgåvene kopla til ein kvardagsleg situasjon med gjester, stolar og bord som objekt). Forskarane fann augneblinkar der lærarar hjelpte elevane til å sjå på dei kvardagslege problema i form av relasjonar mellom variablar. Dette fordi det var vanskeleg for elevane å gå frå empirisk tenking til teoretisk resonnering aleine. Studien til Carraher et al. (2008) konkluderer med at elevar må lære korleis ein skapar matematiske generaliseringar av ulike problem før dei kan forstå kva ei generalisering er. Dette kan dei lære ved å få lov til å leite etter mønster og merke seg relasjonar og strukturar (Carraher et al., 2008). Funna til Carraher et al. kan ha samanheng med det Petersen (2015) ser på som ei utfordring med generalisering: han argumenterer nemleg for at mange elevar har relativt god kontroll på resonnering og fortolking opp mot kontekstar, men at det er vanskeleg for dei å matematisere desse situasjonane. Dette finn også Mason (1996) som løftar fram at mange elevar synes det er vanskeleg å formulere formlar i oppgåver som handlar om generalisering.

Mason (1996) peika vidare på eit anna problem knytt til generalisering i skulen: dersom ein lærar viser døme på generaliseringar for å legge til rette for at elevar får forståing for nettopp generalisering, ser elevane ofte på dette generelle som noko spesielt. Elevar kan med andre ord ha vanskar for å forstå fenomenet «generalisering» i matematikkfaget fullstendig.

Eit anna problem med generalisering i skulematematikken handlar om korleis elevar oppfattar det matematiske i algebraiske uttrykk eller gitte oppgåver. Wettergren et al. (2021) har undersøkt yngre elevar si oppfatning av det matematiske i algebraiske uttrykk, og fann at elevane ofte oppfattar at det finst eit avgjort tal eller eit avgjort siffer bak ein bokstav. Dei fann at elevane i hovudsak ser på det matematiske i algebraiske uttrykk som «noko som kan og skal reknast ut», «noko som skildrar eit forhold mellom komponentar» og «noko som representerer ein situasjon». Sistnemnde måten å sjå på dette handlar om at elevane ser at eit uttrykk kan representere ulike situasjonar eller at den same situasjonen kan representerast av ulike uttrykk. At nokre elevar ser på det matematiske i algebraiske uttrykk som noko som representerer ein situasjon tyder også at dei gjerne ser strukturelle likskapar mellom ulike uttrykk (Wettergren et al., 2021). Dette kan sjå ut til å stride i mot Mason (1996) sin teori om at elevar ofte ser på noko generelt som spesielt, men Wettergren et al. (2021) fann i den same studien sin at elevane har utfordringar med å forstå at verdien av variablar i uttrykk vert avgjort av relasjonelle samanhengar. Dette er eit kritisk aspekt som bør arbeiddest med for at elevane skal få betre kunnskap kring korleis algebraiske uttrykk kan uttrykkje ulike situasjonar (Wettergren et al., 2021). Basert på Mason (1996) og Wettergren et al. (2021) kan det difor tenkast at elevar forstår nokre ideàr knytt til generalisering, men at det er utfordrande å forstå at variablar (uttrykt ved hjelp av både ord og symbol) kan ha ulike verdiar.

3.0 Teorigrunnlag

Dette kapittelet inneheld det teoretiske grunnlaget for studien min. Kapittelet tek føre seg temaa «algebra i skulen» og «språket i matematikk-klasserommet». Eg gjer først greie for omgrepa *algebra*, *algebraisk tenking* og *generalisering*. Deretter viser eg korleis arbeid med figurmønster kan fremje elevar sine evner til generalisering og presenterer Radford (2003; 2010) si nivåinndeling av ulike typar generalisering som kan finne stad i eit klasserom. Denne inndelinga dannar delar av utgangspunktet for studien sin analysereiskap. Vidare presenterer eg relevant teori om språket si rolle i klasserommet. I samband med dette syner eg ein modell av Prediger og Wessel (2011) som viser relasjonar og vekslingar mellom språklege register. Denne modellen dannar òg delar av utgangspunktet for studien sin analysereiskap.

Algebra i skulen

3.1 Om algebra og algebraisk tenking

Algebraisk tenking kan forklarast og definerast på ulike måtar, men dei ulike forklaringane har til felles det at dei byggjer på tankesett og idéar frå algebra (Solem et al., 2017, s. 340). For å greie ut om *algebraisk tenking*, som studien min undersøkjer, vil eg difor inkludere teori om *algebra* i dette kapittelet. Frå eit matematikkdidaktisk perspektiv kan ein seie at det på vidaregåande trinn i skulen vert undervist i algebra, medan algebraisk tenking skjer på dei lågare trinna. I undervisning av *algebra* på vidaregåande er det nemleg sentralt å arbeide med bokstavar, medan dette ikkje er sentralt for elevar på barneskulen (Solem et al., 2017, s. 340). Matematikklærarar skal likevel leggje til rette for *algebraisk tenking* allereie på dei lågaste trinna (Kunnskapsdepartementet, 2019).

På nettstaden til Store Norske Leksikon vert algebra definert som «læren om ligninger, regning med tall og variabler og bokstavregning» (Aubert, 2021). Watson (2009, s. 3) meiner algebra er ein måte å uttrykkje generaliseringar på og at det å forstå samanhengar mellom tal, mengder og relasjonar dermed er viktig for å lære algebra. Eit døme på dette er at elevar må forstå at subtraksjon og addisjon er to omvende operasjonar og at det same gjeld for multiplikasjon og divisjon (Watson, 2009, s. 3). Lee (1996, s. 87) ser på algebra som ein mini-kultur innanfor den større kulturen «matematikk». Ho vel å nytte ordet «kultur» i skildringa fordi algebra blant inneber både eit sett med aktivitetar og eit språk. Menneske i denne mini-kulturen nyttar dermed eit felles språk og felles reglar. Mason (1996, s. 73) hevdar folk ofte tenker på algebra som eit matematisk språk: ei rekke med algebraiske symbol. I følgje han er dette ei for snever forklaring då denne rekka med symbol ikkje er algebra i seg sjølv (1996, s. 73). Basert på dei nemnte måtane å forstå algebra på, er algebra med andre ord meir enn ei rekke algebraiske symbol, og målet med å undervise i algebra er meir enn at elevar skal lære seg eit formelspråk.

Algebra er altså ein stor del av matematikkfaget og eit omfattande omgrep. Det er i forskingslitteraturen dermed ulike forklaringar og definisjonar på algebraisk tenking. Før eg går vidare innpå desse repeterer eg her definisjonen på algebraisk tenking som eg legg til grunn for denne studien, gitt av Kieran (2004):

> Algebraic thinking in the early grades involves the development of way of thinking within activities for which letter-symbolic algebra can be used as a tool, but which are not exclusive to algebra and which could be engaged in without using any lettersymbolic algebra at all, such as analysing relationships between quantities, noticing structure, studying change, generalizing, problem solving, modeling, justifying, proving, and predicting. (s. 149)

Eg vil no samanlikne ulike definisjonar frå forskingslitteraturen på algebra i skulen og algebraisk tenking. Som ei tilnærming til ein definisjon på fenomenet *algebra i skulen* kan ein i forskingslitteraturen sjå fleire ulike karakteristikkar. Til dømes skildra Usiskin (1998, s. 9-

11) fire ulike perspektiv på algebra i skulen (*school algebra*). Desse inneber generalisert aritmetikk, eit sett med prosedyrar som vert brukt for å løyse visse problem, studien av forhold mellom mengder og studien av strukturar. Generalisert aritmetikk handlar her om at elevane skal kunne generalisere kunnskapen dei har om tal og rekneoperasjonar. For dei vil det til dømes seie å vere fortruleg med at $5 \cdot 4 = 4 \cdot 5$ og basert på det forstå korleis den kommutative lova verker. Dette kan tenkast å inngå i det Kieran (2004, s. 149) ser på som generalisering når ho skildrar algebraisk tenking. Perspektivet til Usiskin som omtalar algebra som eit sett med prosedyrar som vert brukt for å løyse visse problem kan sjåast igjen i Kieran (2004) sin definisjon av algebraisk tenking der ho blant anna skildrar algebraisk tenking som eit verktøy. Vidare kan ein sjå to av perspektiva på algebra som Usiskin skildrar, nemleg at algebra er studien av forhold mellom mengder og studien av strukturar, ordrett igjen i Kieran (2004) sin definisjon av algebraisk tenking. Usiskin nyttar ikkje omgrepet *algebraisk tenking*, men fordi Usiskin si skildring av *school algebra* i 1998 liknar Kieran si skildring av *algebraisk tenking* i 2004 kan det tenkast at omgrepet *algebraisk tenking* ikkje var like godt etablert i 1998.

Kaput (1995, s. 6-10) identifiserte fem aspekt ved algebra. Desse er (1) generalisering og formalisering, (2) syntaktisk styrte manipulasjonar, (3) studien av strukturar, (4) studien av funksjonar, relasjonar og samvariasjon (altså to storleikar som varierer avhengig av kvarandre) og (5) eit språk for modellering. Dersom ein skal samanlikne Kaput (1995) si forståing av omgrepet algebra med Kieran (2004) om algebraisk tenking og Usiskin (1998) om algebra kan det sjå ut til at Kaput (1995) inkluderer eit språkleg aspekt i noko større grad. Både Kieran og Usiskin ser på høvesvis algebraisk tenking og algebra som eit verktøy og eit sett med prosedyrar, men Kaput nemner eksplisitt at manipulasjonane som kan gjerast ved hjelp av algebra er syntaktisk styrte og at algebra kan nyttast som eit språk for modellering. Kaput (2008, s. 10-11) peiker i tillegg til dei fem aspekta på to større kjerneaspekt ved algebra i skulen spesielt. Det første kjerneaspektet ser på algebra som systematisk symbolisering av generaliseringar knytt til regularitetar og avgrensingar. Uttrykkinga av generaliseringar skal her skje i eit stadig meir systematisk symbolsystem. Det andre kjerneaspektet ser på algebra som eit syntaktisk styrt arbeid med generaliseringar og symbol i eit organisert system av desse symbola. Det sistnemnde aspektet bygger altså på det første då det første handlar om å finne uttrykk gjennom generalisering og det andre ser på algebra som ei manipulering av desse uttrykka. Det er i følgje Kaput (2008, s. 11) tre måtar å tilnærma seg dei to aspekta på. Desse kjem eg tilbake til i masteroppgåva sin metodedel.

Kieran (1996, referert i Kieran, 2004, s. 141 og 148-149) kategoriserte i modellen *GTG-modellen* skulealgebra ut i frå aktivitetar elevane vanlegvis deltek i. Desse er i følgje Kieran *generational activities, transformational activities* and *global meta-level activities*. Her handlar «generational activities» om å skape uttrykk og likningar som blir objekt for algebra. Enkelt sagt handlar denne aktiviteten om å skape uttrykk og likningar som ein kan arbeide vidare med. Eg vil difor kalle denne kategorien for *skapande aktivitetar* på norsk. «Transformational activities» handlar om å omforme uttrykk og likningar til ekvivalente uttrykk og likningar. Eg vel difor å omsette og kalle denne kategorien for *omformande aktivitetar.* «Global meta-level activities» er aktivitetar på metanivå som krev at elevane blant anna reflekterer, løyser problem, planlegg, fører bevis og resonnerer. Dette er strategiar og tankeprosessar som ikkje berre finst i algebra. Kategorien kan difor kallast *aktivitetar på metanivå.* Sistnemnde aktivitet er i følgje Kieran (2004, s. 142) essensiell, ikkje berre for å skape meining i algebra, men òg for å utvikle måtar å tenke på som er avgjerande for suksess i algebra.

Både Kieran (2004) og Kaput (2008) ser på generalisering som ein sentral del av algebra i skulematematikken. Kieran inkluderer ordet «generalisering» i sin definisjon (2004) slik også Kaput (2008) gjer i si inndeling av algebra i to kjerneaspekt. Kieran har likevel eit mindre fokus på symbol i si forståing enn Kaput, noko som kanskje kjem av at Kieran eksplisitt definerer omgrepet algebraisk tenking. Det kan òg kome av at Kieran eksplisitt definerer omgrepet *algebraisk tenking* for dei lågaste alderstrinna (the early grades). Ein må bruke ei form for symbol for å uttrykkje uttrykk og likningar, noko som Kieran (2004) ser på som ein viktig del av algebra, men ho nevner ikkje «symbol» eller «symbolsystem» direkte i definisjonen sin eller i GTG-modellen slik Kaput (2008) gjer i si forklaring. Kieran si forståing av algebra (1996, 2004) kan difor truleg gjere det enklare å kople algebra opp mot andre matematiske emne, som til dømes i modellering, bevisføring eller problemløysing, slik ho òg skriv.

Vidare foreslår Kieran (2004, s. 141) fem praksisar ein bør inkludere i algebraundervisning for å legge til rette for algebraisk tenking. I utarbeidinga av desse legg ho blant anna Kilpatrick et al. (2001) sin teori til grunn om at det er viktig med eit parallelt fokus på aritmetikk og algebra i matematikkundervisning. Dette er viktig for at elevar skal klare å sjå relasjonelle aspekt. Algebra er nemleg eit gjennomgåande tema i heile matematikkfaget (Kilpatrick et al., 2001, referert i Kieran, 2004, s. 140). Dei fem praksisane ein bør inkludere i undervisning for å utvikle algebraisk tenking (og som ikkje verkar avgrensande) er:

1) Eit fokus på relasjonar og ikkje berre på utrekning av svar
2) Eit fokus på operasjonar og deira inversar, og på den tilhøyrande idéen om å gjera noko/endra noko
3) Eit fokus på å både representere og løyse problem istadenfor å berre løyse dei
4) Eit fokus på tal og bokstavar istadenfor berre tala åleine
5) Eit re-fokus på likskapsteiknet si tyding

Fritt omsett etter Kieran (2004, s. 141)

For å definere algebraisk tenking peiker Kieran (2004) blant anna på utviklinga av tenkjemåtar der algebra basert på bokstav-symbol kan nyttast som eit verktøy. Dette verktøyet er då ikkje eksklusivt for algebra. Dette kan sjåast igjen i dei fem praksisane over då desse kan knyttast til andre emne i matematikkfaget. Til dømes kan praksis 1 – *eit fokus på relasjonar og ikkje berre på utrekning av svar* – knyttast til modelleringsoppgåver eller elevar sitt arbeid med forståing av mengder og symbol som «<» og «>». Modelleringsoppgåver kan òg knyttast til praksis 3 – *eit fokus på å både representere og løyse problem istadenfor å berre løyse dei* – då slike oppgåver kan brukast for å vurdere elevar sine løysingsstrategiar og deira evne til å identifisere utfordringar (Kaiser & Sriramann, 2006, s. 304).

3.2 Om generalisering i matematikkfaget

Generalisering er som vist over ein sentral del i algebra og algebraisk tenking, men òg ein stor del av matematikkfaget. Mason (1996) trekker det så langt som å seie at matematisk tenking ikkje finn stad utan generalisering. Kaput (2008) hevdar at det å generalisere er ein viktig del av algebraisk tenking, men sidestiller det med å kunne grunngi og uttrykkje matematiske forhold. Han hevdar at det å bygge, uttrykkje og rettferdiggjere matematiske forhold eller generaliseringar er «the heart of algebraic thinking». Som nemnt innleiingsvis tek eg i denne studien utgangspunkt i Carraher et al. (2008) sin definisjon av generalisering i matematikk;

> Mathematical generalization involves a claim that some property or technique holds for a large set of mathematical objects or conditions. The scope of the claim is always larger than the set of individually verified cases; typically, it involves an infinite number of cases (e.g., ‘‘for all integers’’). (s. 3)

I følgje Carraher et al. (2008, s. 3) handlar matematisk generalisering altså om å finne påstandar om at ein eller annan eigenskap eller teknikk gjeld for eit stort sett med matematiske gjenstandar eller forhold. Blanton (2008) ser på generalisering i matematikkfaget som presentasjon av utsegn som skildrar ei generell sanning om eit sett med (matematiske) data. Både Carraher et al. og Blanton ser altså på det å ha ein gitt situasjon som ein klarer å seie noko generelt om som sentralt for ein generaliseringsprosess, men Carraher et al. tydeleggjer at settet med matematiske data må vere veldig stort og større en det dei kallar *mengda av tilfelle som blei verifisert (kvar for seg).* Generaliseringa må altså vanlegvis gjelde for eit uendeleg stort sett med matematiske data i følgje Carraher et al. (2008, s.3).

3.3 Generalisering av figurmønster som utgangspunkt for algebraisk tenking

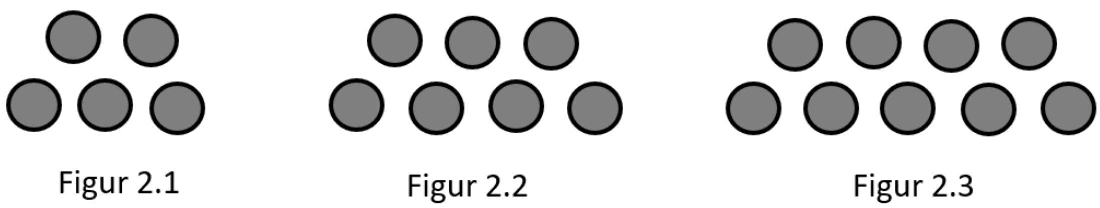
For å legge til rette for utvikling av elevar si algebraiske tenking er det vanleg å bruke figurmønster som utgangspunkt (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Eit figurmønster er ikkje eit anerkjend, og langt mindre godt definert, omgrep i matematikkfaget. Det finst heller ikkje semje blant matematikarar om kva eit figurmønster er (Carraher et al., 2008). Fleire forskarar har likevel undersøkt bruken av figurmønster i matematikkundervisning fordi generalisering av mønster blir sett på som ein måte å utvikle elevar si algebraiske tenking. I masteroppgåva mi tek eg utgangspunkt i Lannin (2005) si forklaring på ein typisk aktivitet som inkluderer figurmønster i matematikk. Han meiner ei typisk figurmønsteroppgåve i matematikk gir elevar ein kontekst/situasjon det kan lagast eit mønster ut i frå eller berre eit mønster (sjå figur 1), og ut i frå denne skal dei finne ein regel som kan nyttast for skildre andre delar av figurmønsteret som ikkje er vist. Med utgangspunkt i figur 1 ville spørsmålet blitt noko slik som «skriv ein regel eller ein formel som kan nyttast for å finne talet på sugerøyr som trengs for å lage eit kva som helst tal firkantar lagt til bortover i figuren» i ei typisk figurmønsteroppgåve (Lannin, 2005, s. 233)

Figur 1 - "Sugerøyrproblemet", ein typisk mønsteraktivitet (modifisert etter Lannin, 2005, s. 233).

Radford (2010) ser på generalisering av mønster som ein framståande måte å introdusere algebra til elevar på, men understreker at alle oppgåver som omhandlar mønster og generalisering av desse ikkje nødvendigvis inneber eller fører til algebraisk tenking. Han har undersøkt elevar sitt arbeid med mønsteroppgåver og delt løysingsstrategiane deira inn i to hovudkategoriar, presentert i det følgjande.

Den første kategorien inneheld strategiar som handlar om å prøve og feile (Radford, 2010, s. 41). Elevane foreslår gjerne reglar som dei trur kan passe til eit mønster og prøver denne på nokre få delar av mønsteret for å sjå om denne passar. Desse reglane elevane potensielt kjem fram til er eigentleg berre hypotesar då dei ikkje nødvendigvis har testa dei på eit stort tal situasjonar. Her skapar elevane ein induksjon og ikkje ei generalisering. Radford kallar det ein naiv induksjon for å skilje prosessen frå meir sofistikerte induksjonsprosessar (2010, s. 41). I ein slik prosess har ikkje elevane nødvendigvis generalisert. Elevar kan til og med ha kome fram til uttrykk som inkluderer bokstavar, til dømes 2n +1, utan at det har gått føre seg ei generalisering. Dette fordi dei ikkje nødvendigvis har analysert eit ubestemt objekt i denne prosessen, som i følgje Radford er karakteristisk for algebraisk generalisering. Med uttrykkjet 2n+1 som utgangspunkt ville dette innebera å analysere variabelen *n*. Ein konsekvens av dette er at lærarar må vere observante på kva som er algebraisk tenking og ikkje når elevar arbeider med mønster og bruke pedagogiske strategiar for å leie elevane inn på algebraisk tenking (Radford, 2010, s. 40). Slike induktive prosedyrar vil nemleg ikkje fungere når oppgåvene elevane møter blir meir avanserte. Prosedyrane er dermed ikkje berekraftige. Elevane har ikkje identifisert ein struktur i figuren, og dei grunngir ikkje generaliseringa si. Ei eventuell generalisering blir difor eigentleg berre ei gissing.

I den andre kategorien av løysingsstrategiar for mønsteroppgåver finn ein strategiar som inkluderer at elevar leiter etter noko som er felles i dei gitte figurane og dermed generaliserer ved å seie at det som er felles òg vil vere felles for dei komande figurane. Dette er i tråd med Carraher et al. (2008) og Blanton (2008) sine syn på generalisering. I samband med denne kategorien viser Radford (2010) til eit døme henta frå elevar på 8. trinn sitt arbeid med følgjande mønster:



Figur 2 - Mønster gitt til elevar på 8. trinn med mål om at dei skal kunne seie noko generelt om det (modifisert etter Radford, 2010, s. 41)

Elevane fekk her i oppgåve å finne ut kva talet på sirklar i figur 2.10 og 2.100 (sjå figur 2) vil vere. Strategiane som fell inn i denne andre kategorien av løysingsstrategiar handla om at elevane såg etter noko felles for alle figurane i mønsteret. Ein elev sa til dømes at den øvste linja alltid har ein meir sirkel enn talet på figuren, og at den nedste linja alltid har to fleire sirklar enn talet på figuren. Eleven gav formelen $(n+1)+(n+2)=$ for å finne talet på sirklar.

Radford (2010) deler opp den andre kategorien av løysingsstrategiar i to underkategoriar: ikkje-algebraiske og algebraiske generaliseringar. Sjølv om elevane har klart å generalisere i oppgåveløysing har dei nemleg ikkje nødvendigvis gjort ei algebraisk generalisering. I følgje Radford (2010) vert dette skiljet ofte vert oversett. Til tross for at elevar klarer å gjennomføre det som kan sjåast på som eit viktig trekk ved generalisering av figurmønster, må dei nemleg kunne uttrykkje dette generelle algebraisk (Kieran, 1989, s. 165, referert i Radford, 2010, s. 42). Basert på blant anna dette foreslår Radford følgjande definisjon om algebraisk generalisering i mønsterarbeid:

> Generalizing a pattern algebraically rests on the capability of grasping a commonality noticed on some elements of a sequence S, being aware that this commonality applies to all the terms of S and being able to use it to provide a direct expression of whatever term of S. (2010, s. 42)

Med andre ord handlar algebraisk generalisering av mønster om å legge merke til fellestrekk i éin del av eit gitt figurmønster og deretter generalisere dette til å gjelde heile mønsteret. Det er det å legge merke til ein felles eigenskap, «grasping a commonality», for alle delar av figurmønsteret som manglar i naiv induksjon, og dermed gjer at dette ikkje kvalifiserer til å kunne kallast generalisering. For å tydeleggjere kva som skil ikkje-algebraiske og algebraiske generaliseringar tek Radford (2010) utgangspunkt i følgjande prosessar som kan inngå i generalisering av mønster:

1. Å legge merke til noko felles i spesifikke delar
2. Å sjå at det som er felles passar kva som helst del i mønsteret

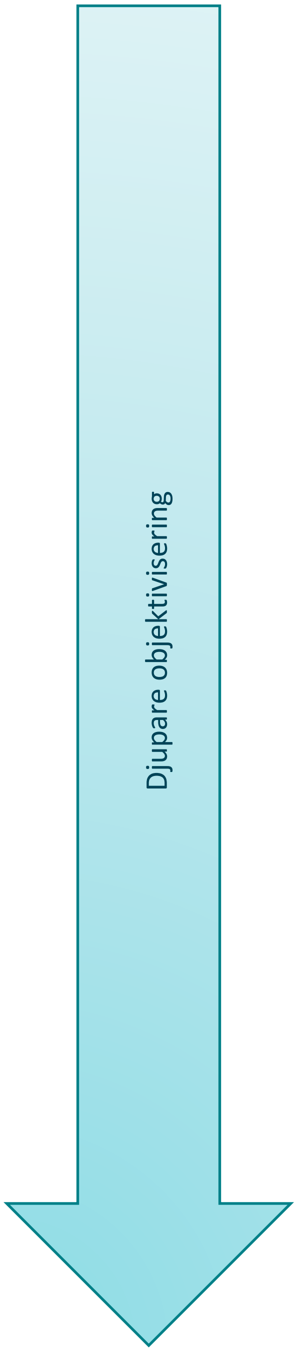
Etter dette kjem nr 3. som må finnast for å kunne kalle det algebraiske generalisering av mønster:

3. Generaliseringa i punkt 2 må gjerast om til ein regel som passar kva som helst del i mønsteret

Ut i frå dette definerer Radford ikkje-algebraisk generalisering som ei type generalisering utan prosessen i punkt 3. Dette kallar han ei aritmetisk generalisering. I ei aritmetisk generalisering av mønster har elevane med andre ord ikkje formulert ein regel som kan passe kva som helst del av mønsteret dei har fått. Dei har «berre» lagt merke til noko som er felles i spesifikke delar og at dette kan passe for kva som helst del i dette.

3.4 Radford sine generaliseringsnivå

For å analysere elevar sitt arbeid med generaliseringsoppgåvene i studien har eg tatt utgangspunkt i Radford (2003; 2010) si nivåinndeling av generaliseringar. Desse har eg framstilt her (tabell 1):

Aritmetisk generalisering *(aritmetisk tenking)*	
- Legge merke til noko felles for delar av eit mønster, men utan å vere i stand til å bruke denne informasjonen for å skape eit eksplisitt uttrykk for kva for helst del av mønsteret - Sjå at det som er felles passar kva som helst del i mønsteret - Døme: «det trengs fire sugerøyr for å lage kvar firkant i mønsteret»	
Faktuell generalisering *(algebraisk tenking kjem til syne – «råmateriale»)*	
- Utarbeide ein måte å rekne ut variablar i avgjorte tilfelle og formulere ein regel basert på dette - Den ordna posisjonen til figurane i mønsteret er viktig. Ein er avhengig av den førre figuren eller andre delar av figuren i gitte posisjonar for å kunne seie noko om ein gitt del - Ubestemthet (altså variable storleikar som til dømes nummeret på figuren og talet brikker/punkt eller liknande som figurane er sett saman av) er ikkje uttalt eller namngitt, men er implisitt; denne kan uttrykkast gjennom handlingar (gestar, peiking, ord eller rytme) - Døme: «Det vert alltid lagt til éin sånn på den neste figuren» i kombinasjon med peiking	
Kontekstuell generalisering *(algebraisk tenking)*	
- Kontekstuelle referansar til variablar i mønsteret (til dømes ei blanding av matematiske symbol og termar i det naturlege språket). - Gir ei forklaring på korleis ein kan seie noko om kva som helst figur, men er framleis avhengig av bestemte sekvensar av figuren for dette - Abstraksjon frå spesifikke figurar, altså namngir ein ubestemt del - Ubestemthet (variable storleikar) er uttrykt ved hjelp av språket - Typiske ord og fraser: «figuren», «den neste figuren», «kvar figur», «rada på toppen»	
Symbolsk generalisering *(algebraisk tenking)*	
- Det generelle er uttrykka ved hjelp av det alfa-numeriske og semiotiske systemet i algebra - Ein klarar å gjere om «den første figuren» til «figur n» og nytte «n» istadenfor «figuren».	

Tabell 1 - Generalisering av mønster som objektivisering og kjenneteikn på generaliseringsnivå. Tabell modifisert og fritt oversatt etter Wilkie (2020, s. 321), supplert med fleire kjenneteikn frå Radford (2003; 2010)

I utarbeidinga av denne nivåinndelinga såg Radford først på kva som kjenneteiknar algebraisk tenking (2010, s. 39). Her peiker han på tre element som er avhengige av kvarandre. Det første elementet handlar om at det i tankegangen må finnast «ubestemte» algebraiske objekt som til dømes «ein ukjend», ein variabel eller ein parameter. Dette er viktig for å kunne drive med substitusjon av «den ukjende» alt etter kva kontekst ein har. Det andre elementet som må finne stad i algebraisk tenking handlar om at ein må arbeide analytisk med desse «ukjende», variablane og/eller parameterane, dei «ubestemte» objekta. Ein må altså vurdere korleis dei ulike objekta påverkar heile rekneprosessen. Det tredje elementet som må finne stad i ei algebraisk tenking handlar om ein særeigen bruk av symbol for å skildre dei «ubestemte» objekta. Dette er til dømes bokstavar, men desse symbola kan også vere andre teikn. I utarbeidinga av dei ulike nivåa tek han vidare utgangspunkt i forskjellen mellom *induksjon* og *generalisering*, og algebraiske og ikkje-algebraiske generaliseringar. Algebraiske generaliseringar kan igjen delast inn i ulike nivå, og Radford (2010) viser altså karakteristikkar som kjenneteiknar desse i på ulike nivå (tabell 1). For å dele inn algebraiske generaliseringar i ulike nivå har han tatt utgangspunkt i semiotiske verkemiddel for objektivisering, som eg utdjupar i neste avsnitt.

