Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGAVE

«Hva hvis …?» - Resonnerende elever i møte med rike matematiske oppgaver

«What if …?» - Students demonstrating reasoning in engagement with rich mathematical tasks

Jonas Ramon Bernales

M120UND509, Masteroppgave

Fakultet for lærerutdanning, kunst og idrett (FLKI)

Institutt for språk, litteratur, matematikk og tolking

Veileder: Silke Lekaus

Innleveringsdato: 29. mai 2020

Innhold

Tabelliste

Figurliste

Forord

Denne masteroppgaven tar for seg et epokeskifte for meg. Jeg har nå fullført fem flotte år på Høgskulen på Vestlandet. Årene har vært fulle av rike erfaringer, der jeg har vært heldig som har møtt og blitt kjent med kjekke folk. Jeg føler mer trygg på meg selv og hvem jeg ønsker å være – som lærer, samboer og venn.

Det har vært et tosidig sverd å skrive denne masteren. På den ene siden fikk jeg en fruktbar mulighet til å fordype meg innenfor et matematisk område jeg synes er spennende. Muligheten har vært faglig stimulerende. På den andre siden har det vært utfordrende. Jeg har måtte regulere mange tanker og følelser, samt at det har krevd en innsats av praktisk arbeid. Heldigvis har jeg fått god støtte underveis. Denne støtten vil jeg takke.

Fortrinnsvis ønsker jeg å takke Silke Lekaus. Hun innehaver kvaliteter en god veileder bør ha: Hun er faglig trygg, har evne til å kommunisere, tør å ta sjanser, er samarbeidsvillig og tar seg tid til å gjøre grundig arbeid. Jeg er særlig imponert over henne som samtalepartner – hun har bidratt med fine, konstruktive innspill, og stilt spørsmål som har fått meg til å reflektere. Jeg unner framtidige masterstudenter å få Silke som veileder.

Jeg ønsker også takke medstudenter. Richard Børven og Line Dale Fonnes skinner særlig som viktige støttespillere for meg. De har vært tilgjengelig for meg gjennom hele mitt følelsesspekter – som kan sies å ha vært en polynomfunksjon med ekstrem forskjell i topp- og bunnpunkt. Det har vært støttende samtaler, der de har lyttet til meg. Det har også vært mindre konstruktive samtaler – som umulig kan vurderes. Håper mine fremtidige kollegaer er som Richard og Line.

Jeg ønsker også å takke informanter ved skolen der datainnsamlingen foregikk.

Mai, 2020

Jonas Ramon Bernales

Abstract

In this master's thesis I have researched 7th grade students in Norway demonstrating reasoning in engagement with rich mathematical tasks, which conditions the students set to the tasks and how these conditions affected their mathematical reasoning. The study is based on Hagland's, Hedrén's and Taflin's (2005) definition on rich mathematical tasks. Among other things, these tasks are detected by introducing mathematical ideas, being easy to work with, stimulate to mathematical conversation based on different solutions and can lead students and teachers to generate new interesting mathematical problems. These traits may lead students to demonstrate reasoning and ask questions to the task that may become conditions.

The theoretical framework about reasoning is based on a mix from Baroody's (1993), Hana's (2013), Lithner's (2006; 2008) and Reid's (2002) definitions about different forms of reasoning. These definitions have been used to elucidate some of the students' reasoning, mainly deductive reasoning. In addition, Balacheff's (1988) study about aspects of proof in pupils' practice has been used to suggest some possible explanations for the results from this thesis.

The theoretical framework about looking at the conditions set by the students is inspired by Silver's (1993) and Stoyanova's and Ellerton's (1996) definitions about problem posing. The main point is that a student, based on their mathematical experience, constructs personal interpretations of situations, and formulates meaningful mathematical problems. This is linked together with what Stylianides (2016) calls "proving tasks with ambiguous conditions". These types of tasks are intentionally ambiguous – and thus subject to different legitimate assumptions by students – with a purpose to lead students to ask questions. These questions, which may become conditions, can affect the mathematical content that students work with – and this can affect the mathematical reasoning in some way.

The results show that 7th grade students often use deductive reasoning linked to arithmetic rules. There were also cases where students reasoned with assumed premises to reach a conclusion, which means they used hypothetically deductive reasoning. I have also seen one example of a creative mathematically founded reasoning, which was generated by a couple of students who spent time, effort and thought activity while working on a task.

Furthermore, I saw that the students – when facing rich mathematical tasks – not only set conditions that affected the mathematical content, but also spent time suggesting how to include conditions that seemed derogatory from the mathematical content. I see that the teacher's input in such cases is a key variable to put students back on a mathematical track.

1 Innledning

Dette er en master som tar for seg rike oppgaver, resonnering og problem posing. Den handler om hvilke resonnementer elever genererer når de arbeider med rike oppgaver, hva betingelser de setter til oppgavene og hva betingelsene har å si for de matematiske resonnementene.

Oppgavens tema grunner i ulike incentiv. I korte trekk handler det om lærerrollen sitt omfattende mandat.

Lærere har en rolle der de skal utføre et samfunnsmandat, som blant annet innebærer å tilrettelegge for en opplæring som hjelper elever til å utvikle kunnskap, ferdigheter og holdninger for å kunne mestre livene sine (Opplæringslova, 1988, § 1-1). Dette er et stort oppdrag som kan – og bør – gjøres på ulike måter. Samtlige samfunnsborgere kommer innom skolen i løpet av sitt liv, der hver person har ulik bakgrunn og utgangspunkt. Dermed er det viktig at lærere differensierer undervisningen sin, for å forsikre at det brede spekteret av elevers evner, interesser og beredskap til å lære blir ivaretatt.

Dette betyr at alle elever, i matematikk, skal lære nytt fagstoff, få mulighet til å oppleve mestring, bli støttet der de opplever matematikk som utfordrende og få oppleve å strekke seg lenger i sin faglige utvikling. Lærere har dermed mye å ta hensyn til, da klasserom vil bestå av et stort mangfold av elever.

Lærernes hverdag blir også regulert på makro- og mikronivå. Henholdsvis er det faktorer utenfor skolen, slik som rammeplaner, lovverk og stortingsmeldinger, og faktorer innenfor skolen, slik som konkrete dagliglivspraksiser, eksempelvis PALS og vurdering for læring (Askling et al., 2016, ss. 25-27). Lærere har et forpliktet handlingsrom – som er preget av profesjonell skjønnsutøvelse (Askling et al., 2016, s. 31). Her har de metodefrihet og autonomi til å velge hvordan undervisningen skal foregå, der flere ulike metoder kan være gunstige og fruktbare å ta i bruk.

Rike oppgaver kan være ett av flere midler som kan bistå lærerne i sitt omfattende oppdrag. Det er en spesiell type problemoppgave (Hagland, Hedrén & Taflin, 2005, s. 27), som blant annet har en intensjon om å være selvdifferensierende (Utdanningsdirektoratet, 2015) har lav inngangsterskel (Gilderdale & Kiddle, 2014) og kan initiere til fruktbare diskusjoner samt virke som brobygger mellom ulike matematiske emner (Hagland et al., 2005, s. 29). Disse trekke kan virke stimulerende i opplæring i matematikk.

Et annet stimulerende trekk ved rike oppgaver er at de skal kunne lede elever og lærere til å formulere nye interessante problem (Hagland et al., 2005, s. 30). Elevene kan få vist fram sine ferdigheter ved å stille nye spørsmål, da de elevgenererte problemene indikerer hva eleven oppfattet i forrige oppgaveløsning. Elevene kan også formulere det opprinnelige problemet om til en ny versjon – der deres egne betingelser kommer fram – for å komme med flere løsningsforslag. Dette er en form for problem posing (Silver, 1994, ss. 19-21), kalt for problemformulering. Betingelsene kan påvirke det matematiske innholdet elevene arbeider med.

Majoriteten – om ikke alle – matematikere vil anse bevis som det mest essensielle i matematikken (selv om det finnes uenigheter om hva et matematisk bevis er) (Svendsen, 2020, s. 42). Dermed kan det tenkes at skolematematikken bør inneholde bevis i noen form. Det kan være hensiktsmessig å la elevene resonnere deduktivt, da bevis er bygget opp av korrekte deduktive resonnement. Stylianides (2016, s. 125) foreslår at elever får løse oppgaver med uklare betingelser. Et formål er å føre elevene til å stille spørsmål til oppgaven, der spørsmål – som eventuelt blir betingelser – kan påvirke det matematiske innholdet elevene arbeider med. Elevene kan da bli utfordret til å utforske hva som skjer under ulike betingelser.

Ellers oppleves det særlig relevant å tenke over bevis, da det i 2018 ble gitt ut en pressemelding om en fagfornyelse (Kunnskapsdepartementet, 2018). Denne fagfornyelsen trer i kraft skoleåret 2020/2021. I pressemeldingen blir det formidlet at læreplanene fra LK06 tar for seg for mange temaer, der Solberg-regjeringen ønsker å snevre inn disse temaene. Dette er blant annet for å fronte dybdelæring, som er fagfornyelsens fremste begrep. De innsnevrete temaene blir omtalt som kjerneelement, som er ment til å peke på de mest sentrale og viktigste idéene elevene skal kunne etter endt grunnskole. Det er interessant hvorvidt kjerneelementene i matematikk tar for seg bevis, og i hvilken grad.

Bevis blir ikke eksplisitt uttrykt som et kjerneelement. Det kommer derimot frem i et av kjerneelementene som kalles «Resonnering og argumentasjon» (Utdanningsdirektoratet, 2020). Dette kjerneelementet blir forklart slik:

> Resonnering i matematikk handlar om å kunne følgje, vurdere og forstå matematiske tankerekkjer. Det inneber at elevane skal forstå at matematiske reglar og resultat ikkje er tilfeldige, men har klare grunngivingar. Elevane skal utforme eigne resonnement både for å forstå og for å løyse problem. Argumentasjon i matematikk handlar om at elevane grunngir framgangsmåtar, resonnement og løysingar og beviser at desse er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2020).

Det er rundt argumentasjon at bevis kommer frem. Dermed kan man anta at kjerneelementet tar for seg at et matematisk bevis innebærer eller er en form for argumentasjon. Implisitt vil bevis innebære eller være en form for resonnering også, da resonnering er eksplisitt uttrykt argumentasjon (Krummheuer, 1995, s. 131).

Ut fra dette kan det bli påstått at matematikklærere har et oppdrag i å la elevene bli eksponert for og trent opp i å resonnere og argumentere, da noe resonnering og argumentasjon faller innunder som bevis. Her kan rike oppgaver også bistå som metode, da det blir lagt opp til å få observert elevenes matematiske samtaler og samhandling i arbeid med matematikk (Opheim & Simensen, 2018, s. 44). Ellers tilbyr rike oppgaver en «lav inngangsterskel, [med] stor takhøyde» (Gilderdale & Kiddle, 2014). Dette innebærer at oppgaven kan arbeides med på ulike nivå, slik at oppgaven åpner opp for alt fra enkle løsningsmetoder til avansert matematisk tenkning og resonnering.

Videre i denne oppgaven vil jeg fordype meg i resonnering ved hjelp av rike oppgaver. Som nevnt skal rike oppgaver blant annet ha lav inngangsterskel, initiere til matematisk diskusjon og lede elever og lærere til å formulere nye spørsmål. Dermed skal jeg forsøke å bruke rike oppgaver til å få frem elevers resonnering. Det er også naturlig å se på elevenes egenformulerte betingelser, da rike oppgaver kan lede elever og lærere til å stille nye interessante matematiske spørsmål – der de elevgenererte spørsmålene viser en indikasjon på hva eleven oppfattet om det opprinnelige problemet.

Det må også nevens at denne masteren er utviklet i sammenheng med et forskingsprosjekt kalt for LATACME, som står for «Learning about teaching argumentation for critical matehamtics education». Prosjektet er rettet mot grunnskolelærerutdanningen 1-7, der det er et overordnet fokus om argumentasjon og kritisk matematikkdidaktikk i flerspråklige klasserom.

1.1 Matematikkdidaktisk bakgrunn

Niss (2003, ss. 335-339) hevder at matematikkdidaktikk, fra og med 60-tallet, har etablert seg internasjonalt som en akademisk disiplin. Skott, Skott, Jess og Hansen (2018, ss. 472-477) kommenterer at dette har påvirket matematikkundervisning i Skandinavia. Det har vært flere reformer som har endret hva som inngår som formål, innhold og metode i skolematematikken. I Norge er Mønsterplan 87, Reform 94 og Kunnskapsløftet 2006 eksempler på dette. Skott et al. (2018, ss. 472-477) fortsetter med å påpeke at utdanning har blitt stadig viktigere som politisk satsningsområde, der matematikk har en stor rolle som leverandør av kvalifisert arbeidskraft. Tidligere var det mer fokus på prosedyreorientering, der elevene skulle lære seg metoder til å løse ulike utrekninger, og resonnering og bevis ble i liten eller ingen grad brukt. Nå har det blitt viktigere å arbeide mot en mer sammenhengende og forståelsesbasert matematikkundervisning, som i høy grad er basert på resonnement. Det kan dermed tenkes at de nye kjerneelementene har dypere røtter enn fra 2016, da det ble bestemt at det skulle bli en fagfornyelse (Kunnskapsdepartementet, 2016).

I likhet med Skott et al. (2018, ss. 472-477) kommentar om matematikken sin rolle om å levere kvalifisert arbeidskraft, nevner Naidoo (2019, ss. 37-38), i en tidsskriftsartikkel fra Sør-Afrika, om en ny revolusjon kalt for «The fourth industrial revolution». Det omhandler hvordan teknologi har manifestert seg i samfunnet, der det skjer endringer på måten man lever og arbeider på. Dette er en utvikling med høyt tempo. Butler-Adam (2018, referert i Naidoo, 2019, s. 38) hevder at utdanningssystem og opplæring må bli modifisert til å forberede mennesker til å være fleksible – med evne til kritisk tenkning – da dette er evner som vil bli etterspurt i et framtidig arbeidsmarked. Det blir også hevdet at lærere bør forsikre seg at elever, i arbeid med problemløsning, arbeider på en slik måte at de tenker realistisk – gjerne knyttet til en virkelighetskontekst.

Ut fra dette kan man stille flere interessante spørsmål, slik som hvordan man konkret kan arbeide mot en forståelsesbasert matematikkundervisning, preget av resonnering, problemløsning og kreativitet – samtidig som man ivaretar skolen sitt mangfold, der samtlige elever opplever utbytte av opplæringstilbudet. Det er ikke dette jeg skal ta for meg, men slike spørsmål har vært med å forme med mot mitt mål med denne oppgaven; å se hva slags elevresonnement som blir generert i arbeid med rike oppgaver, samt hvilke betingelser elevene setter til oppgavene.

1.2 Egne erfaringer som utgangspunkt

Mitt utgangspunkt har sitt sprang i mine egne erfaringer og forforståelser. Dette er erfaringer jeg har gjort meg i ulike praksisperioder under lærerutdannelsen, og etter flere vikariat og vikartimer på en og samme barneskole. Gjennom samtaler med kollegaer har jeg fått inntrykk av at lærerens store samfunnsmandat kan arbeides med på ulike måter. Jeg har også oppfattet at rike oppgaver kan være et smart pedagogisk verktøy å ta i bruk, der elever får mulighet til å møte en rekke matematiske idéer og begreper. Dermed ønsker jeg å se hvilke retninger rike oppgaver kan ta når elever får arbeide med dem, uten for store føringer fra en lærer.

Videre har jeg fått et språk for ulike typer matematikkundervisning. Én type er den tradisjonelle matematikkundervisningen, der det er om å svare så fort som mulig. Her er det gjerne bare ett riktig svar – med mange gale svar. Den tradisjonelle matematikkundervisningen defineres som undervisning der tavleundervisning og løsning av rutineoppgaver (som regel fra lærebok) er dominerende. Særtrekk ved denne undervisningen er hvordan den er organisert: Først introduseres nytt fagstoff. Deretter arbeider elevene med utvalgte oppgaver, der elevene gjerne må bruke en teknikk eller algoritme som er lært i begynnelsen av timen (Alrø & Skovsmose, 2002, ss. 45-46). Dette er en oppgavediskurs som blir sett på som lite variert sammenlignet med hva andre fag har å bidra med. Elevene arbeider med å få til oppgaver og med å fortsette en oppgaverekke, der det blir lite rom for faglige samtaler (Johnsen-Høines & Eskeland Rangnes, 2016, ss. 103-106). Rike oppgaver kan ansees som en kontrast til denne type undervisning, da elevene ikke får en oppskrift de kan følge, men heller må finne løsningsmetoder selv. Dette øker min interesse for å skrive en master som omhandler elever som arbeider med rike oppgaver.

1.3 Forskningsspørsmål og avgrensninger

Jeg har et ønske om å undersøke elever som arbeider med rike oppgaver. Med opp til fem års studium ved Høgskolen på Vestlandet har jeg blitt bevisst på fordeler ved å bruke rike oppgaver på grunnskolen. Grunnet snevert funn på tidligere forskning om akkurat rike oppgaver, øker min nysgjerrighet for å begi meg ut på dette feltet selv. Resonnering markerer seg tydelig som kjerneelement i fagfornyelsen, og siden rike oppgaver kan legge til rette for resonnering, er det attraktivt å slå sammen forskningsspørsmål som kombinerer både rike oppgaver og resonnering.

Videre har jeg i tre år arbeidet sporadisk som tilkallingsvikar på en barneskole i min hjemkommune. Der har jeg vært i kontakt med mange ulike, men fortrinnsvis dyktige lærere. Jeg har fått sett, vært med på og blitt inspirert av en rekke undervisningsopplegg. Jeg har observert at det finnes mange ulike måter lærere kan utøve sitt yrke, der det er mulig med både lærerstyrte- og elevstyrte aktiviteter. Da rike oppgaver av natur inneholder rikelig med matematisk innhold, kan slike oppgaver ta ulike retninger. Jeg ønsker å dykke dypere i dette, og forske på hvilke retninger det kan ta når elever får styre store deler av arbeidet selv. Jeg er nysgjerrig på hvilke tanker og resonnementer de gjør seg, og på bakgrunn av dette har jeg formulert to forskningsspørsmål:

Hvilke resonnementer blir generert når elever på 7. trinn arbeider med rike oppgaver?

Hva slags betingelser setter elevene til de rike oppgavene, og hvordan påvirker det de matematiske resonnementene?

Jeg kommer til å se på resonnementer både når det gjelder gitte problemer, og ut fra elevenes betingelser – eller elevenes egne formulerte problemer. Det må presiseres at selv om jeg ønsker å se hvordan elever – uten for store innspill fra lærere – arbeider med rike oppgaver, så er det naturlig at elevene kan få innspill fra meg. Det blir enten i form av å utfordre elevene, eller hjelpe til der det blir ansett som hensiktsmessig.

1.4 Oppgaven sin oppbygning

I første del av oppgaven vil jeg ta for meg relevant teori knyttet opp mot ulike resonnementsformer, problem posing og rike oppgaver. Videre er det en metode del, der jeg vil skrive generelt om forskningsmetode før jeg går over til hvordan jeg skal gjennomføre analyse av elevresonnementer og elevbetingelser. I den etterfølgende analysedelen vil jeg presentere tekstutdrag fra ulike elevpar når de arbeider med rike oppgaver, og presentere funnene fra analysen mens jeg diskuterer dem. Deretter vil jeg drøfte rundt ulike funn fra analysen min, som blant annet går på hva slags resonnementer elevene genererte. Jeg kommer også innpå lærerens rolle når han bruker rike oppgaver i sin undervisning.

2 Teori

I denne delen av oppgaven vil jeg ta for meg relevant teori om resonnement, problem posing og rike oppgaver. Først vil jeg se nærmere på ulike former for resonnement, der jeg vil se på resonnering i matematikk og andre fagfelt. Det er også naturlig å nevne bevis i denne delen, i tillegg til tidligere forskning om resonnering. Deretter kommer en begrepsavklaring rundt problem posing. Her blir det nevnt trekk når elever utarbeider egne problemer. Avslutningsvis kommer utgreiing rundt rike oppgaver, der det blir lagt fram egenskaper ved rike oppgaver som jeg tenker kan stimulere til resonnering og problem posing.

2.1 Resonnering

Den nye læreplanen legger stor vekt på argumentasjon og resonnering. Denne masteren tar for seg resonnering, men det blir nødvendig å forklare begge begrepene da det er en del likheter mellom dem. I kjerneelementene blir argumentasjon forklart ut fra at elever begrunner fremgangsmåter, resonnement og løsninger og beviser at disse er gyldige (Utdanningsdirektoratet, 2020). Schwarz og Asterhan (2008, s. 143) får frem at argumentasjon er en sosial aktivitet, som er ment for å øke eller begrense aksept for et standpunkt hos noen andre. Av den grunn blir argumentasjon ofte koblet opp mot retorikk, da det er et overtalelsesaspekt ved å argumentere. Krummheuer (1995, s. 131) omtaler argumentasjon som eksplisitt uttrykt resonnering. Ut fra dette blir argumentasjon – i denne oppgaven – definert som en sosial aktivitet med formål å øke eller begrense aksept for et standpunkt hos andre, som innebærer resonnering.

Å resonnere betyr å trekke fornuftige slutninger eller følge en tankerekke på en logisk måte. Et resonnement er da en tankerekke som fører til en slutning, som også begrunner slutningen (Store Norske Leksikon, 2019). Schwarz og Asterhan (2008, s. 143) får frem at resonnering tidligere har blitt ansett som en avansert form for individuell tenkning. Videre omtaler Walton (2006, referert i Schwarz & Asterhan, 2008, s. 143) resonnering som «(…) epistemologically self-constrained thinking». Resonnering kan dermed forståes som en individuell aktivitet, der et individ prøver å forstå noe for seg selv – for å få noe til å samsvare med virkeligheten. Taflin (2007, ss. 109-110) supplerer dette med at matematiske idéer behandles ved hjelp av ulike uttrykksformer, slik som muntlig, skriftlig eller med hjelp av materiell. Hun fortsetter med at formålet til et matematisk resonnement er å til slutt kunne se sammenhenger og formulere generaliseringer.

Lithner (2006, ss. 3-4) får frem at [matematisk] resonnering er de tankene eller tankesett som fører en person til å nå en konklusjon. Tankene er ikke nødvendigvis basert på formell, deduktiv logikk – de kan til og med være feil, så lenge den som resonnerer anser tankene som fornuftig. Kilpatrick, Swafford og Findell (2001, ss. 129-131) skriver lignende. De omtaler resonnering som å begrunne ens arbeid ved å gi tilstrekkelig grunn for det, uten at det må bestå av formelle bevis. Resonnering inkluderer dermed alle som tenker når de møter matematiske oppgaver, og er ikke utelukkende begrenset til bevisføring.

Ut fra disse ulike innfallsvinklene, blir matematisk resonnering – i denne oppgaven – definert som en individuell tenkning, der ett individ prøver å komme frem til en konklusjon. Dette gjør individet med tanker – som behandler matematiske idéer – han tilsynelatende tenker er fornuftig, der han også kan forsøke å se sammenhenger eller å generalisere. Argumentasjon er delen av resonnering som handler om å få noen andre til å forstå at en eller flere tanker er hensiktsmessig.

2.1.1 Ulike former for resonnement

Ulik litteratur klassifiserer resonnement på forskjellig vis. Hana (2013, s. 85) presenterer tre generelle resonnementsformer som finnes både innenfor matematikk og andre fagfelt:

1. Induksjon
2. Deduksjon
3. Abduksjon

Baroody (1993, referert i Svorkmo, 2007; Yumiati, 2017) skriver om matematiske resonnement, som han deler inn i tre typer:

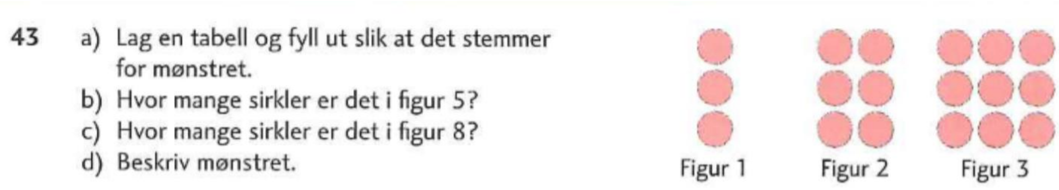
1. Intuitive resonnement
2. Induktive resonnement
3. Deduktive resonnement

Både Hana (2013) og Baroody (1993) tar for seg induksjon (induktive resonnement) og deduksjon (deduktive resonnement). Hana (2013) forklarer begrepene slik det typisk blir gjort innenfor fagfelt som filosofi og logikk, mens Baroody (1993) vinkler det mot matematikk. De skiller seg også henholdsvis ut fra å nevne abduksjon og intuitive resonnement.

Hana (2013, s. 85) forklarer induksjon ut fra at man resonnerer seg fra gitte premisser frem til en konklusjon. Et premiss kan forståes som en antagelse som ansees som å være sann (Wilton, 1990, s. 403). Her gjetter man seg fram til en konklusjon ut fra de gitte premissene. Et klassisk eksempel på induksjon er at solen står opp om morgningen (Hana, 2013, s. 85). Basert på tidligere observasjoner er det naturlig å si at solen står opp om morgningen, men en konklusjon om at solen skal stå opp i morgen er ikke utledet av premisset om at solen har stått opp alle observerte dager inntil nå. Hana (2013, s. 85) omtaler dette som en svært sannsynlig gjetning, der man prøver å gå fra et enkelttilfelle til et annet eller fra et enkelttilfelle til noe generelt.

Innenfor matematikk tenkes det at induktive resonnement består av å observere regelmessigheter, eksempelvis se mønstre i oppgaver, for å lage en generell regel (Yumiati, 2017, s. 285) eller gjetninger (Stylianides, 2016, s. 12). Man ser da på konkrete saker eller eksempler som tester gjetninger eller for å få en bedre forståelse for hva en gjetning betyr og hvordan den kan bli validert eller tilbakevist. Det blir gjerne brukt mindre formell tankegang – som å resonnere ut fra analogier eller retoriske virke midler – for å få frem et poeng

(Stylianides, 2016, s. 12). Typiske trekk er også å systematisk og analytisk sammenligne objekter (Klaus, 1989, referert i Koning, Hamers, Sijtsma & Vermeer, 2002, s. 214). Ut fra dette kan et induktivt resonnement framstille en konklusjon som er sann i et spesifikt tilfelle. Dette er en form for generalisering der konklusjonen ikke gjelder alle omstendigheter. Visuelle oppgaver kan antas å tilrettelegge yngre elever til å resonnere induktivt (Koning et al., 2002, s. 214), se Figur 1.



43 a) Lag en tabell og fyll ut slik at det stemmer for mønstret.
b) Hvor mange sirkler er det i figur 5?
c) Hvor mange sirkler er det i figur 8?
d) Beskriv mønstret.

Figur 1 - Oppgave som kan generere indukive resonnement

(Hentet fra *Matemagisk 6A, 2015*)

Ut fra illustrasjonene til oppgaven kan man se at hvert figurtall øker med tre. For å finne figur 5 og figur n kan man skrive ned rekursive formler for å gjøre det mer oversiktlig:

$Figur\ 1$	$=$	3	$=$	$3 * 1$	$=$	3
$Figur\ 2$	$=$	$3 + 3$	$=$	$3 * 2$	$=$	6
$Figur\ 3$	$=$	$3 + 3 + 3$	$=$	$3 * 3$	$=$	9
$Figur\ 4$	$=$	$3 + 3 + 3 + 3$	$=$	$3 * 4$	$=$	12
$Figur\ 5$	$=$	$3 + 3 + 3 + 3 + 3$	$=$	$3 * 5$	$=$	15

Tabell 1 - Rekursiv formel for å vise et induktivt resonnement

Mønsteret ovenfor viser flere enkelttilfeller. Ved å se på alle disse enkelttilfellene, kan man tenke at flere tilfeller vil følge samme spor. Dermed kan denne formelen ansees som mest sannsynlig:

Figur $n\ =\ 3 + 3\ \ldots +\ 3\ =\ 3 * n$

Her er det en antagelse om en regel der man legger til tre i hvert skritt. Man kan derimot ikke hevde at dette er en sann konklusjon – i dette tilfelle vet man ikke om figur 158 følger samme formel som figur 1, 2 … og 5 gjør. Man kan gjøre resonnementet sterkere ved å komme med flere eksempler der formelen viser seg å være sann. Slik oppgaven er gitt kan man ikke utføre et deduktivt resonnement, siden det ikke er gitt en eksplisitt regel – og dermed blir alle svar egentlig bare en gjetning. Kort sagt er induksjon og induktive resonnement basert på antagelser – gjerne plausible antagelser – som alene ikke kan påvise at en konklusjon er sann (Hana, 2013, s. 85).

Det trengs deduksjon for å kunne bevise at noe er sant. Deduksjon er å utlede konsekvenser fra gitte premisser. Man tar utgangspunkt i premissene og utleder hvilke slutninger man kan trekke fra disse. Omformulert handler det om å trekke en slutning ut fra noe allment til et enkelttilfelle (Hana, 2013, s. 85). Ved å ha et sett med fakta man vet er sant, kan man utvide faktaene om man har slutningsregler (modus ponens brukes innenfor formell logikk, der slutninger ofte formuleres som hvis-så. Om man vet alle katter er dyr, og at Tintin er en katt, så kan man utvide det til å si at Tintin er et dyr (*Hvis* Tintin er en katt, *så* er han også et dyr)).

Deduktive matematiske resonnement handler om å dra en spesifikk konklusjon gjennom logisk resonnering, ved å starte med en generell regel man vet er riktig (Yumiati, 2017, s. 285). Her brukes gjerne variabler som representerer alle mulige tall. Et deduktivt resonnement garanterer en sann konklusjon om premissene er sanne, og om argumentet er logisk eller gyldig. I avbildning vises et eksempel på et deduktivt matematisk resonnement.

La 2n være hvilket som helst partall

La 2m+1 være hvilket som helst oddetall

$$
\begin{aligned}
& 2m + 1 - 2n \\
= \quad & 2m - 2n + 1 \\
= \quad & 2(m - n) + 1
\end{aligned}
$$

Siden hvilket som helst tall som blir doblet pluss 1 blir et oddetall, vil hvilket som helst oddetall som blir subtrahert med et partall bli et oddetall

Figur 2 - Eksempel på et deduktivt matematisk resonnement

Hana (2013, s. 85) nevner også abduksjon. Det er å resonnere i motsatt vei av induksjon og deduksjon – her starter man med en konklusjon, og prøver å finne premisser for at konklusjonen stemmer. Man kan ha observert et fenomen som man ønsker å finne en forklaring på, eksempelvis at man ser våt asfalt, der man prøver å finne en eller flere årsaker til det.

Intuitive resonnement kommer fra en prosess der man inntrer med en konklusjon uten at den er bygget på all nødvendig informasjon (Yumiati, 2017, s. 284). Intuitive tanker fremstår som plutselig (Farmaki & Paschos, 2007, s. 354), og konklusjonen blir da bygget på en antakelse. Antakelsen vil være bygget på kunnskap eller innsikt personen har fra før, som oppleves åpenbar – dog kan den kunnskapen være misledende. Intuitive resonnement kan være korrekt eller ukorrekt. Piaget sin konverseringsoppgave kan skape intuitive resonnement, se Figur 3 (min oversettelse):

To identiske glass har samme vannmengde i seg. Vannet fra ett glass blir helt oppi et nytt, tynnere og mer avlangt glass. Er vannmengden i det første glasset lik som vannmengden i det nye glasset?

Figur 3 - Tekstoppgave som kan føre til et intuitivt resonnement

(Hentet fra *How students (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules, 2000,* s. 12)

Denne oppgaven fungerer gjerne best å gjøre praktisk med barn. Her kan barna tenke at det er større vannmengde i glasset som er tynt og avlangt enn det opprinnelige glasset. Stavy og Tirosh (2000, s. 1-2) forklarer at dette er en intuitiv regel kalt for «More A- More B». Denne regelen baserer seg på at barna baserer seg på direkte visuell informasjon, der de tenker at mer høyde tilsvarer mer vann.

Ut fra beskrivelsene om disse resonnementsformene er det bare deduksjon som kommer fram til sikre resultat. Induksjon, abduksjon og intuisjon kan komme frem til sannsynlige, men ikke sikre, resultat (Hana, 2013, s. 85).

Lithner (2000; 2006; 2008) har en annen måte å klassifisere resonnement på, der han deler det inn i to hovedkategorier:

1. Imitative resonnement
2. Kreative resonnement

Imitative resonnement handler om å reprodusere tidligere algoritmer eller å memorere tidligere løsninger. Det kan være at en elev identifiserer en passende algoritme han har brukt før, at han prøver og feiler med en tilfeldig algoritme eller følger en ukjent algoritme som en oppskrift, gjerne fra en tekstbok eller lærer (Lithner, 2008, ss. 258-265).

Et kreativt resonnement har tre kriterier, som Lithner (2008, ss. 266-267) omtaler som «novelty», «plausibility» og «mathematical foundation». I presentert rekkefølge handler det om at 1) den som resonnerer har en ny tankerekke (eller rekonstruerer en glemt tankerekke), 2) der han bruker argument som støtter hvorfor tankerekken gir en sann konklusjon, 3) og argumentet er bygget på matematikk.

Lithner (2006, s. 6) skriver at kreative resonnement har mest vesentlig rolle når elever arbeider med problemoppgaver, siden problemoppgaver ikke har en tydelig fremgangsmåte tilgjengelig for eleven – slik at han må konstruere eller finne en fremgangsmetode selv.

Lithner (2008, ss. 255-256) skapte disse klassifiseringene da han ønsket å lage et konseptuelt rammeverk om resonnering. Han skriver at resonnering er kompleks, og kan ikke direkte karakteriseres av rammeverket (Lithner, 2006, s. 21). Det trengs en person som kan tolke og analysere data – gjerne transkribert lydopptak – for å kunne gi et sammenhengende bilde eller kontekst av resonneringen.

2.1.2 Bevis

Av plasshensyn ønsker jeg å skrive kort om bevis, da det ikke er hoved-essensen av min forskning. I dette delkapittelet har jeg som mål å vise til en sammenheng mellom bevis og resonnering, av den grunn at noe resonnering faller innunder som bevis.

Et bevis er en formell kjede med logiske slutninger som begynner med en mengde premisser og slutter med en konklusjon (Hana, 2013, s. 82). Premissene og slutningene må være gyldige og sikre, slik at en konklusjon kan ansees som gyldig og sikker. Matematiske bevis bygger på aksiomer, der det er en serie med logiske deduksjoner som fører frem til en konklusjon (Hunt, 2000; Macphee, 1999). Stylianides (2007, s. 291; 2016, s. 13) vektlegger at det skal foregå en matematisk argumentasjon, dvs. eksplisitt uttrykt resonnering (Krummheuer, 1995, s. 231), der det kommer flere sammenhengende påstander som er for eller imot noe. Han hevder at disse påstandene må være uttrykt slik at en fagfelle ville vært enig. Hana (2013, s. 85) presiserer at alle matematiske bevis er deduksjoner. Ut fra de presenterte forklaringene på bevis, kan man si at bevis i matematisk forstand er korrekte deduktive resonnementer.