Å skildre «ubestemte» objekt og dermed synleggjere noko for omgjevnadane kan kallast å *objektivisere* (Gundersen, 2020; Radford, 2003, s. 40). Objektivisering er i følgje Radford vesentleg for å kunne uttrykkje generaliseringar (2013), og for å kunne objektivisere er det viktig med semiotiske representasjonar (Radford, 2003, s. 40). Semiotiske representasjonar er representasjonar som er laga ved hjelp av teikn og reglar (s. 40). Dette kan innebere bruk av til dømes ord, gestar, teikningar, konkretar, matematiske symbol og eit naturleg språk. Radford (2010) eksemplifiserer med kinesiske matematikarar som nytta farga «tokens» for å vise til ulike variablar (s. 39). Når teikn og reglar vert nytta for å objektivisere , altså skildre ubestemte objekt, kallar Radford desse for «semiotic means of objectification» (semiotiske middel for objektivisering). Dette er altså ulike gjenstandar, språklege verkemiddel og teikn som ein nyttar for å skape medvit kring noko (s. 41), til dømes når elevar vil skape medvit kring viktige delar av ei forklaring eller ein framgangsmåte på vegen mot å løyse ei oppgåve. Radford (2003) understreker at desse semiotiske verktøya for objektivisering har ein sosial natur, og med dette meiner han at språket i seg sjølv er ein sosial praksis. Dei semiotiske verktøya har altså røter i system som er forma av ulike kulturar (s. 43). Det er altså desse, «the semiotic means of objectification", han har analysert for vidare å dele inn generaliseringane til elevane i ulike nivå (Radford, 2003).

Med grunnlag i kjenneteikn på algebraisk tenking og analyse av semiotiske verktøy, identifiserte Radford tre ulike typar algebraisk generalisering: Faktuell generalisering (factual generalizations), kontekstuell generalisering (contextual generalizations) og symbolsk generalisering (symbolic generalizations). Desse, samt det han omtalar som ikkje-algebraisk generaliseringsnivå, er presentert i tabell 1 ved hjelp av kjenneteikn og døme. Tabellen er laga med utgangspunkt i teori frå Radford (2003; 2010) og Wilkie (2020). Denne utgjer eitt av dei teoretiske verktøya eg nyttar i analyseprosessen min. Eg har valt å inkludere det ikkje-algebraiske nivået for å kunne finne potensielle språklege hinder elevar møter på i arbeid med å nå dei algebraiske generaliseringsnivåa. Eg har over vist at naiv induksjon ikkje kvalifiserer til å kunne kallast generaliseringprosessar og desse er difor ikkje med i tabellen min.

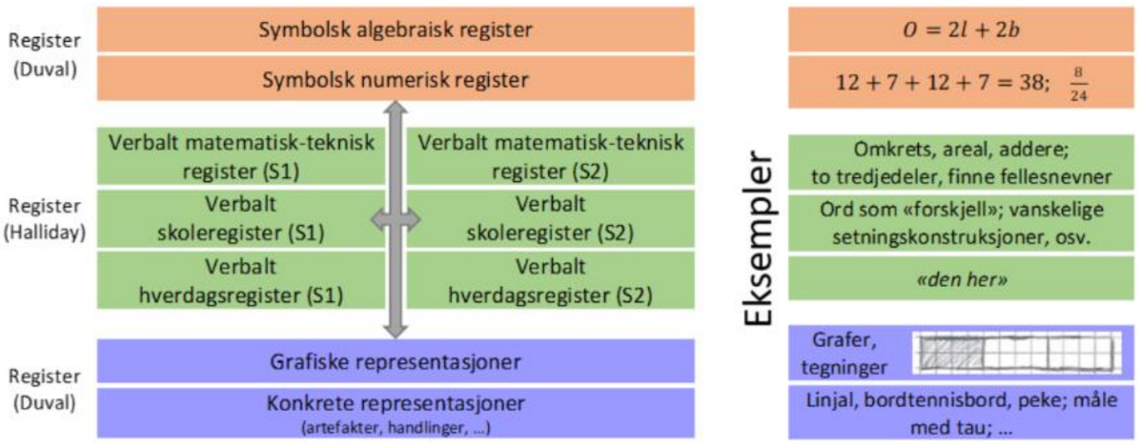
I følgje Radford (2010) er det eit mål at elevar når så høgt mål som mogleg. Dette er viktig fordi dei då kan oppnå eit djupare medvit kring generalisering. Han understrekar at poenget er ikkje å sei det same på forskjellige måtar.

Om språket si rolle i matematikk-klasserommet

3.5 Prediger & Wessel sin modell for relasjonar og veksling mellom register

For å utvikle gode matematiske ferdigheiter er det i følgje Prediger & Wessel (2013) viktig å ha *proficiency in the language of instruction*, altså gode ferdigheiter i språket det vert undervist på (s. 435). Ein konsekvens av dette er at det er viktig å leggje til rette for at elevar får utvikle gode språkferdigheiter i alle emne i matematikk (Prediger & Wessel, 2013, s. 345). Dette kan gjerast ved å blant anna legge til rette for at elevar har ferdigheiter nok til å kunne veksle mellom ulike språkregister. Ei slik veksling kan nemleg vere føremålstenleg for å støtte deira matematiske forståing (Prediger & Wessel, 2011). Basert på det siste har Prediger & Wessel (2011) utvikla ein modell som syner ulike uttrykksmåtar representert i fleire lag (figur 3), som er relevante for matematikkundervisning.

I utarbeidinga av modellen deira viser dei blant anna til Halliday (1978) som knyter moglegheitene for å skape meining og forståing til moglegheitene som finst i språklege system. Uttrykksmåtane er munnleg og skriftleg språk, grafiske representasjonar, bruk av matematiske symbol og bruk av konkretar. For at elevar skal lukkast i ei matematikkundervisning som legg vekt på argumentasjon og relasjonell forståing må det systematisk skapast stunder i undervisninga gjennom oppgåver og samtalar som legg til rette for at elevar får relatere dei ulike registera til kvarandre (Prediger & Wessel, 2013).



Figur 3 – Relasjonar mellom ulike register og representasjonar frå Prediger & Wessel (2013). Av S. Lekaus & M. Lossius, 2022, Tangenten, 3, s. 12. Copyright 2022 ved Fagbokforlaget.

I mi oppgåve fokuserer eg på elevar sitt språk i diskusjonar, og vidare vil eg difor sjå nærare på den verbale delen av Prediger & Wessel (2011) sin modell (den grøne delen av Figur 3). Denne deler dei inn i tre språkregister: Kvardagsregisteret, skuleregisteret og det tekniske registeret. I denne verbale delen av modellen skil dei òg mellom verbale register i eit førstespråk (L1) og verbale register innanfor undervisningsspråk (L2). Dette er fordi dei ser eit skilje mellom forståinga til elevar som har undervisningsspråket som sitt førstespråk og dei som ikkje har det. Grunna forskingsspørsmålet mitt er ikkje denne skilnaden vektlagt eller vidare utdjupa i denne oppgåva. Det vidare skildrar kvar av dei tre verbale språkregistra. Det er viktig å vere klar over at desse ikkje er strengt skilde frå kvarandre (Prediger et al., 2016).

Kvardagsregisteret

Prediger et al. (2016, s. 207) skildrar kvardagsspråket som kontekstavhengig. Dei meiner det er lite eksplisitt og ofte brukt når ein snakkar andlet til andlet om matematikk. Elevar koplar ofte eigne erfaringar frå livet deira utfor matematikk-klasserommet til arbeid i matematikkfaget, og desse vil oftast uttrykkast ved hjelp av eit kvardagsregister (Prediger et al., 2016, s. 202). Dette gjer at registeret kan omtalast som svært konkret og levande (s. 207). Elevar vil ofte trenge eit kvardagsregister for å kunne ta tak i underliggjande matematiske forhald som dei prøver å forstå (Prediger et al., 2016, s. 194). Fraser som «den her» er typisk i kvardagsregisteret. Døme på bruk av eit verbalt kvardagsregister kan vidare sjåast i Tabell 2.

Skuleregisteret

Samanlikna med kvardagsregisteret er skuleregisteret kjenneteikna som meir uavhengig av kontekst. Det er også kjenneteikna av fleire eksplisitte formuleringar. Som kvardagsregisteret kan skuleregisteret innehalde personlege erfaringar, men det er færre av desse i skuleregisteret

(Prediger et al., 2016, s. 207). Eit anna kjenneteikn er relativt vanskelege setningskonstruksjonar, med bruk av til dømes ord som «viss» og «dermed». Prediger & Wessel (2013) hevdar at elevar som ikkje meistrar å bruke skuleregisteret vil ha problem med å delta i undervisning som legg vekt på argumentasjon og relasjonell forståing. Problem knytt til dette kan kome fordi ord og uttrykksmåtar frå skuleregisteret ofte vert nytta for å forklara komplekse tankegangar og resonnement (Prediger & Wessel, 2013).

Eit skuleregister er ikkje knytt til eit avgjort fagområde, og ein finn det gjerne i aviser og bøker. I matematikk-klasserommet kan det ofte sjåast igjen i lærebøker og i læraren sin munnlege tale (Prediger et al., 2016, s. 207). Lekaus & Lossius (2022) trekker fram «skravere», «langs», «overlappe» og «består av» som døme på ord frå skulespråkregisteret som blir brukt for å grunngi tankerekkjer i brøkundervisning med utgangspunkt i brøkmodellar. Fleire døme på bruk av eit verbalt skuleregister kan sjåast i Tabell 2.

Det tekniske registeret

Det tekniske registeret kan likne på skulespråket, men er kjenneteikna som utvetydig og presist. I matematikkfaget vert det nytta når ein skal uttrykkje strukturelle og kvantifiserbare relasjonar, eller når ein skal prøve å skildre matematiske strukturar frå verkelege situasjonar. Matematiske fagord inngår òg i dette registeret (Prediger et al., 2016, s. 207). Ved å bruke overgangar mellom eit teknisk register og eit kvardagsregister kan elevar lettare finne løysingar på matematiske problem (Prediger et al., 2016, s. 200). Fraser som «to tredjedelar» og ord som «kvadratrot» og «divisjon» er typiske frå eit teknisk register. Fleire døme på bruk av eit verbalt teknisk register kan sjåast i Tabell 2.

	Kvardagsregister	**Skuleregister**	**Teknisk register**
Verbal representasjon	I går var eg på eit sal i favorittbutikken min. Salet meinte at eg fekk 90 kroner i avslag på eit par bukser. Sidan eg betalte kontant fekk eg litt meir avslag,	Under eit butikksal er prisen på eit par med bukser redusert med 90 kroner. Dersom ein betalte med kontantar fekk ein ytterlegare 3% avslag på buksene.	Dersom den originale verdien er redusert med 90 kr og deretter med 3% vert den nye verdien 690 kr. Kva var originalverdien?

	på 3%. Til saman betalte eg berre 690 kr. Kor mykje var originalprisen?	Dermed er prisen på buksene under salet 690 kr. Kva var originalprisen til buksene på?	

Tabell 2 - Døme på bruk av ulike register etter Prediger & Wessel (2011) si forståing. Modifisert etter Prediger et al. (2016, s. 206)

3.5.1 Språkregistera og didaktiske implikasjonar

Prediger et al. (2016) tenkjer at ei veksling mellom ulike register kan vere med på å betre elevar si matematiske forståing. Ei slik veksling kan til dømes handle om å gå frå eit verbalt teknisk register til eit verbalt kvardagsregister eller å gå frå eit verbalt kvardagsregister til eit grafisk register (sistnemnde ikkje så aktuell i denne studien) (s. 207). Slike overgangar skjer ikkje nødvendigvis naturleg, og det er heller ikkje lett å få elevane til å gjennomføre slike overgangar ved å be dei om det. Det er difor viktig å legge til rette for dette. Dette kan gjerast ved hjelp av aktivitetar eller oppgåver. Desse bør vere basert på noko elevar lett kan relatere til, som til dømes å kjøpe bukser på sal (Prediger et al., 2016, s. 208). Aktivitetane eller oppgåvene bør vidare stimulere til å bruke ulike register gjennom å be elevane gjere konkrete ting. Dette kan til dømes vere å be elevar att-fortelje situasjonar som er gitt til dei ved hjelp av eit teknisk register og svært kortfatta. Elevane skal i då bruke deira føretrekte språk og gi fleire detaljar om situasjonen, og dette kan opne for at dei nyttar eit kvardagsspråk (s. 208). Med andre ord må ein som lærar vere medviten på å legge til rette for at elevar får bruke ulike register i matematikkundervisninga, og oppgåvene ein gir bør rettleie elevane i overgangar mellom registera.

3.6 Språk og generalisering

Matematiske forhold og generaliseringar kan bli uttrykte med born sitt naturlege språk eller ved hjelp av symbol (Radford, 2010). Dette kan koplast til Blanton (2008) som viser til døme der born skildrar forhold mellom talet på born i klasserommet deira og det totale talet på hender som «the number of hands doubles» eller «you add two every time». Ho hevdar at slike skildringar er viktige utgangspunkt for å kunne vise korleis storleikar og mengder varierer saman i matematikkfaget. El Mouhayar (2020) peiker på viktigheita av adverb i generaliseringsprosessar. Han hevdar adverba er essensielle lingvistiske mekanismar for å kunne uttrykkje generaliseringar. Denne ordklassen er nærare sagt essensiell for å kunne vise eigenskapar i uttrykk som gjentar seg. Eit døme på eit slikt adverb er "alltid" (El Mouhayar, 2020).

4.0 Metode

I dette kapittelet presenterer eg forskingsmetoden i studien min. Eg har valt å hente inspirasjon frå kvalitativ casestudie og vil byrje dette kapittelet med å gå i djupna på kva som kjenneteiknar ein slik forskingsdesign. Eg viser her kvifor eg meiner ein casestudie-inspirert design var passande for min studie. Deretter presenterer eg casane eg undersøkjer og grunngir valet av desse, før eg gjer greie for videoopptak som er studien sitt verktøy for datainnsamling. Vidare skildrar eg gjennomføringa av datainnsamlinga og metoden eg nytta for å analysere datamaterialet. Avslutningsvis drøftar eg studien sin kvalitet og presenterer etiske vurderingar eg har gjort i forskingsprosessen.

4.1 Forskingsspørsmåla sine konsekvensar for val av metodar og datainnsamling

Målet med studien er å svare på følgjande forskingsspørsmål:

1) *Korleis brukar elevar ulike språkregister når dei diskuterer og arbeider med generalisering av figurmønster i matematikkfaget?*

2) *Korleis kan språk verke som ein ressurs og/eller eit hinder i elevar sitt arbeid med generalisering av mønster?*

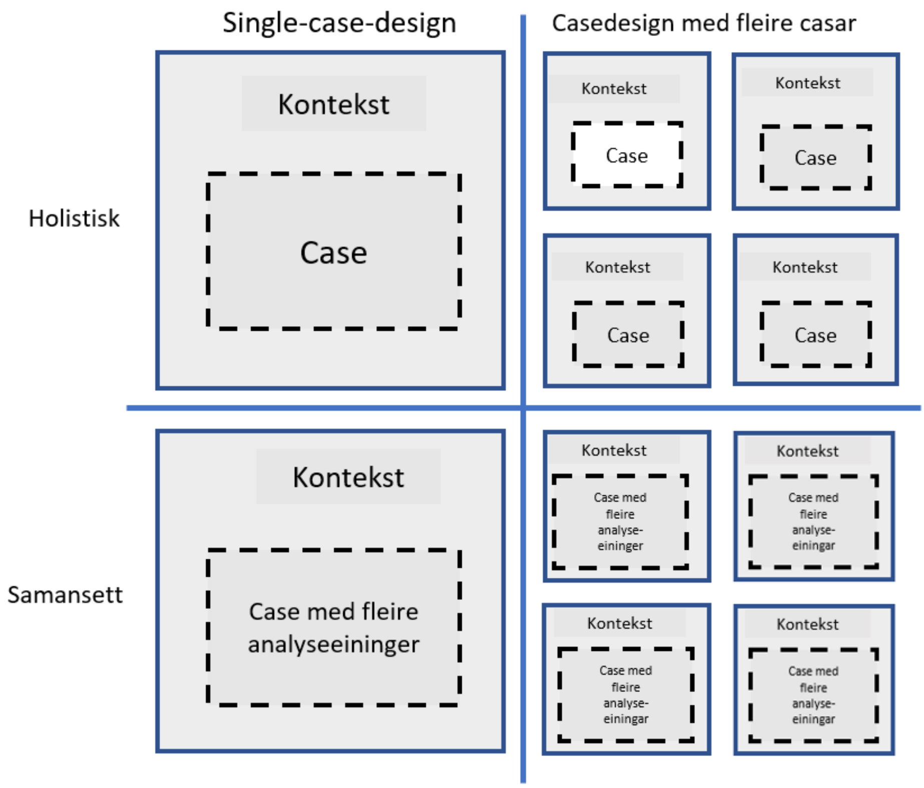
For å kunne svare på det første forskingsspørsmålet mitt var det hensiktsmessig å observere og dokumentere elevdiskusjonar knytt til arbeid med generaliseringsoppgåver i matematikkfaget. Deretter måtte diskusjonen analyserast med forankring i relevant teori og teoretisk rammeverk. Dette ville òg vere ein hensiktsmessig framgangsmåte for å svare på det andre forskingsspørsmålet, og eg valde difor same tilnærming der. Dette gjorde at idéar frå forskingstilnærminga *kvalitativ casestudie* ville kunne skape ein design som eigna seg i min studie. Studien har vidare ei hermeneutisk tilnærming til vitskapsteori. Hermeneutikken har stått for kvalitative forståings- og tolkingssystem, og forskarrolla i denne er open, subjektiv og engasjert (Patel & Davidson, 1995, s. 25). Forskaren er vidare del av den same røynda som vert studert (Patel & Davidson, 1995), og ifølgje Nyeng (2017) heiter det i hermeneutikken at me som menneske ikkje møter noko heilt forutsetningslaust. Dette pregar min studie då eg har lagt vekt på fortolkinga mi av transkripsjonar av elevdiskusjonar ut i frå min teoretiske ståstad.

4.1.1 Kvalitativ forsking og casestudie

Studien undersøkjer korleis elevar brukar språk og språket si rolle i elevar sitt arbeid med generalisering i matematikk. For å gjere dette valde eg å bruke ein kvalitativ metode. Dette fordi kvalitative metodar kan bidra til å skape kunnskap ved hjelp av å undersøkje felt, menneske eller fenomen der ein ikkje har klare forventingar om kva ein kjem ein kjem til å observere (Høgheim, 2020, s. 129). Metoden var høveleg då eg ynskja å undersøkje korleis elevar diskuterte matematiske oppgåver. Kva elevar vil seie eller korleis dei vil nytte språket sitt i diskusjonar er ikkje mogleg å forutsjå, og eg har dermed ikkje har klåre meiningar om kva eg vil observere. Vidare er metodane brukt i kvalitativ forsking fleksible og gir data som er djuptgåande og detaljerte (Høgheim, 2020, s. 129). Eg ville samle inn rik og detaljert informasjon for å fange det eg ikkje hadde klåre rammer for å forstå før eg undersøkte det, og ei kvalitativ forsking var difor hensiktsmessig å gjennomføre for å svare på mine forskingsspørsmål.

Vidare har eg med studien min ei forklarande hensikt då eg ved hjelp av forskingsspørsmåla søkjer å forklare korleis elevar brukar språket og korleis dette kan verke som ein ressurs eller eit hinder. I forsking med slike mål kan forskaren velje å analysere ein case for å nå dette målet (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). Ein case er i denne samanheng noko som er avgrensa i tid og rom (stad) (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 63), og kan definerast som ei analyseeining som er gjenstand for ei intensiv undersøking (Ringdal, 2018, s. 172). Som nemnt i avsnittet over ville eg dokumentere og analysere elevar som diskuterer matematikkoppgåver for å svare på studien sine forskingsspørsmål. Analyseeiningane mine blei dermed elevgrupper som diskuterer matematiske oppgåver. Basert på Postholm & Jacobsen (2018) og Ringdal (2018) kan desse analyseeiningane kallast casar, men «intensiv undersøking», slik Ringdal nyttar i si forklaring, er eit relativt omgrep. Det er difor eg har valt å seie at eg er inspirert av case-studiar. For å kunne gjere ei enno meir intensiv undersøking av mine casar hadde det nemleg vore nyttig å ha fleire datakjelder knytt til kvar case og samle data frå desse over lenger tid. Med dette sagt omtalar eg likevel analyseeiningane mine for «casar». I mitt tilfelle er kvar case sett saman av éi elevgruppe på tre elevar som diskuterer matematiske oppgåver. For å best mogleg kunne svare på forskingsspørsmåla mine valde eg å analysere diskusjonar frå tre casar. Ved hjelp av desse vil eg sette søkjelys på og få ei djupare forståing av eit fenomen, her språk i matematikkfaget, slik det førekjem i den verkelege verda. Dette eignar casestudiar seg godt til (Skogen, 2018).

Det finst fleire typar casestudiar. Min studie er inspirert av det Yin (2018) kallar case-design med fleire casar og med ei holistisk tilnærming. Dette er éin av fire hovudtypar casestudiar (sjå figur 4 for dei resterande).



Figur 4 - Ulike typar design for case-studiar, modifisert og fritt omsett etter Yin (2018, s. 48)

Ved å bruke case-design med fleire casar kan ein bidra til å utvikle kunnskap og teori ved å stadfeste, utfordre eller utvide tidlegare teoriar som studien baserer seg på. Ein studie av denne typen kan òg bidra til ei endring av fokus i framtidige studiar på eit heilt felt (Yin, 2018, s. 50). Fordi studien min byggjer på tidlegare forsking og teori som hevdar språk kan verke som ein ressurs passa denne karakteristikken meg.

Vidare kan ein ha casestudiar (med fleire casar) av typen holistisk eller samansett case-studie (Yin, 2018, s. 51- 52). Ein samansett case-studie er kjenneteikna av at ein analyserer fleire nivå innad i dei valde casane, noko som kan styrke studien sin kvalitet (Yin, 2018, s. 43). Det er likevel ikkje alltid at ein finn logiske nivå av analyseeiningar i ein case, og då kan ein bruke ein holistisk case-design. For meg var dette høveleg då eg ikkje såg ei logisk nivåinndeling av analyseeiningar i mine casar for mine forskingsspørsmål. Ein holistisk design var også høveleg for meg grunna omfanget til ei masteroppgåve. I eit masterarbeid kunne det, etter mi meining, bli vanskeleg å gjere ei grundig analyse av eit datamateriale som er relativt stort. Fordi eg kunne svare på forskingsspørsmålet mitt ved hjelp av ein holistisk case-design valde eg difor denne tilnærminga. Det er svakheitar knytt til denne designen og desse kjem eg tilbake til seinare i dette kapittelet.

Casestudiar vil i utgangspunktet presentere det Huberman (1987, ref. i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64) kallar «lokal kunnskap». Dette vil seie at kunnskapen kan opplevast som rett og relevant for personar i den aktuelle konteksten. I mitt tilfelle vil kunnskapen kunne vere interessant for til dømes lærarane som arbeider med elevgruppene som utgjer mine casar. Eg ynskjer at min studie skal vere av interesse også for andre, til dømes andre forskarar på forskingsfeltet mitt, og det er difor svært viktig å tenke igjennom og rapportere kva som kjenneteiknar akkurat mine casar (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 64). I ein case-studie er kontekst for datainnsamling altså heilt sentral (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 63), og det følgjande er difor ei skildring av desse.

4.1.2 Kontekst for datainnsamling

I studien min har det vore to rundar med datainnsamling. I første datainnsamling (juni, 2022) vart tre grupper på tre elevar filma, og i andre datainnsamling (desember, 2022) vart to grupper på tre elevar filma. Etter å ha lese gjennom transkripsjonar og analysert datamaterialet frå den første datainnsamlinga avgjorde eg at berre éi av desse gruppene sin diskusjon skulle utgjere delar av datamaterialet for studien min. Dette var fordi dei to andre gruppene ikkje løyste oppgåvene ved hjelp av algebraisk tenking og generalisering så mykje som eg ynskja. Oppgåvene fungerte altså ikkje slik me ynskja på alle punkt. Elevane i den første datainnsamlinga arbeidde også med fleire oppgåvesett enn det som er presentert i denne studien. Dette vart også filma av meg og ein nyleg utdanna lærar, og deretter transkribert. I utgangspunktet planla eg å svare på studien sine forskingsspørsmål med datamateriale frå elevane sitt arbeid med alle oppgåvene dei fekk utdelt i juni, men såg behov for meir datamateriale å analysere for å kunne betre validiteten på forskinga mi. Difor gjennomførte eg den andre datainnsamlinga. I denne tok eg med meg berre eit av oppgåvesetta frå førre datainnsamling. Dette fordi oppgåvesettet stimulerte til algebraisk tenking hjå elevane i den første data-innsamlinga. Oppgåvesettet vart likevel noko revidert for å støtte elevane betre i den algebraiske tenkinga. Dei to versjonane av oppgåvesettet elevane arbeidde med er presenterte i neste delkapittel. Frå den andre datainnsamlinga vart begge gruppene sine diskusjonar inkludert i datamaterialet mitt. Som vist over utgjer desse tre gruppediskusjonane kvar sin case, og eg greier ut om desse i det følgjande.

Den første casen (filma i første datainnsamlingsrunde) er ei elevgruppe sett saman av tre elevar på sjette trinn ved ein norsk skule som diskuterer matematikkoppgåver (vedlegg 1). Dei tre går i same klasse og kjenner kvarandre difor relativt godt. Alle tre snakkar flytande norsk, men norsk er ikkje morsmålet deira. Dei har alle ulike morsmål. Elevane fekk til vanleg matematikkundervisning på norsk, og det kom fram under datainnsamlinga at to av elevane nesten hadde gløymd korleis dei skulle telje på morsmålet deira. Dette ser eg på som vesentleg informasjon for studien då det kan indikere kor vane dei er med å diskutere matematikk på norsk. To av elevane sa tidleg i datainnsamlingsprosessen at matematikk var noko dei synes var keisamt og vanskeleg, og den tredje skildra matematikk som «eit ok fag». Me filma dei tre elevane i ei matematikkøkt frå om lag klokka 08.30 til klokka 10.00. Matematikk var noko som stod på timeplanen til klassen deira også til vanleg dette tidspunktet, men i tidsrommet datainnsamlinga gjekk føre seg var det ein vikar som leia resten av klassen. Dei tre elevane i casen var informerte om dette, og dei uttrykte noko nysgjerrigheit kring kva resten av klassen gjorde på. Dei to elevane som synes matematikk var keisamt såg også ut til å bli demotiverte for matematikkoppgåveløysing av dette.

Den andre casen (filma i andre datainnsamlingsrunde), er ei elevgruppe sett saman av tre elevar på sjuande trinn ved ein norsk skule som diskuterer matematikkoppgåver (vedlegg 2). Dei tre går ikkje i same klasse, men dei arbeider ofte på kryss av klassar på trinnet og kunne informere om at dei har samarbeidd før. Alle tre har norsk som morsmål, og dei er ikkje fleirspråklege. Det kom fram under datainnsamlinga at alle tre synest matematikk er eit kjekt fag som dei sjølv meinar dei meistrar godt. Eg var åleine som datainnsamlar og observatør i denne datainnsamlinga. Filminga gjekk føre seg frå om lag klokka 08.30 til klokka 09.30. I dette tidsrommet skulle elevane eigentleg trekke klassen sin julekalender og gjennomføre rutinar knytt til dette, men dei tre elevane uttrykte at dei var nøgd med å få delta i studien og dermed gå glipp av dette.

Den tredje casen (også filma i andre datainnsamlingsrunde) er ei elevgruppe sett saman av tre elevar på sjuande trinn ved den same skulen som elevane i case to. Elevane i case tre går ikkje i same klasse, men som i gruppa frå case to jobbar dei på kryss på trinnet og har dermed samarbeidd før. Under datainnsamlinga kom det fram at éin av elevane synes matematikk var eit kjekt fag, medan dei to andre omtala det som eit lett, men keisamt fag. Eg var åleine som datainnsamlar og observatør under denne datainnsamlinga, og filminga skjedde same dag som filminga av case to, frå klokka 09.30-10.15. I dette tidsrommet skulle elevane hatt litt matematikkundervisning og friminutt, men dei verka samde om at det var greitt og spanande å bidra til forskingsprosjektet mitt dette tidsrommet.

4.1.3 Val av informantar

Fordi masterarbeidet mitt er del av eit større prosjekt var ikkje eg med på å avgjere kva for skule elevane i den første casen kom frå, kva for aldersgruppe dei var i eller kor i landet dei kom frå. Eg vil likevel inkludere informasjon om utvalet i mi oppgåve då eg ser på dette som vesentleg for at den som les oppgåva mi lettare kan vurdere mine funn.

Det overordna prosjektet undersøkjer blant anna fleirspråkleg matematikkundervisning, og det var difor viktig å innhente datamateriale på ein skule med relativt mange fleirspråklege elevar. Med dette som eit kriterium vart det gjort eit makeleg utval av informantar, altså eit utval basert på (enkel) tilgjengelegheit til informantar (Tjora, 2017, s. 255). Fordi elevane i den første datainnsamlinga gjekk på sjette trinn ynskja eg at informantane i den andre og tredje casen var om lag jamgamle med dette. Eg tok difor kontakt med ein barneskule for å spørje om eg kunne kome å filme to grupper på tre elevar frå sjette eller sjuande trinn, og dette var i orden. Val av skule var også her makeleg.