Det er også en selvfølge å nevne Balacheff. Han er en velkjent didaktiker på bevisfeltet, der han attpå har sett på bevis hos yngre barn – som øker hans relevans for denne masteren. Det er i tillegg flere som har sett på resonnering som tar utgangspunkt i Balacheff sin forskning (Lithner er ett eksempel på dette). Balacheff (1988) har blant annet analysert språklige karakteristiske trekk hos 13-14 åringer for å se hva slags type bevis barna skapte. Det må presiseres at Balacheff (1988, s. 216-218) så på argumenter som barna selv anså som bevis – men som ikke nødvendigvis er korrekte deduktive resonnement. Han deler bevis inn i to:

1. Pragmatiske bevis
2. Konseptuelle bevis

Pragmatiske bevis tar utgangspunkt i å kunne vise eller peke på noe konkret. På andre siden innebærer konseptuelle bevis å formulere frem utsagn som tar utgangspunkt i matematiske egenskaper, uten å vise til noe konkret enkelttilfelle. Balacheff (1988, ss. 218-220) deler disse bevisformene inn i fire kategorier:

1. Naiv empirisme
2. Avgjørende eksperiment
3. Generisk eksempel
4. Tankeeksperiment

Han hevder disse kategoriene former et hierarki, henholdsvis slik det er presentert. De tre første er pragmatiske bevis, mens sistnevnte er konseptuelt bevis. Naiv empirisme er en bevisstrategi der man tar utgangspunkt i få, tilfeldig valgte eksempler for å verifisere en konklusjon. Avgjørende eksperiment trekker det videre, der man ser på nøye utvalgte eksempler for å kunne velge mellom ulike hypoteser. Disse to bevisformene er i seg selv ikke matematiske bevis – da de ikke viser til en faktisk sannhet – likevel blir de omtalt som bevis da bevisføreren gjerne antar at det er bevis (Balacheff, 1988, s. 218).

Generisk eksempel tar det et steg lenger – her bevisfører man ved hjelp av å se et enkelt eksempel som innehaver fremtredende karakteristikker eller som representerer en helhet på en god måte. Deretter kommer tankeeksperiment, som handler om å forsøke å løse et teoretisk problem ved bruk av språk, uten at det baserer seg på empiriske observasjoner. Her må bevisføreren bruke språket som verktøy for logisk deduksjon, og ikke kun bruke språket for å kommunisere. Bevisføreren må også distansere seg selv fra handling, løsningsprosess og tid av problemet. Dette kaller Balacheff (1988, s. 217) for å de-kontekstualisere, depersonalisere og de-temporalisere seg fra den konkrete situasjonen. Et tankeeksperiment er da avhengig av hvordan bevisføreren formulerer seg.

Å bevege seg gjennom de ulike bevisformene kan forståes som en overgang fra konkrete eksempler til å generalisere – eventuelt at man går fra induktive- til deduktive resonnement. Naiv empirisme og avgjørende eksperiment har likhetstrekk med induktive resonnement, da begge deler peker på noe konkret for å kunne hevde noe. Generisk eksempel er på vei til å bli et gyldig deduktivt argument, siden den tar utgangspunkt i struktur fra et konkret eksempel som gjør at den kan generaliseres. Tankeeksperiment utarbeides med korrekte deduktive resonnement, der gyldige etablerte premisser blir brukt for å komme fram til en sikker konklusjon.

Balacheff (1988, ss. 220-229) lot barna arbeide med en oppgave der de skulle vise antall diagonaler i en mangekant når barna fikk vite antall punkter i mangekanten. Hans resultat viser at analyse av språklige karakteristiske trekk er utilstrekkelig for å vise barna (13-14 år) sine bevisføringsevner. I stedet for må man se på barnas prosess mens de produserer bevis. Han konkluderer med å se en kobling mellom naiv empirisme og det avgjørende eksperiment. Barna bevistførte ved å vise til konkrete eksempler, der de først begynte med få tilfeldige eksempler, før de avsluttet bevisføringsseansen med et avgjørende eksperiment. Overgangen mellom de ulike bevisformene handler om å trinnvis fjerne usikkerhet. Balacheff så få generiske eksempler, og kun ett tankeeksperiment (Balacheff, 1988, s. 226). Han forklarer dette resultatet ut fra at barn ofte støtter seg til konkrete eksempler.

Balacheff (1988, ss. 228-229) la merke til at elevene ble mer overbevist av det avgjørende eksperimentet, mens de generiske eksemplene virket ineffektive for å overbevise andre elever. Han forstår det sånn at elevene måtte ha vært enig om de samme fremtredende karakteristikkene ved det generiske eksemplet for at det skulle virke overbevisende. Han peker på at sosial interaksjon kan virke som et hinder i noen tilfeller – særlig de elevparene der hvert barn arbeide med ulike konsepter. Disse barna argumenterte for sine egne syn, der noen elever kom med ad hoc argument – at de begrunnet sine løsningsforslag på en slik måte at det kun passet den konkrete situasjonen, uten at det kunne generaliseres (Balacheff, 1988, s. 222). Videre peker han på at det generiske eksemplet markerer en overgang mellom pragmatiske- og konseptuelle bevis. Bevisføreren og lytterne må etter hvert klare å gå vekk fra den konkrete situasjonen – eller de-kontekstualisere seg fra situasjonen. Barn kan slite med dette, da det er kognitivt krevende.

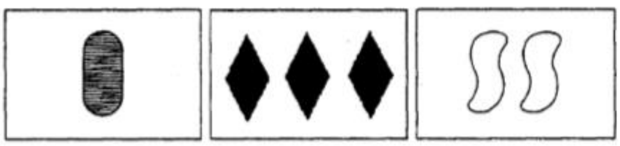
2.1.3 Tidligere forskning om deduktiv resonnering

Reid (2002) har, basert på Pólya (1954; 1990) sitt arbeid om resonnering, gjort en studie for å utvikle et mer beskrivende språk for å klassifisere matematiske resonnement. Han har nyansert deduktiv resonnering i ulike kategorier ut fra å se på hvordan to elever i 7-8 års alderen arbeidet parvis med oppgaver. Han ønsket å nyansere språket for deduktive resonnement, da barn ofte ikke uttrykket tanker på en tydelig måte, der de gjerne baserer seg på implisitte betingelser (Reid, 2002, s. 111). Han skiller deduktiv resonnering mellom å være ett-steg og flersteg, simpel og hypotetisk. Under er en oversikt over de ulike formene for deduktiv resonnering (min oversettelse):

Antall premiss	Ett steg	Flersteg
Ett	Spesialisering	---
To eller flere	Simpel ett-steg deduktiv resonnering	Simpel flersteg deduktiv resonnering
To eller flere, minst ett hypotetisk	Hypotetisk ett-steg deduktiv resonnering	Hypotetisk flersteg deduktiv resonnering

Tabell 2 - Reid (2002, s. 107) sine ulike former for deduktiv resonnering

Som nevnt er et premiss en antagelse man anser for å være sant – selv om det bare er for et øyeblikk. Spesialisering handler om å bestemme noe om en spesifikk situasjon ved å fastslå at én generell regel gjelder situasjonen. Reid (2002, s. 107) observerte at barna gjorde dette mens de spilte Set. Her fikk barna se tre ulike kort, der de ut fra kortene begrunnet at et sett måtte bestå av tre kort med ulik farge, fasong og antall figurer.



Figur 3 - Fra spillet Set, f.v. 1 rød oval, 3 grønne diamanter og 2 hvite kurver

Simpel deduktiv resonnering er å dedusere en konklusjon ut fra to eller flere etablerte premiss, som kan deles inn i ett-steg og flersteg. Reid (2002, s. 108) så at ett-steg var mest vanlig, som vil si at elevene konkluderte med én konklusjon. Ett-steg deduksjon fungerer som byggesteiner for bevisføring, der de må bli satt i en rekke for å generere bevis. Å resonnere med en rekke deduksjoner kalles for flersteg deduktive resonnement. Reid (2002, s. 108) skriver at det er utfordrende å se grunnskoleelever komme med flersteg deduktive resonnement, da elever sjeldent kommer med slike resonnement i tillegg til at de sjeldent uttrykker seg eksplisitt. Han hevder man kan konkludere i etterkant om elever har brukt flersteg deduktive resonnement ved å se på elevenes sine konklusjoner sammen med hva informasjon de hadde til å begynne med. Reid (2002, s. 135) nevner i en annen artikkel at barn har større sannsynlighet for å vise flersteg deduktive resonnement i arbeid med problemer som innebærer aritmetikk, da tidlig skolematematikk fokuserer på aritmetikk.

Hypotetisk deduktiv resonnering er å resonnere ut fra noe man ikke vet nødvendigvis er sant, enten for å motbevise eller for å vise at noe gjelder i flere tilfeller. Det blir da brukt hypotetiske premiss for å komme fram til en konklusjon. Reid (2002, s. 236) skriver at denne type resonnering gjerne kan gjøres ved å bruke bevistypene bevis med selvmotsigelse eller induksjonsbevis. Henholdsvis handler det om å anta at premissene holder og at konklusjonen ikke holder, og å vise at et utsagn inneholder uendelig mange tilfeller (Hana, 2013, ss.101-104). Reid (2002, s. 110) hevder det er antatt at det er mer utfordrende å resonnere ut fra hypoteser enn det er fra konkrete eksempler.

Dette med hypotetiske deduktive resonnement ligner på hva Walton (2006, referert i Schwarz & Asterhan, 2008, s. 146) kaller for plausible argument. Det handler om å anta premisser for å komme frem til midlertidige konklusjoner. Likheten inntreffer med at både hypotetiske resonnement og plausible argument tar utgangspunkt i at den som resonnerer kommer med tilleggsinformasjon selv, for å kunne komme fram til en konklusjon.

2.1.4 Kort om tidligere forskning om kreative resonnement

Sidenvall, Lithner og Jäder (2015) har gjort en studie der de har analysert elever på videregående som har løst oppgaver fra lærebøker. De så på korrelasjonen mellom ulike matematiske resonnementsformer som var nødvendig å bruke, det som ble brukt og frekvensen av riktige løsninger. Studiens relevans for denne masteren går ut på at elever på barneskolen en gang skal gå på videregående – som kan være en indikasjon eller frempek på hvordan barneskoleelever kan utvikle seg.

Sidenvall et al. (2015, s. 543) lot elevene selv velge mellom oppgaver med tre ulike vanskelighetsgrader, der 13 av 15 elever valgte de letteste oppgavene. Datamaterialet viser til 106 deloppgaver. 99 av oppgavene ble løst med imitative resonnementer, der 76 oppgaver var riktig besvart. Syv oppgaver ble løst med kreative resonnementer, med 100% riktige besvarelser. Sidenvall et al. (2015, s. 549) forklarer resultatet ut fra at elevene valgte de letteste oppgavene. De hevder at elevene ville fått bedre mulighet til å resonnere kreativt om oppgavene var mer utfordrende. Elever vil altså generere ulike resonnementer ut fra hvilke oppgaver de arbeider med.

2.2 Problem posing

Det finnes ulike framgangsmåter for å få innblikk i elevers resonnering. Silver (1994) presenterer problem posing som ett eksempel på en slik fremgangsmåte. Han skriver at problem posing handler om å generere nye problemer og omformulere gitte problemer (Silver, 1994, s. 19). Dette kan gjøres før, underveis eller etter man har løst en oppgave. Silver (1994, ss. 19-20) forklarer at omformulering av en oppgave kan gjøre den lettere å løse, da oppgaveløseren gjerne omformulerer oppgaven til en ny oppgave han synes er enklere. Stoyanova og Ellerton (1996, referert i Bonotto & Santo, 2015, ss. 107-108) har flettet dette poenget inn i sin forklaring på problem posing – de skriver at det er en prosess der elever, med utgangspunkt i matematikkerfaringer, konstruerer personlige tolkninger av situasjoner og formulerer meningsfulle matematiske problem. Denne forklaringen får frem at elever bruker egne utgangspunkt for å kunne løse en oppgave. Fokuset er å gjøre en oppgave mer tilgjengelig for en selv.

Problemformulering er en prosess i problem posing. Det handler om å gjøre et problem om til en ny versjon. Brown og Walter (1983, referert i Silver, 1994, s. 21) legger vekt på å generere nye problemer ved å endre en eller flere betingelser ved en oppgave. Dermed kan én problemoppgave skape flere ulike problemer, om man velger flere situasjoner med ulike betingelser.

Silver (1994, s. 21) hevder problem posing kan bli brukt som undersøkende virksomhet. Det innebærer å stille spørsmål og søke svar, å gjenkjenne problemer og kritisk betrakte det man gjør (Jaworski og Fuglestad, 2010, s. 90, referert i Hana, 2014). Hana (2014, ss. 17-26) uttrykker at elever får mulighet til å ta eierskap i sin egen læringsprosess ved å stille seg undrende. Å ta eierskap til en problemstilling impliserer at man opplever det som verdifullt å undersøke problemstillingen. Han poengterer også at elever får artikulere egne og andre sine tanker og idéer ved å drive med undersøkende virksomhet. Det er viktig å presisere at både elevene og læreren har like mye ansvar for å omformulere nye problemer og finne løsninger (Silver, 1994, s. 21). Dette er for å ikke frata elevenes følelse av eierskap. I tillegg kan man få et innblikk i elevenes matematikkunnskap, som også kan gjenspeile elevenes holdninger til matematikk (Silver, 1994, s. 24).

2.2.1 Utvidelse av oppgaver

Det finnes ulike måter å skape nye problemer ut fra gamle. Hana (2013, ss. 249-251) omtaler utvidelse av oppgaver som en form for problem posing. Her endrer man oppgaver, ved å eksempelvis ta vekk informasjon fra oppgaven eller ved å legge til ekstra opplysninger. Dette er for å plassere en matematisk oppgave inn i et større bilde, for å vise at matematikk henger sammen. I tillegg kan dette være en tilpasning av oppgaven mot ulike elevers nivå. Brown og Walter (2005, ss. 44-59) presenterer en metode for å generere spørsmål som de kaller for «What-if-not». Her starter man med et problem, der man lister opp alle egenskapene til problemet. Deretter tenker man hva som skjer om man bytter ut en gitt egenskap med en annen. Med andre ord tar man en av egenskapene og spør «Hva hvis ikke [egenskap], men i stedet hadde vært [noe annet]?» (Hana, 2013, s. 250). Dette kan være en effektiv metode for å gå inn og undersøke muligheter i et matematisk spørsmål (Hana, 2013, s. 250).

Hsu, Kysh og Resek (2007, s. 20) hevder at det er en viktig evne for lærere å vite hvordan de skal støtte og tilrettelegge ulike elevgrupper, både dem som sliter med å finne løsningsforslag og dem som blir fort ferdig. De skriver at lærere bør forberede «pocket questions», spørsmål som nettopp utvider oppgaven for raske elever, og spørsmål som veileder dem som sitter fast.

Kilpatrick (1987, s. 133) presenterer en rekke spørsmål man kan spørre seg selv eller elever, for å løse problemer eller å skape nye problemer ut fra en gitt situasjon (min oversettelse):

> Hvor mange …?
>
> På hvor mange måter …?
>
> Hva er mest eller minst …?
>
> Hva egenskaper har …?
>
> Hva er likt med x og y …?
>
> Hvor har du sett noe liknende …?
>
> Hva er viktig her …?
>
> Hvorfor fungerer dette …?

Hana (2013, s. 257) presenterer også noen spørsmål:

> Hva må legges til/tas vekk/endres for at … skal være tillatt/stemme/være usant?
>
> Hva kan legges til/tas vekk/endres uten å forandre på …?

Disse spørsmålene kan være til hjelp for å skape holdninger til å tenke matematisk. De kan også være med på å gjøre elever mer selvstendig til å skape egne problemstillinger (Kilpatrick, 1987, s. 133).

2.2.2 Tidligere forskning om problem posing

Hansen og Hana (2015) har gjort en studie om problem posing ut fra et modelleringsperspektiv. De mener disse begrepene henger tett sammen, da modellering handler om å bruke matematikk for å få en dypere innsikt i ekte problemstillinger (Hansen & Hana, 2015, s. 36), der problem posing handler om å nettopp komme frem til disse problemstillingene. De hevder dette er et område med lite forskning, som burde bli mer utforsket, da problem posing har en del fordeler. For grunnskoleelever handler dette om å gjøre at matematikk føles relevant utenfor grunnskolen. I tillegg kan elevene ta eierskap i deres eget læringsmiljø, da de trolig vil skape problemstillinger de selv anser som relevant (Hansen & Hana, 2015, s. 39).

Studiet baserer seg på observasjoner av noen lærerstudenter. De hadde en undervisningsøkt for 8. trinn om planter, der målet var at elevene skulle formulere spørsmål knyttet til plantevekst slik at de skulle komme innom spredningsplott og lineære funksjoner. Studentene hadde tenkt at elevene skulle stille matematiske spørsmål og forutsigelser, slik som hvor høy en plante kunne bli etter x antall dager. Elevene kom derimot med ikke-matematiske spørsmål, slik som hvorfor en plante klarer å vokse gjennom asfalt og hvorfor noen planter er giftige mens andre ikke er det (Hansen & Hana, 2015, s. 37).

Ut fra disse observasjonene blir det presentert utfordringer med å knytte problem posing opp mot modellering. Én utfordring er å stille relevante matematiske spørsmål. Studentene gav ikke tydelige retningslinjer på at elevene skulle stille matematiske spørsmål. Elevene kom med ikke-matematiske problem, med andre ord problemstillinger som ikke kunne løses med matematikk. Hansen og Hana (2015, s. 37) mener derfor at læreren har en viktig rolle med å bidra elevene til å finne eller omformulere elevenes problemstillinger. De kommer med et eksempel der de foreslår at et ikke-matematisk spørsmål som «Hvorfor trenger planter vann?» kan bli omdreiet til å peke på hvordan planter endrer vekstmønster ut fra hva betingelser som er på plass (Hvor mye vokser en plante i løpet av x dager med vann? Hva med uten vann?). Neste utfordring blir da, når læreren hjelper elevene med å omformulere, å fortsatt la elevene oppleve eierskap over deres egne problemstillinger. Det er dermed viktig at både lærer og elev er med i prosessen med å omformulere. Sist, men ikke minst, må man sørge for å problemstillingene passer elevenes nivå, slik at det hverken blir for lett eller for vanskelig for elevene (Hansen & Hana, 2015, ss. 37-38).

2.2.3 Tidligere forskning om bevisføring, som kan kobles opp mot problem posing

Stylianides (2016) har undersøkt elever som arbeider med «proving tasks». Det er oppgaver som tar for seg mellom én til uendelig med tilfeller, og som har som formål at noen skal begrunne eller avkrefte en påstand eller ytring (Stylianides, 2016, s. 28).