4.1.4 Verktøy for datainnsamling – videoopptak

For å dokumentere elevane sine diskusjonar vart videoopptak brukt. Fordi eg i hovudsak vil analysere elevar sine diskusjonar kunne det vore hensiktsmessig å nytte lydopptakar, men fordi gestar og bruk av konkretar potensielt inngår i elevane sine uttrykk såg eg på video-opptak som eit betre alternativ. Å bruke videoopptak er hensiktsmessig dersom forskaren ynskjer å fange opp både verbale og nonverbale uttrykk (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131). Videoopptak gjer det òg mogleg for forskaren å oppleve situasjonar på nytt og på nytt, og dermed kunne fortsette å observere i analysen (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 131). Dette er nyttig for meg då eg betre kan identifisere samspelet og kommunikasjonen mellom elevar som kan påverkast av kroppsspråk og bruk av konkretar, enn dersom eg til dømes skulle notert slike meiningsberande element (Valle, 2018) under sjølve datainnsamlinga.

Transkripsjonar av videoopptak utgjer i hovudsak datamaterialet eg analyserer, men fordi eg sjølv var tilstades under filminga av diskusjonane har eg samstundes hatt ei rolle i datainnsamlinga. Eg hadde på førehand drøfta med deltakarar i forskingsprosjektet kva rolla mi skulle vere under datainnsamlinga. Rolla eg inntok er tilnærma lik den Gold (1985, ref. i Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115) kallar deltakar-som-observatør. I denne observatørrolla inntar forskaren ei nokså tydeleg observatørrolle, men kan svare elevar på spørsmål knytt til det faglege opplegget dersom det er trong for det (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 115). I denne rolla har forskaren lita avstand til situasjonen, samstundes som hen har lita deltaking i situasjonen. Observasjon er i utgangspunktet ein passande datainnsamlingsmetode i studien min, då denne kan brukast i naturlege situasjonar slik dei utspelar seg (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 113), men som datainnsamlingsmetode krev denne mykje planlegging og strukturering (Postholm, 2020, s.55). Eg har ikkje tatt utgangspunkt i observasjon som datainnsamlingsmetode, men som deltakar-som-observatør under filminga har eg likevel fått informasjon om rammefaktorar. Dette er vesentleg for datainnsamlinga i ein slik case-design som dette. I følgje Skogen (2018, s. 85) er case-design ofte komplisert og avhengig av forskaren sine kunnskapar, føresetnadar og vurderingsevner. Det har med andre ord noko å seie for korleis eg tolkar transkripsjonane. Å sjølv vere tilstades under video-opptaka var også viktig for studien sin datainnsamlingsmetode då eg betre kan vurdere kva som truleg er meint i ulike utsegner eller situasjonar.

4.2 Gjennomføring av datainnsamlinga

I juni 2022 vart den første datainnsamlinga gjort av meg og ein nyleg utdanna lærar. Læraren var då 25 år og hadde på dette tidspunktet nyleg skrive ei masteroppgåve i matematikkdidaktikk. Ho hadde difor erfaring med og kjennskap til metodar og etikk innan samfunnsvitskapleg og humanistisk forsking. I desember 2022 gjennomførte eg åleine den andre datainnsamlinga. Under begge datainnsamlingane stod kameraet/kameraa for det meste plassert på stativ, og eg kunne dermed lettare observere samhandlinga i klasserommet med eigne augo.

I forkant av datainnsamlinga i juni møtte eg læraren som skulle bidra i datainnsamlinga og ein forskar frå forskingsprosjektet som hadde utvikla oppgåvene me skulle gi elevane. På møtet gjekk me gjennom oppgåvene med mål om å finne ut om me tolka oppgåvetekstane likt og finne ut om det var noko uklårt i dei. Då alle tre har erfaring med å undervise elevar i matematikk prøvde me også å forutseie kva for utfordringar som kunne oppstå for elevane under datainnsamlinga. I samband med dette diskuterte me om elevane skulle få nytte kalkulator dersom dei spurte om det, og i kva grad eg og den nyutdanna læraren skulle hjelpe elevane i deira arbeid med oppgåvene. Her tok me ei avgjersle om å hjelpe elevane med å lese oppgåvetekstane eller å forklare delar av oppgåvetekstane som eventuelt var uklåre. Dersom dei trong hint for å finne ei løysing skulle me i minst mogleg grad gi dei dette, men rettleiande spørsmål kunne gjevast (deltakar-som-observatør). Kalkulatorbruk ville vere greit då me i utgangspunktet ikkje ville undersøkje korleis dei gjorde utrekningar, men heller var interesserte i deira idéar, løysingsforslag og strategiar i arbeidet med oppgåvene. I første datainnsamling hadde elevane tilgong til unifix-kubar. I den andre datainnsamlinga var desse utelatt fordi dei i hovudsak var meint for oppgåvene i første datainnsamling som eg ikkje tok med meg vidare.

Under begge datainnsamlingane gjekk filminga føre seg på eit grupperom med elevane sitjande samla rundt eitt bord. Alle dei tre elevane på kvar gruppe var i biletet under heile datainnsamlinga, og det var plassert ein trådlaus mikrofon midt på bordet. Det første eg og den nyutdanna læraren gjorde då me traff elevane i den første casen var å informere og forsikre dei om at videoopptaka berre skulla nyttast og sjåast av nokre få forskarar. Deretter fortalte me elevane at dei ville få utdelt oppgåveark med plass til kladding, men at me ville at dei skulle løyse oppgåvene munnleg. Under arbeidet med oppgåvene var eg og læraren (som hjalp med filming, ikkje deira) tilstades og synlege heile tida. Den same informasjonen vart gitt til elevane som vart filma i desember.

4.3 Oppgåvene elevane arbeidde med

I begge datainnsamlingene arbeidde elevane med eit oppgåvesett knytt til det klassiske bord-og-stol-problemet (Carraher et al., 2008). Felles for begge versjonane av oppgåvesetta er at dei er i tråd med pensumet for 6. trinn i matematikk, har tre oppgåver og at dei begge søkjer å stimulere til algebraisk tenking og generalisering. Det var deltakarar frå prosjektet som utarbeidde den første utgåva av oppgåva og som reviderte denne før den andre datainnsamlinga. Eg var sjølv med på desse prosessane. I val av oppgåvetype var det viktig for oss at oppgåvene kunne bidra til å undersøkje relevante aspekt ved elevar si algebraiske tenking. Med oppgåvene søkte me først å legge til rette for at elevane skulle kunne gjennomføre ei aritmetisk undersøking. Ei slik undersøking vil i følgje Radford (2010, s. 46) ofte vere å fortsette eit mønster på basis av gitt informasjon i tillegg til å svare på spørsmål om spesifikke figurar. Dette kan til dømes vere «kor mange brikkar vil den 20. figuren i mønsteret ha?» eller «korleis vil figur nr. 100 sjå ut?». Eg vil i det følgjande presentere den første utgåva av oppgåvesettet før eg viser kva for endringar som er gjort i den andre versjonen.

4.3.1 Versjon 1 av oppgåvesettet

I versjon 1 av oppgåvesettet får elevane høve til å gjennomføre ei aritmetisk undersøking i oppgåve 1 (vedlegg 1). Her er oppgåva å diskutere kor mange bord og stolar dei med sin familie må ha dersom det skal vere åtte gjester. For å hjelpe dei på vegen mot eit svar ber oppgåva elevane teikne eit bilete av korleis dei vil setje opp borda og stolane. Dei får òg i oppgåve å diskutere om talet på stolar og bord vil vere likt for alle på gruppa dersom det kjem åtte gjester.

Vidare inviterer oppgåvesettet elevane til å uttrykkje generaliseringar med eit naturleg språk. Dette er eit element Radford (2010, s. 46) inkluderer i sine oppgåver der han ynskjer at elevane skal kome fram til algebraiske generaliseringar. I vårt oppgåvesett får elevane moglegheit til å diskutere og uttrykkje generaliseringar ved hjelp av ord og setningar i oppgåve 2 og 3. Her skal dei bruke ord eller bilete til å forklare ein regel som kan nyttast for å rekne ut tal på stolar og bord for eit kva som helst tal på gjester og diskutere om to gitte reglar stemmer (noko dei ikkje gjer).

Oppgåve 3 var i tillegg utforma for å kunne undersøkje korleis bruk av ulike språk eller fleirspråklegheit potensielt er ressursar i arbeid med matematikk. I denne oppgåva kan ein difor sjå éin regel gitt på norsk og éin regel gitt på mandarin. Begge reglane søkjer å skildre same situasjon. Dette var tenkt å vere gangspunkt for at elevar diskuterer kva for rolle språket kan spele i formidling av matematikk. Elevdiskusjonane som kom fram frå denne deloppgåva har eg valt å ekskludere frå funnkapittelet. Dette fordi eg, grunna mangel på så rikt materiale som eg håpa, gjekk vekk frå eit fokus på fleirspråklegheit til å berre fokusere på det norske språket.

Oppgåvene er òg i tråd med dei fem praksisane Kieran (2004) foreslo for utvikling av algebraisk tenking i større eller mindre grad:

Praksis 1: eit fokus på relasjonar og ikkje berre på utrekning av svar. Elevane må i oppgåva vurdere korleis tala på stolar og bord heng saman.

Praksis 2: eit fokus på operasjonar og deira inversar, og på den tilhøyrande idéen om å gjera noko/endra noko. Oppgåvene legg til rette for at elevar kan drøfte kva for operasjonar dei vil nytte for å utarbeide generelle reglar.

Praksis 3: eit fokus på å både representere og løyse problem i staden for å berre løyse dei. Oppgåvene er basert på representasjon då elevane blir bedt om å bruke ord eller teikningar til å vise eventuelle reglar.

Praksis 4 (eit fokus på tal og bokstavar) og *praksis 5* (eit re-fokus på likskapsteiknet si tyding) var ikkje like synlege i oppgåva. Det manglande fokuset på bokstavar i oppgåvene har med klassetrinna elevane gjekk på å gjere. Elevar på sjette og sjuande trinn er ikkje nødvendigvis kjende med bokstavar som symbol for variablar. Oppgåvene inkluderer likevel variablar, men uttrykkjer desse som «eit kva som helst tal på bord». Praksis 5 er ikkje direkte inkludert i oppgåva, men dersom elevane hadde funne ein regel i deloppgåve 1 kunne oppgåve 2 likevel ført til løysing av ei likning.

4.3.2 Versjon 2 av oppgåvesettet

I evalueringa av elevane sitt arbeid med den første versjonen av oppgåvesettet såg me (deltakarar og forskarar i det overordna forskingsprosjektet) at elevane trong meir støtte i arbeidet med mønster og generalisering. Kort oppsummert kan det seiast at den andre versjonen av oppgåvesettet i større grad vil hjelpe elevane på vegen mot generalisering gjennom fleire del-oppgåver. I min versjon 2 av oppgåvesettet er òg det fleirspråklege aspektet fjerna slik at eg utelukkande kunne fokusere på språkbruken i undervisningsspråket norsk. Det følgjande skildrar endringane meir inngåande.

Den første endringa som vart gjort er å finne i oppgåve 1 (vedlegg 2). I den første versjonen av oppgåva vart elevane her bedne om å finne talet på bord og stolar som trengs dersom det dukkar opp åtte gjester. I den andre versjonen av oppgåva er denne deloppgåva utvida, og elevane får spørsmål om å finne talet på stolar til fleire gitte tal på bord. Dette er for å hjelpe dei på vegen mot å sjå kva som kan vere ein konstant og kva som varierer i ein formel som kan passe konteksten. Det støttar dei òg i å betre sjå korleis to storleikar avhenger av kvarandre (Kieran sin praksis 1: relasjonar). Eit anna tiltak som vart gjort for å hjelpe elevane å sjå kva som er konstant og kva som varierer i mønsteret var å leggje inn ein tabell som elevane kunne nytte for å potensielt sjå ein samanheng mellom talet på bord og talet på stolar. Vidare ber oppgåve 1 elevane om å diskutere kva som blir verande det same og kva som forandrar seg i mønsteret dersom dei legger til fleire bord. Dette er lagt inn som oppgåve for å hjelpe elevane på vegen mot å sjå kva som er felles for ulike delar av mønsteret og å kunne uttrykkje dette med ord, slik Radford (2010) ser på som vesentleg i generaliseringsprosessar.

I oppgåve 1c vert elevane bedne om å bruke algebraiske symbol for å uttrykkje generalitetar. Dette er eit element som kan legge til rette for algebraisk generalisering (Radford, 2010, s. 46). Elevane blir her bedne om å formulere ein regel som seier korleis ein reknar ut talet på stolar dersom ein reknar talet på bord. Det vert her lagt til rette for at dei kan nytte sitt naturlege språk eller algebraiske symbol. Sistnemnde var noko me ikkje forventa at dei gjorde då deltakarar frå prosjektet har erfart at utarbeiding av formlar med algebraiske symbol vanlegvis er vanskeleg for elevar på sjuande trinn. Dette kjem òg fram i forskinga til Radford (2003; 2010).

Som i første versjon av oppgåvesettet får elevane også i versjon 2 gitt ein regel dei skal diskutere om stemmer. Med mål om å i større grad stimulere til algebraisk tenking og generalisering er det lagt til følgjande oppfølgingsspørsmål i versjon 2 etter at dei har diskutert ein gitt regel: «kjem de på enno fleire måtar å forklara ein regel?». Dette for å legge til rette for at elevar kan uttrykkje generaliseringar med eit naturleg språk, som vist er hensiktsmessig for utvikling av algebraisk tenking og generalisering (Radford, 2010, s. 46). Oppfølgingsspørsmålet skal òg opne for fleire måtar å teikne på som kan føre til alternative skildringar av regelen. Ein variant av den sistnemnde oppgåva fekk elevane òg i første versjon, men utan at dei først fekk eit døme på korleis ein regel kan sjå ut.

For å leie elevane mot mønsterarbeid og generalisering blir elevane bedne om å skildre korleis deira regel kan hjelpe til med å finne ut kor mange bord det er trong for dersom ein har 253 gjester. Dette fordi me trur det kan hjelpe elevar å sjå kva som endrar seg i eit mønster dersom ein byrjar med å undersøkje konkrete døme med store tal. Det er lettare og meir hensiktsmessig for å teste ein regel med små tal. Her ynskja me å velje eit stort tal (253) å arbeide med slik at det ville blitt tidkrevjande å jobba med gjentatte addisjonar av 4. Elevane «må» difor finne ein regel dei kan nytte. Carraher et al. (2008, s. 18) anbefaler òg å nytte store tal for å rettleia elevar vekk frå rekursive strategiar, slik me ynskja.

4.4 Metode for analyse av datamateriale

Det finst i hovudsak to ulike retningar for korleis ein kan analysere eit datamateriale innhenta gjennom videoopptak: ei analytiske tilnærming og ei fortolkande tilnærming (Knoblauch, 2008, referert i Valle, 2018, s. 211). Eg har valt ei fortolkande tilnærming då denne tek utgangspunkt i ei oppfatning om at menneske tenkjer på handlingar ut frå meininga med handlinga (fortolking). Videoopptak gjer det som nemnt mogleg å studere kroppsleg samhandling som går føre seg mellom deltakarar i rommet. Elevane nytta også teikning og konkretiseringsmateriale, noko som ikkje ville blitt fanga opp av ein lydopptakar. Fordi eg finn denne samhandlinga og bruken av konkretar interessant, og ikkje ynskja å redusere dette til lingvistiske uttrykk åleine, kan ein fortolkande analyse passa. Denne tilnærminga gjer det mogleg å studere ei slik samhandling (Valle, 2018, s. 212).

For å analysere datamateriale frå begge innsamlingsrundane har eg nytta Radford sine nivå av generaliseringar og Prediger & Wessel sin modell for veksling mellom ulike språkregister. For å identifisere ulike nivå av generalisering har eg tatt utgangspunkt i kjennteikna presentert i *Tabell 1 – Generalisering av mønster som objektivisering og kjenneteikn på generaliseringsnivå* i teoridelen. For å identifisere dei ulike språkeregistera laga eg ein tabell (3) med kjenneteikn og døme på desse som eg tok utgangspunkt i. Denne vert presentert seinare i dette kapittelet.

4.4.1 Analyse av datamateriale frå første datainnsamling

Videoopptaka frå første datainnsamling er transkribert av eit profesjonelt tekstbyrå, og det første eg gjorde var difor å sjå gjennom filmane for å dobbelsjekke at dei samsvara med transkripsjonane eg hadde fått. Sidan eg sjølv filma elevane og dermed har observert kroppsspråk og andre lydar kunne eg potensielt forstå noko annleis enn slik det var formidla i transkripsjonane. På grunn av dette, er det hensiktsmessig å gjennomgå transkripsjonar for å notere eventuelle meiningsberande element for samhandling (Valle, 2018, s. 215). I denne prosessen endra eg ikkje dei tilsendte transkripsjonane, men eg noterte på transkripsjonane stemmebruk, bruk av konkretar, blikk eg observerte på videoopptaket og hendingar. Sistnemnde var at elevane truleg nytta ironi eller berre var leie av oppgåva og ville gå vidare.

Då dette var gjort gjekk eg gjennom transkripsjonane kronologisk i *Microsoft Word* og markerte med blått, gult og grønt ulike ord og fraser som kodar for *teknisk register*, *skuleregister* og *kvardagsregister*. Deretter analyserte eg transkripsjonane i lys av ulike nivå av generalisering. Her gjekk eg òg gjennom transkripsjonane kronologisk og leita etter kjenneteikn på dei ulike nivåa. Dette gjorde eg i *Word* og nytta kommentar-funksjonen for å notere kva for generalisering eg fann.

Då eg hadde gjennomført to rundar med analyse av datamaterialet, den første i lys av modellen for språkregister og den andre i lys av ulike generaliseringsnivå, såg eg på kva for register som kunne identifiserast der elevane generaliserte eller viste algebraisk tenking. Basert på dette bestemte eg meg for å endre på rekkefølgja i analysen av datamaterialet frå andre datainnsamling: her analyserte eg først i lys av generaliseringsnivå for å deretter identifisere ulike register i eventuelle generaliseringar. Dette sparte meg for noko instrumentelt arbeid med den språklege analysen av elevdiskusjonar som var ikkje-faglege og som i liten grad var relevante for forskingsspørsmåla mine.

I framstilling av analyseresultat frå denne datainnsamlinga (kapittel 5) har eg gitt elevane dei fiktive namna Jonas, Synne og Line (gruppe 1)

4.4.2 Analyse av datamateriale frå andre datainnsamling

Videoopptaka frå andre datainnsamling har eg sjølv transkribert. Eg gjekk likevel gjennom transkripsjonane fleire gongar samstundes som eg såg på opptaka for å notere eventuelle meiningsberande element for samhandling. Dette var til dømes nikking, ansiktsuttrykk og peiking. Deretter analyserte eg datamaterialet i lys av nivåa til Radford (2003; 2010), og såg deretter på kva for språkregister elevane nytta då dei arbeidde med generaliseringar. Dette førte til at eg vidare kunne studere korleis elevane diskuterte og nytta språket for å kome fram til dei ulike nivåa. I framstillinga av analyseresultat frå denne datainnsamlinga (kapittel 5) har eg gitt elevane dei fiktive namna Helene, Kristoffer og Oliver (gruppe 1) og Maren, Adine og Snorre (gruppe 2)

4.4.3 Korleis eg tolkar og har nytta Prediger og Wessel sin modell for å kjenne att ulike språkregister

I oppgåva sin teoridel kjem det fram at dei ulike registera Prediger & Wessel (2013) viser i sin modell (figur 3) ikkje har tydelege skilje og difor kan overlappa kvarandre. Eg har difor laga ein tabell (3) der eg viser kjenneteikn som høyrer til dei ulike kategoriane slik eg forstår deira inndeling. Denne nytta eg i analysen for å kunne kategorisere elevane sitt språk i ulike register med utgangspunkt i faste kriterium (kjenneteikn) heile prosessen.

Type register	Kjenneteikn	Døme
Kvardagsregister	- Svært kontekstavhengig - Personleg og prega av eigne erfaringar - Lite formelt - Lite eksplisitt: ei utsegn er lite presis fordi det språklege innhaldet er avhengig av andre uttrykksmåtar, som til dømes peiking og teikningar, for å gi rett meining. - Temporale samanhengar	«I min bursdag plar eg ha fem gjester rundt to bord. Det er plass til nokre folk på endane. Dersom me set borda våre saman heime kan det ikkje sitte så mange folk rundt dei føler eg» «Dersom me til dømes tar desse to borda her og drar dei saman så må du flytte deg frå enden» «Først må du ta et bord, og så må du legge til ett til, og så kan du telle stolene, og så får du svaret» (først gjorde eg […] deretter gjorde eg […])
Skuleregister	- Ikkje like kontekstavhengig som kvardagsregisteret - Noko komplisert setningsoppbygging. Det vil typisk handle om å presentere ein kausalitet. Elevane nyttar ord som gir eitt eller fleire vilkår og seier kva som skjer. - Utsegner kan innehalde eksplisitte formuleringar. Det ser eg på som utsegner som er språkleg presise og dermed gir meining utan å bli kombinert med til dømes peiking og/eller konkretar	«Dersom […] så […]» «Dersom ein har to bord og set dei inntil kvarandre så blir det ikkje så mange som kan sitte ved dei som visst dei stod kvar for seg»
Teknisk register	- Eintydige utsegner - Tekniske ord - Kontekstuavhengige utsegner - Formelt	«Ein må multiplisere talet på bord med fire og deretter addere to til produktet»

Tabell 3 - Kjenneteikn og døme på ulike register slik eg tolkar det, til bruk for analyse

Sidan skilja mellom dei ulike registera ikkje alltid er tydelege og overlappar, vil eg i det følgjande utdjupe kva eg vektla for å kategorisere språket til elevane gjennom heile diskusjonen deira. For å identifisere eit kvardagsregister har eg med grunnlag i kjenneteikna i tabell 3 leita etter utsegner der elevane knytter den matematiske diskusjonen til eigne erfaringar eller personlege meiningar. Eg har òg sett etter lite formelle utsegner for å identifisere eit kvardagsleg register. Med dette meiner eg utsegner som ikkje stemmer overeins med matematiske reglar eller som har overflødige fraser som «du tar liksom» og «på en måte så». Slike uformelle utsegner kan òg passe inn i skuleregisteret. For å skilje dette frå kvardagsregisteret har eg sett på kor avhengig av kontekst elevane sine utsegner og setningsoppbygging er. Ei utfordring i dette er å vurdere graden av kor kontekstuavhengig ei utsegn er. For å finne eventuelle utsegner som høyrte til skuleregisteret leita eg difor etter utsegner som er heilt uavhengige av ein kontekst eller der konteksten kjem frå innhaldet i oppgåva. Dersom utsegna var kontekstuavhengig kan det likevel potensielt plasserast i eit teknisk register. Eg såg difor på at orda i utsegna ikkje var tekniske matematikkord og/eller at utsegna ikkje var eintydig og formell. Som vist i teoridelen vert eit skuleregisteret ofte nytta i eit matematikklasserom, og registeret kan difor kome til uttrykk når elevar gjentar oppgåvetekstar eller omformulerer desse. For å identifisere skuleregister i diskusjonen såg eg difor på om oppgåveteksten elevane fekk kunne finnast att i diskusjonen. For å finne tekniske utsegner leita eg etter tekniske ord, altså matematiske fagord som til dømes «addere», og såg deretter på om samanhengen dei var nytta i var formell. «Formell» tolkar eg her som at utsegna inneheld korrekt bruk av matematiske fagord og ikkje har overflødige ord. I eit teknisk register finn ein òg talord, men desse vert så hyppig nytta i daglegtalen og er så velkjente for menneske utan særlege matematiske kunnskapar at eg ikkje ser på dei som kjenneteikn for enkelte register. Det er heller ikkje slik at ein må kategorisere heile setningar innanfor eitt register, og i nokre tilfelle kan det difor førekome utsegner basert på fleire register. Dette har eg kommentert der det gjeld.

4.5 Studien sin kvalitet (reliabilitet, validitet og generaliserbarheit)

For å vurdere kvaliteten på det meste av empirisk samfunnsvitskapeleg forsking vert det ofte nytta to hovudtypar testar (Yin, 2018, s. 42). Desse handlar om validitet (gyldigheit) og reliabilitet (pålitelegheit). Testane er i følgje Yin (2018) relevante for case-studiar, og eg vil i det følgjande vurdere kvaliteten på min studie basert på desse, samt generaliserbarheit.

Validitetsomgrepet i kvalitativ forsking handlar om at ein har undersøkt det som ein hadde til hensikt å undersøkje (Krumsvik, 2014, s. 152), altså om det er ein logisk samanheng mellom prosjektet si utforming og funn (Tjora, 2017, s. 231). I dette forskingsprosjektet har formålet vore å undersøkje korleis elevar nyttar språket i matematikklasserommet og kva for rolle språket kan spele her. For å vurdere prosjektet sin validitet må det vurderast om metoden i studien gir moglegheit til å undersøkje dette. For å kunne undersøkje korleis elevar brukar språk og vekslar mellom ulike register i diskusjon av matematikkoppgåver og generalisering er det naudsynt å skape ein situasjon kor elevane har moglegheit til å gjere dette. Ved å gi elevane oppgåver som eg meiner kan stimulere til algebraisk tenking og generalisering og gi dei instruksar om å diskutere desse munnleg i grupper vart ein slik situasjon skapt. Desse vart dokumentert gjennom video-opptak, samt at eg sjølv var tilstades under all datainnsamling og dermed kunne nytte eigen observasjon for å få ei betre forståing av video-opptaka. Dette gjorde at eg kunne analysere diskusjonane i ettertid med ei relativt nøyaktig attgiving av elevane sin diskusjon, samt at meininga i diskusjonen kunne bli meir korrekt framstilt enn dersom eg ikkje var tilstades.

Reliabilitet handlar om korleis forskaren sin måte å gjennomføre forskinga på kan ha påverka dei endelege resultata (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 222). Fordi forskinga mi har ei hermeneutisk tilnærming kan ikkje fullstendig nøytralitet eksistere i denne (Tjora, 2017, s. 235). For å styrke forskinga sin pålitelegheit er det viktig å greie ut om eigen posisjon som forskar. Dette inneber for meg å vise korleis min kunnskap og mine erfaringar vert brukt i analysen og diskusjonen av resultata. I min studie vert dette gjort med ei grunngjeving av korleis oppgåvene eg ville teste ut i felten kan stimulere til algebraisk tenking og generalisering, då dette viser delar av min forkunnskap for temaet før datainnsamling. Det er vidare viktig å gi ei skildring av konteksten for datainnsamling med mål om at lesaren kan få eit innsyn i datainnsamlinga og dermed danne sitt eige bilete av konteksten. Det er òg viktig å vise korleis perspektiv eller teoriar har bidratt til å inspirere forskingsdesignen og analysen (Tjora, 2017, s. 237). For det sistnemnde har dei teoretiske rammeverka til Prediger & Wessel og Radford blitt presentert og nytta. Eit anna tiltak som styrker forskinga sin pålitelegheit er å legge fram direkte sitat, slik informantane la dei fram. Dette gjer at informantane sine «stemmer» vert gjort synlege. Bruk av video-opptak i studien gjorde dette mogleg for meg, og sitata kan sjåast i oppgåva sin resultatdel. Her vert det i tillegg greia ut om korleis sitat og utdrag frå datamaterialet er valt ut, noko som òg er med på å styrke pålitelegheita i studien (Tjora, 2017, s. 237).

Reliabiliet handlar altså om å gjere forskingsprosessen synleg slik at andre kan reflektere over den (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 224). I tillegg til det over er dette er sentralt i min studie fordi resultata er påverka av elevane sine relasjonar til kvarandre (med tanke på korleis dei diskuterer saman), deira matematiske ferdigheiter, deira erfaringar generelt (då desse kan knyttast til oppgåva med bord-og-stol som er eit kvardagsleg «fenomen») og deira språk (morsmål, fleirspråklegheit, andre språklege ferdigheiter).

Ein tredje indikator på kvalitet i kvalitativ forsking kan handle om generaliserbarheit. Dette er knytta til forskinga sin relevans utover dei einingane som faktisk er undersøkt (Tjora, 2017, s. 231). For min studie vil det vere viktig at detaljar i det som er studert vert gitt (for naturalistisk generalisering), slik at lesaren kan vurdere i kva grad funna kan vere gyldige for til dømes eiga forsking (Tjora, 2017, s. 239). For å styrke generaliserbarheita i min studie har eg òg skildra i kva for situasjonar resultata vil kunne vere gyldige, noko som er hensiktsmessig for ei moderat generalisering (Tjora, 2017, s. 239).

4.6 Etiske vurderingar i studien

Utgangspunktet for forskingsetikk i Noreg er i dag tre grunnleggjande krav. Desse er knytt til forholdet mellom forskarane/forskaren og det det vert forska på: krav på privatliv, informert samtykke og krav på å bli korrekt gjengitt (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 247). Ein stor del av samfunnsvitskapleg og humanistisk forsking går føre seg i direkte kontakt med forskingsdeltakarar. Dette medfører at forskaren ofte er avhengig av at folk vil delta i forskingsprosessen for å bringe fram ny kunnskap om samfunnet. Som forskar er det difor viktig å ivareta tilliten som deltakarane viser ein på ein gode måte (Haugen & Skilbrei, 2021, s. 27). Fordi mi forsking skulle gå føre seg i direkte kontakt med elevar og involverte læraren deira i samband med praktiske avklaringar om gjennomføring, var det viktig for meg å ivareta tilliten dei viste meg i forskingsprosessen (og den tidlegare lærarstudenten under datainnsamlinga). For å gjere dette og for å respektere deltakarane sin integritet var det i fleire situasjonar naudsynt for meg å gjere etiske vurderingar. Desse situasjonane oppstod under planlegginga av datainnsamlinga, under sjølve datainnsamlinga og i forskingsprosessen min etter datainnsamlinga. I det følgjande vil eg presentere desse.

4.6.1 Fritt og informert samtykke

I dei forskingsetiske retningslinjene gitt av nasjonale forskingsetiske komité for samfunnsvitskap og humaniora (NESH) er blant anna eit «fritt og informert samtykke» lista opp (2021, s. 18). Når ein ber om folk si tillating til å samle inn opplysningar om dei for forskingsformål, innhentar ein deira *samtykke* (Haugen & Skilbrei, 2021). NESH sine retningslinjer skildrar fire hovudkrav til eit samtykke som ivaretek deltakaren sin integritet: informasjon, frivilligheit, uttrykkjelegheit og dokumenteasjon. Forskingsdeltakarane skal med andre ord ikkje kjenne seg pressa til å delta, og dei må få informasjon om kva deltaking inneber samt informasjon om prosjektet sitt formål. Dei skal òg eksplisitt erklære at dei veit kva ei deltaking inneber og gi si utvetydige tilslutning. I tillegg skal dette samtykket vere mogleg å dokumentere (Haugen & Skilbrei, 2021)

I studien min vart dei deltakande elevane og deira føresette informert om prosjektet dei deltok i, og dei gav deretter samtykke til deltaking. Dette vart gjort ved hjelp av eit samtykkeskjema (sjå vedlegg 2). Forskingsdeltakarane i min case er born, og fordi born som deltek i forsking har krav på særleg beskyttelse måtte det her innhentast samtykke frå både borna og deira føresette (NESH, 2021, s. 20). Det vart her informert om at deltakarane vil bli anonymiserte, at dei når som helst kan trekke seg utan at det vil få konsekvensar for dei og at opplysningar vil bli behandla konfidensielt og i samsvar med personopplysningslova.

4.6.2 Handsaming av personopplysingar

I ein personvernsamanheng er det lov å behandle personopplysingar under visse omstend. Forskingsdata skal vere anonyme. Det vil seie at informasjonen som kjem fram gjennom forskinga ikkje kan sporast tilbake til enkeltindivid. Personopplysingar vert definert i personvernforordninga artikkel 4 nr. 1 som «enhver opplysning om en identifisert eller identifiserbar fysisk person» (personopplysningslova, 2018). Sidan eg i mi forsking brukar videoopptak av elevar må eg syte for å ikkje bruke bilete frå desse slik at elevar kan kjennast att. I mitt tilfelle vil det seie å ikkje bruke bilete frå videoopptaka andre gongar enn i sjølve analyseprosessen då elevane er med i biletet heile videoopptaket. Vidare må eg kalle elevane noko anna enn deira ekta namn, og heller ikkje nemne namn på skulen og byen informantane mine høyrer til i rapporteringa av studien.

4.6.3 Konsekvensar av forskingsprosjektet

Eit anna viktig prinsipp i dei generelle forskingsetiske retningslinjene er at forskinga ein gjer skal ha gode konsekvenser (NESH, 2016). Ifølgje Skaalvik (1999, s. 88) er forskingsprosjektet si tyding i forhold til moglege belastningar eller skadeverknadar for deltakarane eit vanskeleg avvegingsspørsmål når ein gjer etiske vurderingar. Eg vurderer forskingsfeltet mitt og måten datainnsamlinga går føre seg på som relativt lite risikofylt med tanke på moglege belastningar eller skadeverknadar for elevane som deltek. Forskinga mi kan likevel bidra til «research fatigue», altså negative konsekvensar ved at skulane (i dette tilfellet) får deltakarførespurnadar. Fordi masteroppgåva mi er del av eit større forskingsprosjekt der også internasjonale samarbeidspartnarar får tilgang til datamaterialet me samla inn vurderer eg det slik at mi forsking sitt bidrag til «research fatigue» er redusert.

I planlegginga av masterarbeidet mitt vurderte eg vidare om forskinga mi har formål som er hensiktsmessige for å tene samfunnet. Som vist i oppgåva sitt innleiingskapittel meiner eg forskinga mi kan bidra med ny interessant kunnskap til forskingsfeltet. Til praksisfeltet kan forskinga mi bidra som inspirasjon til korleis lærarar kan legge til rette for at elevar får utvikle språklege ferdigheiter eller korleis språket kan sjåast på som ein ressurs. Dette er med på å vege opp for belastinga skulen der datainnsamlinga går føre seg på får.

4.6.4 Krav til rett presentasjon av data

Etter datainnsamlinga og i rapporteringa av forskinga er det viktig å gjengi resultat fullstendig og i riktig samanheng i den grad det er mogleg. Dette er fordi sitat som vert teken ut av ein større samanheng ofte kan få ei anna meining dersom dei vert sette inn i ein større kontekst (Postholm & Jacobsen, 2018, s. 251). Dette kan førekome i min studie då eg ved fleire høve viser til utsegner frå elevar henta frå datamaterialet mitt. Eg har difor vore oppteken av å skildre konteksten utsegnene vert sagt i der eg meiner denne er spesielt viktig for meininga som skulle fram, for å framstille data så rett som mogleg.

4.7 Styrkar og svakheitar ved studien sine metodar

Resultat av kvalitative undersøkingar bør vurderast blant anna på bakgrunn av situasjonsfaktorar (Tjora, 2018, s. 31). Det er tilfelle der forskaren sjølv er i tett kontakt med informantane at slikt kan bli gjort greie for. Det er difor ein styrke for studien min at eg sjølv direkte har vore med på datainnsamlinga. Ein annan styrke ved bruk av videoopptak er at eg kan spole fram og tilbake i opptaka for å lettare høyre kva som blir sagt og sjå kven av elevane som seier det. Sistnemnde er ein styrke ved videoopptak som ikkje er mogleg ved hjelp av lydopptak, og er til hjelp i analyseprosessen for å lettare skjøne samanhengen i diskusjonen.

Ei svakheit ved val av datainnsamlingsmetode er knytt til bruken av videoopptak. Postholm og Jacobsen (2018) hevdar at det i forsking ser ut til at bruk av video kan opplevast som meir forstyrrande og utfordrande for forskingsdeltakarane enn lydopptak (s. 131). I følgje Cohen et al. (2011, s. 470) kan framandobjekt i klasserom påverke relasjonane mellom aktørane og deira vilje til å samhandle. Bruken av videoopptak i datainnsamlinga kan altså ha påverka resultata i studien min. Filminga gjekk som nemnt tidlegare føre seg på eit lite grupperom, og eg og min medstudent var difor svært synlege for elevane. Dette gjaldt òg videokameraa som me nytta. Elevane vart tilsynelatande fort vane med kameraa og gav dei tilsynelitande lite merksemd under filminga. Ei anna mogleg svakheit ved metoden er knytt til val av informantar. Når desse er makeleg valt ut vert casane ikkje nødvendigvis optimale for størst mogleg generalisering. Dette er viktig å vere medviten på (Tjora, 2017, s. 42). Vidare er den subjektive forståinga hjå aktørane og hjå den som fortolkar eit sentralt aspekt for alle fortolkande, metodologiske tilnærmingar (Valle, 2018, s. 231). Dette kan vere ei svakheit i studien då viktige eller sentrale aspekt ved datamaterialet kan ha gått tapt eller blitt tolka feil med tanke på kva elevane i utgangspunktet meinte. For å redusere denne svakheita er eg oppteken av å presentere forskinga mi så transparent som mogleg (reliabilitet), slik at lesaren òg kan danne seg eit bilete av kva elevane kan ha tenkt eller meint. Dette gjer at lesaren sjølv kan ta stilling til forskinga sin kvalitet (Tjora, 2017, s. 248).

5.0 Funn

I denne delen av oppgåva vil eg presentere funn frå datamaterialet. Dette er analyserte enkeltepisodar frå datamateriale valt ut med grunnlag i at dei best kan nyttast for å svare på forskingsspørsmåla mine: 1) *Korleis brukar elevar ulike språkregister når dei diskuterer og arbeider med generalisering av mønster i matematikkfaget?* og 2) *Korleis kan språk verke som ein ressurs og/eller skape hindringar i elevar sitt arbeid med generalisering?.* Episodane er vidare valt ut for å vise variasjon i identifiserte generaliseringsnivå, samt dei høgaste identifiserte nivåa, og korleis språket er nytta i dei ulike nivåa. Utdraga her er òg utdrag frå elevdiskusjonane som inneheld relativt få ikkje-faglege eller irrelevante utsegner.

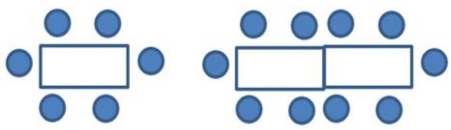
Dette kapittelet er organisert på følgjande måte: Først vert funn frå den første datainnsamlinga presentert gjennom utdrag frå datamaterialet og kommentarar til desse. Ved hjelp av fargekoding i utdraga har eg visualisert elevane sin bruk av register. Kvardagsregister er markert grønt, skuleregisteret markert gult og det tekniske registeret markert blått. Grunna forskingsspørsmåla mine har eg i hovudsak analysert utsegner der elevar uttrykkjer ei form for algebraisk tenking, og heile elevdiskusjonen er difor ikkje koda. Rekkefølgja utdraga er presentert i er basert på det høgaste generaliseringsnivået som kunne identifiserast i utdraga. Generaliseringane vert presenteret i stigande rekkjefølge jamfør Radford (2003; 2010) si nivåinndeling. Det øvste nivået *symbolske generaliseringar* er ikkje identifisert i denne studien. Difor vil *aritmetiske generaliseringar* verte vist først og *kontekstuelle generaliseringar* sist. I presentasjonen av generaliseringane vil eg kontinuerleg fokusere på korleis elevane nyttar språket for å objektivisere og korleis dei brukar ulike språkregister for å uttrykkje algebraisk tenking. Etter dette presenterer eg funna frå den andre datainnsamlinga som er organisert og vist på same måte som funna frå første datainnsamling.

5.1 Funn frå første datainnsamling (gruppe 1)

Funna presentert her har kome fram etter analysar av datamateriale frå første runde av datainnsamling gjennomført med første versjon av oppgåvesettet (vedlegg 1). Dei er presenterte ved hjelp av utdrag frå transkripsjonar og analyse av desse. Elevane som diskuterer oppgåvene her gjekk på sjuande trinn og har dei fiktive namna Jonas, Synne og Line (gruppe 1). I utdraga eg har tatt med her er ikkje Line delaktig i nokre av samtalane, men ho er til stades rundt bordet dei sit ved. Line bidrog svært lite til samtalen gjennom løysinga av heile oppgåvesettet.

5.1.1 Aritmetisk generalisering og bruk av språk

<u>Utdrag 1 – Jonas, Synne og Line arbeider med å finne tal på bord og stolar</u>
Utdraget under er henta frå elevane sin diskusjon kring oppgåve 1. I utdraget har dei akkurat fått informasjon om at det er plass til seks personar rundt eitt bord, og at ein må legge til bord og danne eit langbord dersom det kjem fleire gjester. Informasjonen er gitt gjennom tekst og illustrasjon (figur 7).



Figur 5 - Illustrasjon til elevar i oppgåvesett

Oppgåva ber dei om å svare på kor mange bord og stolar dei treng dersom det dukkar opp 8 gjester på døra.

Utdrag 1:

JONAS:	Da blir det ikke 6 på hvert bord, men… Hvis det er 2 bord, så er det 10.
SYNNE:	10 på hvert bord?
JONAS:	Nei. Hvis det er 2 bord som er satt sammen så er det 10 rundt bordet. Skjønner du?
SYNNE:	Ja
JONAS:	Fordi enten er det 1... Og på langsidene.
SYNNE:	Ok.
LÆRERSTUDENT:	Kan du prøve, Jonas, å forklare litt hvordan du tenker til de på gruppen din her?
JONAS:	Fordi vi har et bord i midten, ikke sant? Der kan det sitte 4 gjester. Og på kantene. Og så har vi 1 bord her og 1 bord her. Så her kan vi sette 1 der, og 1 der, og da… Vi trenger egentlig ikke så mye plass, men… Kan jo sitte der og der, og der og der, og der og der.
SYNNE:	Ja
JONAS:	Fordi der kan det jo ikke sitte noen. Det er mellom bordene

Jonas ser her ut til å forstå at uansett kor mange han og hans med-elevar er i familien så vil det bli behov for meir enn eitt bord. Det første han påpeiker er at figur 1 i mønsteret (eitt bord) vil ha fleire stolar per bord enn figur 2 i mønsteret, som er sett saman av to bord, fordi éin stol på éin ende vil forsvinne. Med andre ord skildrar han korleis mønsteret vil utvikla seg før han kommenterer kor mange det er i hans familie eller i med-elevane sine familiar. Han har her gjort det Radford (2003; 2010) kallar ei aritmetisk generalisering. Han peiker indirekte på kva som vil vere likt i kvar del av mønsteret ved å seie at det ikkje lenger vil vere seks rundt kvart bord dersom det er fleire bord saman. Han skildrar korleis mønsteret vil bli med to bord og seier det då vil vere 10, som truleg tyder 10 stolar. Dette til saman kan tyde på at han har forstått at det aukar med 4 stolar for kvart bord. Han nyttar her adverbet «hvert» som kan seiast å vere eit semiotisk verkemiddel for å uttrykkje aritmetiske generaliseringar. Dette fordi adverbet vert nytta for å objektivisere (her altså å skildre og synleggjere variabelen «bord») og for å skildre kva som er felles for ulike delar.

Det kan sjå ut til at Synne ikkje er med på resonnementet til Jonas då ho stiller spørsmålet «10 på hvert bord?». Han svarer «nei» og forklarer at det er trong for 10 stolar rundt eitt bord som er sett saman av to bord. Synne nyttar òg adverbet «hvert» for å seie noko om kvart bord i mønsteret, men ho stiller spørsmål ved Jonas si utsegn og har truleg ikkje heilt forstått kva han meiner. Det kan sjå ut til at Synne forstår at Jonas seier noko generelt om mønsteret fordi ho òg nyttar adverbet «hvert» når ho byggjer på idéen hans. Alternativt kan det tenkast at ho trur Jonas har byrja å svare på oppgåva sitt spørsmål om kor mange bord og stolar dei treng for åtte gjester, og at ho seier «10 på hvert bord?» for å forsikre seg om at det er det Jonas meiner passar konteksten dersom det kjem åtte gjester.

Vidare ber lærarstudenten (eg) Jonas om å forklare korleis han tenker til resten av gruppa. Dette med mål om at jentene òg skal oppdage observasjonen han har gjort om korleis mønsteret utviklar seg. Då han forklarer korleis mønsteret vil utvikle seg kjem han igjen med uttrykk som kan kategoriserast som aritmetiske generaliseringar. Han seier no, om eit bord som vil stå mellom to andre bord, at det kan sitte 4 gjester på kantane. Dermed har han sagt noko generelt om kvar del i figuren som er eit midtbord. For å forklare korleis han tenker seier han «kan jo sitte der og der, og der og der, og der og der», samstundes som han peiker og brukar klossar. Bruken av konkretar og gestar her kan seiast å vere det Radford (2010) ser på som objektivisering ved hjelp av semiotiske representasjonar. Jonas prøver å synleggjere (objektivisere) for Synne og Line korleis talet på stolar og bord heng saman ved hjelp av språk, konkretar og gestar (semiotiske representasjonar).

Av utdrag 1 kan ein sjå at Jonas nyttar det eg ser på som eit skuleregister når han skildrar mønsteret med «Da blir det ikke 6 på hvert bord, men… Hvis det er 2 bord så er det 10». Dette fordi utsegna ikkje er kontekstavhengig anna enn at det gjeld for oppgåva elevane har fått og ikkje knytt til Jonas sine eigne erfaringar. Kombinasjonen av «hvis» og «så» gjer også setninga av ei oppbygging som er typisk for skuleregisteret då han her uttrykkjer ein kausalitet. Slik sett kan det òg argumenterast for at forklaringa er basert på eit teknisk register. Men fordi ein kan stille seg spørsmålet «10 kva for noko?», er ikkje utsegna eintydig og kvalifiserer difor ikkje til å kallast teknisk.

Synne stiller spørsmål til Jonas sin idé om at «hvis det er 2 bord så er det 10». Han omformulerer seg deretter slik: «hvis det er 2 bord som er satt sammen så er det 10 rundt bordet». Av dei same grunnane som over kan forklaringa framleis seiast å vere basert på skuleregister. Han har dessutan lagt til «satt sammen» og «rundt bordet» i forsøkjet på å forklare Synne betre. «Satt sammen» er ein frase som kan seiast å kome frå skuleregisteret då det er med på å skape ei noko avansert setningsoppbygging. Etter å ha formulert seg på ny spør Jonas Synne om ho skjønar kva han meiner, og til dette seier ho ja. Synne er kort i svara sine i denne dialogen, og utsegnene er dermed er vanskelege å klassifisere. Eg har difor ikkje kategorisert og fargelagt hennar utsegner i dette utdraget. Ho seier også lite i det følgjande og det er difor vanskeleg å tolke om ho har forstått resonnementet.

Då lærarstudenten ber Jonas om å forklare korleis han tenker, byrjar han med utsegna «fordi vi har et bord i midten, ikke sant? Der kan det sitte fire gjester på kantene». Dette kan kategoriserast i eit skuleregister grunna bruken av «fordi» og «midten». «Fordi» er brukt for å uttrykkje ein kausalitet, noko eg har klassifisert som skuleregister. «Midten» kan likne eit teknisk ord, men ord som «sentrum» (eller «midtpunkt» i andre kontekstar) ville vore meir teknisk, og eg vil difor plassere «midten» i skuleregisteret. Det kan tenkast at det er samspelet mellom den kvardagslege situasjonen som gjer at «midten» vert opplevd meir passande her. I neste setning tar Jonas i bruk det deiktiske ordet «der» for å vise tilbake til «bord i midten». Dette gjer at utsegna vert noko avhengig av konteksten slik skuleregisteret er. Jonas nyttar her også «kantene» som er ord frå det tekniske registeret. «Kant» er i geometri eit linjestykke mellom to hjørne i ein geometrisk figur, og bruken av ordet er med på å gjere utsegna uavhengig av andre semiotiske verkemiddel (som til dømes peiking eller bruk av konkretar). «Kant» er samstundes eit ord som kan nyttast i kvardagsregisteret, og spesielt i ein samtale om «bordkant». Eg ser likevel på ordet «kant» i seg sjølv som teknisk og vel difor å kategorisere enkeltordet som det.

Vidare går Jonas over til å bruke kvardagsregisteret med følgjande utsegn: «og så har vi ett bord her og ett bord her. Så her kan vi sette en der, og en der, og da… Vi trenger egentlig ikke så mye plass, men… Kan jo sitte der og der, og der og der, og der og der». I dette tar han i bruk deiktiske ord som gjer at utsegna berre gir meining for dei som er til stades. Det same gjer han i si eiga oppfølging: «fordi der kan det jo ikke sitte noen». Bruken av eit deiktisk ord her gjer at den verbale formuleringa er lite presis i seg sjølv, noko som kjenneteiknar eit kvardagsregister. I tillegg kan bruken av «en der og en der» likne «den her» som i følgje Prediger & Wessel (2013) er ein typisk frase frå kvardagsregisteret.

I denne løysingsprosessen nyttar Jonas altså først eit skuleregister for å forklare si aritmetiske generalisering. Då han formulerer seg på nytt for å forklare betre til medelevane korleis han tenker kan ein sjå at han framleis nyttar eit skuleregister. Lærarstudenten ber han forklare igjen, og då byrjar han i eit skuleregister, men går over til eit kvardagsregister og kombinerer dette med innslag frå det tekniske registeret. Han understrekar ved å bruke språk at det ikkje kan sitte nokon mellom borda. I tillegg peiker han på illustrasjonen i oppgåveheftet og objektiviserer altså ved hjelp av dei semiotiske representasjonane *språk* og *peiking*.

5.1.2 Faktuell generalisering og bruk av språk

Utdrag 2 – Jonas, Synne og Line prøver å formulere ein regel

Utdraget under er henta frå Jonas og Synne sin diskusjon kring oppgåve 2. Oppgåva ber dei bruke ord eller bilete til å forklare ein regel som kan nyttast av alle familiar for å finne ut kor mange bord dei treng for eit kva som helst tal på gjester. Line er delaktig i denne sekvensen ved å observere og bruke kroppsspråk som til dømes å nikke.

Utdrag 2:

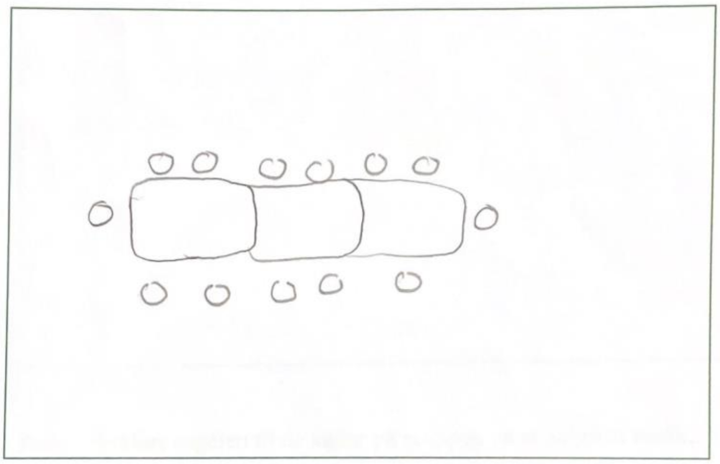
JONAS:	Det er en… Dette gjelder bare for over 10 personer. Hvis du har to bord her og her, ikke sant? En der, en der og en der og en der og en der og en der [peiker rundt eitt bord han teiknar opp (figur 8)]
SYNNE:	Ja
JONAS:	Bare lat som de er koblet sammen, at det ikke kan sitte noen der. Ikke sant? Og så når vi setter et bord her kan det ikke sitte noen der, men det kan sitte… Det blir pluss 4 folk som kan sitte på hvert bord du plusser på der
SYNNE:	Så…
JONAS:	Når du har 2 bord og plusser på 1 til så blir det pluss 4 personer som kan sitte langs bordet
SYNNE:	Så jeg skal tegne 10 bord, og så skal jeg legge sånn 4 stykk på hvert bord?
JONAS:	Nei, se. Du har dette. Ikke sant? [peiker på teikninga si (figur 8)]. Bare lat som om det er 10 i familien. Og så kommer det 4 folk til.
SYNNE:	14
JONAS:	Så plusser du på 1 bord, og så kan du sette folk der, der, der, og han som satt der kan sitte der istedenfor [peiker på midtbordet på teikninga si (figur 8)].. Så da blir det plass til 4 til når du plusser på 1 bord.

SYNNE: Ja, det blir 14

JONAS: Ja

Jonas formulerer her ein rekursiv regel som seier at for kvart bord ein legg til så skal ein legge til 4 personar til det førre talet på personar som satt rundt bordet i mønsteret med 1 bord mindre. Han har her lagt merke til noko spesifikt for kvar del: kvart bord har med seg 4 personar. Dette ser han at passar i heile mønsteret, og uttrykkjer det i ein generell regel: «det blir pluss 4 folk som kan sitte på hvert bord du plusser på der». For å kunne finne talet på personar ved å bruke regelen til Jonas er ein avhengig av å vite noko om mønsteret som består av 1 mindre bord enn i det mønsteret ein ynskjer å finne talet på personar i. Dermed er den ordna posisjonen til borda viktig. Dette kjenneteiknar generaliseringar på nivået Radford (2003; 2010) kallar *faktuell generalisering*. Jonas nyttar vidare språket som det semiotiske verkemiddelet for å objektivisere det ubestemte (her: talet på bord) då han seier «på hvert bord du plusser på». Det semiotiske verktøyet viser indirekte at den ordna posisjonen til figurane er viktig fordi ein er avhengig av å vite noko om den førre figuren. Dette kjenneteiknar faktuelle generaliseringar.

Regelen til Jonas kan likevel ikkje nyttast på kva som helst del av mønsteret. Før han skildrar mønsteret med ein regel seier han at denne berre gjeld dersom ein har med meir enn 10 personar å gjere. Regelen hans kan altså ikkje gjelde for kva som helst del av mønsteret då mønsteret potensielt inneheld 1 bord. Ein generell algebraisk regel må kunne gjelde alle delar av mønsteret, og ein kan slik sett seie at Jonas ikkje har klart å gjere ei algebraisk generalisering. Samstundes kan det argumenterast for at Jonas ser ein algebraisk struktur og generaliserer her. Sidan han sjølv poengterer at delen av mønsteret som potensielt berre har 1 bord ikkje passar regelen hans vil eg argumentere for at han har gjort ei generalisering på nivået *faktuell generalisering*. Han har gjort ei slags operasjonalisering av mønsteret ved å fortelje om kravet om meir enn 10 personar og klarer å uttrykkje ein regel som gjeld for dette mønsteret ved å dekomponere figuren. Dette er ikkje uttrykt tydeleg, og han gir ingen symbolsk formel for regelen sin. Trass dette vil eg likevel kategorisere forklaringa hans som algebraisk då han ser ut til å forstå at 2 bord gir plass til 10 personar og at ein kan legge til midtbord og dermed 4 personar. Av dette kan ein sjå ein underliggjande algebraisk symbolsk formel: $10 + (n-2)*4$, der n er talet på bord. Teikninga vist til i utdraget (figur 6) er teikna av Jonas i fleire steg med forklaring mellom kvart bord han legg til.



Figur 6 - Jonas teiknar opp eitt og eitt bord for å forklare kvifor kvart nye midtbord vil føre med seg 4 stolar

Ut i frå utdraget over kan ein ikkje klart tyde at Synne er med på resonnementet til Jonas og dette er det siste dei diskuterer knytt til denne oppgåva. Det kan av utsegna hennar «ja, det blir fjorten» sjå ut til at ho er einig i korleis han tenker at mønsteret utviklar seg. For å forklare Synne korleis han tenker uttrykkjer han: «når du har 2 bord og plusser på 1 til så blir det pluss 4 personer som kan sitte langs bordet». Sjølv om han viser til eit spesifikt døme kan det identifiserast ei *aritmetisk generalisering* fordi han uttrykkjer kva som er felles for alle midtborda i mønsteret utan å skape eit eksplisitt uttrykk for kvar del.

For å forklare korleis Jonas kjem fram til den faktuelle generaliseringa si startar han med å gi eit vilkår for at regelen han vidare skal presentere kan nyttast: «Dette gjelder bare for over 10 personer. Hvis du har to bord her og her, ikke sant?». Dette er ei utsegn som er avhengig av konteksten gitt i oppgåva og teikninga av eit bord Jonas har teikna, men fordi den ikkje er knytt til erfaring eller på anna måte gjort personleg plasserer eg denne i eit skuleregister. Han følgjer opp med «en der, en der og en der og en der og en der og en der» som eg vil plassere i eit kvardagsregister fordi dette kunne blitt sagt på ein meir formell måte (til dømes «to personer på hver langside og én på hver kortside»). Han fortsetter med «bare lat som […]», som eg vil kalle eit kvardagsleg uttrykk. I den faktuelle generaliseringa «det blir pluss 4 folk som kan sitte på hvert bord du plusser på der», brukar han deiktiske (peikande) ord i kombinasjon med språk for å skape meining. Dette kjenneteiknar kvardagsspråket. Før han seier at ein kan plusse på «der» har han også teikna eit bord han viser til. Teikninga av bordet er vesentleg for å skape meining til utsegna hans, og utsegna er med andre ord uklår i seg sjølv. Teikninga gjer utsegna òg kontekstavhengig. Jonas refererer ikkje til eigne erfaringar, og konteksten han nyttar er henta frå oppgåveteksten. Dette kjenneteiknar skulespråket, men grunna mangelen på meining i utsegna utan andre semiotiske verkemiddel enn språk vel eg å seie at han nyttar kvardagsregisteret i denne generaliseringa. Det er ikkje uventa at elevane nyttar kvardagslege formuleringar her. Dette fordi oppgåveteksten for det første skildra ein situasjon som kunne skjedd i kvardagen og for det andre ber elevane tenke på sin eigen familie. Kvardagsspråket saman med ein teikning verkar altså her som semiotiske verkemiddel for objektivisering då dei vert nytta for å synleggjere for Synne korleis talet på bord og (her) folk heng saman.