Jeg velger å plassere Stylianides (2016) sin undersøkelse innunder problem posing, til tross for hans fokus på bevis, da han presenterer to episoder der han har sett på elever i 8-9 års alderen som arbeider med «proving tasks with ambiguous conditions». Dette er som nevnt tvetydige oppgaver, der elever må velge egne premisser til oppgaven for å kunne løse den (Stylianides, 2016, s. 41). Én oppgave var at elevene skulle svare på hvor mange ulike måter de kunne få tallet 10 på. En annen oppgave var å finne ulike måter en person kan komme seg til 2. etasje, når en bygning har 25 etasjer til sammen (kombinasjon av vanlige etasjer og underetasjer) (Stylianides, 2016, ss. 41-72).

Oppgavene fra Stylianides (2016, s. 57) sitt datamateriale endte med mer enn bare bevisføring. Elevene ble opptatt av å finne ut tillatte betingelser for oppgavene, eksempelvis i oppgaven som spurte om ulike måter å få tallet 10 på, henvendte elevene seg til læreren om hvorvidt 1+9 og 9+1 var samme måte eller ikke. I denne oppgaven fastslo ikke elevene egne betingelser – det var læreren som kom med det gradvis (Stylianides, 2016, s. 69). I oppgaven om etasjene tok derimot ulike elevgrupper og fastslo betingelser for oppgaven på egenhånd (Noen grupper valgte at personen måtte ta heisen direkte til 2. etasje, mens andre grupper valgte at personen kunne ta heisen til én annen etasje først, og så til 2. etasje).

Stylianides (2016, ss. 67-68) konkluderer med at elevenes arbeid har likhetstrekk med matematikere. Han peker på matematisk historie, der utvikling av Euklidsk og ikke-Euklidsk geometri har tatt utgangspunkt i ulike premisser. Elevene i studien tok også utgangspunkt i ulike premisser – eller betingelser som dem satt selv for å kunne løse oppgavene. Man kan si at et likhetstrekk er at både matematikere og elever tar utgangspunkt i noe dem tror er sant, og utleder én eller flere konklusjoner ut fra det. Det blir dermed brukt hypotetiske premisser, som gjør det sentralt å arbeide med hypotetiske deduktive resonnementer.

2.3 Rike oppgaver

I dette delkapittelet ønsker jeg å gå i dybden om rike oppgaver – som er en spesiell type problemoppgave – der jeg vil få frem trekk ved slike oppgaver jeg tenker kan stimulere elever til å resonnere og komme med betingelser for å kunne løse de rike oppgavene.

Hagland et al. (2005, s. 27) presenterer tre kriterier som kjennetegner problemoppgaver:

1. En person ønsker å løse en oppgave
2. Personen vet ikke på forhånd en metode for å løse oppgaven
3. Det kreves anstrengelse og tankevirksomhet fra personen for å finne én eller flere løsninger

Björkqvist (2003, s. 54) og Kilpatrick (1987, s. 125) vektlegger at problemoppgaver skal ha løsningsmetoder som er uklar for problemløseren. Schoenfeld (1992, ss. 338-339) presiserer også at problemoppgaver har som mål å øke kritisk tenkning og kreativitet, der elever skal bli utfordret på et intellektuelt plan. Regnetekniske oppgaver blir dermed ikke sett på som problemoppgaver. En viktig nyanse er at et problem for noen elever, ikke nødvendigvis er et problem for andre. Dette vil si at det er snakk om en individrelatert definisjon, da det er forholdet mellom individ og oppgave som bestemmer hvorvidt oppgaven er et problem. Hagland et al. (2005, ss. 28-29) presenterer syv kriterier for at en problemoppgave skal ansees som rik (min oversettelse):

1. Problemet skal introdusere viktige matematiske idéer eller løsningsstrategier
2. Problemet skal være lett å forstå og alle skal ha mulighet til å arbeide med problemet
3. Problemet skal oppleves som en utfordring, kreve anstrengelse og tidsbruk
4. Problemet skal kunne løses på flere ulike måter, med forskjellige strategier og representasjoner
5. Problemet skal kunne initiere til matematiske samtaler ut fra elevenes svar, der ulike strategier, representasjoner og matematiske idéer kommer frem
6. Problemet skal fungere som en brobygger mellom ulike matematiske områder
7. Problemet skal kunne lede til at elever og lærere formulerer nye interessante problem

Det kan tolkes slik at Hagland et al. (2005, ss. 27-30) mener at alle de syv kriteriene må oppfylles for at en oppgave skal være rik. Det blir også presisert at kriteriene betyr like mye, slik at de ikke skal rangeres. Alle kriteriene skal bli kort bli beskrevet, men kriterium 1, 2, 5 og 7 blir mer utdypet, da disse er sentrale i valg av oppgaver til datainnsamling. Begrunnelse for valg av kriterier blir gitt i kapittel 3.3.

Kriterium 1: Problemet skal introdusere viktige matematiske idéer eller løsningsstrategier

Hagland et al. (2005, ss. 27-30) regner det som viktig at de rike oppgavene har et matematisk innhold som elevene kan komme i kontakt med, slik at de kan få på plass nye matematiske begrep og prosedyrer. Elevene skal både anvende bakgrunnskunnskaper og oppleve at de må ha mer kunnskap.

Kriterium 2: Problemet skal være lett å forstå og alle skal ha mulighet til å arbeide med problemet

Et annet sentralt trekk ved rike oppgaver er at de er lett å forstå, og derfor lett å komme i gang med. Dette gjør at de rike oppgavene kan tilpasses mange elever. Hensikten er at hver elev skal kunne få til noe, slik at elevene føler de har evne til å arbeide med problemet. Det er et viktig mål at alle elevene skal klare noe – ikke at alle skal nå like langt. NRICH beskriver rike oppgaver som «lav inngangsterskel, stor takhøyde» (Gilderdale & Kiddle, 2014). Det betyr at det skal være lett for elevene å skjønne hva oppgaven handler om, der oppgaven kan arbeides med på ulike nivå, som gjør at oppgaven åpner opp for alt mellom enkle løsningsmetoder til avansert matematisk tenkning og resonnering. Tanken er at rike oppgaver kan tilby alle elever matematiske utfordringer ut fra den enkeltes nivå. En intensjon blir da å gjøre rikeoppgaver selvdifferensierende (Hagland et al., 2005, ss. 28-30; Utdanningsdirektoratet, 2015).

Kriterium 5: Problemet skal kunne initiere til matematiske samtaler ut fra elevenes svar, der ulike strategier, representasjoner og matematiske idéer kommer frem

Det er vesentlig at rike oppgaver er flersidig – at de kan løses på mange ulike måter med forskjellige uttrykksformer – slik at en presentasjon av de ulike løsningene kan føre til fruktbare diskusjoner i smågrupper og samtaler i helklasserom. Dette kan være med å øve opp elevenes metakognitive evner, da elevene må venne seg til å forklare og forsvare egne løsningsstrategier, samtidig til å høre på andre sine innspill og vurdere deres metoder. Rike oppgaver kan dermed brukes til å trene opp elevenes vurderinger av egne og andre sine resonnement (Hagland et al., 2005, ss. 67-68). Opheim og Simensen (2018, s. 44) skriver likedan at rike oppgaver kan være hensiktsmessig å bruke i undervisningsopplegg der man ønsker å observere elevenes matematiske samtaler og samhandling i arbeid med matematikk.

Det kan også trekkes en relevans til kriterium 5 om at problemoppgaver gjerne ikke gir nok eksplisitt informasjon for hvordan de skal kunne løses (Kilpatrick, 1987, s. 125). Det kan hende at problemløseren må legge til tilleggsinformasjon som består av premiss om problemets kontekst. Om ulike elever velger ulike premisser, kan det føre til forskjellige løsningsforslag. Ulike premisser kan da endre det matematiske innholdet.

Kriterium 7: Problemet skal kunne lede til at elever og lærere formulerer nye interessante problem

Dette kriteriet kommer innpå at en rik oppgave kan føre til nye, ulike veier. Elever og lærere får mulighet til å skape nye problemstillinger. Elever kan få vist fram sine ferdigheter ved å stille nye spørsmål, da de elevgenererte problemene vil indikere hva eleven oppfattet i forrige oppgaveløsning (Hagland et al., 2005, s. 30). Omformulert kan elever som skaper nye problemstillinger vise hvorvidt de fikk tak i den opprinnelige oppgavens matematiske innhold eller ikke. Sentrale trekk i formulering av nye spørsmål er å tenke hypotetisk, med formuleringer som «Hva om vi gjør sånn i stedet for?», «Hvorfor blir det sånn …?» og «Hva hvis …?».

Det er også sentralt å nevne at kriterium 7 er innom problemformulering, der én problemoppgave kan skape flere ulike problem, om man velger flere situasjoner med ulike betingelser (Brown & Walter, 1983, referert i Silver, 1994, s. 21).

Kriterium 3 handler om hva hver enkelt elev opplever. Dette kriteriet sier at ingen elever skal oppleve problemet som en rutineoppgave der de ikke trenger å tenke seg om for å løse det. Oppgavene skal derimot være utfordrende, kreve tid og anstrengelse (Hagland et al., 2005, ss. 27-30). Dette kan blant annet gjøres ved hjelp av å utvide problemet (Hana, 2013, s. 249). Kriterium 4 tar for seg at problemet skal kunne løses på ulike måter. Løsninger kan da graderes mellom å være lettere i den forstand at de ikke krever grundig matematisk kunnskap av elevene, til å være mer avansert. Her er det en parallell til undersøkelseslandskap – oppgavene er bygget på å ha flere innfallsvinkler, der veien til svaret er viktigere enn selve svaret (Skovsmose, 2003, ss. 143-157). Kriterium 6, som dreier seg om at oppgavene skal fungere som en brobygger mellom ulike matematiske områder, tar utgangspunkt i at problemet kan løses på mange ulike måter og uttrykksformer, slik at man kan se sammenheng mellom matematikkens ulike deler. Her spiller læreren en vesentlig rolle med å koble sammen de ulike forbindelsene, der elevene kan få aha-opplevelser (Hagland et al., 2005, ss. 29-30).

Hagland et al. (2005, s. 30) og Hana (2013, s. 245) presiser at en oppgave kan bli rik eller fattig gjennom modifikasjoner. Problem kan, ved små endringer, bli gjort rike. Et rikt problem kan også omdannes til å bli en rutineoppgave. Dette skjer gjerne ved at den rike oppgaven deles opp i mange små deloppgaver, slik at elevene ikke får mulighet til å ta del i å avgjøre hva de skal gjøre og hvordan gjøre det. Det kan også skje ved at læreren forenkler problemet, eller ved å gi elevene hjelp som er rettet mot å finne svaret på bekostning av å lære matematikk.

2.3.1 Tidligere forskning om rike oppgaver

Jeg har funnet mye skriv fra ulike bloggposter og andre erfaringsbaserte tekster som skriver om rike oppgaver. Det har derimot vært utfordrende å finne litteratur basert på forskning.

Svorkmo (2007) har skrevet en master om rike oppgaver og resonnering. Hun gjorde en aksjonsforskning der hun fokuserte på å stimulere elever til å resonnere, der hun brukte verktøy som rike oppgaver og spørsmålsformuleringer (som kan forståes som problem posing – jeg oppfatter det slik at hun har hatt faste spørsmål hun har spurt elevene for å få dem til å resonnere. Hun nevner spesifikt at hun har spurt elevene: «Tror dere at dere har funnet alle løsningene? Forklar hvorfor dere tror det» (Svorkmo, 2007, s. 71)).

Svorkmo (2007) sine funn er at elever ofte resonnerer intuitivt. Hun så også induktive resonnement der elevene argumenterte med en regel som kun gjelder et bestemt tilfelle. Ellers nevner hun ett elevresonnement som har likhetstrekk til både deduktive- og kreative resonnement. Masteren har et tydelig lærerperspektiv, som tar for seg Svorkmo (2007) sin rolle som lærer for å stimulere elevene til å resonnere.

3 Metode

I dette kapittelet skal jeg redegjøre for oppgavens metode. Jeg har vært nødt til å ta stilling til ulike valg gjennom innsamlingsprosessen av datamaterialet, og bearbeiding av empiri. Jeg ønsker å få frem de valgene jeg har ansett som hensiktsmessige for å belyse oppgavens forskningsspørsmål.

Jeg vil starte med å redegjøre for valg av forskningsdesign, før jeg går videre til valg av informanter, oppgaver og handlingsforløp til datainnsamling. Deretter vil jeg gå gjennom kodingskategorier, som tar for seg resonnementsformer og betingelser. Avslutningsvis vil jeg gå gjennom forskningens kvalitetskriterier og etiske hensyn.

3.1 Valg av forskningsdesign

3.1.1 Casestudie

Casestudier er en måte å gå gjennom konkrete tilfeller som grunnlag for mer allmenn, generell og prinsipiell forståelse (Eilertsen, 2013, s. 174). Det er en form for forskning som ser intenst og detaljert på enkeltindivid eller er lite utvalg individer (Stanovich, 2013, s. 54). På denne måten kan det bli pekt ut indikatorer eller variabler som er interessante å fordype seg i. Casestudier får dermed en sentral posisjon innenfor områder med lite forskning. Områder med mye forskning vil ikke få særlig utbytte av casestudier, da de hverken kan brukes til å verifisere eller falsifisere noe (Stanovich, 2013, ss. 54-55). Casestudier er tross alt isolerte hendelser, med et begrenset omfang av variabler.

Widding (2005, s. 15) vektlegger at man må bruke tid på å konstruere gode design dersom man ønsker å bruke casestudier. Dette innebærer å definere og avgrense studiet, slik som å trekke ut essens fra tidligere forskning som grunnlag for det man undersøker (Widding, 2005, s. 8). I metodedelen skal begreper bli operasjonalisert – det vil si at de abstrakte begrepene i teoridelen blir om til konkrete spørsmål (indikasjoner) som måles empirisk (Danielsen, 2013, s. 145).

3.1.2 Tematisk innholdsanalyse

Tematisk innholdsanalyse handler om å beskrive et tekstinnhold på en systematisk måte (Anker, 2020, s. 40; Braun & Clarke, 2012, s. 58). Målet er å utforske et fenomen gjennom å avgrense fenomenet i mindre analyseenheter (Anker, 2020, s. 33). Analysen bygger på koding – en teknikk for å systematisere en stor datamaterialet, der meningsbærende enheter fra materialet blir identifisert (Anker, 2020, ss. 75-76). Deler av datamaterialet blir da plassert innunder kategorier. Disse stammer enten fra tidligere forskning, eksisterende teori, idéer eller konsepter (Fauskanger & Mosvold, 2014, s. 130). Dette blir omtalt som en top-down eller deduktiv tilnærming. Kategoriene kan også stamme fra hva som finnes i datamaterialet, der en forsker lager kategorier han mener passer – kalt for bottom-up eller induktiv tilnærming (Braun & Clarke, 2012, s. 59). Koding og analyse bruker ofte en kombinasjon av disse tilnærmingene, der én av tilnærmingene gjerne dominerer mest. Det er viktig at kodingen blir definert, slik at andre kan forstå hva analysen bygger på (Bratberg, 2017, ss. 100-104).

3.1.3 Metoden i denne oppgaven

Min master handler om hvilke resonnementer elever genererer når de arbeider med rike oppgaver. Den handler også om hva betingelser elevene setter til oppgavene, og hva det har å si for de matematiske resonnementene. For å kunne svare på mine forskningsspørsmål har jeg – med to medstudenter – gjort en casestudie i en 7. klasse, der noen utvalgte elever har arbeidet parvis med rike oppgaver. Det ble tatt båndopptak på elevene for å kunne fange opp deres resonnering og hva slags betingelser de satt oppgavene. Det har blitt gjort en tematisk analyse ut fra transkribert datamaterialet. Det må presiseres at mine medstudenter og jeg har hatt ulike forskningsspørsmål – som gjorde at vi måtte ta hensyn til hverandre sine ønsker med tanke på datainnsamling.

Jeg har kodet elevutsagn inn i noen forhåndsgitte kategorier, som enten omhandler ulike resonnementsformer eller betingelser. Disse kategoriene tar utgangspunkt for hva jeg tidligere har skrevet i kapittel 2. Jeg har også noen underkategorier som tar utgangspunkt i funn fra min datamaterialet. Jeg har brukt et program som heter Nvivo i mitt kodingsarbeid, for å kode og kategorisere tekstutdrag. Dette har hjulpet meg i å få oversikt samt kunne systematisere datamaterialet.

Jeg har valgt kvalitativ metode da det kan hjelpe meg i å forstå noe. Mitt utgangspunkt er at jeg ønsket å få dypere innsikt i rike oppgaver, da jeg oppfatter at mye litteratur presenterer rike oppgaver som fruktbare og tilpasningsdyktige å bruke i undervisning. Dette er ut fra rike oppgavers egenskaper – slik som intensjon om å være selvdifferensierende (Utdanningsdirektoratet, 2015), har lav inngangsterskel (Gilderdale & Kiddle, 2014) og kan initiere til fruktbare diskusjoner (Hagland et al., 2005, s. 29). Jeg har snevret det inn mot casestudie ut fra dens egenskaper til å peke ut viktige variabler, da jeg har funnet lite forskning rundt elever som arbeider med rike oppgaver. Jeg ønsker å begi meg ut på dette selv, og muligens finne sentrale variabler man bør tenke over når man bringer rike oppgaver inn i et klasserom.

Ut fra problemstillingen jeg har valgt blir det også fornuftig å bruke en kvalitativ metode, da frasene «hvilke resonnementer blir generert» og «hva slags betingelser setter elevene» legger opp til å se i data som foreligger i form av tekst. I tillegg var mine forutsetninger i utvalg av informanter med på å gjøre det naturlig å velge en casestudie, da jeg hverken er fast lærer eller har tydelig tilhørighet til skoler i mitt nærområde. Jeg ønsket opprinnelig å gjøre en aksjonsforskning på meg selv, for å blant annet styrke min egen kompetanse i å bruke og gjennomføre rike oppgaver i min undervisning. Jeg valgte dette vekk da jeg var redd for at min manglende tilhørighet til en fast klasse kunne påvirket datamaterialet – at lærerrollen kunne kommet i konflikt med forskerrollen. Jeg vil tørre å påstå at dette er en utfordring som er til stede for alle som forsker i et klasserom – for meg personlig ønsket jeg å redusere det å måtte ta stilling til hvorvidt mine kvaliteter som lærer ville påvirket mitt resultat.