Då Jonas går over til ei aritmetisk generalisering («når du har 2 bord og plusser på 1 til så blir det pluss 4 personer som kan sitte langs bordet») for å forklare Synne korleis han tenker nyttar han orda «du har» i utsegna som dermed vert knytt til personlege erfaringar. Dette kjenneteiknar kvardagsregisteret. Utsegna er òg avhengig av at ein kjenner konteksten ho er gitt i for å vere meiningsfull, og dette gjer det kvardagsleg. Vidare vel Jonas «plusser» der han potensielt kunne sagt «adderer». Ordet «adderer» frå eit teknisk register er truleg ikkje ukjend for elevar på sjuande trinn, men Jonas vel å nytte det kvardagslege ordet «plusse» i staden for. Av dette ser me at Jonas held seg i eit kvardagsregister i forklaringa si til medelevar. Han vel òg ein uttrykksmåte som seier at Synne skal gjere noko («[…] du har 2 bord og plusser på 1 til […]). Uttrykkjet er ikkje formulert som ein regel som seier noko om kva som helst del av mønsteret, og kan dermed seiast å ikkje vere ei generell utsegn, men som vist over kan det identifiserast ei aritmetisk generalisering i dette. For å forklare Synne den faktuelle generaliseringa han har gjort kan det difor seiast at han går vekk frå å generalisere algebraisk ved å gå mot ei aritmetisk generalisering, men at han ikkje skiftar frå eit kvardagsregister i dette.

Det ser ikkje ut til at Synne straks forstår korleis han tenker etter at han har gått vekk frå den algebraiske generaliseringa. Jonas har tidlegare i oppgåveløysinga uttrykt at regelen hans berre gjeld for over 10 personar, og det er truleg dette Synne tek utgangspunkt i når ho vidare forklarer kva ho skal gjere. Tonefallet hennar når ho her seier «så jeg skal tegne 10 bord, og så skal jeg legge sånn 4 stykk på hvert bord» gjer forklaringa hennar tilsynelatande spørjande. Formuleringa «sånn 4 stykk» gjer at Synne si utsegn her vert uformell og kan kategoriserast i kvardagsregisteret. Det kan sjå ut til at Jonas òg har tolka Synne som spørjande medan ho forklarer fordi han svarer «nei» til forklaringa hennar. Han forstår med andre ord at Synne ikkje er med på resonnementet hans, og han prøver å forklare korleis han tenker for å skape ein regel éin gong til. Han ber ho om å «bare lat[e] som». Orda er kvardagslege og gjer starten på forklaringa hans lite formell. Han ber ho late som det er «10 i familien» og at det kjem «4 folk til». Her er han upresis fordi han ikkje nyttar ei eining etter «10», som her kunne vore «folk», «menneske» eller «personar». Dette gjer at forklaringa held fram i eit kvardagsleg register. Vidare viser han til ei teikning av oppstilte bord og seier «så plusser du på 1 bord, og så kan du sette folk der, der, der, og han som satt der kan sitte der istedenfor. Så da blir det plass til fire til når du plusser på et bord». Det «[å] plusse[…] på et bord» er ei formulering som er upresis i seg sjølv fordi det ikkje er sjølvsagt kvar bordet skal «plussast på». Forklaringa er dermed avhengig av peiking for å bli presis. Vidare er den sistnemnde utsegna uformell fordi det ikkje er sjølvsagt kva som skal gjerast når ein «plusser på eit bord» i ein tenkt kontekst. Delen av forklaringa der Jonas seier «han som satt der kan sitte der istedenfor» gjer denne avhengig av ein kontekst. At forklaringa hans er avhengig av peikeord, er uformell og kontekstavhengig gjer at eg plasserer denne i eit kvardagsleg register. Etter denne forklaringa kan det sjå ut til at Synne forstår betre korleis Jonas tenker fordi ho svarer «ja, det blir 14».

I denne oppgåva er det eigentleg ingen av elevane i gruppa som løyser oppgåva slik oppgåveteksten ber dei om. Oppgåveteksten ber eksplisitt etter ein regel slik at familiar kan finne ut kor mange bord dei treng for eit kva som helst tal personar dei skal servere mat. Jonas sin regel er avhengig av at ein kjenner til eit tal på bord og gjester frå før, då han fortel kor mange fleire gjester som får plass for kvart bord ein legg til. Han svarer med andre ord på oppgåva med ein rekursiv regel, medan denne ber om ein eksplisitt regel der talet på personar skal nyttast for å finne talet på bord.

I løysingsprosessen her er elevane si algebraiske tenking i hovudsak uttrykt ved av eit kvardagsregister. Jonas uttrykkjer den algebraiske tenkinga si på ulike måtar ved å formulere seg på ulike måtar, men held seg i kvardagsregisteret. Teikninga til Jonas er sentral i heile forklaringsprosessen hans, òg når han går vekk frå dei generaliserande utsegnene. Denne verkar difor som eit semiotisk verkemiddel for objektivisering i generaliserande utsegner, men òg som eit verkemiddel for å vise Synne kva ho skal gjere. Å bruke ei aritmetisk generalisering på veg mot ei faktuell generalisering ser òg ut til å vere hensiktsmessig her.

<u>Utdrag 3 – Jonas, Synne og Line prøver å uttrykkje ein regel på ein alternativ måte</u>

Dette utdraget er henta frå ein elevdiskusjon der dei prøver å forklare regelen dei (Jonas) kom fram til tidlegare på ein annan måte (deloppgåve 2). Sjølv om oppgåveteksten oppfordrar dei til å nytte eit anna språk enn norsk i ei ny forklaring nyttar dei norsk. Synne og Line forstår ikkje heilt kva oppgåva ber dei om. Av Jonas sitt kroppsspråk, tonefall og setningsstarten «for hvert» kan det verke som at han prøver å hjelpe dei i gang.

JONAS: For hvert…

SYNNE: Ja?

JONAS: Fullt 4-tall trenger dere et nytt bord

SYNNE: Ok

JONAS: Så hvis det kommer 7 personer trenger dere 2 nye bord. Ikke sant. Her begynner… med familien din [peiker på same teikning som i førre oppgåve (figur 8)]. Og så kommer det 2 til. Da trenger dere ikke et helt nytt bord, men dere må bruke 1 bord til for at alle skal få plass. Og så når det kommer 2 til, så trenger dere ikke et nytt bord. Fordi dere har jo allerede det halve bordet til overs. Men når disse folka kommer, disse 3 [viser med 3 klosser], så må dere ha enda et nytt bord fordi de ikke får plass der de andre sitter.

SYNNE: Ok. Skal jeg forklare det nå?

JONAS: Ja

SYNNE: Ok. Line, du må også se.

LINE: Ja

For å forklare den faktuelle generaliseringa Jonas gjorde i førre oppgåve (utdrag 2) byrjar han her med ei aritmetisk generalisering. Han viser nemleg kva som er felles i spesifikke delar av eit tenkt mønster sett saman av bord og stolar ved å uttrykkje at det for kvart «fullt 4-tall» er trong for 1 nytt bord. Dette kan tolkast som at han grupperer gjestene i firargrupper, og at han vil fylle på 1 bord ein stad mellom ytterborda for kvar gong ei gruppe vert større enn 4. Det kan tenkast at han er *på veg* mot ei *kontekstuell generalisering* av mønsteret som seier korleis ein kan finne talet på stolar dersom ein veit talet på bord (altså talet på bord multiplisert med 4 addert med 2). Han har likevel ikkje eksplisitt uttrykt at talet på bord kan multipliserast med 4 i prosessen med å finne talet på stolar, og han har heller ikkje sagt at det må adderast 2 til produktet av talet på bord og 4. Det er denne forklaringa til korleis ein kan seie noko om kva som helst figur i mønsteret som manglar for å kunne kalle den algebraiske tenkinga hans for ei kontekstuell generalisering. Av den førre episoden kan ein sjå at han til mønsteret har kommentert at regelen hans (at ein skal legge til 4 stolar for kvart bord) berre gjeld dersom det er meir enn 10 personar. Det kan difor tenkast at han ikkje ser ein måte å uttrykkje ein regel på som gir talet på stolar inkludert dei rundt endeborda. Han har likevel identifisert noko som er felles for alle delar i mønsteret bortsett frå der borda er endebord og har 5 stolar. Han seier ikkje i dette utdraget at dette gjeld for bord som ikkje har personar på endane, men det er rimeleg å gå ut frå at han meiner det fordi han tidlegare har tatt utgangspunkt i ein situasjon med minst 10 personar (altså 5 og 5 ved dei 2 ende-borda). Utdraget av diskusjonen kring denne oppgåva viser altså at Jonas framleis er på eit faktuelt generaliseringsnivå.

Av utdraget kan ein òg sjå at Jonas prøver å hjelpe jentene med å finne ut kor mange bord og stolar dei treng dersom det kjem 7 personar på besøk til Synne sin familie. Han har teikna opp 3 bord og spør jentene om kor mange bord som trengst. Som under førre deloppgåve vel Jonas her konkret å skildre kva jentene skal gjere reint praktisk med bord og stolar for å finne ut talet på desse til eit kva som helst tal på gjester. Med andre ord går han bort frå ei algebraisk tenking og generalisering, ved å vise til spesielle døme. Dei svarer ikkje på spørsmålet hans og det kan sjå ut til at Jonas i dette tilfellet gir opp å forklare jentene det han har byrja på.

Jonas opnar diskusjonen kring oppgåva med ordkombinasjonen «for hvert». Denne kan kategoriserast i eit skuleregister fordi ordkombinasjonen bidrar til ei noko avansert setningsoppbygging for setninga den er del av. Fortsettinga på setninga er «fullt 4-tall trenger dere et nytt bord». Saman med starten «for hvert» blir setningsoppbygginga noko komplisert. Bruken av orda og oppbygginga liknar andre setningar som passar inn i eit skuleregister (jf. Tabell 3). Her uttrykkjer han ei aritmetisk generalisering fordi han seier at kvart bord har med seg 4 stolar og dermed har han lagt merke til noko felles for (midt-)delane i mønsteret. Det kan altså seiast at Jonas byrjar å forklare regelen han gav (ved hjelp av faktuell generalisering) i førre oppgåve med ei aritmetisk generalisering uttrykt ved hjelp av skuleregisteret.

Vidare i forklaringa viser han, som i tidlegare oppgåver, til eit konkret døme: «så viss det kommer 7 personer trenger dere 2 nye bord». Denne utsegna kan kategoriserast som skuleregister grunna setningsoppbygginga. Setninga inneheld eit vilkår, altså at det kjem 7 personar, og ein konsekvens av hendinga. Presentasjon av slik kausalitet er kjenneteikn på setningar i skuleregisteret. Dette gjer han i kombinasjon med å bruke ei teikning, peiking og klossar. Han brukar det deiktiske ordet «her» og seier til medelevane sine at «her begynner», før han avsluttar setninga ufullstendig. Fordi det han her uttrykkjer verbalt er avhengig av peiking og ei teikning for å skape meining, kan det seiast at han her går over til eit kvardagsregister. Dette registeret nyttar han òg i det følgjande då han skildrar dømet han gir ved hjelp av temporale samanhengar: «Og så […]. Da […]. Og så […]», men i dette presenterer Jonas to kausalitetar. Den første er «når det kommer 2 til, så trenger dere ikke et nytt bord» og den andre er «når disse folka kommer, disse 3, så må dere ha enda et nytt bord

[…]». Den første vil eg kategorisere i skuleregisteret fordi setningoppbygginga er komplisert og det verbale gir meining utan å bli kombinert med peiking eller teikning. Den andre har òg ei komplisert setningsoppbygging, men fordi Jonas nyttar det deiktiske ordet «disse» og brukar klossar for å konkretisere gjestene vil eg plassere denne i kvardagsregisteret. Forklaringa hans er med andre ord basert på ei veksling mellom skuleregisteret og kvardagsregisteret. Ho inneheld òg dei tekniske orda «halve» og «helt».

I denne løysingsprosessen kan det av utdraget sjå ut til at vekslinga mellom skuleregister og kvardagsregister samt bruken av peiking, teikning og klossar gjorde det enklare for Synne å forstå regelen som Jonas i utgangspunktet gav på eit faktuelt nivå. Som i utdrag 2 vel Jonas å forklare korleis han generaliserer på det faktuelle nivået gjennom å vise ei aritmetisk generalisering. Jentene forklarte aldri ein regel for å finne talet på kor mange bord dei treng for eit kva som helst tal på personar dei skal servere mat. Det kan tenkast at Synne forstår forklaringa til Jonas då ho svarer «ok» før ho spør om ho skal forklare det same. Det kan òg sjå ut til at bruk av konkretar (klossar og teikning) støttar ei matematisk forståing fordi Synne nyttar ordet «se» i eit forsøk på å inkludere Line i diskusjonen. Her kunne ho potensielt nytta ordet «høre», men valet av ordet «se» kan tyde på at ho finn hjelp i konkretane Jonas nytta. At jentene ikkje forklarte regelen med eigne ord kan kome av at samtalen «spora av» og utvikla seg til å handle om elevane sine ulike morsmål og ikkje-fagleg innhald. Det kan også vere at dei fann det for utfordrande (og dermed keisamt) sjølv om Synne svara «ok» til Jonas si forklaring.

5.2 Funn frå andre datainnsamling

Funna presentert i denne delen har kome fram etter analysar av datamateriale frå andre runde av datainnsamling gjennomført med oppgåveversjon 2 (vedlegg 2). Dei er vist og valt ut på same måte som i kapittel 5.1.

5.2.1 Kontekstuell generalisering (gruppe 2)

Elevane som diskuterer oppgåvene her gjekk på sjuande trinn og har dei fiktive namna Helene, Kristoffer og Oliver (gruppe 2).

<u>Utdrag 4 og 5 – Oliver, Helene og Kristoffer prøver å formulere ein regel</u>

Dette delkapittelet inneheld to utdrag frå gruppe 2 sine diskusjonar kring to ulike deloppgåver (1a og 1c). Det første (utdrag 4) er henta frå ein diskusjon Oliver, Helene og Kristoffer har knytt til oppgåve 1c. Her vert dei spurt om å formulere ein regel som seier korleis ein kan rekne ut talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord. Utdraget er henta ut midt i diskusjonen. Dette fordi det viser det høgaste generaliseringsnivået gruppa kom fram til (kontekstuell generalisering). Eg vil analysere den algebraiske tenkinga eg har identifisert i dette utdraget, før eg viser det neste utdraget (utdrag 5) som er knytt til oppgåve 1a. Utdraget kring oppgåve 1a har eg inkludert då det kan syne elevane sin prosess på vegen mot den kontekstuelle generaliseringa elevane kom fram til i oppgåve 1c.

Utdrag 4, om deloppgåve 1c:

OLIVER:	Du tar antall stoler på hvert bord og så ganger du det med antallet med bord og så får du svaret. Nei, så får du et svar og så plusser du det med 2.
HELENE:	Ja
OLIVER:	Som blir ende-bordene.
KRISTOFFER:	Ja

For å finne talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord uttrykkjer Oliver her at ein kan ta «antall stoler på hvert bord» og multiplisere dette talet med talet på bord. Deretter uttrykkjer han at ein må addere produktet ein har fått med 2. Det ser ut til at medelevane hans forstår korleis han tenker då dei begge svarer «ja» til utsegna hans. Her kan det argumenterast for at Oliver har gjort det Radford (2003; 2010) ser på som ei *kontekstuell generalisering*. Han har nemleg oppdaga noko som er felles i alle delar av eit tenkt mønster (at det er like mange stolar til kvart bord i heile mønsteret som hamnar mellom endeborda) og uttrykkjer ein regel som følgje av dette. Då han korrigerer seg sjølv med å seie at «du [får] et svar og så plusser du det med to» kan det tyde på han ser at ende-borda alltid vil ha 1 stol meir enn dei andre. Han gir i utdraget altså ei forklaring på korleis ein kan seie noko om talet på stolar for eit kva som helst tal på bord utan at ein er avhengig av å vite noko om det førre talet på bord og tal på tilhøyrande stolar. Dette kjenneteiknar kontekstuelle generaliseringar.

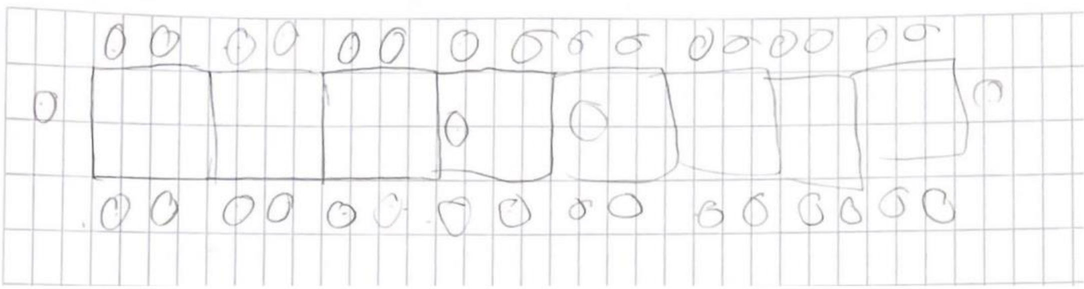
Oppgåve 1a ber elevane om å finne talet på stolar dersom ein har 3, 4, 8 og 42 bord. Dette kan ha vore med på å støtte Oliver fram mot regelen han presenterer i utdraget over, og utdraget under er henta frå dette. I dette utdraget er det fleire utsegner som ikkje er kategoriserte i register fordi dei, slik eg ser det, har store overlappingar av register (Prediger & Wessel, 2011). Eg har difor klassifisert dei delane som er eintydige.

Utdrag 5:

OLIVER:	[les oppgåvetekst]: «Hvor mange stoler trenger man for 3 bord, hvor mange trenger man for 4 bord?»
HELENE:	Hmmm
KRISTOFFER:	Skal vi se
OLIVER:	[tel kor mange stolar det er rundt 2 bord ut ifrå illustrasjonen i oppgaveteksten]. 14 for 3 bord
HELENE:	Jeg tegner bordene (figur 9)
KRISTOFFER:	Ja, jeg også tror 14
HELENE:	Det er vel 2 på hver side
KRISTOFFER:	Ja, og så er det 6 på langsiden på hver side så det er 12 og så 2 på enden
HELENE:	Så da blir det 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
KRISTOFFER:	Og så hvor mange stoler trenger man for…
HELENE:	…8 bord
KRISTOFFER:	4 bord. Vi er på samme oppgave, det står 3 og så står det 4.
HELENE:	Ehh, da bare tar jeg på et til bord
OLIVER:	Hvor mange trenger man for 4 bord?
HELENE:	[har tegnet på et til bord og teller (figur 9)] 15, 16, 17, 18. 18
OLIVER:	Ja, 18.
KRISTOFFER:	Mm [virker enig]. Skal vi se. Så for 8 bord.
HELENE:	Da kan vi bare ta 18 pluss 18 da. Siden det var 4 bord. Nei, det går jo ikke, for det er jo endene.
KRISTOFFER:	Jo, fordi 18 er jo endene også.
HELENE:	Ja, det er sant.
KRISTOFFER:	Åja, nei. Jo du kan gjøre det og så bare tar du minus 2. 18 pluss 18 minus 2.
OLIVER:	16 ganger 2 som er…

KRISTOFFER:	32
OLIVER:	32 ja, pluss 2 som blir…
KRISTOFFER:	[avbryter] 34
OLIVER:	Ja. Ok, det er svaret på oppgave 2. [les oppgåveteksten igjen]: «Hvordan kan dere finne svaret uten å tegne?». Ja, det er jo det vi har gjort. Ta 18 pluss 18 som er lik 36 minus 2.

Helene, Oliver og Kristoffer byrjar alle oppgåveløysinga med å teikne opp 3 bord og 4 bord. Helene kommenterer raskt at det er «2 på hver side». Ho har her lagt merke til noko felles i mønsteret. Kristoffer ser ut til å støtte dette og byggjer vidare på idéen om å seie noko om korleis mønsteret ser ut. Han svarar Helene med «ja, og så er det 6 på langsiden på hver side så det er 12 og så 2 på enden». Her har Kristoffer gjort ei *aritmetisk generalisering*, men denne ser ikkje ut til å vere vesentleg i prosessen hennar for å finne talet på stolar til 3 bord då ho likevel tel stolar på ei teikning (figur 9). Ho går for same teljestrategi i konteksten med 4 bord, og elevane vert kjapt einige om at det er trong for 18 stolar til 4 bord. Teikninga ser her ut til å vere ein vesentleg strategi i elevane si algebraiske tenking.



Figur 7 - Helene sitt resultat av å først teikne opp 3 bord for så å legge til 1 og så legge til 4 undervegs i oppgåveløysinga

For å finne talet på stolar til 8 bord byrjar dei å drøfte strategiar som ikkje krev teljing eller teikning. Oppgåveteksten ber dei her om å vise ein strategi som ikkje krev teikning, men det kan av diskusjonen sjå ut til at elevane ikkje har fått dette med seg. Helene hevdar at det berre er å addere 18 til 18 og grunngir dette med at det var 4 bord (og dei kom fram til 18 stolar i førre oppgåve med 4 bord). Ho siktar truleg til at 8 bord er det dobbelte av 4 bord og at ein difor kan doble talet på stolar. Hennar første tanke er altså at dei to storleikane, talet på bord og talet på stolar, er proporsjonale. Vidare rettar ho seg sjølv og seier at det ikkje stemmer fordi ein har endane. Ho kommenterer likevel ikkje kva som er problemet med endane, men Kristoffer ser ut til å forstå kva ho tenkjer då han svarer «jo, fordi 18 er jo endene også», men påpeiker at ein må subtrahere 2 frå denne summen. Oliver nyttar samstundes ein anna strategi og multipliserer 16 med 2 for å så addere 2 til dette produktet. Dei kjem alle fram til same svar. Då dei så går vidare i oppgåvesettet oppdagar dei at dei skulle finne eit svar utan å teikne. Oliver kommenterer at dei har gjort det og gjentek den spesifikke strategien «ta 18 pluss 18 som er lik 36 minus 2». Her har dei gjort ei *faktuell generalisering* (i to ulike variantar) fordi dei viser ein måte å rekne ut talet på stolar til 8 bord ved å bruke noko dei veit er felles for mønsteret vidare, nemleg kor mange stolar det er rundt kvart bord. Helene har i prosessen teikna opp 8 bord for seg sjølv likevel (figur 9). Av denne diskusjonen kan det sjå ut til at elevane sjølv forstår at dei må finne generelle reglar som kan nyttast når dei arbeider med større tal (går frå 4 til 8 bord), og at dei er på veg mot regelen dei gir i oppgåve 1c (utdrag 4).

For å finne talet på stolar til 42 bord hadde elevane følgjande diskusjon (forts. utdrag 5, også henta frå deloppgåve 1a):

OLIVER:	Da kan vi jo bare ta…
HELENE:	8 pluss 8, det blir hvertfall 16. Nei…
OLIVER:	Vent da. Først kan vi ta 4 ganger 42
KRISTOFFER:	Ja
OLIVER:	84 pluss 84
HELENE:	Det er 164
OLIVER:	Som blir 164, pluss 2 som er ende-bordene. Så det blir 164 pluss 2 som blir…
KRISTOFFER:	166
HELENE:	Ja
KRISTOFFER:	Nice

Helene vil her byrje med å addere 8 til 8, men ser ut til å forkaste denne strategien raskt. Oliver vil byrje med å multiplisere 4 med 42. Kristoffer og Helene ser ut til å vere einige med Oliver då ho svarar «ja» og han seier «det er 164». Basert på dei føregåande diskusjonane om talet stolar til 3 og 4 bord kan det sjå ut til at Oliver vil multiplisere talet på bord, 42, med 4 fordi han og medelevane har sett at dette er talet på stolar til kvart bord. Han følgjer opp med «pluss 2 som er ende-bordene» som kan tyde på at han har identifisert konstantleddet 2 i det passande algebraiske uttrykkjet n * 4 + 2 (der n = talet på bord). Dette er imidlertid uttrykt nokså upresist fordi det ikkje berre er to stolar rundt endeborda. Det elevane seier dei gjer kan uttrykkast med uttrykkjet (42 * 2) * 2 + 2», men dei reknar feil i dette (84 + 84 ≠ 166).

Av deloppgåve 1a, som ber elevane finne talet på stolar til 3, 4, 8 og 42 bord, kan me altså sjå at elevane klarar å finne ein strategi for å finne talet på stolar utan å teikne og telje. Dei har sett at det er trong for 4 stolar til kvart bord mellom ende-borda (aritmetisk generalisering) og funne talet på stolar til 8 og 42 bord med reglar basert på andre delar av figuren (faktuell generalisering). Både i prosessen med å finne talet på stolar til 8 bord og til 42 bord har dei nytta multiplikasjon for deretter å addere 2 til produktet. Det kan difor tenkast at det er denne prosessen (aritmetisk og faktuell generalisering) som har hjelpt Oliver til å identifisere 2 som ein konstant i den kontekstuelle generaliseringa si i utdrag 4 frå deloppgåve 1c.

For å uttrykke dei aritmetiske og faktuelle generaliseringane, og for å objektivisere den variable storleiken «talet på stolar», brukte elevane teikning. Når Helene uttrykkjer den aritmetiske generaliseringa si nyttar ho ikkje «stolar» som eining for å skildre kva det er 2 av. Det kan difor seiast at ho unngår å uttrykkje med språk kva som er den eine variable storleiken i mønsteret. I den faktuelle generaliseringa nyttar elevane ordet «bord» om den variable storleiken fleire gongar, men elevane uttrykkjer aldri at talet på bord kan variere i diskusjonen kring den faktuelle generaliseringa. Her nyttar dei berre det dei veit om talet på stolar til 4 bord og viser indirekte at talet på stolar til kvart bord er det same uansett kor mange bord ein har. For å nå eit kontekstuelt nivå av generaliseringar er det viktig å klare og uttrykkje kva som er variable storleikar ved hjelp av språket. Dette gjer Oliver i den kontekstuelle generaliseringa si ved å seie «så ganger du det med antallet bord». Her syner han at talet på bord kan variere. Han omtalar også talet på stolar til kvart bord, som er 4 og ein konstant, på liknande måte. Til forskjell frå dei to andre gruppene, som i andre samanhengar òg har identifisert at det er 4 stolar til kvart midt-bord, omtalar nemleg Oliver konstanten 4 som «antall stoler på hvert bord».

Det første Oliver seier etter å ha lese oppgåveteksten til oppgåve 1a (finn talet på kor mange stolar ein treng for 3 bord) er «14 for 3 bord». Denne utsegna plasserer eg i kvardagsregisteret fordi det er kort og ufullstendig, og dessutan gir det berre meining dersom ein er i situasjonen. Helene følgjer opp med «det er vel 2 på hver side» som òg kan seiast å vere basert på eit kvardagsregister. Ho brukar formuleringa «det er vel» som er ein vanleg måte å uttrykkje usikkerheit på i kvardagssituasjonar og som gjer utsegna uformell. Ordet «side» kan kallast teknisk fordi det potensielt er eit ord for ein del av ein geometrisk figur i matematikken. Som med «kant» kan òg «side» vere kvardagsleg, men ord som kvalifiserer som både kvardagslege og tekniske har eg valt å kategorisere i teknisk register. Diskusjonen vidare blir prega av kvardagsregister grunna pronomena «jeg», «man», «vi» og «du». Den er òg uformell grunna overflødige ord som «bare» og «da». «Hvor mange trenger man for 4 bord?» kategoriserer eg som kvardagsleg også fordi Oliver unngår å vere presis ved å utelate «stoler». På denne måten blir utsegna kontekstavhengig for å skape meining. Oliver kjem avslutningsvis her med utsegna «Ok, det er svaret på oppgave 2» som fordi det er presist og nokså kontekstuavhengig er i skuleregisteret.

Dersom ein går tilbake til samtalen elevane har kring oppgåve 1c (formuler ein regel som kan nyttast for å finne talet på stolar til eit kva som helst tal på bord) kan ein sjå at Oliver her uttrykkjer ei *kontekstuell generalisering* ved hjelp av kvardagsregisteret. Han gjer forklaringa personleg ved å bruke «du» og samanhengane han gir er temporale. Vidare kan formuleringa «så får du svaret» vise at Oliver kanskje ikkje ser på talet stolar på kvart bord multiplisert med talet på bord som ein variabel, sjølv om han her har klart å uttrykkje ei kontekstuell generalisering. Samstundes gjer han storleiken «konkret»: eit tal som kan adderast med 2. Måten Oliver brukar «svar på» der han seier at ein får eit «svar» som ein skal plusse med 2 kan difor seiast å vere ein måte å objektivisere den variable storleiken «talet på stolar». Vidare hevdar han at ein må addere 2 til produktet ein fekk frå førre operasjon, men han vel å bruke «plusser» i staden for «multipliserer».

Med tanke på registerbruken i diskusjonen kring deloppgåve 1a og deloppgåve 1c er begge diskusjonane i størst grad prega av kvardagsregisteret. Ei algebraisk tenking uttrykt ved hjelp av skuleregisteret er ikkje identifisert, men eg vil understreke at overgangane mellom kvardagsspråk og skuleregisteret ikkje alltid er tydelege. Det tekniske registeret er identifisert i form av tekniske ord. Diskusjonen kring deloppgåve 1a, der aritmetiske og faktuelle generaliseringar dukkar opp, er også prega av at elevane ikkje spesifiserer kva for einingar dei snakkar om. «Det er 6 på langsiden», «så det er 12», «og så 2 på enden», «så da blir det 14» og «hvor mange trenger man for 4 bord?» er døme der einingar (her: stolar) ville vore naturleg, men er fråverende. Dette gjer at utsegn som elles kunne kvalifisert som tekniske ikkje er presise nok til dette (til dømes «det er vel 2 på hver side»). Det ser likevel ikkje ut til at dette skapar stor forvirring då elevane byggjer vidare på kvarandre sine utsegner, og fordi dei kjem fram til svaret 34 på talet stolar som trengst for 8 bord.

Utdrag 6 – Kristoffer, Oliver og Helene (gruppe 2) diskuterer ein gitt regel

Dette utdraget er henta frå Kristoffer, Oliver og Helene sin diskusjon kring deloppgåve 1d. Oppgåva ber elevane om å diskutere følgjande gitte regel for å finne talet på stolar: *Du gangar talet på bord med 2 og legg til 1. Så må du doble dette talet. Det er talet på stolar som du plassera rundt bordet*. I denne diskusjonen kjem ikkje elevane opp med ei kontekstuell generalisering sjølv. Regelen dei diskuterer kan kallast ei kontekstuell generalisering fordi den gir ei forklaring på korleis ein kan seie noko om talet på stolar til kva som helst tal på bord uavhengig om ein veit noko om det førre talet på bord og stolar. Eg har difor valt å plassere episoden i dette del-kapittelet.

KRISTOFFER:	Vi kan jo sjekke
OLIVER:	Nei, for det spørs jo hvor mange bord
KRISTOFFER:	Nei, du ganger tallet bord med 2.
HELENE:	Stemmer Sandra sin regel, diskuter med gruppa
KRISTOFFER:	Vi kan jo se [ser på tidlegare teikningar av oppteikna bord (tilsvarande figur 8 og 9)]. Nei, jeg tror ikke det stemmer
LÆRERSTUDENT:	Kan jeg bare spørre hvorfor dere ikke tror det stemmer?
OLIVER:	Fordi, det spørs jo hvor mange bord det er, det er ikke hele tiden 2 bord og da kan du jo ikkje gange med 2. Og så kan du ikke legge til bare 1, fordi det er jo 2 ende-bord

For å finne ut om regelen kan stemme foreslår Kristoffer at dei sjekkar. Han utdjupar ikkje korleis han vil gjere dette før Oliver avslår forslaget og grunngir dette med at «det spørs jo hvor mange bord». Det første regelen seier er at «du gangar talet på bord med 2». Oliver hevdar dette er problematisk fordi det ikkje alltid er 2 bord, og at ein følgjeleg ikkje alltid kan gange med 2. Det kan tenkast at Oliver ikkje ser på regelen som generell og trur regelen berre gjeld for ein situasjon med 2 bord. Sjølv om han misforstår innhaldet i regelen kan det sjå ut til at han forstår at ein generell regel må kunne passe for kva som helst del av eit mønster. Vidare ser Oliver problematisk på det å leggje til 1 til produktet ein har fått så langt fordi det er 2 endebord. Sistnemnde kan kome av at han ikkje ser korleis regelen kan nyttast for å finne talet på stolar på éi side av langbordet og éin ende før dette vert dobla. Kristoffer kan sjå ut til å tolke Oliver som at han har misforstått regelen fordi han seier «nei, du ganger tallet bord med 2». Dette kunne elevane ha kopla til Helene si tidlegare utsegn (sjå utdrag 5) «det er vel 2 på hver side», men det gjorde dei tilsynelatande ikkje. Kristoffer prøver vidare ut regelen ved å teikne, men konkluderer òg med at denne er feil.

Argumentet til Oliver «for det spørs jo hvor mange bord» om at regelen ikkje kan testast, vel eg å kategorisere i skuleregisteret. Han nyttar nemleg «det spørs jo» i argumenteringa som gjer setninga noko komplisert oppbygd. Han refererer ikkje til eigne erfaringar eller personlege meiningar. Resonnementet hans er avhengig av konteksten gitt i oppgåva, men dette kan vere tilfelle for utsegner frå skuleregisteret. Kristoffer svarer Oliver med utsegna «nei, du ganger tallet bord med 2» som òg kan kategoriserast i skuleregisteret. Utsegna er ikkje knytt til eigne erfaringar eller personlege meiningar og heller ikkje avhengig av ein kontekst anna enn den oppgåva gir. Slik sett kvalifiserer utsegna til å kunna kallast teknisk, men valet av «ganger» i staden for «multipliserer» gjer at utsegna ikkje kan kategoriserast i eit teknisk register. Då Oliver skal utdjupe kvifor regelen ikkje stemmer nyttar han òg eit skuleregister. Utsegnene her kan seiast å vere frå dette registeret fordi han nyttar «det spørs jo hvor mange» og «fordi» for å uttrykkje ein argumentasjon, og fordi han ikkje viser til eigne erfaringar eller personlege meiningar slik bruk av kvardagsregister potensielt gjer. Som Kristoffer vel han «gange» i staden for «multiplisere» og nyttar med andre ord ikkje eit teknisk register. Han seier òg «legge til» i staden for «addere. Det er likevel ikkje så rart at elevane nytta «ganger» her fordi ordet truleg ligg dei nært og regelen gitt i oppgåveteksten brukar dette.

Elevane nyttar i hovudsak skuleregisteret når dei diskuterer regelen. Oliver som tidlegare har brukt kvardagsregisteret mest i utdjupingar av forklaringar held seg her til eit skuleregister. I heile diskusjonen unngår elevane å namngi eller i det heile teke objektivisere den variable storleiken i mønsteret «talet på stolar», slik som òg kunne sjåast i diskusjonen av oppgåve 1a. Det vert unngått med formuleringar som «fordi, det spørs jo hvor mange bord det er» og «for det spørs jo hvor mange bord», men det blir ikkje kommentert «kva som spørs». Bruken av desse formuleringane, teikningar og eit skuleregister er nytta når elevane kjem fram til feil konklusjon.

5.2.2 Kontekstuell generalisering (gruppe 3)

Elevane som diskuterer oppgåvene her gjekk på sjuande trinn og har dei fiktive namna Maren, Adine og Snorre (gruppe 3). Som gruppe 2 nådde denne gruppa kontekstuell generalisering som det høgaste nivået. Eg har også her starta med å vise eit utdrag frå midt i diskusjonen til elevane, då eg meiner dette best syner korleis dei kom fram til det høgaste generaliseringsnivået.

Utdrag 7 – Maren, Adine og Snorre (gruppe 3) prøver å formulere ein regel som gir eit tal på stolar

Utdraget under er henta frå Maren, Adine og Snorre sin diskusjon oppgåve 1c som ber dei formulere ein regel som seier korleis ein reknar ut talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord. Dei kjem fram til ein regel som kan seiast å vere på eit kontekstuelt nivå av generalisering, men fekk noko hjelp av lærarstudenten til å presisere denne. Dette kan sjåast i utdraget.

MAREN:	Okei, så vi skal lage en regel
ADINE:	Som sier hvordan man regner ut tallet på stoler. Så vi skal regne ut hvor mange stoler man trenger dersom man kjenner tallet på bord. Ok, så visst det er 4 bord da. Vi sier det. Og så skal vi finne ut. Da må vi tenke at det er 2 stoler på hver, altså sånn [peiker bortover bordet]
MAREN:	Ja, og så må vi bare gange hvor mange som er på den ene siden med den andre, og så legge til 2 i endene
ADINE:	Ja, det er vel egentlig bare det.
MAREN:	Du finner ut hvor mange det er på 1 side og så ganger du det med 2 og så tar du pluss 2 på endene.
LÆRARSTUDENT:	Hvordan kan du finne ut hvor mange stoler det er på 1 side da?
MAREN:	Du tar hvor mange bord det er og ganger med 2
SNORRE:	Og så ganger du det med 2 for å finne den andre, pluss 2.

Adine byrjar prosessen med å finne ein regel ved å uttrykkje ein tenkt situasjon slik: «Ok, så visst det er 4 bord da. Vi sier det». Allereie her kan det tenkast at ein regel og ei eventuell kontekstuell eller symbolsk generalisering frå Adine vert utvikla frå ei faktuell generalisering fordi ho er avhengig av ein gitt del av eit mønster for å kunne seie noko generelt om det. Ho tek utgangspunkt i at ho har 4 bord og seier vidare at «da må vi tenke at det er 2 stoler på hver, altså sånn». I kombinasjon med dette peiker ho bortover bordet ho sit ved, og det ser ut til at ho meiner det er 2 stolar ved kvar langside på 1 bord. Dette resonnementet er ikkje spesifikt kopla til situasjonen ho har skildra med fire bord, og Adine gjer her ei *aritmetisk generalisering* ved hjelp av språket og bordet. Denne generaliseringa ser ut til å ha gitt meining for Maren fordi ho fortset på idéen til Adine og seier «ja, og så må vi bare gange hvor mange som er på den ene siden med den andre, og så legge til 2 i endene». Dette kan argumenterast for å vere ein regel som seier noko om kva som helst figur i eit mønster av bord og stolar og er dermed ei *kontekstuell generalisering*. Regelen krev samstundes forklarande kommentarar, då ein må vite korleis ein finn kor mange stolar som er på éi side eller allereie veit dette frå før for å kunne nytte den. Regelen er heller ikkje rett med tanke på oppgåveteksten. Å gange talet på stolar på den eine sida med talet på stolar på den andre sida vil ikkje vere eit naturleg steg for elevane for å finne talet på stolar til eit gitt tal på bord. Det ser likevel ikkje ut til at dette skapar forvirring, og det kan tenkast at Adine forstår «å gange hvor mange som er på den ene siden med den andre» som ei dobling av svaret når ho seier «ja, det er vel egentlig bare det». Vidare reformulerer Maren seg i neste utsegn. Der har ho byta ut faktoren og variabelen «tal på bord» frå utsegna før med konstanten «2». Det verkar som om at medelevane forstår kva ho tenker, sjølv om det vert uttrykt feil.

Basert på diskusjonen til elevane kan ein altså tolke at dei kjem fram til følgjande regel: «Ein må finne ut kor mange stolar det er på 1 side og så gange dette med 2. Deretter skal ein plusse på 2. For å finne ut kor mange stolar det er på 1 side gangar ein talet på bord med 2, og så gangar ein produktet med 2». I prosessen med å kome fram til ein slik regel brukar Maren formuleringa «2 stoler på hver» der det grunna peikinga hennar kan tenkast at ho meiner «to stoler på hver langside til borda». Det kan difor seiast at ho nyttar språket og peiking saman som semiotiske verkemiddel for objektivisering i vegen mot den kontekstuelle generaliseringa.

Maren og Adine byrjar diskusjonen her med å gjenta kva dei skal gjere når dei seier «så vi skal lage en regel» og «som sier hvordan man regner ut tallet på stoler […]». Dette ser eg på som presise og lite personlege utsegner, dermed knytt til skuleregisteret. Adine går vidare med å uttrykkje ein tenkt situasjon slik: «ok, så visst det er 4 bord da». Grunna oppgåveteksten er dette truleg eit steg i prosessen for å kome fram til ein regel som kan gi talet på stolar til eit kva som helst tal på bord. Utsegna er uformell grunna bruken av «da» som kan seiast å vere overflødig då det ikkje tilfører ei vesentleg matematisk meining til setninga. Dette gjer språket kvardagsleg. Ho byrjar her på ei noko komplisert setningsoppbygging ved hjelp av «så», men fortel ikkje kva følgja av vilkåret ho presenterer blir. Utsegnea er dermed ikkje fullstendig. Basert på dette kan det seiast at Adine byrjar resonneringa si i eit kvardagsregister. Vidare fortset ho med: «Og så skal vi finne ut. Da må vi tenke at det er 2 stoler på hver, altså sånn». I denne aritmetiske generaliseringa brukar ho òg eit kvardagsregister. Dette fordi ho her er for lite presis til at språket kan vere av eit skuleregister. Med det meiner eg at språket hennar i seg sjølv er avhengig av at ho peiker for at det skal skape meining. Dessutan nyttar ho «vi» som gjer resonnementet knytt til deira erfaringar.

Maren fortset med «så må vi bare gange hvor mange som er på den ene siden med den andre, og så legge til 2 i endene». Ho er som Adine upresis i utsegna si, men her med grunnlag i at ho ikkje seier kor mange «kva-for-noko». Det kan med andre ord seiast at ho unngår å nytte einingar, som her hadde vore «stoler». Dette, saman med at utsegna presenterer temporale samanhengar, gjer at språket kan seiast i hovudsak å vere basert på kvardagregisteret. Hennar neste utsegn «du finner ut hvor mange det er på én side og så ganger du det med 2 og så tar du pluss 2 på endene» kan òg kategoriserast i kvardagsregisteret. Dette kjem av same grunnar: mangel på einingar og ei setningsoppbygging som inneber temporale samanhengar. Utsegnene til Maren har også innslag frå eit teknisk register då ho nyttar ordet «side», sjølv om ordet òg kan vere kvardagsleg når ein snakkar om folk som sit rundt eit bord.

For å forklare korleis ein kan finne ut kor mange stolar det er på éi side, etter at lærarstudenten har etterspurt dette, seier Maren «du tar hvor mange bord det er og ganger med 2». Bruken av «du» gjer at ho her knyter forklaringa til personlege erfaringar. «Du tar hvor mange bord det er» kan dessutan seiast å vere ein uformell bruk av språket då det ikkje er heilt korrekt bruk av norsk. Basert på dette kan det argumenterast for at også denne utsegna er frå kvardagsregisteret. Snorre følgjer opp med «så ganger du det med 2 for å finne den andre, pluss 2» som viser ein temporal samanheng til Maren si utsagn ved hjelp av «så» («Du tar […]. Så ganger du […]») og brukar «du» som gjer forklaringa personleg. Han seier heller ikkje kva «den andre» er og ein må difor vere i situasjonen eller følgje samtalen for å forstå kva han meiner. Snorre sitt språk kan difor seiast å vere basert på eit kvardagsregister.

Oppsummert er stort sett heile samtalen kring denne oppgåva basert på eit kvardagsregister. Ved hjelp av dette språkregisteret og peiking på bord kjem elevane fram til generaliseringar både av aritmetisk nivå og kontekstuelt nivå. Det er i diskusjonen fleire stadar der elevane snakkar om stolar, men unngår å bruke nettopp ordet «stolar». For å uttrykkje talet på stolar, og for å objektivisere denne variable storleiken i generaliseringar nyttar Adine fleire gongar formuleringa «hvor mange det er».

Utdrag 8 – Snorre, Maren og Adine diskuterer den same regelen som Kristoffer, Helene og Oliver

Utdraget under viser korleis Snorre, Maren og Adine (gruppe 3) under andre datainnsamling drøftar den same regelen som gruppe 2 (i utdrag 6): *du gangar talet på bord med 2 og legg til 1. Så må du doble dette talet. Det er talet på stolar som du kan plassera rundt borda.* Som hjå gruppe 2 kjem ikkje elevane opp med ei kontekstuell generalisering sjølv her, men regelen dei diskuterer kan som vist kallast ei kontekstuell generalisering, og episoden er difor plassert i dette del-kapittelet. Før gruppa går i gang med denne oppgåva vil eg nemne at gruppa sjølv hadde kome fram til ein liknande framgangsmåte for å finne talet på stolar gjennom dei tidlegare deloppgåvene dei har arbeidd med. Dei tenkte «2*(éi side av bordet)+2», medan regelen er «det doble av (2*talet på bord+1). Dette gjer oppgåvedelen lettare for dei, og den kan dessutan verke noko meiningslaus sidan dei allereie har nytta regelen for å kome fram til svar i tidlegare oppgåver.

Utdrag 8:

SNORRE:	Så visst du har 1 bord da, og så ganger du det med 2, så får du 2 stoler, og så legger du til 1, da får du 3. Og så dobler du det så får du 6. Ja, den er helt rett da.
MAREN:	Ja for hun finner 1 side pluss 1 ende, og så bare dobler du det. Så har man jo 2 sider og 2 ender
ADINE:	Ja, den stemmer den

Før denne dialogen starta har Snorre akkurat gjentatt regelen i oppgåveteksten. Av utdraget kan ein sjå at han viser korleis regelen kan nyttast dersom ein skal finne talet på stolar til eitt bord. Han konkluderer med at regelen er rett fordi den gir han talet 6 som er talet stolar. Det verkar som at Snorre forstår prinsippet i den kontekstuelle generaliseringa i regelen om at denne kan gjelde for kva som helst del av mønsteret då han gir eit tilsynelatande tilfeldig vilkår for å teste regelen: «så visst du har 1 bord da». Maren ser ut til å vere einig og fortset å forklare kva regelen seier at ein skal gjere. Ho tek utgangspunkt i ein generell situasjon, ikkje berre eit tilfeldig valt tal på bord. Adine er tilsynelatande einig med medelevane sine då ho oppsummerer diskusjonen og konkluderer med «ja, den stemmer den». I motsetnad til Kristoffer, Helene og Oliver (gruppe 2) nyttar elevane her einingane «bord» og «stolar» for å omtale variablane i oppgåva. Gruppe 3 kjem òg fram til motsatt konklusjon av gruppe 2: regelen stemmer. Snorre sin strategi for å avgjere om regelen er korrekt eller ikkje handlar vidare om å teste den ut på ein situasjon som tilsynelatande er tilfeldig for han. Med-elevane hans ser ut til å vere einige i forklaringa hans, og dette kan tyde på at elevane forstår eit prinsipp om at ein generell regel må kunne passe kva som helst del av eit mønster.

Der Snorre viser korleis han har forstått den kontekstuelle generaliseringa og regelen, bruker han eit kvardagsregister. Han byrjar med «så visst du har 1 bord da» og brukar dermed språket på ein meir personleg måte enn dersom han hadde bytta ut pronomenet «du» med «man». Det er heller ikkje ein formell språkbruk i dette då han byrjar setninga med «så» som kan seiast å vere overflødig. Dette gjer at første del av forklaringa hans kan kategoriserast i eit kvardagsregister. Vidare fortset han med «så ganger du det med 2, så får du 2 stoler, og så legger du til 1. Da får du tre. Og så dobler du det så får du 6». Desse setningane er òg knytt til personlege erfaringar grunna bruken av det personlege prenomenet «du». Dette, saman med bruken av «så» for å vise temporale samanhengar gjer at han held fram med eit kvardagsregister. Det er bruken av temporale samanhengar og det personlege preget i Maren si oppfølging av Snorre som gjer at språket hennar også kan seiast i hovudsak å vere basert på eit kvardagsregister. Med andre ord går i hovudsak diskusjonen av regelen og den kontekstuelle generaliseringa føre seg ved hjelp av det kvardagslege registeret, og elevane kjem som sagt fram til rett konklusjon med dette.

6.0 Diskusjon

I dette kapittelet diskuterer eg funn frå studien saman med teori og tidlegare forsking. Dette for å kunne svare på studien sine forskingsspørsmål med forankring i forskingsfeltet. Eg diskuterer først forskingsspørsmål 1 og deretter forskingsspørsmål 2. Det første forskingsspørsmålet er eit deskriptivt spørsmål, og hovudtyngda i diskusjonen vil difor vere knytt til forskingsspørsmål 2. I samband med forskingsspørsmål 2 vil eg òg presentere didaktiske refleksjonar. Etter dette vil eg drøfte val av forskingsmetode og rammeverk, før eg avslutningsvis foreslår vidare forsking.

6.1 Forskingsspørsmål 1: Korleis brukar elevar ulike språkregister når dei diskuterer og arbeider med generalisering av mønster i matematikkfaget?

Dette forskingsspørsmålet er delvis svart på i teksten sitt funn-kapittel ved hjelp av tekst og utdrag frå diskusjonane, men eg vil her prøve å «samle trådane» og diskutere bruken av språkregister.

Det matematiske nivået, her målt ut i frå kva nivå av generalisering elevane nådde, som kom til syne i dei tre gruppene er ulikt. Studien sin design er ikkje høveleg for å samanlikne gruppene, blant anna fordi gruppe 2 og 3 arbeidde med ein fornya versjon av oppgåvesettet gruppe 1 fekk, og fordi det ikkje er godt nok kjent for meg kor mykje elevane har arbeidd med algebra før dei deltok i studien. I den første gruppa var det i hovudsak éin elev som løyste oppgåvene, og han fekk få faglege innspel frå medelevane. Gruppe 2 og 3 hadde eit betre samarbeid. Oppgåvesettet gitt til gruppe 2 og 3 var dessutan revidert med mål om å støtte elevane betre i arbeidet med algebraisk tenking. Utan å samanlikne gruppene vil eg likevel peike på forskjellane i matematisk nivå for å vise korleis språkbruken kjem til syne i ulike nivå av generaliseringar. Generaliseringane som kunne sjåast i gruppe 1 sin diskusjon var i hovudsak aritmetiske, og eg kunne ikkje identifisere eit høgare nivå enn det faktuelle. I gruppe 2 og 3 sine diskusjonar kunne ein sjå aritmetiske, faktuelle og kontekstuelle generaliseringar.

På alle dei tre gruppene vert det nytta både eit kvardagsregister og eit skuleregister om ein annan. På gruppe 1 byrjar alle diskusjonane knytt til generaliseringsprosessar i skuleregisteret. På gruppe 2 og 3 varierer dette: somme diskusjonar startar i skuleregisteret og somme i kvardagsregisteret. Eit interessant funn knytt til dette er korleis diskusjonane utviklar seg med tanke på registerbruk. Alle diskusjonane i gruppene som byrjar i skuleregisteret blir anten verande i dette, eller så endrar dei seg til å ende i eit kvardagsregister. Diskusjonane som startar i eit kvardagsregister blir verande i dette. Dersom ein diskusjon endar i eit kvardagsregister har dette registeret vore nytta av elevane frå start. Det er altså ingen av gruppene som byrjar i eit kvardagsregister og går mot eit skuleregister. Eg vil understreke at overgangane mellom dei ulike språkregistra er flytande, og når eg skriv at ein diskusjon er i eit spesifikt språkregister meiner eg at diskusjonen i hovudsak er prega av dette.

Eit teknisk register kan identifiserast i alle gruppene i form av tekniske ord. Dei tekniske orda identifisert på gruppe 1 er «kantene», «helt», «halve». På gruppe 2 er det tekniske ordet «side» brukt, og det same gjeld for gruppe 3. På gruppe 3 er også «dobler» nytta. Det eg vil seie kjenneteiknar det tekniske registeret elevane nyttar er at orda i dette også er kvardagslege. Med det meiner eg at dei vert nytta av elevane utanfor matematikkfaget.

Elevane vel også dei kvardagslege orda «plusse» og «dele» når dei brukar og omtalar dei fire grunnleggjande rekneoperasjonane. Dei vel altså ikkje tekniske ord som «addere» og «dividere». Det ser ut til at elevane som deltok i studien gjennomgåande ikkje nyttar tekniske ord dersom dei har eit meir kvardagsleg og dermed naturleg ord å bruke som synonym. Eg vil hevde dette ikkje er overraskande grunna alderen deira og kva undervisning dei truleg har hatt. Orda «plusse» og «dele», som potensielt kunne vore «addere» og «dividere», er heller ikkje tvetydige i denne samanheng. Nivået av presisjon i utsegna som inneheldt desse orda blir difor verande likt dersom ein byter dei med tekniske ord. Då har det ingen meirverdi at elevar heller brukar orda «addere» og «dividere». Elevane klarte å arbeide seg gjennom oppgåvene med akseptable svar på dei fleste oppgåvene utan å bruke det tekniske registeret, utover tekniske ord. Dette er unnateke gruppe 2 som i éi oppgåve misforstod ein gitt regel, og dette vil eg kome tilbake til.

Elevane i gruppe 2 og 3 kom fram til ei kontekstuell generalisering som det høgaste generaliseringsnivået. I diskusjonane kring dette er kvardagsregisteret særleg framtredande. Gruppe 2 byrja prosessen mot å kome fram til den kontekstuelle generaliseringa i kvardagsregisteret og haldt seg i dette. Gruppe 3 byrja diskusjonen og prosessen i eit skuleregister. I gruppe 3 sin diskusjon mot den kontekstuelle generaliseringa kan det identifiserast aritmetiske generaliseringar, og desse er uttrykt av eit kvardagsregister. Diskusjonane til gruppene mot generaliseringa kan indikere at det ikkje er ein samanheng mellom registertype og generaliseringsnivåa frå aritmetisk generalisering til kontekstuell generalisering. Samstundes var ikkje dei kontekstuelle generaliseringane uttrykt ved hjelp av eksplisitte reglar, noko som truleg kan vere ei utfordring dersom det neste målet er symbolske generaliseringar. Mangelen på eksplisitte reglar kan ha samanheng med fråværet av teknisk register i generaliseringsprosessen. Dette kjem eg tilbake til.

6.1.1 Korleis nyttar elevane språket for å drøfte mønster?

I generalisering av mønster er det ifølgje Radford viktig å leggje merke til kva som er felles i alle delane av det («grasping a commonality»). Dette har elevane i studien uttrykt ved språk fleire stadar. I gruppe 1 er det som er felles uttrykt ved hjelp av skuleregisteret og historia gitt i oppgåva (det kjem 8 gjester på døra). Slik er elevane si forklaring av kva som er felles i mønsteret avhengig av den gitte konteksten og lite abstrakt. Dei brukar også teikningar. Gruppe 2 brukar òg ein konkret kontekst for å kunne seie kva som er felles i mønsteret. Dei viser at det er to stolar på kvar side av eitt bord, ved hjelp av ei teikning av tre bord. På denne ser dei at det vil vere seks stolar på kvar langside av langbordet. Dei følgjer derimot ikkje ei historie (om at det kjem gjester) i like stor grad som gruppe 1. Gruppe 2 bruker eit kvardagsregister for å vise kva som er likt i mønsteret. Gruppe 3 nyttar også ein gitt kontekst og eit kvardagsregister for å vise kva som er likt i mønsteret: «ok, så visst det er 4 bord da […] Da må vi tenke at det er 2 stoler på hver». Adine på denne gruppa peiker på ei teikning for å vise kvar det vil vere 2 stolar.

6.2 Forskingsspørsmål 2: Korleis kan språk verke som ein ressurs og/eller eit hinder i elevar sitt arbeid med generalisering?

I dette delkapittelet diskuterer eg korleis språket elevane har brukt kan sjå ut verke som ein ressurs eller eit hinder i generaliseringsprosessane deira. Av analysen kjem det fram flest funn som tyder på at språket kan verke som ein ressurs, men det er også funn som indikerer at språket kan ha vore eit hinder.

6.2.1 Kvardagsregisteret si rolle

I gruppe 1 sine diskusjonar kunne eg berre identifisere algebraisk tenking uttrykt av Jonas. Han kom fram til ei aritmetisk generalisering. Diskusjonen bar preg av at Jonas først svarte på det oppgåva bad om og deretter utdjupa forklaringa si til medelevar. Han byrjar alle forklaringane sine i eit skuleregister, men når han formulerer desse på nytt med mål om å vise medelevar korleis han tenker, går han over til eit kvardagsregister. At elevane bruker eit kvardagsregister for å utdjupe korleis dei tenkar kan òg sjåast i gruppe 2 og 3. Ifølgje Prediger og Wessel (2013) kan elevar som ikkje meistrar å bruke skuleregisteret ha problem med argumentasjon og relasjonell forståing, fordi ord og uttrykksmåtar frå skuleregisteret ofte vert nytta for å forklara komplekse tankegangar og resonnement. Det er vanskeleg å seie om medelevane til Jonas forstod betre etter register-skiftet hans frå skuleregisteret til kvardagsregisteret. Dette fordi dei deltok lite i samtalen. Fordi Jonas veksla til eit kvardagsregister utover i forklaringa si kan det likevel tenkast at han sjølv, truleg umedvite, har ein idé om at utfordringar knytt til skuleregisteret kan skape problem i å oppnå relasjonell forståing eller i å forstå resonnement. Basert på dette samsvarar studien min med Prediger & Wessel om at det å ikkje meistre eit skuleregister vil kunne vere eit hinder.

At eit kvardagsleg register vert nytta for å utdjupe matematisk tenking er i tråd med forskinga til Nilssen (2020), som syner at kvardagsregisteret kan hjelpe elevar med å tilpasse matematisk innhald og dermed få ei djupare forståing. Nilssen (2020) har undersøkt elevar sin språkbruk i arbeid med modelleringsoppgåver, og det kan på grunnlag av mine funn og hennar forsking tenkast at matematikkoppgåver enkelt må kunne knytast til kvardagen for at eit kvardagsregister skal kunne verke som ein ressurs. Modelleringsoppgåver er nemleg oppgåver som er baserte på at den realistiske verda og den matematiske verda skal koplast saman, og bord-og-stol-oppgåva elevane fekk er basert på reelle kontekstar. I følgje Prediger et al. (2016) er det hensiktsmessig å nytte eit kvardagsregister for å kople matematiske strukturar og kvardagslege situasjonar saman, og det kan difor tenkast at det kvardagslege registeret ikkje hadde vore like hjelpsamt i meir abstrakte matematikkoppgåver (med mindre elevane klarar å kople det til erfaringar frå kvardagen som ikkje er openberre).

Jonas på gruppe 1 klarar også å kome opp med ei faktuell generalisering («det blir pluss 4 folk som kan sitte på hvert bord du plusser på der»). Dette er når han uttrykker ein regel som kan nyttast av alle familiar for å finne ut kor mange bord dei treng for eit kva som helst tal på gjester. På vegen mot den faktuelle generaliseringa uttrykkjer han først ei aritmetisk generalisering («når du har 2 bord og plusser på 1 til så blir det pluss 4 personer som kan sitte langs bordet») og nyttar i hovudsak eit kvardagsregister, men trass bruken av kvardagsregisteret vert det behov for ei ny formulering overfor medelevane hans. Han formulerer seg på nytt fleire gongar, og i dette nyttar han òg kvardagsregisteret. At han held seg til kvardagsregisteret når han forstår at medelevane hans ikkje forstår resonnementa hans kan òg seiast å støtte forskinga til Prediger & Wessel (2013) som syner utfordringar med relasjonell forståing dersom ein ikkje meistrar å bruke og/eller forstå eit skuleregister. Basert på registerskiftet til Jonas, frå skuleregister til kvardagsregister, kan det også her tenkast at han sjølv har ein tanke om at det er utfordringar knytt til skuleregisteret på gruppa. Jonas sin registerbruk kan slik indikere at kvardagsregisteret er ein ressurs i generaliseringsprosessar der elevar ikkje meistrar skuleregisteret.