3.2 Valg av informanter

Valg av sted og klasse for datainnsamling var ikke helt tilfeldig. På bakgrunn av tidligere kjennskap falt valget på en skole jeg vet er opptatt av å utveksle erfaring til høyere utdanning. Det betyr at elevene på skolen er vant til å ha eksternt besøk, da skolen har vært med i flere tidligere forskningsprosjekt. Det kan tenkes at informantene er mer tilpasningsdyktige til å møte ulike fagpersoner og prøve opplegg som er annerledes fra deres ordinære undervisning. Det empiriske grunnlaget baserer seg på 10 elever i en klasse på 7. trinn. Det er elevenes kontaktlærer som har plukket dem ut – ut fra et sosialt grunnlag – for å sikre at elevene ville våge å presentere resonnementene sine fremfor hverandre. Det er tilfeldig utvalg av kjønn og matematisk kompetanse.

Det ble valgt informanter fra 7. trinn, for å blant annet gi meg et friere valg i å velge oppgaver. Disse elevene har tross alt vært innom mange ulike matematiske tema, der det kan tenkes at deres tidligere erfaringer gjør dem mer rustet til å møte oppgaver som tar for seg ulike matematiske idéer. Dermed var det ikke avgjørende for meg å vite elevenes kompetanse eller forutsetninger før jeg valgte problemer (Dette er en sannhet med modifikasjon – problemoppgaver har som nevnt en individrelatert definisjon, da problemoppgaver skal ha ukjent løsningsmetode for problemløseren og kreve anstrengelse (Hagland et al., 2005, s. 27). Omformulert er det forholdet mellom individ og problem som bestemmer hvorvidt individet opplever oppgaven som et problem. For å sørge for at oppgavene jeg valgte for den ukjente informantgruppen ville oppleves som problem, ble det brukt rike oppgaver, grunnet to trekk eller kriterier som Hagland et al. (2005, ss. 27-30) presenterer: Det er lett å komme i gang med rike oppgaver (kriterium 2) og det er mulig å utvide de rike oppgavene (knyttet opp mot kriterium 7), slik at de blir mer utfordrende. Dermed tenkte jeg det var avgjørende for mine medstudenter og meg å ha en rekke spørsmål («pocket questions») for å kunne utfordre de elevene som ikke oppfattet det opprinnelige problemet som utfordrende, og ha andre spørsmål som kunne veilede de elevene som opplevde det for utfordrende. Oppsummert har det blitt gjort tiltak for å forsikre at problemoppgavene ville være problemer for alle elevene (Hsu, Kysh & Resek, 2007, s. 20)).

3.3 Valg av rike oppgaver

Jeg har valgt ut to oppgaver, og kalt dem beinoppgave og kakeoppgave. Beinoppgaven er valgt da jeg anser den som rik ut fra Hagland et al. (2005, ss. 28-30) sine kriterier. Kakeoppgaven vil jeg i utgangspunktet ikke hevde er rik, men den har noen trekk fra rike oppgaver som kan oppfordre elevene til å resonnere, som gjør at deler av resultatet kan knyttes opp mot rike oppgaver. Det var tross alt to medstudenter og jeg som skulle få svar på hver våre forskningsspørsmål, som gjorde at vi måtte inngå kompromiss i valg av oppgaver til datainnsamling.

Som nevnt i kapittel 2.3 har Hagland et al. (2005, ss. 28-30) syv kriterier for at en problemoppgave skal kunne ansees som rik. Jeg trekker frem fire av kriteriene, da de tar frem vesentlige aspekter med rike oppgaver som kan oppfordre elevene til å resonnere. Dette er kriterium 1, 2, 5 og 7. Jeg skal først forklare hvordan rike oppgaver legger til rette for resonnering, før jeg kobler kriteriene opp mot mine utvalgte oppgaver. I hensyn til tekstflyt nevner jeg de resterende kriteriene kun i gjennomgang av oppgavene i kapittel 3.3.1 og 3.3.2, da jeg ønsker å unngå en mekanisk fremstilling som kan bli tung å lese. Ellers tenker jeg at kriterium 1, 2, 5 og 7 ville vært nok for å få elever til å generere resonnementer, slik at de kriteriene blir mest vesentlig å gjennomgå nøye.

I tillegg vil jeg peke på hvordan rike oppgaver kan få elever til å sette egne betingelser til oppgavene. Først og fremst kommer det gjennom kriterium 7, dette med å formulere nye interessante problemer. Rike oppgaver kan utvides eller omformuleres til nye problemer. Det kan også skje ut fra hvordan elevene oppfatter hva den rike oppgaven ber om – der elevene får mulighet til å selv avgjøre hva de skal gjøre med problemet og hvordan gjøre det. Ut fra inspirasjon av Stylianides (2016) sine «proving tasks with ambiguous conditions», vil jeg se hvorvidt mine oppgaver er tvetydig, eller om det er ting elevene kan stille spørsmål om som kan påvirke det matematiske innholdet. Da rike oppgaver har et rikt matematisk innhold, i form av å ta for seg ulike matematiske idéer og begreper, antar jeg at elevene kan stille ulike betingelser som fører til ulike løsningsforslag.

Kriterium 1 er en selvfølge i alle matematikkoppgaver, da kriteriet tar for seg at elevene skal møte matematisk innhold. Det handler om at elevene skal møte viktige matematiske begrep, og gjerne se sammenhenger mellom ulike begreper. Kriterium 2 tar for seg at problemet skal være lett å komme i gang med. Dette gjør oppgaven tilgjengelig for flere elever, slik at det finnes mellom lette til avanserte løsningsforslag. Kriterium 5, som handler om at problemet skal kunne initiere til matematiske samtaler, tar utgangspunkt i at oppgaven kan løses på ulike måter, slik at ulike løsninger kan føre til fruktbare diskusjoner i små grupper og samtaler i helklasserom. Kriterium 7 sier at problemet skal kunne lede elever og lærere til å formulere nye problemer. Dette innebærer problem posing – at oppgaven kan omformuleres eller bli utvidet. Man kan da lage nye oppgaver, eller endre den eksisterende oppgaven ved å variere på oppgavens betingelser eller parametere.

For å hevde at en (rik) oppgave kan stimulere til resonnering og problem posing, vil jeg gå gjennom:

Hvilke viktige matematiske idéer som kommer frem i oppgaven. Jeg skal begrunne hvorfor oppgaven er lett å komme i gang med, der jeg vil se om elevene skal kunne klare å arbeide med oppgaven ut fra kompetansemål på 4. trinn (Dette er ikke alltid tilfelle. Jeg velger å gjøre dette slik at kriterium 2 blir tydeligere. Kompetansemålene kommer fra LK06, da det var virkende læreplan mens datainnsamlingen foregikk). Jeg skal også komme med minst to mulige måter å arbeide med oppgaven på, for å få frem løsningsforslag. Til slutt skal jeg komme med pocket questions jeg kan stille elevene for å veilede dem eller utvide oppgaven, og betingelser jeg tenker elevene kan trekke fram under oppgaveløsning som endrer det matematiske innholdet.

Oppsummert skal jeg:

- Kriterium 1) Gå gjennom de viktigste matematiske idéene som kommer frem
- Kriterium 2) Begrunne hvorfor oppgaven er lett å komme i gang med, blant annet ved å se på kompetansemål fra 4. trinn
- Kriterium 5) Komme med minst to mulige måter å arbeide med problemet

- Kriterium 7) Formulere pocket questions jeg kan stille elevene for å veilede dem eller utvide oppgaven, og komme med betingelser jeg tenker elevene kan trekke frem mens de arbeider med problemet

3.3.1 Beinoppgave

Figur 4 - Beinoppgave

(Hentet fra *Matematikksenteret, 2019*)

Oppgaven handler om å finne forskjellige kombinasjoner av antall bein som til sammen blir 12.

Kriterium 1: Den matematiske idéen her er kombinatorikk. Dette går ut på å telle kombinasjoner av objekter i mengder som deles etter gitte regler, og finne metoder for å avgjøre om man har funnet alle kombinasjoner.

Kriterium 2: Oppgaven kan løses med enkel aritmetikk som addisjon. Den kan også utvides til multiplikasjon. Ellers er 12 et lavt naturlig tall som er lett å regne med. Ut fra LK06, skal elever etter 4. trinn kunne «Finne informasjon i tekstar […], velje rekneart og grunngje valet […]» samt «bruke positive og negative heile tal». Beinoppgaven er dermed lett å komme i gang med.

Kriterium 5: Det er mulig å arbeide ut fra å tegne illustrasjoner, regne aritmetisk med naturlige tall eller sette opp tabell. Elever kan både arbeide usystematisk- og systematisk letende. Med en usystematisk fremgangsmåte prøver man seg uten noen særlig systematikk, typisk å skrive opp ulike kombinasjoner som 6+6, 8+4, 4+4+4 … En systematisk letende måte kan være å skrive opp hver kombinasjon som innebærer ett antall bein først, 8+4 og 8+2+2. Da er alle dyr med åtte bein tatt med i betraktning. Så gå over til alle dyr med seks bein, 6+6, 6+4+2, 6+2+2+2, deretter alle dyr med fire bein som ikke allerede er blitt nevnt, 4+4+4, 4+4+2+2, 4+2+2+2+2+2+2. Deretter alle med to bein som ikke har blitt nevnt, som er 2+2+2+2+2+2.

Kriterium 7: Her er det mulig å spørre hvor mange bein hvert dyr har, og største- og minste antall dyr som kan være på båten. For å utvide oppgaven kan man endre antall bein Noa har sett – gjerne et høyere tall – slik at elevene blir mer oppfordret til å finne systematiske måter å telle på. Det er også mulig å doble antall bein, slik at elevene kan utforske hva det har å si for oppgaven. En annen mulighet er å omformulere slik at Noa så antall dyr på båten, fremfor bein.

Jeg antar at elevene kan stille spørsmål til hvordan de skal plassere dyr uten lemmer, slik som snegler, da oppgaven ikke eksplisitt omtaler hva slags dyr som kan være med i arken. Jeg antar også at elevene stiller spørsmål til hvor mange bein ulike dyr har. Disse spørsmålene kan føre elevene til ulike betingelser, som påvirker de kombinatoriske mulighetene elevene kan regne med.

Ellers kan oppgaven kreve anstrengelse og tidsbruk der elevene leter etter en systematisk framgangsmåte. Endring av oppgavens parameter – endre antall bein – kan sørge for at elever med ulikt utgangspunkt anstrenger seg (kriterium 3). Problemet kan løses ved hjelp av illustrasjoner, aritmetikk og systematisk- og usystematisk leting (kriterium 4). Kombinatorikk kan være en brobygger til multiplikasjon – da det er et multiplikasjonsprinsipp. Det handler om å finne en smart metode for å regne ut et antall muligheter på, særlig når det er mange muligheter (kriterium 6).

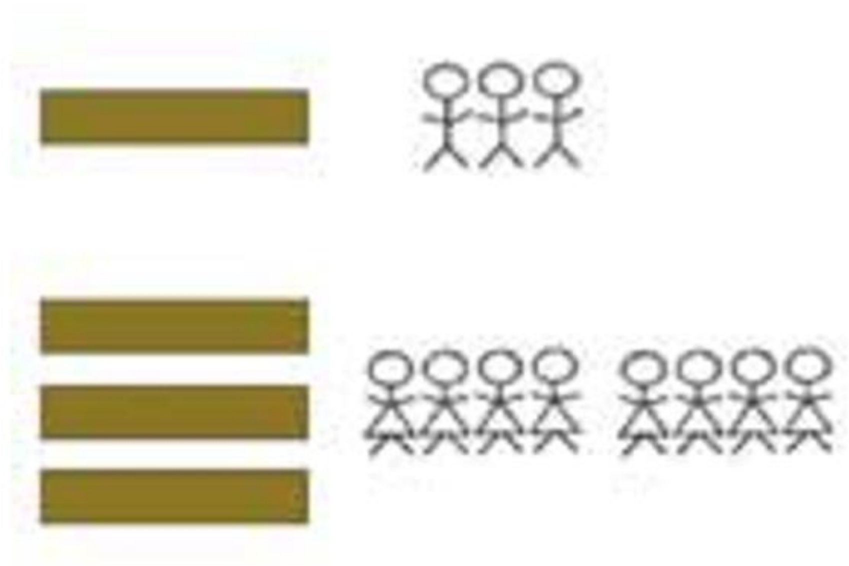
3.3.2 Kakeoppgave

Thomas er lærer på sjette trinn, og klassen skal arbeide med følgende oppgave:

Hvis guttene deler en sjokoladekake likt,

og jentene deler sine tre sjokoladekaker likt.

Hvem får mest? En jente eller en gutt? Hvor mye mer?



Figur 5 - Kakeoppgave

(Hentet fra *Valenta, 2016*)

Oppgaven handler om å finne ut hvor stor andel kake samlingen av jentene og guttene får, og det blir bedt om å sammenligne mengden som en enkel jente og en enkel gutt får. Det blir også spurt om å finne differansen mellom det en jente og det en gutt får.

Kriterium 1: Den matematiske idéen her er brøk. I dette tilfelle handler det om å sammenligne to ulike mengder eller størrelser – der viktige begreper som lik fordeling, forhold mellom en del av en hel og forhold mellom to ulike enheter kommer frem.

Kriterium 2: Oppgaven kan løses med aritmetikk som divisjon. Ut fra LK06, skal elever etter 4. trinn kunne «Finne informasjon i tekstar […], velje rekneart […]», «bruke metoder […] for divisjon[…]» og «bruke positive tall […] og enkle brøkar og desimaltall i praktiske sammenhenar og uttrykkje talstorleiker på varierte måtar». Elevene skal dermed kunne arbeide med brøker ved hjelp av divisjon. Ved å bruke målingsdivisjon blir regnestykkene 1:3 og 3:8, som er lave naturlige tall. Kakeoppgaven er av den grunn lett å begynne å arbeide med.

Kriterium 5: Det er mulig å arbeide ut fra å tegne illustrasjoner og regne aritmetisk. Ved å bruke illustrasjoner kan elevene plassere ett og ett kjønn til hver sin kake. Man vil da se at det er tre gutter på én kake, og to jenter på én kake med to jenter i rest. Det er også mulig å regne det aritmetisk ut fra 1:3 og 3:8

Kriterium 7: Dette kriteriet stusser jeg på. Det sier tross alt at elever og lærere skal formulere nye interessante spørsmål – noe jeg ikke tror er så lett med denne oppgaven, da det er en tekstoppgave som strengt tatt kunne vært en ren aritmetisk oppgave.

Uansett, så er det mulig å spørre elevene hvor mye kake én gutt får, hvor mye én jente får og eventuelt hvor mange jenter det kan være per kake. Det er mulig å endre på de opprinnelige parameterne, eksempelvis i form av dobling. Et nytt læringsmål blir da å se hva likeverdige brøker betyr i praksis.

Jeg antar at elevene kan stille spørsmål til størrelsen på de ulike kakene, da det ikke kommer frem i teksten. Ved ulik størrelse på kakene, må elevene finne en måte å sammenligne to ulike enheter.

Kriterium 3 om at problemet skal kreve anstrengelse, tid og utfordring er i grenseland hvorvidt det blir oppfylt eller ikke. Kriteriet henvender seg imidlertid til enkeltindivid, der én elev kan oppleve problemet som utfordrende mens en annen elev ikke gjør det. Dermed blir det viktig å ha «pocket questions» i reserve, til å kunne utvide oppgaven – om jeg ser elevene løser oppgaven på kort tid, bør jeg få oppgaven utvidet sammen med elevene. Dette blir en skjønnsmessig vurdering i situasjonen. Ellers kan problemet som nevnt løses ved hjelp av illustrasjoner og aritmetikk (kriterium 4). Brøk er en naturlig brobygger til prosent, desimaltall og regneartene (i dette tilfellet divisjon) (kriterium 6).

3.4 Handlingsforløp til datainnsamling

Innsamling av data foregikk over fire økter, fordelt utover tre ulike dager. Hver økt varte i én klokketime, og foregikk ved siden av ordinær matematikkundervisning. Elevene arbeidet parvis mens det ble tatt båndopptak. Det var fem elevpar, to studenter og meg i samme rom. Medstudentene og meg hadde en delvis støttende rolle. Vi var tydelig på at elevene måtte komme fram til svar på egenhånd – vi var hovedsakelig ment som et supplement om elevene satt fast, og for å utvide oppgavene om elevene ble ferdig med et eller flere løsningsforslag. Vi hadde på forhånd laget et felles skjema med spørsmål, eller «pocket questions» (Hsu, Kysh & Resek, 2007, s. 20), for å sørge for at vi gav lik hjelp til elevene. Jeg vil være åpen om at bruken av disse spørsmålene var skjønnsmessig – essensen var å prøve å oppfylle problemets individrelaterte definisjon (Björkqvist, 2003, s. 54; Hagland et al., 2005, s. 27). Vi brukte da spørsmålene der vi selv anså det som nødvendig. Et av mine forskningsspørsmål handler tross alt om hva slags resonnementer elevene generer når de arbeider med *rike oppgaver*. Rike oppgaver er som nevnt en spesiell type problemoppgave, der selve definisjonen på en problemoppgave omhandler at ett individ skal oppleve anstrengelse og tankevirksomhet for å finne en løsning. Mine funn ville vært uinteressante om elevene løste oppgavene uten at de tilsynelatende opplevede det som et problem i utgangspunktet.

Ellers ba vi elevene forklare sine ulike løsningsforslag. Omformulert kan man si at vi voksne fungerte som støttende stillas det vi anså behov for det.

Min rolle kan kalles for deltakende observatører. Det vil si at jeg gjorde innspill som å snakke med elever, hjelpe dem med matematiske spørsmål og rette fokus mot elevenes arbeidsoppgaver (Løkken, 2012, s. 78). Dette ble en form for dobbeltrolle – jeg var både lærer og forsker. Som nevnt ble det planlagt spørsmål på forhånd av øktene – både spørsmål ment for å veilede elevene og utvide de ulike oppgavene. Hensikten med dette var å unngå å miste fokus på forskningsrollen, og på samme tid passe på at innsamlet datamateriale ville kunne svare på alle tre sine forskningsspørsmål. Det kan hevdes at det var en konflikt mellom rollene, der jeg på ene siden ønsket å hjelpe de elevene som satt fast, mens jeg samtidig ville at elevene skulle oppleve oppgavene som krevende og bruke tid på dem.

På den måten kan det tenkes at det ble noe ukonsekvent bruk av «pocket questions», til tross for hensikten jeg har presentert. I tillegg var vi tre studenter, der hver av oss kan ha tatt ulike skjønnsmessige vurderinger.

3.5 Kodingskategorier

For å kunne gjennomføre en analyse av elevenes resonnementer og elevenes betingelser, med tanke på å klassifisere dem, er det naturlig med kategorier å forholde seg til. Som nevnt, må kategoriene ha tydelige kriterier for hvordan jeg plasserer ulike elevutsagn innunder ulike kategorier. Her tar jeg utgangspunkt fra hva som er presentert i kapittel 2. Jeg har to hovedkategorier: Resonnementsformer og betingelser. I hver av hovedkategoriene har jeg underkategorier, som jeg kommer tilbake til senere. Hovedkategoriene har en top-down tilnærming, mens underkategoriene består av en blanding av top-down- og bottom-up tilnærming.

3.5.1 Resonnementsformer

Denne hovedkategorien med alle underkategorier tar til sammen utgangspunkt i Baroody (1993, referert i Svorkmo, 2007; Yumiati, 2017), Hana (2013), Lithner (2006; 2008), Reid (2002), Taflin (2007), Walton (2006, referert i Schwarz & Asterhan, 2008) og Wilton (1990).

Som nevnt består et matematisk resonnement av å forklare og trekke slutninger med og ved hjelp av matematikk. Her bruker man gjerne premisser man tenker er fornuftig for å komme fram til en konklusjon. Et premiss er en antagelse som ansees som å være sann (Wilton, 1990, s. 403), selv om det bare er for et øyeblikk. Målet med matematiske resonnement er å til slutt kunne se sammenhenger og formulere generaliseringer (Taflin, 2007, ss. 106-110).

Underkategoriene har jeg kalt for «simple deduktive resonnement», «hypotetiske deduktive resonnement» og «andre typer resonnement». Jeg skal forklare hvordan jeg har kommet frem til disse underkategoriene, og samtidig skrive hvordan jeg skal gjenkjenne dem i mitt datamateriale. Jeg skal også komme innom mulige kategorier jeg har valgt vekk.

3.5.1.1 Simple deduktive resonnement

Deduktive resonnement tar utgangspunkt i å trekke en slutning ut fra noe allment til et enkelttilfelle (Hana, 2013, s. 85). Man kan også forklare det som å dra en spesifikk konklusjon gjennom logisk resonnering, ved å starte med en generell regel man vet er riktig (Yumiati, 2017, s. 285).

Jeg skal se etter to ting for å se om en elev resonnerer deduktivt: 1) Jeg skal se om elevene generaliserer ut fra enkelte premiss, og 2) se etter om argumenter har en oppbygning som består av både premiss og regel, som blir til en konklusjon. Jeg skal da se hvordan elevenes utsagn er knyttet opp mot matematikk. Det må nevnes at elevene ikke alltid er presis i språkbruken, sånn at kodingen min avhenger av hvordan jeg forstår elevene.

I et eksempel har jeg sett Eli og Åge, i arbeid med beinoppgaven, diskutere hvorvidt de skulle inkludere dyr med null bein som kombinasjonsmulighet. Eli sier at: «Om han [Noa] hadde tatt med seg slanger hadde det jo blitt ett mer dyr, men ingen flere bein. Nei, vi dropper å ta med slanger». Her tar Eli utgangspunkt i to premiss: 1) Identitetselementet null endrer ikke summen i addisjonsregnestykker, og 2) beinoppgaven ber at de ulike kombinasjonsmulighetene skal bli 12. Ut fra dette har Eli altså trukket en slutning om å ikke regne med kombinasjonsmuligheter som innebærer sifferet null.

3.5.1.2 Hypotetiske deduktive resonnement

Denne underkategorien er en nyanse av deduktive resonnement, og tar dermed utgangspunkt i samme teorigrunnlag (resonnere ut fra noe generelt eller allmenne regler). Nyansen bygger på Reid (2002) sin forskning om deduktiv resonnering. Han omtaler hypotetisk deduktiv resonnering som å resonnere ut fra premisser man ikke nødvendigvis vet er sant, enten for å motbevise eller for å vise at noe gjelder i flere tilfeller. Man kommer fram til en konklusjon basert på antatte premisser.

Det blir en del likheter mellom «simple deduktive resonnement» og «hypotetisk deduktive resonnement». Hovedskille kommer ut fra bakgrunnskunnskapene til den som resonnerer – om han vet eller tror at et premiss er riktig og konkluderer noe ut fra det, så er det et deduktivt resonnement. Om den som resonnerer derimot ikke vet om et premiss er riktig, men antar at det er riktig for så å komme med en konklusjon, så er det et hypotetisk deduktivt resonnement. Jeg må altså finne en måte å forstå hvorvidt den som resonnerer tenker premisset er riktig, eller om han antar det.

Jeg vil da se etter elevutsagn som begynner med subjunksjoner som «hvis» og «dersom», da disse ordene legger opp til å tenke hypotetisk eller se på flere muligheter. Dette alene kan derimot ikke vise om elevene tenker hypotetisk eller ikke – hvert fall ikke ut fra mine oppgaver, da den kombinatoriske oppgaven ber om flere mulige løsningsforslag, der det kan bli naturlig å bruke subjunksjoner for å skille mellom ulike løsningsforslag. Jeg vil derfor prøve å kontrollere om elevutsagnene kan plasseres innunder modus ponens, at elevutsagnet kan omformuleres som «hvis- så». I tillegg vil jeg se om elevene, enten når de bruker et premiss eller kommer med en konklusjon, har et språk som indikerer at elevene antar. Jeg vil da se etter ord som kan gjøre utsagnet til elevene mer usikkert, slik som adverb som «kanskje», «muligens» og «sånn sett».

I et eksempel spør Tia om det finnes dyr med mer enn fire bein. Rune nevner at edderkopper har åtte bein. Tia spør videre om Noa kan ha sett to edderkopper, der Rune sier «Men åtte + åtte blir 16». Elevparet kommer dermed frem til at Noa kan kun ha sett én edderkopp. Ved å plassere det innunder modus ponens, blir det: *Hvis* vi antar at to av dyrene var edderkopper, så ser vi at Noa åtte ha sett minst 16 bein, men han så bare 12 bein (oppgavens premiss), *så* hypotesen om at det var minst to edderkopper med er i dette tilfelle feil.

3.5.1.3 Andre typer resonnement

Denne underkategorien ble laget etter bearbeiding av empiri. Jeg har funnet ett resonnement jeg anser som kreativ ut fra Lithner (2006; 2008) sitt rammeverk. Opprinnelig skulle jeg velge vekk Lithner, da hans rammeverk tar utgangspunkt i hva som er nytt for problemløseren, som er problematisk å kode ut fra, da det blir et forhold mellom individ og resonnement som bestemmer hvorvidt resonnementet er nytt eller ikke. En elevs kreative resonnement kan da være en annen elevs imitative resonnement – jeg har ikke mulighet til å kontrollere hvorvidt resonnementet faktisk er nytt for eleven eller ikke. Denne utfordringen ble sterkere da jeg ikke kjente elevgruppen fra før.

Til tross for dette, ønsker jeg å presentere ett kreativt resonnement. Jeg har sett et elevpar som tilsynelatende oppfyller Lithner (2006; 2008) sine kriterier til kreative resonnement: 1) Resonnementet virker nytt for elevene, 2) de kommer med plausible argument 3) som er bygget på matematikk. Jeg anser det som nytt, da det et resonnement jeg ikke har sett eller hørt om tidligere, og at elevparet hadde utfordringer med å forklare seg. Verken mine medstudenter eller jeg forstod elevparet i øyeblikket. Jeg kommer tilbake til dette i analysedelen. Jeg nevner dette da jeg ser en kobling til rike oppgaver sitt kriterium om at problemet skal oppleves anstrengende og kreve tidsbruk, og lærerrollen.

3.5.2 Betingelser

Jeg skal kategorisere ut fra om eleven setter nye betingelser til oppgaven de arbeider med. Ut fra datamaterialet vil det komme underkategorier av betingelser, der jeg navngir underkategoriene et passende navn. Disse kommer frem i kapittel 4.

Kategorien om betingelser er inspirert av Björkqvist (2003), Brown og Walter (1983, referert i Silver, 1994), Hagland et al. (2005), Hansen og Hana (2015), Kilpatrick (1987), Silver (1994), Stoyanova og Ellerton (1996, referert i Bonotto & Santo, 2015) og Stylianides (2016).

Problemoppgaver skal ha en ukjent løsningsmetode for problemløseren (Björkqvist, 2003, s. 54; Hagland et al. 2005, s. 27; Kilpatrick, 1987, s. 125). Oppgaver som ellers er tvetydig formulert, er gjenstand for ulike legitime antagelser (Stylianides, 2016, s. 41). Problemløseren kan dermed legge til tilleggsinformasjon. Her vil det foregå en prosess der løseren, med utgangspunkt i matematikkerfaringer, konstruerer personlige tolkninger av situasjoner og formulerer meningsfulle problem (Stoyanova & Ellerton, 1996, referert i Bonotto & Santo, 2015, ss. 107-108). Det vil da foregå en problemformulering, der det opprinnelige problemet blir til en ny versjon (Silver, 1994, s. 21). Nye problem kan bli generert ved å endre på én eller flere betingelser ved oppgaven (Brown & Walter, 1983, referert i Silver, 1994, s. 21). Disse betingelsene kan påvirke det matematiske innholdet.

Kategorien om betingelser blir mer relevant da rike oppgaver har et kriterium [7] om at problemet skal kunne lede til at elever og lærere formulerer nye interessante spørsmål (Hagland et al., 2005, s. 30).

Jeg har ikke en tydelig framgangsmåte for å finne betingelsene elevene setter til oppgaven. Jeg har lett etter elevutsagn der de stiller spørsmål til oppgaven de har fått. Jeg har sett ekstra på spørsmålsutsagn, da det har vist seg at flere elever har stilt spørsmål til hva betingelser de kan sette, før de faktisk satt betingelsene. I tillegg har jeg sett over hvordan betingelsen påvirker de matematiske resonnementene, eller hva det har å si for oppgavens matematiske innhold. Ellers har jeg selvfølgelig sett på oppgavenes opprinnelige premisser, for å unngå å klassifisere dem som elevenes betingelser.

I beinoppgaven stiller Rune og Tia spørsmål som «Hvis man kutter av noen bein da?», og «Er det lov å kutte bein?». Elevene kommer fram til at de kan kutte bein, slik at et dyr med fire bein blir om til et dyr med tre bein. De har dermed satt en betingelse som endrer kombinasjonsmulighetene de kan arbeide med.

3.5.3 Mulige kategorier som har blitt valgt vekk

Jeg har hatt flere muligheter når det gjelder valg av kategorier. Ut fra presentert teori kunne jeg blant annet ha laget kategorier som «imitative resonnement», «intuitive resonnement» og «induktive resonnement».

Kategorien «imitative resonnement» ville tatt utgangspunkt i Lithner (2000; 2006; 2008). Det handler om å reprodusere tidligere algoritmer eller memorere tidligere løsninger. Lithner har mange nyanser av imitative resonnement. Jeg har valgt vekk å fordype meg i disse, da jeg allerede tar for meg andre resonnementsformer. Det er da for å holde et hovedfokus, med tanke på at denne masteren har blitt skrevet under en begrenset tidsperiode. I tillegg har jeg måtte vært påpasselig på at mine medstudenter og jeg skiller oss fra en annen, der én av mine medstudenter ønsket å fokusere på imitative resonnement.

Kategorien «Intuitive resonnement» ville tatt utgangspunkt i Baroody (1993, referert i Svorkmo, 2007; Yumiati; 2017). Det blir skrevet at intuitive resonnement blir generert om problemløseren inntrer en konklusjon uten at den er bygget på all nødvendig informasjon (Yumiati, 2017, s. 284).

For å kode ut fra denne kategorien kunne jeg brutt ned elevenes resonnement ved å se på hva premiss de har tilgjengelig – for å samtidig se hva de ikke har tilgjengelig. Elever som bruker utilgjengelige premiss, kunne blitt ansett i å resonnere intuitivt. Her opplever jeg en overlapp til problemformuleringer som fører til betingelser. Likheten er at elevene sier ting de tilsynelatende tenker er viktig, uten at de nødvendigvis har klare begrunnelser for det. I mitt tilfelle er det dog mer spennende å se hvordan ulike betingelser påvirker de matematiske resonnementene, enn å se på resonnementer uten belegg.

Jeg skulle i utgangspunktet ta for meg «induktive resonnement», der jeg hadde plassert elevutsagn i denne kategorien ut fra hva elevenes tankerekker hadde bygget på – om elevene hadde sett mønstre i en oppgave, for så å generalisere ut fra det (Baroody, 1993; Svorkmo, 2007; Yumiati, 2017). Jeg fant ikke slike resonnementer i datamaterialet mitt, og ble dermed nødt til å velge vekk denne kategorien.

3.6 Forskningens kvalitetskriterier

Det er vanlig å operere med reliabilitet og validitet når det gjelder vurdering av forskningsarbeid (Anker, 2020, s. 108). Henholdsvis handler det om hvor pålitelig og gyldig forskningen er.

En pålitelig studie handler om at studien er godt forklart, slik at målgruppen som leser skal forstå hvordan studien har gått for seg. Det innebærer at fremstilling av datamateriale er godt gjennomført, og ikke et resultat av juks eller slapt håndarbeid (Anker, 2020, s. 108). Det er derfor viktig at jeg beskriver hva jeg har gjort, slik at det er mulig å forstå hvordan handlingsforløpet til datainnsamlingen har gått for seg. Det er i tillegg viktig at jeg forklarer hvordan jeg har valgt ut mitt datamateriale – gjerne med eksempler – slik at lesere kan følge analyser og argumenter for analysene (Anker, 2020, ss. 108-109).

I kvantitativ metode vises det til at forskningsarbeidet skal kunne utføres på nytt av en annen forsker, og få samme resultat, for at forskningen skal være pålitelig (Anker, 2020, s. 108; Thúren, 2015, ss. 21-31). Dette er ikke et mål for kvalitative prosjekter. Jeg velger likevel å nevne dette, da det må bli tatt høyde for at andre forskere kan tolke mitt datamateriale annerledes enn hva jeg gjør. Som konkret tiltak har jeg laget kategorier for å kode elevene sine resonnement og betingelser. Disse kategoriene er beskrevet i kapittel 3.5. Dette er for å gi et så godt som likt grunnlag til andre mulige forskere som ser gjennom datamaterialet mitt, slik at både dem og jeg ikke tolker datamaterialet for ulikt. Det skal likevel sies at det kan forekomme avvik.

En gyldig studie handler om forskningsresultatene svarer på det fenomenet som er utforsket (Aadland, 2011, referert i Anker, 2020, s. 109). Denne oppgaven har som hovedfokus å se på hva slags resonnementer elever genererer når de arbeider med rike oppgaver, samt å se hvilke betingelser elevene setter de ulike oppgavene. Dette har blitt gjort ved at elever har fått arbeide med rike oppgaver, der det har blitt tatt båndopptak av elevene under arbeidsprosessen. I min analyse skal jeg trekke frem deler av båndopptaket jeg anser som interessant. En utfordring kan være at jeg ikke får presentert datamaterialet i sin fullverdige kontekst – slik at noe av forståelsen kan forsvinne eller bli oversett (Hsieh & Shannon, 2005, referert i Fauskanger & Mosvold, 2014, s. 138). For å motarbeide dette, skal jeg i min framstilling av datamaterialet, nummerere linjene til de ulike elevparene, slik at lesere av oppgaven får større innsikt i konteksten.

3.7 Etiske hensyn

Forskning er en avansert form for kollektiv kunnskapsutvikling (Eilertsen, 2013, s. 174). Den har mange forpliktelser. De nasjonale forskningsetiske komiteene (NESH) legger vekt på forskningsetikk, som viser til mangfold av verdier, normer og institusjonelle ordninger som bidrar til å konstituere og regulere vitenskapelig virksomhet (NESH, 2016, s. 5). Dette innebærer at forskere har formelle rammer og skjønnsmessige vurderinger – eller retningslinjer som er forankret i forskningsetiske normer – som er ment for å regulere forskningsaktivitet på ulike områder.

Hensyn til personer står sentralt i forskningsetiske vurderinger i samfunnsvitenskapelig forskning. De formelle rammene gjør at forskere må forholde seg til et sett av regler som skal sikre personvern og informanters anonymitet (Anker, 2020, s. 104). I dette prosjekter har det blitt undersøkt hvordan barn arbeider med rike oppgaver, der det har blitt tatt båndopptak av barna. Data som ble samlet inn via båndopptakerne ble overført til en ekstern harddisk. Råmaterialet var dermed aldri eksponert for internett, men ble oppbevart kryptert og sikkert (Anker, 2020, ss. 104-105). Videre har personopplysninger blitt anonymisert. Under transkripsjon har elevene fått fiktive navn. Ellers er prosjektet meldepliktig til Norsk data for forskningsdata (NSD), da det er innhentet og behandlet data om mennesker. Skjema til NSD var sendt inn og godkjent før datainnsamlingen.

Prosjektet er også basert på fritt og informert samtykke (NESH, 2016, s. 8). Det ble sendt ut informasjonsskriv til skolen om forskningsprosjektet, og barna i lag med foreldre har skrevet under på et samtykkeskjema. Det ble presisert før, under og etter gjennomføring av prosjektet at informantene kunne trekke seg når som helst, uten noen form for begrunnelse. Se vedlegg 1 for å lese informasjonsskrivet.