Elevane på gruppe 1 vert bedne om å forklare regelen som Jonas gav ved hjelp av ei faktuell generalisering, omtala i førre avsnitt, på ein annan måte. Jonas byrjar å løyse deloppgåva ved hjelp av skuleregisteret og forklarer med dette regelen gjennom å vise ei aritmetisk generalisering (for kvart «fullt 4-tall» er det trong for 1 nytt bord). Utover i forklaringa av regelen går han over til eit kvardagsregister, men skiftar mellom dette og skuleregisteret fleire gongar. Denne vekslinga mellom register vert identifisert i det han forklarar regelen gjennom å seie kva medelevane skal gjere reint praktisk med bord og stolar. Han viser med andre ord ikkje ein meir abstrakt måte å rekne ut talet stolar på. Dette kan sjå ut til å støtte Prediger et al. (2016) si forsking der dei fann at elevane nytta eit kvardagsspråk nettopp for å få tak på matematisk innhald for å gjere dette meir forståeleg ved å kople det til noko konkret og eigne erfaringar. I følgje Prediger et al. (2016) er det hensiktsmessig å nytte eit kvardagsregister for å kople matematiske strukturar og kvardagslege situasjonar saman, og det kan tenkast at det er dette Jonas prøver på ved å forklare medelevane konkret kva dei skal gjere. På ei annan side er oppgåva elevane har fått nokså kvardagsleg med tanke på den gitte konteksten med bord og stolar, og dette kan ha påverka elevane til å bli verande i ein kvardagsleg kontekst i diskusjonen av oppgåvene.

Gruppe 2 kom fram til ei kontekstuell generalisering, og for å uttrykke denne vart eit kvardagsspråk i hovudsak brukt. Oliver gjer ei kontekstuell generalisering når han uttrykkjer ein regel for korleis ein kan finne talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord. For å uttrykkje den algebraiske tenkinga si har Oliver i dette tilfellet kopla det matematiske innhaldet i oppgåva, å uttrykkje ein regel, med det kvardagslege ved å seie «du tar antall stoler […]» og «så ganger du det med antallet med bord […]». Basert på at det kvardagslege språket vert nytta i ei kontekstuell generalisering kan det også her sjå ut til at studien min samsvarar med Prediger et al. (2016) si forsking som syner at elevar gjerne nyttar eit kvardagsspråk for å forstå matematisk innhald. I funn-kapittelet (kapittel 5) syner eg korleis gruppe 2 sin diskusjon kring tidlegare del-oppgåver kan ha bidratt til at Oliver kom opp med denne kontekstuelle generaliseringa. I desse diskusjonane kunne det identifiserast både aritmetiske og faktuelle generaliseringar, og det var i hovudsak eit kvardagsregister som var nytta for å uttrykkje desse. Fordi elevane her starta oppgåvediskusjonane i eit kvardagsregister støttar studien også her teorien til Prediger et al. (2016) om at elevar gjerne nyttar eit kvardagsregister for å få tak i det matematiske innhaldet i oppgåvene.

6.2.2 Eit fråvær av det tekniske registeret

Prediger et al. (2016) peika på at det for elevar kan lette arbeidet med å finne løysingar på matematiske problem dersom dei vekslar mellom eit teknisk register og eit kvardagsregister (s. 200). Av funna mine kjem det fram at nokre elevar meistrar å uttrykkje aritmetiske generaliseringar og algebraiske generaliseringar, berre ved hjelp av kvardagsregisteret og skuleregisteret. Nokre av elevane nådde kontekstuelle generaliseringsnivå med berre innslag av tekniske ord i diskusjonen. Med grunnlag i Carraher et al. (2008) si forståing av matematisk generalisering kan det difor seiast at nokre av elevane har oppnådd ei relativt god forståing for generalisering sjølv om dei ikkje vekslar mellom teknisk register og kvardagsregister. På ei anna side er ikkje dei kontekstuelle generaliseringane uttrykt gjennom eksplisitte formlar, og ingen av gruppene ingen av gruppene nådde heller ei symbolsk generalisering. Symbolske generaliseringar krev at ein uttrykkjer seg ved hjelp av det alfa-numeriske og semiotiske systemet i algebra (Radford, 2010), og det tekniske registeret vert nytta for å uttrykkje strukturelle og kvantifiserbare relasjonar i matematikkfaget (Prediger et al. 2016). Basert på dette kan det tenkast at fråværet av teknisk register i diskusjonen kan ha vore med på å hindre elevane i å uttrykkje eksplisitte reglar eller å nå det symbolske nivået, som ifølgje Radford er det eit mål for å oppnå ei djupare forståing kring generalisering. Dette samsvarar med Prediger et al. (2016) som hevdar at det å meistre eit teknisk register kan bidra i løysing av matematiske problem. På ei anna side er det mykje anna som kan ha hindra elevane i å kome opp med eksplisitte reglar og symbolske generaliseringar. Symbolske generaliseringar var ikkje noko me forventa av elevane på sjette og sjuande trinn då me utforma oppgåvene i studien. Oppgåvene var også utforma slik at elevane kunne svare «korrekt» på alle oppgåvene utan å kome opp med ei symbolsk generalisering. Samstundes kan det tenkast at fråværet av teknisk register i diskusjonane kan ha hindra elevane i

6.2.3 Utfordringar knytt til matematisering av verkelege situasjonar

Både rekursive og eksplisitte formlar knytt til figurmønsteret kan indirekte identifiserast i studien sitt datamateriale. Med dette meiner eg at det i elevdiskusjonane kan identifiserast spor av matematiske formlar, men desse er underliggjande i diskusjonen fordi elevane ikkje sjølve formulerer ein tydeleg eller presis matematisk formel. Jonas (gruppe 1) ser ut til å forstå at 2 bord gir plass til 10 personar og at ein kan legge til midtbord og dermed 4 personar. Av dette kan ein sjå ein underliggjande algebraisk symbolsk formel: $10 + (n-2)*4$. Her er «n» talet på bord. Språket han nyttar for å uttrykkje denne algebraiske tenkinga er i hovudsak prega av eit kvardagsregister. Fordi han koplar oppgåva til eigen kvardag på ein korrekt måte kan det tenkast at han forstår det matematiske innhaldet i denne, men fordi gruppa er så avhengige av historia gitt i oppgåva i løysingsprosessen kan det tenkast at dei har utfordringar med å matematisere situasjonen. Dette er i tråd med Petersen (2015) sin studie som fann at det for mange elevar er vanskeleg å uttrykkje seg matematisk korrekt. Mange elevar har relativt god kontroll på resonnering og fortolking opp mot kontekstar, men det er vanskeleg for dei å matematisere desse situasjonane (Petersen, 2015). I min studie klarar Jonas nettopp å forstå korleis mønsteret med bord og stolar utviklar seg og korleis ein kan finne talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord, men han samanfattar ikkje dette som ein tydeleg matematisk regel.

Som vist i kapittel 6.1 er det tekniske registeret svært fråverande i elevane sine diskusjonar. Det er også vanskeleg for elevar å matematisere situasjonar eller kome opp med eksplisitte formlar dersom dei ikkje har kjennskap til naudsynte matematiske idéar eller konseptuelle strukturar (Carraher et al., 2008). Dette kan kome av at dei er lite eksponert for eit teknisk register. Teknisk register vert som vist nytta når ein skal uttrykkje strukturelle og kvantifiserbare relasjonar, eller når ein skal prøve å skildre matematiske strukturar frå verkelege situasjonar (Prediger et al., 2016). Det kan difor tenkast at mangelen på eit teknisk register i diskusjonane er eit hinder i elevane si matematisering av situasjonar. Dette kan vidare vere grunnen til at dei ikkje nyttar symbol (som til dømes bokstavar) for å uttrykkje variablar i forsøk på å matematisere situasjonar, slik ein ofte ser i eksplisitte formlar i matematikkfaget. Basert på LK20 er bokstavrekning noko elevar gjerne vert undervist i på dei aktuelle trinna i studien (Kunnskapsdepartementet, 2019), men denne måten å uttrykkje variablar på er truleg relativt nytt og lite kjend for elevane. Det kan tenkast at dette er eit konsept elevane, og her Jonas, manglar kjennskap til for å kome opp med ein eksplisitt regel. At elevane i studien har utfordringar knytt til å matematisere kvardagslege situasjonar kan òg støtte Kieran (2004) sin teori om at eit fokus på tal og bokstavar i staden for berre tal åleine (praksis 4) vil vere hensiktsmessig for tilrettelegging av algebraisk tenking. Ein eksplisitt formel kan uttrykkast med eit naturleg språk og ord. Slik sett er argumentet om lite kjennskap til bokstavrekning som grunn for eit fråvær av eksplisitte formlar svakt. Basert på Jonas sin mangel på å uttrykkje ein eksplisitt formel ser det likevel ut for at idéen om at ord kan stå for ein verdi som kan reknast ut i ein matematisk regel er utfordrande for elevane. Det er likevel ikkje sikkert at Jonas ikkje hadde klart å kome opp med ein eksplisitt regel eller ei meir presis matematisering av situasjonen dersom han hadde blitt rettleia mot dette. Sidan diskusjonen i gruppa hans var prega av få faglege innspel frå jentene kan det tenkast at han prøvde å forklare dei si matematiske tenking på ein kvardagsleg og konkret måte medviten.

Wettergren et al. (2021) undersøkte utfordringar med matematisering av situasjonar frå ein annan innfallsvinkel. Dei skildrar korleis elevar ser på det matematiske i algebraiske uttrykk dei får utlevert. Eitt av funna deira er at elevar ofte ser på algebraiske uttrykk som noko som skal reknast ut, og dette kan sjå ut til å vere tilfelle hjå elevane eg studerte òg. Då gruppe 2 vart bedne om å formulere ein regel som fortel korleis ein kan rekne ut talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord, uttrykte Oliver følgjande: «Du tar antall stoler på hvert bord og så ganger du det med antallet med bord og så får du svaret. Nei så får du et svar og så plusser du det med 2». Basert på ordbruken «så får du svaret» og «så får du et svar» kan det tenkast at han ser på matematiske uttrykk som noko som skal reknast ut. Han klarer å løyse oppgåva og nyttar kvardagsregisteret til å uttrykkje ei kontekstuell generalisering. Dette kan vidare vise at språket er ein ressurs i Oliver si oppgåveløysing fordi han er avhengig av ei kvardagsleg formulering for å kunne uttrykkje ein matematisk regel. Dette samsvarar med Prediger et al. (2016) sine funn om at elevar ofte nytta kvardagsregisteret til å få tak i det matematiske innhaldet i oppgåver. På ei anna side kan bruken av «svaret» tyde på at Oliver ikkje ser på talet stolar som eit eige matematisk objekt, altså ein variabel, men noko som skal reknast ut, slik Wettergren et al. (2021) òg fann. I følgje Radford er det å kunne analysere variablar ein viktig del av algebraisk tenking. Slik sett kan det seiast at måten Oliver bruker språket sitt på, med ordet «svaret», er eit hinder for å få ei god forståing for variabelomgrepet i matematikk.

Måten elevane på gruppe 2 bruker språket kan tenkast å vere eit hinder i oppgåva der dei skal drøfte om ein gitt regel stemmer eller ei. Elevane på gruppe 2 misforstod den gitte regelen dei fekk utlevert. Av elevdiskusjonen kring regelen ser det ut til at synet elevane har på algebraiske uttrykk, samsvarar med Wettergren et al. (2021) sine funn om at elevar ser på algebraiske uttrykk som noko skal reknast ut. Oliver hevdar nemleg at «det spørs jo hvor mange bord», noko som kan tyde på at han ikkje ser på regelen som generell og berre trur den gjeld for ein situasjon med to bord. Dette kan òg koplast til Mason (1996) sin teori om at elevar ofte ser på noko generelt som noko spesielt. Oliver, som i tidlegare diskusjonar har brukt kvardagsregisteret mest i utdjupingar av forklaringar held seg her til eit skuleregister. Dette kan tenkast å vere fordi dei diskuterer ein gitt regel uttrykt med skuleregister. Hans bruk av skuleregister og at han misforstår regelen gjer at studien min samsvarar med Prediger & Wessel (2013) som fann at elevar som ikkje meistrar eit skuleregister vil ha problem med relasjonell forståing i matematikk. Basert på dette kan det argumenterast for at språklege kunnskapar som gjer at ein meistrar å bruke og forstå skuleregister vil kunne verke som ein ressurs for elevar matematikkfaget.

6.2.4 Utfordringar knytt til variabelomgrepet og elevane sine måtar å uttrykkje den ukjende

Eit anna funn frå Wettergren et al. (2021) sin studie er at elevar ofte oppfattar at det finst eit bestemt tal eller eit bestemt siffer bak ein bokstav. Elevar kan med andre ord ha vanskar for å forstå det matematiske omgrepet «variabel». Dette kan overførast til å vere ei utfordring knytt til elevar sitt arbeid med generalisering, fordi generaliseringsprosessar ofte handlar om å synleggjere ein variabel (objektivisering). Fordi elevane i studien klarte å kome opp med algebraiske generaliseringar både på eit faktuelt og eit kontekstuelt nivå vil eg vil her diskutere korleis elevane har nytta språket for å objektivisere, som kan vere utfordrande for elevar i arbeid med generalisering. Av datamaterialet frå den andre datainnsamlinga kom det fram ein tydeleg forskjell i korleis elevane omtala den ukjende eller variable storleiken i oppgåvene. Innad i gruppene er det likskapar, men mellom gruppene er det ein tydeleg forskjell.

Den første gruppa (Jonas) kjem fram til ei faktuell generalisering («det blir pluss 4 folk som kan sitte på hvert bord du plusser på der») og som vist i avsnitt 6.1.1 brukar gruppa i stor grad historia som er gitt i oppgåva for å forklare ulike algebraiske idear. Det vil her seie at elevane byggjer på historia med bruk av ord som «bord» og «stolar» og formuleringar som «så kommer det 4 til» (her snakk om gjester). Måten Jonas objektiviserer det ukjende talet på stolar her er ved hjelp av kvardagslege ord som dei konkrete gjenstandane «folk» og «bord» og kvardagsregisteret. Dei konkrete gjenstandane vert òg presentert av konkretar og teikningar.

Gruppe 2 går i alle diskusjonane i større grad vekk frå historia og seier ikkje «det kommer fire gjester til». Dei brukar likevel ord som «bord» og «stolar» for å forklare algebraisk tenking. Det er ikkje så overraskande at elevane nyttar desse orda då oppgåva handlar om desse. I den kontekstuelle generaliseringa elevane kjem opp med på gruppe to seier Oliver «du tar antall stoler på hvert bord». Dette kan seiast å vere eit generaliserande uttrykk, men Oliver nyttar dette her om ein konstant. I den gitte oppgåva er dette lik 4. Dette har dei andre gruppene ikkje gjort. Vidare seier Oliver «så ganger du det med antallet bord» som også kan seiast å vere eit generaliserande uttrykk. Det er interessant at han omtalar konstanten «4» og variabelen «tal på bord» på ein liknande måte med bruken av ordet «antall». Dette opnar for ytterlegare generalisering av situasjonen. Dette er gruppa som konkluderer feil på oppgåva som spør om den gitte regelen i oppgåvesettet stemmer. I heile diskusjonen kring denne oppgåva unngår elevane å namngi eller i det heile teke objektivisere den variable storleiken i mønsteret «talet på stolar». Det vert unngått med formuleringar som «fordi, det spørs jo hvor mange bord det er» og «for det spørs jo hvor mange bord» kor det ikkje blir kommentert «kva som spørs». Bruken av desse formuleringane, teikningar og eit skuleregister er nytta når elevane kjem fram til feil konklusjon. Her kan det sjå ut til at studien min støttar Prediger et al. (2016) sin teori om at elevar som ikkje meistrar å bruke eit skuleregister vil kunne ha problem med å forstå relasjonelle aspekt i matematikk. Det er berre i denne oppgåvedelen gruppe 2 unngår å objektivisere variabelen.

Gruppe 3 er den av gruppene som er mest abstrakte når dei forklarer algebraisk tenking. Dei kjem fram til ei kontekstuell generalisering, og i diskusjonen mot denne er det fleire stadar der elevane snakkar om stolar, men unngår å bruke ordet «stolar». For å uttrykkje talet på stolar nytta Adine til dømes fleire gongar formuleringa «hvor mange det er». Den variable storleiken er med andre ord lite namngitt, og fordi ein må vere i situasjonen for å forstå kva elevane snakkar om kan ein difor seie at dei uttrykkjer seg upresist. Trass dette har gruppa kome fram til ein matematisk korrekt regel for å gi talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord, og til dette har dei i hovudsak diskutert ved bruk av eit kvardagsregister.

6.2.5 Språket i kombinasjon med andre semiotiske verkemiddel

Sjølv om eg i studien undersøkjer korleis språket vert brukt er det vanskeleg å sjå vekk i frå andre semiotiske verkemiddel for objektivisering i samband med korleis elevar kjem fram til ulike generaliseringar. Spesielt det kvardagslege registeret, men og skuleregisteret har vore nytta i kombinasjon med peiking på illustrasjonar for å vise til dømes kvar det ikkje kan sitte nokon. Elevane har vidare objektivisert ved hjelp av dei semiotiske representasjonane *språk*, *konkretar* og *peiking*. Ei teikning eller illustrasjon av bord-og-stol-oppsett har vore sentral i fleire av gruppene sine forklaringsprosessar. Dette gjeld til dømes for Jonas si forklaring av hans algebraiske tenking til medelevane på gruppe 1, men teikninga er sentral også når han går vekk i frå dei generaliserande utsegnene. Teikninga her verkar som eit semiotisk verkemiddel for objektivisering i generaliserande utsegner, men òg som eit verkemiddel for å vise Synne kva ho skal gjere. Denne er nytta til å skape ei aritmetisk generalisering som igjen vert utgangpunktet på veg mot ei faktuell generalisering. Det kan difor sjå ut til at teikninga er viktig for utvikling av algebraiske generaliseringar her.

Av måten kvardagsspråket har vore nytta kan ein sjå at elevane har nytta språket som ein ressurs både for å kople det matematiske innhaldet i oppgåvene til deira kvardag for å gripe fatt i det oppgåva ber om. Det kjem også fram at elevar byter frå skulespråket til kvardagsspråket når dei formulerer seg på nytt eller utdjupar si algebraisk tenking til medelevar. Ved å sjå på korleis elevane objektiviserer i dei ulike generaliseringane dei kjem fram til kjem det fram at det kvardagslege språket ofte er kombinert med andre semiotiske verkemiddel, til dømes konkretar (her klossar og teikning) og peiking. Å meistre det kvardagslege registeret ser altså ut til å kunne vere ein ressurs i elevar si algebraiske tenking, men då ofte som ein del av fleire semiotiske verktøy som saman skapar meining.

6.2.6 Forskjellar i versjon 1 og versjon 2 av oppgåvesettet

Metoden i studien inneber ei revidering av oppgåvene elevane fekk, og dette vil eg kommentere her. Det er ikkje mogleg å seie at det er ein årsakssamanheng mellom generaliseringsnivåa og versjonane av oppgåvesetta, men vil likevel drøfte korleis oppgåvene i versjon to kan ha rettleia elevane betre. Dette er fordi elevane som arbeidde med denne versjonen nådde eit høgare generaliseringsnivå enn elevane som arbeidde med den første versjonen. Prediger & Wessel (2013) trekker fram argumentasjon og relasjonell forståing som område som krev at ein kan relatere ulike språkregister til kvarandre. Dei hevdar at det systematisk må skapast stunder i undervisning gjennom oppgåver og samtalar som legg til rette for at elevar nettopp får relatere ulike register til kvarandre. Versjon to av oppgåvesettet er meir i tråd med dette enn versjon éin. Fordi elevane som får meir rettleiing når eit høgare generaliseringsnivå indikerer dette at dei trenger rettleiing i generaliseringsprosessar på sjette og sjuande trinn.

Då elevane på gruppe 2 arbeidde med å finne talet på stolar til 3, 4, 8 og 42 bord kjem det fram at dei forstår at ein teljestrategi ikkje vil verke når dei skal finne talet på stolar til eit stort tal bord. Dette er i tråd med Carraher et al. (2008) si anbefaling om å nytte store tal for å rettleia elevane vekk frå rekursive strategiar. Funnet kan òg tyde på at dei sjølv ser det Radford (2010) peika på som ei utfordring med induktive prosedyrar, nemleg at desse ikkje vil verke når oppgåvene elevane møter vert meir avanserte. I arbeid med mønster og generalisering må lærarar vere observante på kva som er algebraisk tenking og bruke pedagogiske strategiar for å leie elevane inn på algebraisk tenking (Radford, 2010, s. 40). Funn i min studie indikerer at dette kan sjå ut til å vere spesielt viktig i utforming av oppgåvetekstar. Dersom oppgåvene stiller dei rette spørsmåla så vil dette kunne hjelpe elevane sjølv til å forstå at dei må finne strategiar som ikkje er induktive. At dette automatisk vil skje kan eg ikkje seie sikkert, og heller tvert i mot grunna ulike forkunnskapar hjå elevar. Funn frå studien min indikerer likevel at det kan ha vore til hjelp.

6.3 Didaktiske refleksjonar

Basert på forskingslitteraturen eg har lagt til grunn for denne studien kan det seiast å vere ei semje om at språk påverkar læringsmoglegheiter. Prediger & Wessel (2013) løftar fram at undervisningsopplegg som kan betre elevar sine ferdigheiter knytt til undervisningsspråket er viktig (s. 435). Deira tilnærming til dette handlar om å systematisk rettleie elevar i å samanlikne register og veksle mellom dei. Fordi studien min støttar tidlegare forsking om at språklege ferdigheiter er viktig for matematisk forståing støttar den difor òg den didaktiske implikasjonen gitt av Prediger & Wessel her, altså å medvite legge til rette for at elevar får arbeide med og bruke ulike språkregister. Planas (2016) peiker på at det er viktig å ha eit ressursorientert syn på språket i klasserommet og å vite korleis ein støttar språkleg utvikling i matematikk (s. 32-33). Eit mål med studien er at denne kan bidra til å vise korleis ein konkret kan utnytte ressursane som ligg i språk. Basert på funna i studien min meiner eg oppgåver der elevar skal bruke språket på ein måte slik at dei aktivt vekslar mellom eit kvardagsregister og eit skuleregister bidrar til at dei betre forstår algebraiske konsept og utviklar deira algebraiske tenking. Det er ikkje naudsynt at elevane sjølv er medvitne på veksling av register, og oppgåvene må dermed stimulere til veksling utan at elevane eksplisitt blir bedt om å veksle mellom eit skulespråkregister og eit kvardagsregister.

Ei oppgåve som inviterer elevar til å diskutere og veksle mellom ulike register vil kunne vere i tråd med Vygoskij sitt syn på læring som ligg til grunn for denne studien. Eit premiss her er at læring vil skje dersom ein nyttar språket i ein sosial kontekst (Vygotsky, 1978, s. 126), og ein kan gjerne bruke dette til å skildre og snakke om fenomen på ulike måtar (Säljö, 2016, s. 111). Det kan likevel vere vanskeleg å sjå føre seg korleis elevar vil diskutere og bruke språk. Det kan dermed argumenterast for at det er viktig å jamleg gi elevar slike oppgåver og å følgje dei opp i etterkant av løysinga for å betre kunne vurdere elevane sitt utbytte og deira løysingsstrategiar.

6.4 Svakheiter med forskingsdesign og rammeverk

Prediger et al. (2016) peika på at eit skuleregister ofte kan sjåast igjen i matematikkbøker, og sjølv om slike oppgåvetekstar ikkje er utarbeidd med ei spesiell medviten kopling til skuleregisteret, kan dette identifiserast i desse. Døme på dette er «finn ein regel» og «[hjelp familien] å finne ut kor mange bord dei treng for eit kva som helst tal på personar». Det kan difor tenkast at elevane vert påverka av oppgåvetekstane, men at dei vekslar til eit kvardagsspråk for å få tak i kva som er det matematiske innhaldet i oppgåva. Eg har ikkje analysert teksten i oppgåvene elevane fekk utgitt vidare, men eg vil tru denne kan ha påverka ordvalet til elevane. Dette kan vidare ha påverka kva for register eg kunne identifisere i diskusjonane. Slik kan dette vere eit motargument til påstanden om at elevar gjerne nyttar eit kvardagsregister fordi dei sjølv har ein idé om at skuleregisteret kan vere utfordrande å bruke i matematisk resonnering (Prediger et al., 2016). Eg vil likevel hevde at det er interessant å sjå korleis elevane diskuterer og brukar språkregister fordi det svært ofte er i kombinasjon med skriftlege oppgåver at elevar på sjette og sjuande trinn diskuterer matematikk. Oppgåvetekstane vil ikkje vere utarbeidd med ein medviten språkbruk og oppgåvetypen elevane har fått i denne studien er slik sett representative for kva dei normalt kunne fått. Elevar les og forstår oppgåvetekstar på ulike måtar og vil ikkje berre vere påverka av oppgåveteksten i påfølgjande diskusjonar. Dette fordi dei påverkar kvarandre med sine ulike oppfatningar av denne òg.

Vidare har eg vist at det er viktig med eit parallelt fokus på aritmetikk og algebra i matematikkundervisning for at elevar lettare skal kunne sjå relasjonelle aspekt (Kilpatrick et al. 2001, referert i Kieran, 2004, s. 140). Dette kjem fram som viktig i arbeid med generalisering fordi ei aritmetisk generalisering kan sjåast på som eit steg mot å kunne gjennomføre ei algebraisk generalisering. Det er hensiktsmessig å arbeide med mønster då ein kan leite etter noko felles i gitte figurar der dette kan danne eit utgangspunkt for vidare generalisering. Det å legge merke til noko felles i spesifikke delar, «grasping a commonality», går inn under det Radford ser på som aritmetisk generalisering, og denne typen generalisering kunne etter analysen sjåast mange stader i datamaterialet mitt. Nivåinndelinga til Radford, som utgjer delar av mitt rammeverk for analyse, fokuserer i hovudsak på algebraiske generaliseringar. I nivåinndelinga eg har tatt utgangspunkt i (tabell 1) handlar 3 av 4 kategoriar om algebraiske generaliseringar. Fordi elevane er sjette- og sjuandeklassingar hadde det vore interessant å gå meir i djupna på den aritmetiske generaliseringa deira ved å til dømes sjå på kva for strategiar dei nytta for å kome fram til ulike aritmetiske generaliseringar. Ikkje alle elevane kom opp med algebraiske generaliseringar, og det ville difor vore interessant å sjå på kvar utfordringa kan ligge ved å analysere dei aritmetiske generaliseringane grundigare.

Ei anna svakheit knytt til studien sin forskingsdesign er avgrensinga eg har gjort med tanke på Prediger & Wessel sin modell for relasjonar og veksling mellom register. Eg har grunna omfanget på ei masteroppgåve i hovudsak nytta delen av modellen som syner dei verbale registera i analysen. Matematikkundervisning vil ikkje innehalde berre verbale representasjonsmåtar, og elevar si veksling mellom det verbale, symbolske, grafiske og konkrete påverkar korleis elevar forstår eit matematisk innhald (Prediger & Wessel, 2013, s. 437). Av datamaterialet kunne ein sjå at elevane fleire stader nytta konkretar (til dømes klossar eller teikningar) for å løyse oppgåver. Desse verka somme stader som *semiotiske verktøy for objektivisering*. Fordi forskingsdesignen min er valt for å kunne sette søkjelys på elevane sitt verbale språk, legg ikkje denne særleg til rette for å kunne analysere korleis bruken av konkretar (og dei grafiske og symbolske registera) vart brukt av elevane. Difor kan språket ha vore nytta som ein ressurs i diskusjonen på andre måtar enn det som kan identifiserast ut i frå studien sin forskingsdesign.

6.5 Andre interessante funn og forslag til vidare forsking

Eit interessant funn i studien er at Maren uttrykkjer seg feil i ei forklaring, utan at det ser ut til å skape forvirring eller at det i det heile teke vert lagt merke til. I dette ser det ut til at språkleg presisjon ikkje var naudsynt i kommunikasjonen då elevane ser ut til å ha dei same tankane. Det hadde vore interessant å vise Maren og elevane på gruppe 3 videoklippet og transkripsjonane som syner denne episoden (figur 8), og med utgangspunkt i dette intervjue dei. Dette for å potensielt få innsikt i deira tolkingar kring situasjonen.

MAREN:	Okei, så vi skal lage en regel
ADINE:	Som sier hvordan man regner ut tallet på stoler. Så vi skal regne ut hvor mange stoler man trenger dersom man kjenner tallet på bord. Ok, så visst det er 4 bord da. Vi sier det. Og så skal vi finne ut. Da må vi tenke at det er 2 stoler på hver, altså sånn [peiker bortover bordet]
MAREN:	Ja, og så må vi bare gange hvor mange som er på den ene siden med den andre, og så legge til 2 i endene
ADINE:	Ja, det er vel egentlig bare det.
MAREN:	Du finner ut hvor mange det er på 1 side og så ganger du det med 2 og så tar du pluss 2 på endene.
LÆRARSTUDENT:	Hvordan kan du finne ut hvor mange stoler det er på 1 side da?