Til tross for at informantene er anonymisert, og ikke kan spores opp ut fra denne oppgaven, tenker jeg det er naturlig å ta hensyn til informantenes personlige integritet. I presentasjon av transkribert data vil jeg prøve å unngå å komme med sitater som kan fremme informantene i et dårlig lys. Jeg har også slettet kremt, pauser og fyll ord for å gjøre informantene lettere å forstå – eller rettere sagt for å unngå en fremstilling som kan virke fordummende i skriftlig form (Anker, 2020, s. 106). I tillegg er dette et tiltak for å gjøre oppgaven lettere å lese, da denne masteren ikke tar for seg en lingvistisk analyse der språket er objekt for analyse.

Jeg ønsker også å presisere at jeg ikke har som mål å se hvilke av barna som er «best» til å resonnere, eller å kåre en vinner. Jeg ønsker å se hva slags resonnementer som blir generert når barna arbeider med rike oppgaver, og se hva slags betingelser elevene setter de ulike oppgavene. I mine analyser skal jeg forsøke å analysere de ulike elevresonnementene ut fra samme kriterier. Jeg skal også forsøke å holde meg objektiv under analysen. Det må understrekes at mine tolkninger er begrensede på objektivitet, og resultatene må dermed ikke ansees som en objektiv sannhet.

Videre er redelighet sentralt. I denne sammenheng vil redelighet handle om å ikke bruke andre sitt arbeid uten tydelig henvisning (NESH, 2016, ss. 27-28). Jeg viser min redelighet gjennom å referere i APA 6th-stil til der jeg har hentet informasjon fra andre sitt arbeid, slik at det er mulig å søke opp mine kilder. Jeg velger i tillegg å referere tydelig til sidetall der det er mulig, slik at lesere av denne oppgaven får en enklere jobb i å finne mine kilder. Det må presiseres at jeg har en subjektiv forståelse av mine kilder – der jeg har hatt en veileder for å forsikre å unngå en feil framstilling av litteraturen.

4 Analyse

I denne delen vil jeg presentere mine viktigste funn, gjennom å presentere datamaterialet mitt og analysere det. Jeg har valgt å kategorisere denne delen inn etter de ulike rike oppgavene som ble valgt i forskningen. Innenfor hver kategori vil jeg først presentere én underkategori om gangen, der det skal foregå en analyse. Deretter kommer neste underkategori – og slik går mønsteret. Jeg vil da peke til tekstutdrag fra ulike elevpar. Funnene blir oppsummert i kapittel 5.1.

Informantene består av fem elevpar med fiktive navn: Fabian og Marie (par 1), Tia og Rune (par 2), Eli og Åge (par 3), Mia og Stein (par 4) og Lea og Frida (par 5). Medstudenter og jeg blir omtalt som DT, MG og JC.

4.1 Presentasjon og analyse av beinoppgaven

I beinoppgaven fokuserer jeg på elevpar 1-3. Det var to tidligere elevpar som trakk seg fra denne oppgaven, som senere ble erstattet med Mia og Stein og Lea og Frida. Jeg går gjennom de ulike betingelsene som elevene satt seg først, deretter hvordan de ulike matematiske resonnementsformene kommer frem, og til slutt andre betingelser elevene lå fra seg og avsporinger fra det matematiske innholdet.

Jeg har fire kategorier jeg skal gå gjennom:

- Elevenes betingelser om antall bein
- Simple deduktive resonnementer
- Hypotetiske deduktive resonnementer
- Fralagte betingelser og avsporinger fra matematikk

4.1.1 Presentasjon av kategori 1: Elevenes betingelser om antall bein

Alle tre elevparene startet oppgaven ved å foreslå ulike kombinasjoner av løsningsforslag. De kom med konkrete dyr, slik som at en løve med fire bein kunne adderes med en edderkopp med åtte bein for å få 12 bein til sammen. Alle elevparene spurte etter hvert også spørsmål knyttet til antall bein et dyr kan ha:

> 37 Fabian: Er det [et dyr] som har åtte bein?

,

> 32 Eli: Finnes det dyr med ett bein? Nei, eller med null? […]

,

> 53-54 Tia: […] Er det noen dyr med ett bein?

Elevpar 1, Fabian og Marie, kommer frem til at de kan regne på dyr med to bein, fire bein, seks bein og åtte bein. Elevpar 3, Eli og Åge, nevner dyr med to bein, fire bein og seks bein. Det er disse kombinasjonsmulighetene parene arbeider med.

Elevpar 2, Tia og Rune, arbeider først med dyr med to bein, fire bein og åtte bein. De spør tidlig om det finnes andre kombinasjonsmuligheter enn disse:

> 35: Rune: Hvis man kutter av noen bein da?
>
> 36: Tia: Er det lov å kutte av bein?

Dette gjør at elevpar 2 skriver ned ulike kombinasjoner med flere kombinasjonsmuligheter enn sifrene to, fire og åtte. De får blant annet én løsning som er tre + tre + tre + tre. Elevparet blir spurt av en voksen om «Hva med trebeinte dyr. Hva dyr er det?» der Tia svarer: «Det kan være en sebra som har blitt spist av en løve. Eller et dyr som har amputert ett bein». Elevparet kommer senere fram til at de kan «ta dyr med maks 12 bein, og minimum ett bein».

Elevpar 2 og elevpar 3 diskuterte hva de skulle gjøre med beinløse dyr:

> 32-33 Eli: [Finnes det dyr med] null [bein]? Hm, eller nei, da blir det jo vanskelig å regne ut. MG, har snegler eller slanger bein?
>
> […]

36-37 Eli: Om han [Noa] hadde tatt med seg slanger hadde det jo blitt ett mer dyr, men ingen flere bein. Nei, vi dropper å ta med slanger

Og

13 Tia: […] Hvis noen av dyrene ikke har bein, sånn som slange, da kan han ha sett?

14 Rune: Evig

15 Tia: Alle kan ikke være slanger da

Eli og Åge velger vekk å inkludere slanger, mens Tia og Rune arbeider ut fra at inkludere dem.

4.1.2 Analyse av kategori 1: Elevenes betingelser om antall bein

Denne underkategorien oppstår da beinoppgaven mangler eksplisitt informasjon om antall bein ulike dyr kan ha. Oppgaven er tvetydig, og blir dermed gjenstand for ulike legitime antagelser (Stylianides, 2016, s. 41). I dette tilfellet må elevene selv velge hvor mange bein ulike dyr kan ha – slik at de velger hva siffer de kan arbeide med i sin kombinatorikk. Oppgavens betingelser bestemmer dermed hva slags løsninger som blir riktig.

Tia og Rune diskuterte hvorvidt de kunne fjerne ett eller flere lemmer fra et dyr. De anså dette som mulig. En konsekvens blir da hva slags dyr de kan regne på – der de kan velge ulike kombinasjonsmuligheter ved å kutte av ett eller flere bein fra et dyr. Tia kommer frem til at de «kan ta dyr med maks 12 bein, og minimum ett bein». Dermed kan elevparet bruke sifrene mellom 1-12 når de regner ut kombinasjoner.

Fabian og Marie nevner ikke muligheten til å modifisere antall bein et dyr kan ha – de finner konkrete dyr med ulike bein, og regner ut fra det. Da elever gjerne baserer seg på implisitte antagelser (Reid, 2002, s. 111), kan det tenkes at elevene har satt en implisitt betingelse om at de ikke kan kutte bein. Elevpar 1 og 3 får hvert fall arbeidet med færre kombinasjonsmuligheter enn hva elevpar 2, Tia og Rune, gjør, da de tar for seg at de kan modifisere antall bein.

Eli og Åge nevner eksplisitt at de velger å ikke ta med beinløse dyr. Begrunnelsen knytter Eli opp mot at beinløse dyr vil være et identitetselement – at sifferet null ikke påvirker addisjonsregnestykker. Ellers nevner hun at det ville vært vanskelig å regne ut et løsningsforslag med beinløse dyr. Det kan forståes som at det enten er for komplisert å inkludere beinløse dyr, at det da blir for avansert å komme med en generisk eller eksplisitt formell – eller at oppgaven ikke kan løses med den betingelsen, da de ikke kan stipulere et konkret maks antall kombinasjoner. Utsagnet til Eli kan tyde til forventinger til oppgaven – kanskje hun regner med at oppgaven må ta for seg et tydelig og konkret løsningsforslag.

Tia og Rune velger å inkludere beinløse dyr. I deres arbeid kommer det ikke frem en entydig løsning. De prøver å finne det maksimale antallet dyr Noa kan ha sett, ved å blant annet finne ut hvor mange slangearter det finnes i verden. Deretter estimerer de antall slangeindivider innenfor hver arts populasjon. Det blir imidlertid ingen kombinatorikk ut av det. Elevparet konkluderer med at de kan finne evig kombinasjoner. Denne konklusjonen gjør at oppgavens parametere om at Noa kan ha sett 12 bein blir meningsløst – det har ikke noe å si om det er 12 bein, 24 bein eller 125 bein – man kan likevel konkludere med evig kombinasjoner. Elevparet trenger dermed ikke å finne en smart metode for å systematisere eller opptelle for å få det svaret de leter etter, betingelsen måtte ha blitt begrenset på noen måte. Elevparet var innpå å snevre inn betingelsen, ved å blant annet finne ut om antall slangeindivider i verden. I tillegg påpekte Rune at det kun skulle være to individer per art – som kunne virket som en avgrensning. Denne tanken lå elevparet fra seg.

Fabian og Marie satt hverken betingelse om å kunne modifisere antall bein, eller om å skulle inkludere null som kombinasjonsmulighet. På den måten arbeidet elevene med å kunne stipulere et konkret maks antall kombinasjoner. Det samme gjelder Eli og Åge.

4.1.3 Presentasjon og analyse av kategori 2: Simple deduktive resonnementer

Eli og Åge funderer som presentert hvorvidt de skal inkludere beinløse dyr. Eli forklarer at om de har seks dyr med bein, og legger til et dyr uten bein, så er samme antall bein likt med eller uten det beinløse dyret. Elevparet ser altså på en regel om at identitetselementet null ikke endrer summen i addisjonsregnestykker, og anvender den regelen i sitt konkrete eksempel.

Samme elevpar er innpå et annet simpelt deduktivt resonnement:

> 170-171 Eli: Hvis vi tar denne her og deler den opp. Her er det tre dyr [hund, katt og pinnsvin]. Vi deler de opp
>
> 173 Åge: Vi kan ikke kappe
>
> 174-175 Eli: Nei, ikke dele [dyret i to], men vi kan dele den slik at et dyr med fire bein blir til to strutser

Her forklarer Eli at ved å dele et dyr i to, vil det skape dobbelt så mange dyr med lik sum bein som det opprinnelige dyret. Dette er en form for målingsdivisjon, der det er rimelig å anta at det er deduktiv resonnering da det er en aritmetisk regel om at fire delt på to er to, som gjør at de grupperer dyrene to og to sammen for å få fire bein. Elevene bruker her en matematisk regel for å komme fram til en ny kombinasjon. Eli nevner i sin forklaring et konkret dyr – struts – men senere i linje 221 har hun en annen formulering: «Hvis du gjør om på dyrene kan dyr med fire bein bli til to dyr med to bein». Her er det en overgang fra et konkret eksempel til å forklare det samme prinsippet på mer generisk.

Ellers kom elevene med flere konkrete kombinatoriske løsninger, slik som at Noa kunne sett fire + fire + fire, seks + fire + to eller åtte + fire. I etterkant kan det tenkes at elevene arbeidet med et så lavt antall bein, at det ikke krevde mer av dem enn å finne kombinasjonsmulighetene, og sette opp kombinatoriske løsningsforslag. Det kan også virke som at elevene ikke var nødt til å finne en smart måte å systematisere kombinatorikken, da det viser seg at elevene arbeidet usystematisk letende gjennom hele arbeidsprosessen. Deres deduktive resonnementer har altså bestått av aritmetiske regler. Dette kan kobles opp mot hva Reid (2002, s. 235) skriver om at barn gjerne kommer med flersteg deduktive resonnement når de arbeider med problem som innebærer aritmetikk. Han nevner tross alt at elever sjeldent kommer med flersteg, og når de først gjør det, så er det i arbeid som innebærer aritmetikk. Det kan da tenkes at elever har lettere for å komme med ett-steg deduktive resonnement i arbeid som innebærer aritmetikk.

4.1.4 Presentasjon og analyse av kategori 3: Hypotetiske deduktive resonnementer

Fabian og Marie kom fram til at det finnes edderkoppdyr med åtte bein, der Marie spør hva hun kan multiplisere med åtte for å få produktet tolv. Fabian sier at det ikke går. Mer enn det kommer ikke frem. Ut fra at Reid (2002, s. 111) hevder at barn ofte ikke uttrykker tanker på en tydelig måte, tror jeg Fabian tenker at de ikke kan gange åtte med et annet tall, da det nærmeste hele dyret ville vært to, som hadde gitt produktet 16, som er mer enn 12 bein. Det er i så fall en aritmetisk regel, der slutningen blir å ikke multiplisere åtte med et annet tall. Det hypotetiske kommer frem ved at elevparet antar at to av dyrene var edderkopper, der de har «regelen» om at edderkopper har åtte bein, men siden oppgavens premiss om at det kun kan være 12 bein, gjør at hypotesen om at det var minst to edderkopper må være feil.

Eli og Åge diskuterer hvorvidt de skal inkludere beinløse dyr eller ikke. Her kommer det frem at elevene ser for seg et scenario:

> 130 Eli: Hvis vi har seks dyr, og putter på en slange, så blir det jo syv dyr, men fremdeles bare 12 bein
>
> 131 Åge: Sånn sett kan vi i prinsippet ha uendelig med dyr
>
> 132 Eli: Ja, faktisk. Man kan jo bare putte på en ny slange uten at det gjør noe
>
> 134 Åge: Mhm. Vi kan for eksempel ta 90.000 slanger […]

Som nevnt er det et simpelt deduktivt resonnement om at identitetselementet null ikke endrer summen i et addisjonsregnestykke. Jeg har vurdert hvorvidt det kan ansees som et hypotetisk deduktivt resonnement, ut fra hvordan elevparet formulerer seg. At Åge bruker «Sånn sett kan vi […]» kan virke dempende på budskapet om å kunne legge til uendelig med slanger. I tillegg nevner han et høyt, konkret tall. Man kan da spørre seg om det er for å overbevise seg selv – som vil tyde på han jobber ut fra en antagelse, og ikke noe han vet helt sikkert.

Man kan også spørre seg om det uendelige virker for abstrakt for enkelte elever, eller om han bruket ett spesifikt konkret eksempel for å overbevise partneren sin. Dette ligner i så fall på Balacheff (1988, ss. 228-229) skriver om at det avgjørende eksperimentet ofte blir brukt for å overbevise andre om sine resonnementer.

Dette med å konkretisere til et tall kan også sees hos Tia og Rune:

68 Rune: Det kan være evig slanger

69 Tia: Evig slanger pluss, 40 slanger pluss

[…]

205 JC: […] Hva er det største antall dyr Noa kan ha sett […]?

206 Tia: Han kan ha sett 50 dyr

209 Rune: Han kan ha sett 5000 dyr

Dette elevparet generaliserer også at det kan være evig slanger – som betyr at de ikke trenger å tallfeste det. Likevel velger både Tia og Rune å konkretisere med et tilfeldig tall, der elevparet begynner med et lavere tall før de går over til et høyere tall.

4.1.5 Presentasjon og analyse av kategori 4: Fralagte betingelser og avsporinger fra matematikk

4.1.5.1 Betingelser

Hos elevpar 3 starter Rune tidlig med å komme med avgrensninger for oppgaven. Han nevner i linje 9 at «[Noa] tok ikke med insekter», i linje 22 at «[…] han tok bare med seg to av hvert dyr» og i linje 47 at «[…] men jeg så han da han, da tok han med to [av hver art]». Tia hevder derimot at det ikke står i oppgaveteksten at Noa måtte ha to av hver art. Denne betingelsen blir dermed ikke brukt.

Her antar jeg at Rune kobler oppgaveteksten opp mot historien om Noahs ark, som opprinnelig kommer fra Bibelen, i Første Mosebok. Historien tar for seg at Noah tar med to av hver art på en ark for å unngå en flom. Jeg velger å nevne dette, da Stoyanova og Ellerton (1996, referert i Bonotto & Santo, 2015, ss. 107-108) skriver at elever, med utgangspunkt i egne erfaringer, konstruerer personlige tolkninger av situasjoner og formulerer meningsfulle matematiske problem. Det kan tenkes at Rune kobler oppgaveteksten opp mot sine forkunnskaper, og dermed tenker han at Tia og han må regne ut fra at det er to arter, da han har kjennskap til historien om Noahs ark. Det kan da pekes på at lærere bør tenke over hvordan oppgavetekster blir formidlet – at elever, med sine forkunnskaper, vil ha assosiasjoner til ulike ting. Disse assosiasjonene kan være matematiske og ikke-matematiske. I dette tilfelle ville Rune sin assosiasjon, om elevparet hadde arbeidet med betingelsen om å inkludere to av hver art, påvirket det matematiske innholdet i form av at elevparet hadde fått færre løsningsforslag, enn uten betingelsen.

Elevpar 1 og 2 stiller spørsmål til oppgavens illustrasjon:

17 Eli: Er det bare de dyrene på arket vi kan bruke?

,

3 Fabian: (Peker på arbeidsarket) Er det de dyrene det er?

Begge elevparene, i sitt arbeid, bruker flere kombinasjonsmuligheter enn hva dyrene på oppgavens illustrasjon presenterer. Jeg velger å nevne at elevene stilte spørsmål til dette, da det viser noe om at elever blir påvirket av bildet som følger med en oppgave.

Da Eli og Åge var innpå om de skulle inkludere beinløse dyr eller ikke, hevder de at de kan legge til 90.000 slanger. Eli sier rett etterpå, i linje 136: «Eller. Du har 12 dyr, og mange bein, enten slange eller snegle». Det ble ikke noe oppfølging på denne kommentaren, men Eli er i ferd med å generere et nytt problem, uten at hun har blitt oppfordret til det. Beinoppgaven viser da Hagland et al. (2005, s. 30) sitt kriterium om at problemet skal kunne lede elever til å formulere nye interessante problem.