Figur 8 - utdrag frå gruppe 3 der Maren kjem med ein påstand som er feil

Eit anna funn i studien min, som kunne vore interessant undersøkt vidare, er forskjellane i måtane gruppene omtalar variablar på. Det er ikkje forventa at elevane på sjette og sjuande trinn nytter bokstavar som symbol for variablar. Det kunne vore interessant å testa oppgåvene i min studie på elevar på høgare trinn, for å undersøkje korleis elevar her nyttar språket for å omtale variablar. Dette kunne til dømes vore på 10. trinn, der bokstavar ofte er introdusert i matematikkfaget.

Det kunne òg ha vore interessant å undersøkt nærare er korleis oppgåveteksten elevane får kan påverke språket dei nyttar i den påfølgjande diskusjonen. Eit funn frå studien min er at elevane ofte byrjar diskusjonane med utsegner basert på skuleregisteret. Dette registeret er ofte nytta for å utforme oppgåvetekstar i matematikkfaget (Prediger et al., 2016), også i denne studien. Ei veksling mellom register er viktig for matematisk forståing (Prediger & Wessel, 2013), og dersom oppgåvetekstar kan påverke kva for register elevar nyttar vil dette kunne nyttast medvite for å stimulere til ulik bruk av register. Det kunne difor ha vore interessant å undersøke nærare korleis oppgåveteksten kan ha påverka elevar sin diskusjon ved å til dømes gitt dei same oppgåvene til elevar på 5. trinn og til elevar på 10. trinn.

7.0 Konklusjon

Elevdiskusjonane i studien er i hovudsak prega av eit kvardagsregister og skuleregister. Det ser ut til at elevane nyttar spesielt kvardagsregisteret for å utdjupe algebraisk tenking. Elevane startar å diskutere oppgåver både med eit kvardagsleg register og eit skuleregister. Dersom ein diskusjon startar i kvardagsregisteret blir denne verande i dette. Det er ingen av diskusjonane som byrjar i eit skuleregister og utviklar seg mot eit kvardagsleg register. Det motsette, at diskusjonen byrjar i eit skuleregister, men går over til eit kvardagsregister er identifisert i fleire løysingsprosessar. Det tekniske registeret kan identifiserbart på alle gruppene, men dette er verre i form av tekniske ord. Dei tekniske orda som er identifisert er ord som også vert nytta i kvardagen til elevane, slik som til dømes «dele», «kantene» og «sidene». Det ser ut til at elevane nyttar kvardagslege ord, der dei potensielt kunne ha nytta tekniske ord. Dette er til dømes ved bruk av «plusse» og «dele», der «addere» og «dividere» ville ha vore tekniske alternativ. Eg vil hevde det ikkje er overraskande at elevane ikkje nytta dei tekniske alternativa her, då elevane har meir kvardagslege ord for disse som er meir naturleg for dei å bruke.

I studien min ser det ikkje ut til å vere ein tydeleg samanheng mellom kvardagsregisteret og skuleregisteret, og generaliseringsnivåa frå det aritmetiske til det kontekstuelle. Kontekstuelle generaliseringar og faktuelle generaliseringar har i hovudsak blitt uttrykt og diskutert ved hjelp av kvardagsregisteret. Aritmetiske generaliseringar har i hovudsak blitt uttrykt ved hjelp av skuleregisteret og kvardagsregisteret. Eit kvardagsleg språk har bidratt i elevane sine løysingsprosessar som endar i kontekstuelle generaliseringar, men dei kontekstuelle generaliseringane som kan identifiserast inneheld ikkje eksplisitte reglar. Elevane bruker eit noko upresist språk for å uttrykke desse generaliseringane.

Det er forskjellar i korleis dei ulike gruppene bruker ein bestemt kontekst for å uttrykkje algebraisk tenking. Gruppe 1 koplar heile vegen utsegnene til den gitte historia i oppgåva, som til dømes at det kjem gjester og at det er behov for bord og stolar. Dette kan sjåast i utsegn som «bare lat som ord et er 10 i familien. Og så kommer det 4 til». Gruppe 2 viser også ofte til ein kontekst for å uttrykkje algebraisk tenking, men her er dei ikkje like knytt til den konteksten oppgåva gir. Med det meiner eg at elevane i gruppe 2 ikkje følgjer ei historie på same måte som gruppe 1, men bruker kontekstar med 3 og 4 bord for å uttrykkje algebraisk tenking.

I studien er det funn som indikerer at språket kan ha verka som både ein ressurs og eit hinder i elevane sine generaliseringsprosessar. Det kan sjå ut til at kvardagsregisteret verkar som ein ressurs elevane tek i bruk dersom dei skal utdjupe ei algebraisk tenking dei gjerne har forsøkt å uttrykkje tidlegare. Dette er i tråd med forskinga til Prediger et al. (2016) og Nilssen (2020) som begge hevdar det kvardagslege registeret kan nyttast for å få tak på det matematiske. Nilssen (2020) fann at det kvardagslege registeret ser ut til å hjelpe elevar med tilpassing av matematisk innhald, noko studien min òg indikerer. At elevane vekslar til eit kvardagsregister i situasjonar der den algebraiske tenkinga i utgangspunktet vart uttrykt i skuleregisteret, kan også indikere at elevane sjølv har ei oppfatning om at det å ikkje meistre å bruke eller forstå skuleregisteret vil vere eit hinder i generaliseringsprosessane.

Eg syner i diskusjonen at eit fråvær av teknisk register kan ha avgrensa kva generaliseringsnivå elevane har nådd. Dei kontekstuelle generaliseringane inneheld ikkje eksplisitte reglar, og ikkje alltid presise formuleringar. Dette kan vere ei utfordring når elevane videre skal nå det symbolske generaliseringsnivået. Samstundes var det ikkje forventa at elevane skule komme opp med eksplisitte forklar uttrykt ved hjelp av bokstavsymbol i denne studien. Dei går på sjette og sjuande trinn, og det er utfordrande for dei å kome opp med eksplisitte reglar dersom dei ikkje har vore introduserte for dette før. Det var også mogleg for elevane å svare på oppgåvene utan å nå eit symbolsk generaliseringsnivå.

Studien indikerer at elevane kan ha utfordringar med å matematisere kvardagslege situasjonar. Dette samsvarar med funna til Petersen (2015) som syner at elevar kan ha relativt god kontroll på resonnering og fortolking opp mot kontekstar, men at det kan vere vanskeleg for dei å matematisere desse. Dette kan kome av eit fråvær av teknisk register i løysingsprosessane. Det er også her fleire andre faktorar som truleg speglar inn på kvifor det er utfordrande for elevar å matematisere.

Måten språket vert nytta for å omtale variable storleikar ser ut til å ha verka som både ein ressurs og eit hinder i generaliseringsprosessar. Elevane nyttar eit kvardagsregister for å omtale den variable storleiken, noko som ser ut til å vere til hjelp i prosessen mot å uttrykkje ei kontekstuell generalisering. Måten språket kan verke som eit hinder på i samband med variabeluttrykket er valet av ordet «svar» for å omtale den variable storleiken. Oliver hevdar at dersom ein tar talet på stolar på kvart bord og ganger det med talet bord vil ein få «svaret». Dette kan vere problematisk i elevar si utvikling av forståing for variablar, og fordi Oliver si gruppe konkluderer med at ein gitt regel er feil (sjøliv om den er rett) kan det tenkjast at dei har utfordringar knytt til variabelomgrepet i matematikk.

Avslutningsvis vil eg seie at studien min kan vise kvifor det som lærar er viktig å vere medviten på å utvikle elevar sine språklege ferdigheiter i matematikkfaget. Studien indikerer at det er viktig å legge til rette for at elevar får nytte eit teknisk register, slik Prediger & Wessel (2011) og Prediger et al. (2016) har peika på. Funna syner òg at det som matematikklærar er viktig å legge til rette for at elevar kan utvikle språklege ferdigheitar som gjer at dei meistrar å bruke både eit kvardagsregister og eit skuleregister. Dette fordi alle dei tre språkregistra på ulike måtar er ressursar på ulike måtar.

Referansar

Aubert, K. (2021, 23. juni). *Algebra*. Henta frå Store Norske Leksikon: https://snl.no/algebra

Bergem, O. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. Bergem, H. Kaarstein, & T. Nilsen, *Vi kan lykkes i realfag* (s. 22-43). Universitetsforlaget.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom: Transforming Thinking, Transforming Practice.* Heinemann.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM: the international journal on mathematics education* (40), s. 3-22. doi:10.1007/s11858-007-0067-7

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* (7. utg.) Routledge

De nasjonale forskingsetiske komitéene. (2021). *Forskingsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap og humaniora* (5. utg). Den nasjonale forskingsetiske komité. https://www.forskingsetikk.no/globalassets/dokumenter/4-publikasjoner-som-pdf/forskingsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-og-humaniora

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131.

El Mouhayar, R. (2020, Mai 29). Triadic dialog in multilingual mathematics classrooms as a promoter of generalization during classroom talk. *Mathematics Education Research Journal*, s. 87-112.

Gundersen, D. (2020, 9. november). *Objektivere.* Henta frå Store Norske Leksikon: https://snl.no/objektivere

Halliday, M. (1978). Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning. Edward Arnold

Haugen, H. Ø., & Skilbrei, M.-L. (2021). *Håndbok i forskingsetikk og databehandling.* Fagbokforlaget.

Høgheim, S. (2020). *Masteroppgaven i GLU.* Fagbokforlaget

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education, *ZDM* 38(3), 302-310.

Kaput, J. J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? I D. T. Owens, M. K. Reed & G. M. Millsaps (Red.), Proceedings of the 17th Annual Meeting of PME NA (Vol. 1, pp. 71-94). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education

Kaput, J. J. (2008) What is algebra? What is algebraic reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Red.), Algebra in early grades. (s. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator, 8*(1), s. 139-151.

Krumsvik, R. (2014). *Forskingsdesign og kvalitativ metode: ei innføring*. Fagbokforlaget

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk (MAT01-05)*. Fastsatt som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05?lang=nob

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. Mathematical Thinking and learning, 7(3), 231-258

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 87-106). Springer Netherlands

Lekaus, S., Lossius, M. E. H. (2022). Språksensitiv matematikkundervisning. *Tangenten - tidsskrift for matematikkundervisning*, 33(3), 10–16

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Red.), Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching. (s. 65-86). Springer Netherlands

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics. https://www.rainierchristian.org/NCTM_principles-and-standards-for-school-mathematics.pdf

Nilssen, M. (2020). *Det språksensitive klasserommet* [masteroppgåve]. Høgskulen på Vestlandet

Nyeng, F. (2017). *Kva annet er også sant? En innføring i vitenskapsfilosofie.* Fagbokforlaget.

Patel, R. & Davidson, B. (1995). *Forskingsmetodikkens grunnlag.* Universitetsforlaget

Personopplysningsloven. (2018). *Lov om behandling av personopplysninger* (LOV-2021-0618-124). Lovdata. https://lovdata.no/dokument/NL/lov/2018-06-15 -38/KAPITTEL_gdpr-1#KAPITTEL_gdpr-1

Petersen, I. J. (2015). *Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert?: En kvantiativ kartlegging av 215 elever på tiende trinns ferdigheter i algebra* [Masteroppgave]. Universitetet i Tromsø

Planas, N. (2016). Matematikkundervisning og flerspråklighet: elevanes språk som ressurs. I R. Herheim & M. Johnsen-Høines (red.), Matematikksamtaler – Undervisning og læring - analytiske perspektiv (s. 23–38). Caspar Forlag.

Planas, N. (2018). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educ Stud Math* 98, 215–229 (2018). https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y

Postholm, M., & Jacobsen, D. (2018). *Forskingsmetode for masterstudenter i lærerutdanning*. Cappelen Damm Akademisk.

Prediger, S., Clarkson, P., & Bose, A. (2016). Purposefully Relating Multilingual Registers: Building Theory and Teaching Strategies for Bilingual Learners Based on an Integration of Three Traditions. I R. Barwell, P. Clarkson, A. Halai, M. Kazima, J. N. Moschkovich, N. Planas, . . . M. Villavicencio Ubillus, Mathematics Education and Language Diversity: The 21st ICMI Study (s. 193-215). Springer International Publishing.

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Relating registers for fractions–multilingual students on their way to conceptual understanding. I M. Setati, T. Nkambule & L. Goosen (Red.), Proceedings of the 21 ICMI study conference – Mathematics and Language Diversity, (s. 324-333). ICMI.

Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 435–456

Purpura, D. J., & Ganley, C. M. (2014). Working memory and language: Skill-specific or domain-general relations to mathematics? *Journal of Experimental Child Psychology*, 122, 104-121.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students` Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. PNA, 4(2), s. 37-62

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing and Learning. Journal of Research in Mathematics Education, 2(1), 7-44. doi: http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19

Ringdal, K. (2018). *Enhet og mangfold: samfunnsvitenskapelig forsking og kvantitativ metode* (utg. 4). Fagbokforlaget

Simonsen, H. G., Kjøll, G. & Faarlund, J. T. (2021, 20. september). *Språk.* Henta frå Store Norske Leksikon: https://snl.no/spr%C3%A5k

Skaalvik, E. M. (1999). Etiske spørsmål i skoleforsking. I De nasjonale forskingsetiske komiteer, *Etikk og metode* (s. 87-107). De nasjonale forskingsetiske komiteer

Skogen, K. (2018). Caseforsking. I M. Krogtoft, & J. Sjøvoll (red.), *Masteroppgaven i* lærerutdanninga (s. 79-91). Cappelen Damm Akademisk.

Solem, I. H., Alseth, B., Eriksen, E. & Smestad, B. (2017). *Tall og tanke 2*. Gyldendal Akademisk

Säljö, R. (2016). Læring - en introduksjon til perspektiver og metaforer. Cappelen Damm Akademisk.

Tjora, A. (2017). *Kvalitative forskingsmetoder i praksis* (3. utg). Gyldendal Akademisk

Usiskin, Z. (1998). Conceptions of school algebra and uses of variable. I A. F. Coxford & A. P. Shulte (Red.), The ideas of algebra, K-12 (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, s. 8-19). NCTM.

Valle, A. M. (2018). Videoanalyse som metode i praksisforsking. I M. Krogtoft & J. Sjøvoll (Red.), *Masteroppgaven i lærerutdanninga: Temavalg, forskingsplan, metoder* (s. 211-229). Cappelen Damm Akademisk

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.

Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6. Utg). Sage Publications INC

Watson, Anne. (2009). Algebraic Reasoning. I Nuffield Foundations (Red.) Key understandings in mathematics learning (kap 6.). Nuffield Foundation. https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/12/P6.pdf

Wettergren, S., Eriksson, I. & Tambour, T. (2021). Yngre elevers uppfattningar av det matematiska i algebraiska uttryck: Younger students' conceptions of the mathematics in algebraic expressions. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *9*(1), 1–28. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1377

Wilkie, K. J. (2020). Investigating students' attention to covariation features of their constructed graphs in a figural pattern generalisation context. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(2), 315-336

Bord og stol-problem

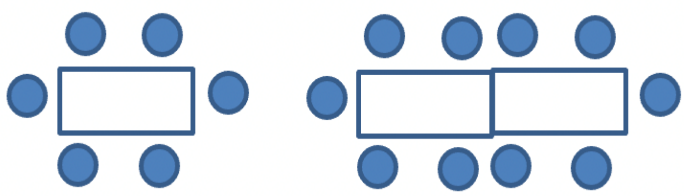
I Gjeste-Gjestfri land må man servere mat til alle som dukker opp på døren.

Foto av bord sett ovanfrå

For å være gode verter har alle familier i dette landet mange bord og stoler.

Bordene må plasseres inntil hverendre på endene, fordi det blir sett på som uhøflig å sette gjester på bord som står borte fra de andre.

Hvert bord er rektangulært og har vanligvis to stoler langs hver langside og én stol på hver kortside. Dette er vist på figuren under



Oppgave 1

Tenk deg at en familie på 8 dukker opp på døren hos din familie. Hvor mange bord og stoler trenger du for å være en god vert? Diskuter på gruppen, og skriv tallene under.

a) Tegn et bilde av hvordan dere vil sette opp bordene og stolene

b) Gjelder dette for alle på gruppen din? Diskuter.

Oppgave 2

Bruk ord eller bilder til å forklare en regel som kan brukes av alle familier, slik at de kan finne ut hvor mange bord de trenger for et hvilket som helst antall personer de skal servere mat.

Prøv å forklare regelen til de andre på gruppen på et valgfritt språk. Gjerne noe annet enn norsk, hvis du kan det.

Oppgave 3

Oppgave 2 (forrige side) har blitt gitt til en annen klasse tidligere.

Sandra beskrev regelen slik:

> «for å finne ut hvor mange bord som trengs, og det er et partall, halver tallet på personer og ta vekk to. Hvis det er et oddetal, legg først til én og så halver tallet og så ta vekk to.

Partneren hennes, **Jan**, mente at dette ikke var riktig. På Mandarin sa han regelen ville blitt:

> "要算出所需**桌子的数量**，我们可以分成两种情况。 如果人数是偶数，**桌子的数 量是人数减半再减**1； 如果人数是奇数，**桌子的数量是人数加一 减半再减**1.",

> *(Direkte oversatt: "For å beregne hvor mange bord som trengs, kan vi se på situasjonen på to måter. Hvis tallet på personer er partall, så er tallet på bord tallet på personer minus halvparten (av det) og så minus 1. Hvis tallet på personer er et oddetall, så er tallet på bord tallet på personer pluss 1 minus halvparten (av det) og så minus 1)*

Hvem av elevane tror du har riktig og hvorfor? Diskuter med gruppen. Bruk baksiden av heftet for å kladde hvis det trengs.

Vedlegg 2: Oppgåvesett i andre datainnsamling (revidert utgåve av oppgåva i første datainnsamling)

Bord og stol-problem

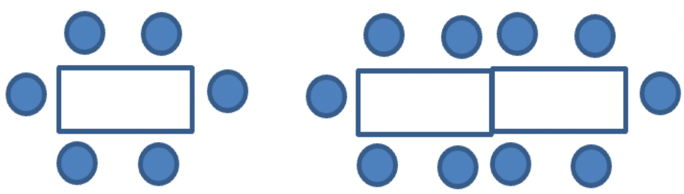
I Gjestfriland må ein servere mat til alle som dukkar opp på døra.

Foto av bord sett ovanfrå

For å vere gode vertar har alle familiar i dette landet mange bord og stolar.

Borda må plasserast inntil kvarandre på endane, fordi det vert sett på som uhøfleg å sette gjester ved bord som står borte frå dei andre.

Kvart bord er rektangulært og har vanlegvis to stolar langs kvar langside og éin stol på kvar kortside. Dette er vist på figuren nedanfor:



Oppgåve 1

a) Jo fleire personar som kjem, jo fleire bord treng familiane i Gjestfrilandet.

- Kor mange stolar treng ein for 3 bord? Kor mange treng ein for 4 bord?
- Kor mange stolar treng ein for 8 bord? Korleis kan du finne ut av det utan å teikne?
- Kor mange stolar treng ein for 42 bord? Korleis kan du finne ut av det utan å teikne?

Tal på bord	1	2	3	4	5	6	7	8	42
Tal på stolar									

b) Kva blir verende det same og kva forandrar seg i mønsteret dersom de legg til fleire bord?

c) Formuler ein regel som seier korleis ein reknar ut talet på stolar dersom ein kjenner talet på bord.

d) Sandra skreiv følgjande regel for å finna talet på stolar:

Du gangar talet på bord med 2 og legg til 1. Så må du doble dette talet. Det er talet på stolar som du kan plassera rundt borda.

Stemmer Sandra sin regel? Diskuter med gruppa di.

e) Kjem de på enno fleire måtar å forklara ein regel?

Oppgåve 2

a) Det vert eit stort bryllaup i Gjestfriland med 253 personar som skal sitja rundt borda. Korleis kan din regel hjelpe til med å finne ut kor mange bord de treng?

b) Forklar korleis du kan bruke din regel for å finne ut kor mange bord familiane treng for eit kva som helst tal på personar.

Foto av eit langbord med mange stolar

Oppgave 3:

a) To elevar i ein annan klasse skreiv dei følgjande reglane som skulle hjelpa familiane å finne ut kor mange bord dei treng for eit kva som helst tal på personar.

Sandra skreiv følgjande regel:

Du tar talet på personar som skal sitja ved borda. Først trekk du frå 2. Det er dei to som kan sitja på dei korte sidene av det første og det siste bordet.

> *Så ser du kor mange grupper på fire du kan laga av personane som er igjen. Dersom det går opp og det er ingen igjen, er talet på bord det same som talet på grupper på fire, fordi dei kan jo alltid vere fire ved kvart bord.*
>
> *Dersom det fortsatt er folk igjen som var for få til å lage ei ny gruppe på fire, treng du eit bord til. Men ved dette bordet er det fortsatt litt plass igjen.*

Ein annan elev, Jan, seier at han har funne ein regel som er mykje enklare å bruke:

> *For å finne talet på bord som ein treng, ta talet på personar og ta vekk 2. Så deler du talet som du har fått med fire.*

Stemmer reglane som elevane har laga? Bruk baksida av heftet for å kladde dersom de treng.

b) Prøv å formulera din egen regel som er så kort som mogleg, men som fortel familiane nøyaktig kva dei må gjere for å finne det riktige talet på bord uansett kor mange personar som skal sitje rundt borda.

Vedlegg 3: Samtykkeskjema til lærarar

Forespørsel til lærere om deltakelse i forskingsprosjektet

«Matematikklæring på flere språk»

Som en del av et prosjekt med det tekniske universitetet i Eindhoven, Nederland og Leibniz Institute for Science and Mathematics Education, Tyskland, skal forskere ved Høgskulen på Vestlandet utvikle algebraoppgaver som skal brukes i flerspråklige klasserom. Disse oppgavene vil bli implementert og videreutviklet ved å observere hvordan elever engasjerer seg i oppgavene og brukar sine ulike språk. I dette skrivet informerer vi om innholdet i prosjektet og hva det innebærer for deg å delta.

Formålet med prosjektet

Målet med prosjektet er å designe digitale oppgaver som skal være fritt tilgjengelig for matematikklærere. Oppgavene skal utformes for å engasjere elever å lære om viktige begreper i algebra og vil bruke forskjeller mellom språk for å støtte elevers matematiske forståelser. Prosjektet vil bli avsluttet i desember 2026. Prosjektgruppen består av masterstudenter, PhD-studenter og tilsatte ved HVL som arbeider med matematikkundervisning, og prosjektet har nasjonale og internasjonale samarbeidspartnere. Det er medlemmer fra prosjektgruppen som samler inn data.

Hva innebærer det å delta?

Deltagelse innebærer at noen av dine elever blir observert og filmet. Du trenger ikke å være til stede.

Personvern – Hva skjer med opplysningene?

Alle personopplysninger blir behandlet konfidensielt og materiale med personopplysninger lagres på HVL. Kun forskere i prosjektgruppen vil ha tilgang til datamaterialet. Deltakere vil ikke kunne bli identifisert i publikasjoner. Prosjektet skal etter planen avsluttes 31.12.2026, og alle opptak vil bli slettet når prosjektet avsluttes.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?

Du er lærer ved en skole som er en samarbeids- og praksisskole for HVL.

Frivillig deltagelse

Det er frivillig å delta i studien og man kan trekke seg uten å oppgi grunn, så lenge studien pågår.

Dine rettigheter

Så lenge du kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om deg,
- å få rettet personopplysninger om deg,
- få slettet personopplysninger om deg,
- få utlevert en kopi av personopplysninger om deg
- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av personopplysninger om deg.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om deg?

Vi behandler opplysninger om deg basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra HVL har NSD (Norsk senter for forskingsdata AS) vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvem er ansvarlig for forskingsprosjektet?

Høgskulen på Vestlandet er ansvarlig for prosjektet, og det er ledet av Professor Tamsin Meaney. Prosjektet er støttet av EU Erasmus+.

Hvor kan jeg finne ut mer?

Dersom du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Ansvarlig for prosjektet ved HVL: Tamsin Meaney, Epost: Tamsin.Jillian.Meaney@hvl.no

- HVLs personvernombud, Trine Anikken Larsen, Trine.Anikken.Larsen@hvl.no eller telefon: 55 58 76 82

- NSD – Norsk senter for forskingsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Tamsin Meaney

…………………………………………….

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt og forstått informasjon om studien «Matematikklæring på flere språk» og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at barnet mitt ……………………….. (navn) kan

- ☐ delta i videopptak
- ☐ delta i lydopptak
- ☐ delta med elevarbeid

Jeg samtykker til at opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 31.12.2026.

(Signert av foresatte til eleven, dato)

____

(Signert av elev, dato)

Samtykkeerklæring for bruk av videoer:

- ☐ Jeg samtykker i at videosnutter der barnet mitt er med kan vises i presentasjoner på konferanser og i undervisning.

(Signert av foresatte til eleven, dato)

Samtykkeerklæring for bruk av videoer:

- ☐ Jeg samtykker i at videosnutter der jeg er med kan vises i presentasjoner på konferanser og i undervisning.

____

(Signert av elev, dato)

Vedlegg 4: Samtykkeskjema til elevar og føresette

Forespørsel til foresatte om barns deltakelse i forskingsprosjektet

«Matematikklæring på flere språk»

Som en del av et prosjekt med det tekniske universitetet i Eindhoven, Nederland og Leibniz Institute for Science and Mathematics Education, Tyskland, skal forskere ved Høgskulen på Vestlandet utvikle algebraoppgaver som skal brukes i flerspråklige klasserom. Disse oppgavene vil bli implementert og videreutviklet ved å observere hvordan elever engasjerer seg i oppgavene og brukar sine ulike språk. I dette skrivet informerer vi om innholdet i prosjektet og hva det innebærer for deres barn å delta.

Formålet med prosjektet
Målet med prosjektet er å designe digitale oppgaver som skal være fritt tilgjengelig for matematikklærere. Oppgavene skal utformes for å engasjere elever i å lære om viktige begreper i algebra og vil bruke forskjeller mellom språk for å støtte elevers matematiske forståelser. Prosjektet skal være avsluttet i desember 2026. Prosjektgruppen består av masterstudenter, PhD-studenter og tilsatte ved HVL som arbeider med matematikkundervisning, og prosjektet har nasjonale og internasjonale samarbeidspartnere. Det er medlemmer fra prosjektgruppen som samler inn data.

Hva innebærer det å delta?
Deltagelse innebærer at noen undervisningstimer som elevane deltar i blir observert og filmet. Bare elever som gir samtykke blir filmet. Etter samtykke kan også skriftlig elevarbeid bli samlet inn.

Personvern – Hva skjer med opplysningene?
Alle personopplysninger blir behandlet konfidensielt og materiale med personopplysninger lagres på HVL. Kun forskere i prosjektgruppen vil ha tilgang til datamaterialet. Deltakere vil ikke kunne bli identifisert i publikasjoner.

Prosjektet skal etter planen avsluttes 31.12.2026, og alle opptak vil bli slettet når prosjektet avsluttes.

Hvorfor får du spørsmål om å delta?
Barnet ditt går på en skole som er en samarbeids- og praksisskole for HVL.

Frivillig deltagelse
Det er frivillig å delta i studien og man kan trekke seg uten å oppgi grunn, så lenge studien pågår.

Dine rettigheter
Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke personopplysninger som er registrert om ditt barn,
- å få rettet personopplysninger om ditt barn,
- få slettet personopplysninger om ditt barn,
- få utlevert en kopi av personopplysninger om ditt barn

- å sende klage til personvernombudet eller Datatilsynet om behandlingen av personopplysninger om ditt barn.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?
Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra HVL – Høgskulen på Vestlandet har NSD – Norsk senter for forskingsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Hvem er ansvarlig for forskingsprosjektet?
Høgskulen på Vestlandet er ansvarlig for prosjektet, og det er ledet av Professor Tamsin Meaney. Prosjektet er støttet av EU Erasmus+.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Dersom du har spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Ansvarlig for prosjektet ved Høgskulen på Vestlandet: Tamsin Meaney, Epost: Tamsin.Jillian.Meaney@hvl.no
- HVLs personvernombud, Trine Anikken Larsen, Trine.Anikken.Larsen@hvl.no eller telefon: 55 58 76 82
- NSD – Norsk senter for forskingsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Tamsin Meaney

…………………………………………

Samtykke til deltakelse i studien

Jeg har mottatt og forstått informasjon om studien «Matematikklæring på flere språk» og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at barnet mitt ……………………….. (navn) kan

- ☐ delta i videopptak
- ☐ delta i lydopptak
- ☐ delta med elevarbeid

Jeg samtykker til at opplysninger behandles frem til prosjektet er avsluttet, 31.12.2026.

(Signert av foresatte til eleven, dato)

____

(Signert av elev, dato)

Samtykkeerklæring for bruk av videoer:

- ☐ Jeg samtykker i at videosnutter der barnet mitt er med kan vises i presentasjoner på konferanser og i undervisning.

(Signert av foresatte til eleven, dato)

Samtykkeerklæring for bruk av videoer:

- ☐ Jeg samtykker i at videosnutter der jeg er med kan vises i presentasjoner på konferanser og i undervisning.

____

(Signert av elev, dato)