4.1.5.2 Avsporinger fra matematikk

Alle tre elevparene hadde øyeblikk hvor det skjedde avsporinger fra det matematiske innholdet. Marie spør Fabian i linje 50: «Hvor mange dyr kan [Noa] ha sett? Han kan ha sett …» der Fabian svarer «Løve, tiger … det er så mange». Etter at Tia og Rune hadde skrevet opp ulike kombinasjoner med summen 12, i form av å tegne, så går elevparet gjennom å hva dyr de ulike kombinasjonene bestod av. Tia nevner i linje 84 at: «[…] dette kan være en hest, og dette kan være en …» der Rune sier «Ponni», og Tia fortsetter med «Eller en enhjørning». I disse øyeblikkene er elevene mer opptatt av hva slags dyr Noa kan ha sett, fremfor ulike kombinasjoner med kombinasjonsmulighetene de har. Dette er en avsporing fra det matematiske innholdet, da elevene bruker tid på å erstatte et firebeint dyr med et annet firebeint dyr. Dette ligner på funnet til Hansen og Hana (2015, s. 37) om at elever gjerne kan komme med ikke-matematiske problem om det mangler tydelige retningslinjer for hva elevene skal gjøre. Det må nevnes at alle tre elevparene likevel arbeidet med matematikk der de fant ulike kombinasjoner.

I et spørsmål fra meg, der jeg spør om hvor mange forskjellige dyr Noa kan ha sett, eller kombinasjoner med dyr han kan ha sett, kommer dette svaret fra Fabian:

230-232 Fabian: Han kan ha sett på en måte tre på en måte fire dyr. Han har sett tre dyr, en struts, en hund og en edderkopp, men det er to edderkopper fordi det er en med seks bein og en med åtte bein. På en måte fire på en måte tre

Her kommer Fabian med et tvetydig svar, der han begrunner det med at det finnes både edderkopper med seks og åtte bein. Ut fra dette svaret virker det igjen som at elevparet er mer opptatt av hva slags dyr Noa kan ha sett, fremfor ulike kombinasjoner med sifrene to, fire, seks og åtte som gir summen 12. Han har derimot funnet ulike kombinasjonsmuligheter, sånn at svaret er i bunn ikke helt uten matematisk innhold, da elevparet brukte disse kombinasjonsmulighetene i sine løsningsforslag.

Det forekom også avsporinger fra det matematiske innholdet som ikke var elevstyrt:

189 JC: Hva med trebeinte dyr, hva dyr er det?

190 Tia: Det kan være en sebra som har blitt spist av en løve. Eller et dyr som har som har amputert ett bein

Her er det jeg som stiller et spørsmål uten matematisk innhold. Jeg tror jeg stilte det for å vite hvordan elevparet hadde kommet fram til en kombinasjonsmulighet med sifferet tre. Det gjorde hvert fall at jeg forstod – om ikke aksepterte – betingelsen elevparet hadde satt om at de kunne modifisere antall bein. Det kan likevel vurderes hvorvidt det var et hensiktsmessig spørsmål å stille.

4.2 Presentasjon og analyse av kakeoppgaven

I kakeoppgaven fokuserer jeg primært på elevpar 5, Lea og Frida. Dette elevparet brukte tid og anstrengelse på problemet, og det kom frem matematiske resonnement. De resterende parene løste oppgaven på kort tid, og medstudentene og jeg brukte ikke pocket questions for å utvide oppgaven videre.

Jeg har tre kategorier jeg vil gå gjennom:

- Elevenes betingelse om rettferdig fordeling for enkeltindivid
- Simple deduktive resonnementer
- Et kreativt resonnement

Avslutningsvis vil jeg kort vise hvordan noen av de andre elevparene arbeidet med kakeoppgaven. Dette er for å vise at det avhenger av elevene og veiledningen om en oppgave blir rik eller ikke.

4.2.1 Presentasjon av kategori 1: Elevenes betingelse om rettferdig fordeling for enkeltindivid

Lea og Frida begynt oppgaveløsningen med å finne ut at guttene skulle dele kaken sin opp i tre, slik at det ble ett kakestykke per gutt. De formulerte seg slik at det var «tre gutter på en sjokoladebit». De fortsatte med at det ble «to- og en tredjedel jenter [som] deler på en sjokolade bit hver». Jeg spurte hva jentene mente med det, og fikk dette svaret:

> 25 Lea: Vi har delt opp jentene i to

Elevparet fortsatte med å diskutere hvor mye jentene skulle få, og foreslå at én jente ikke skulle få sjokolade. Dette gikk de vekk fra, og formulerte dette:

> 40 Lea: […] en jente må spise litt av alle [kakene]

> 42 Frida: To jenter må spise litt av alle [kakene]

Lea og Frida går videre med hvordan to jenter må deles opp. Det er dog litt uenighet i hvordan de to jentene skal bli delt:

> 49 Frida: Nei, se da. Hvis du kutter to personer i to, så får du fire deler, ikke tre

> 50-52 Lea: Jeg skal ikke kutte to personer [i to]. Hvis vi kutter den jenten en tredjedel av henne, og en tredjedel av [den andre jenten] henne, så blir det to tredjedeler. Så da blir det ikke en halv jente som får [ingenting] […]

I neste tekstutdrag peker Lea på en tegning av en kake, der to hele jenter, og en jente som er tilsvarende 2/3 av en hel jente. Lea sier at de to hele jentene får like mye kake, mens 2/3-jenten skal få litt mindre enn dem. Da spør DT:

> 100 DT: Jentene trenger jo like mye hver?

> 101 Lea: (Peker på 2/3 jenten) Hun her er bare to tredjedelers jente, så hun trenger ikke så mye […]

4.2.2 Analyse av kategori 1: Elevenes betingelser om rettferdig fordeling for enkeltindivid

Denne kategorien har to hovedaspekter ved seg: Det er lov å kutte opp jenter i biter, og delingen av kaken baserer seg på forholdstall.

Jeg har vært i tvil hvorvidt jeg skulle omtale det å dele jenter opp som en betingelse eller ikke. Elevparet tar ikke for seg om det er greit å dele opp jenter, samtalen er metaforisk for å finne ut hvor mange jenter det blir per kake – noe som i seg selv er greit da elevparet skal finne ut om det er jenter eller gutter som får mer kake. Jeg velger å nevne dette i betingelse-kategorien da dette gjør at elevparet arbeider med delingsdivisjon framfor målingsdivisjon – som tilsynelatende har fått elevene til å resonnere matematisk.

Betingelsen om rettferdig fordeling viser seg i løsningsforslaget om at jentene skal få ulik mengde kake. Det virker som at Lea mener at hver jente skal få tilsvarende mye kake som hvor «mye jente» de er. Lea og Frida har tross alt delt opp en jente i mindre biter. Elevparet arbeidet med forholdstall, der 1 jente:1 kakestykke og 0,67 jente:0,67 kakestykke. Sånn sett kan det virke som at elevene er på vei til å formulere et nytt problem: Når det er 2 2/3 jenter per kake, hvor mye må en hel jente spise og hvor mye kan en 2/3 jente spise for at det blir rettferdig? Det nye problemet løser faktisk det opprinnelige problemet – jentene sa innledningsvis at det er tre gutter per kakestykke, og det nye problemet tar for seg at det er 2 2/3 jenter per kakestykke – som vil si at det blir mer kake på jentene, da det er færre personer kaken skal bli fordelt på.

4.2.3 Presentasjon og analyse av kategori 2: Simple deduktive resonnement

Elevene kommer som nevnt frem til at det er 2 og 2/3 jenter per kake. DT spør om hvor mye én jente får. Lea svarer at én jente får 1/3 pluss en 1/6, som blir *en og en halv tredjedel*. Jeg antar at Lea forstår at 1/3 er dobbelt så stor som 1/6, som vil si at 1/6 er halvparten av 1/3, der hun utvider og forkorter brøkene i hodet mens hun adderer 1/3 med 1/6, som blir 1/3 pluss en halvpart av 1/3, som er 1/6. Jeg vil hevde at det deduktive her kommer i form at Lea bruker regneregler innenfor brøk for å komme fram til en slutning om hvor mye én jente får.

Et annet resonnement kommer frem da elevparet diskuterte hvordan de skulle dele opp jentene:

> 28-29 Frida: Hvis vi tar en halv del her, og en halv jente der, da har vi igjen en halv jente, og det går jo ikke an

Her resonnerer Frida ut fra delingsdivisjon, der hun bruker en regel om at dele to opp i fire biter, blir fire halve biter. Hun kommer da frem til en slutning om at elevparet, etter å ha fordelt to jenter per kake (slik at de har brukt opp seks av åtte jenter) ikke kan dele de to resterende jentene opp i to like, halve biter, da de vil være en halv jente til overs. Resonnementet blir brukt for å avkrefte eller motbevise at elevparet ikke bør dele opp to jenter i to, da det vi resultere i at en halv jente ikke får spist noe kake.

4.2.4 Presentasjon og analyse av kategori 3: Et kreativt resonnement

Lea og Frida foreslo mange ulike løsninger mens de arbeidet med kakeoppgaven. Det ser ut som at de glemmer tidligere informasjon. Elevparet har som nevnt kommet frem til at det er 2 og 2/3 jenter per kake. DT sier derimot i linje 93 «Dere mangler jo fortsatt å skrive hvor mye hver jente får». Dette fører elevene inn på ulike spor. Først sier Lea at én jente får 1/3 + halvparten av 1/3. De går derimot vekk fra dette, og hevder at jentene får 1,33/3 hver.

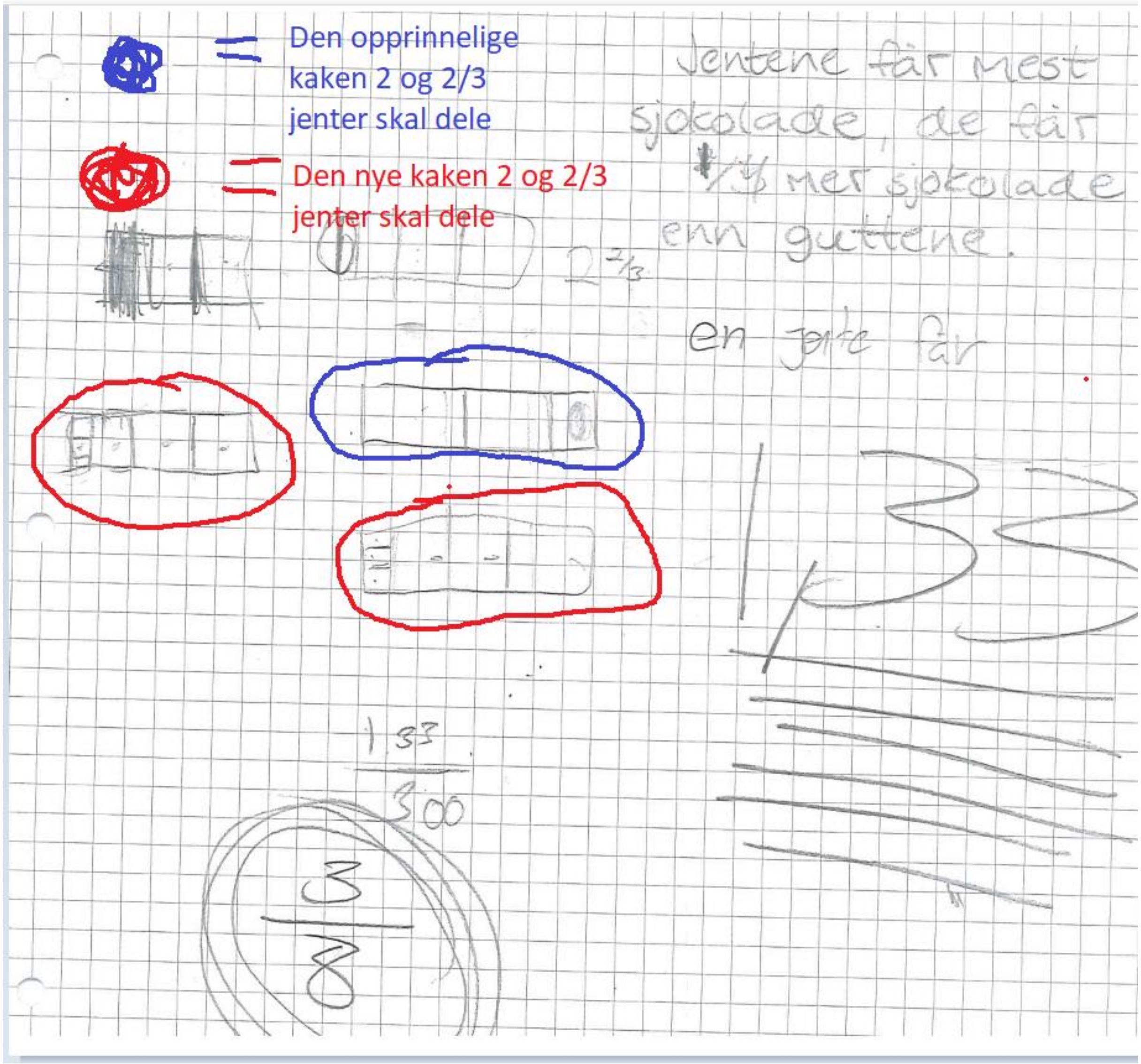
Jeg skal forklare hvordan jeg har skjønt at elevparet kom fram til svaret 1,33/3, og hva det betyr. Jeg har prøvd å rekonstruere elevenes framgangsmåte. Det har vært utfordrende, da det virker som at det er mye elevene ikke uttrykker sine tanker eksplisitt. Dette kan være noe med at dette kreative resonnementet faktisk består av flere steg, noe som Reid (2002, s. 108) skriver kan være utfordrende å se grunnskoleelever komme med, nettopp fordi de ikke uttrykker sine tanker eksplisitt.

Første steget til elevparet, er at de fant ut at på én kake er det 2 og 2/3 jenter. Elevparet prøver deretter å finne ut hvor mye kake én jente får. Frida forklarer seg sånn:

> 114-117 Frida: Det jeg skulle si var: Hvis denne sjokolade[kaken] … Og nå snakker jeg om denne ene sjokolade[kaken], så er det to personer som skal få denne sjokolade[kaken], men det er tre [jenter], sant? Og de skal egentlig få en sånn del (tror hun peker på en tegning av en kake, som er delt inn i tre biter, der to biter er store mens en bit er mindre), men i stedet for å dele det på samme måte som vi deler mellom guttene, så kan hver av [jentene] få litt til, sånn at den delen her blir akkurat passe til den kvarte personen

Ut fra Frida sitt utsagn kan det virke som at hun prøver å utvide en kake. Jeg har lagt ved elevparets kladdeark for å gjøre det lettere å forstå, se Figur 6. Kaken som har en blå ring rundt seg er hvordan 2 og 2/3 jenter opprinnelig skulle delt på kaken. To hele jenter får to like store stykker, mens 2/3 jenten får et litt mindre stykke.

Jeg har tatt rød ring rundt to kaker. Begge kakene representerer den nye kaken som tre hele jenter måtte delt. I kakene med rød ring rundt seg ser man at kaken ikke lenger er kun delt opp i tre deler, men er nå delt opp i seks ulike deler. Det tre store delene representerer fremdeles hva 2 og 2/3 jenter må dele. De tre små delene er en utvidelse av den opprinnelige kaken. Elevparet er altså innpå å finne ut hvor mye tre hele jenter får, før de prøver å finne ut hva én jente får. Svaret 1,33 kan virke som å bety hva en utvidet kake er, altså når 2 og 2/3 jenter deler på 1 kake, så må 3 hele jenter dele på 1,33 kake. Elevene kommer ikke frem til hvor mye kake én jente får, og dermed ikke hvor mye mer jentene får. Matematikken deres er ikke helt riktig, og det kan virke som at det blir for komplisert for elevparet.



Figur 6 - Deler av elevpar 5 sitt kladdeark til kakeoppgaven

Ut fra Lithner (2006; 2008) sine tre kriterier om hva et kreativt resonnement må innebære, vil jeg si at elevparet oppfyller de kriteriene. 1) Det ser ut som at resonnementer er nytt på elevparet, 2) de bruker plausible argument for å forklare seg, som 3) inneholder matematikk. Jeg har ikke blitt introdusert til noe lignende fremgangsmetode før, og jeg har heller ikke sett noe lignende i lærebøker. Jeg får større mistanke om at det er nytt på elevparet, da det virker som at de ikke klarer å uttrykke hva de egentlig mener på en god måte. Det kommer frem at mine medstudenter ikke forstår hva elevparet mener, og det virker som at elevparet er frustrert. Det kommer blant annet frem utsagn som:

87 Lea: Vet du hva? Jeg bryr meg ikke, jeg klarer ikke, og da gidder jeg ikke

,

165 Lea: Kan du bare gi oss en ny oppgave?

og

199 Frida: Ingen skjønner hva vi mener

Jeg tror deler av misforståelsen mellom studentene og elevparet grunner i at elevparet regnet med delingsdivisjon, mens studentene kom med spørsmål knyttet til målingsdivisjon. I tillegg kan det virke som at elevparet var frustrert over å arbeide så lenge med kakeoppgaven, da de fanget opp at andre elever fikk en ny oppgave. Som presentert ber Lea i linje 165 om en ny oppgave, da hun mener at hun har funnet frem riktig svar. Ivret etter å få en ny oppgave etter at svaret er funnet, ligner på begrepet til Skovsmose om oppgaveparadigme (Hana, 2013, s. 231) – at elevene får en oppgave fra en lærer, løser oppgaven, lærer kontrollsjekker med fasit, og gir en ny oppgave om elevene har svart riktig.

Det må presiseres at elevparet har skrevet «3/8» i Figur 6. I transkripsjonene mine kommer det frem at elevparet overhørte en annen gruppe si dette svaret, som gjør det uinteressant å se nærmere på. Elevparet, i samarbeid med MG, kommer avslutningsvis frem til at jentene får 1/24 mer kake enn guttene, da jentene får 9/24 deler hver mens guttene får 8/24 deler. Jeg velger å ikke forklare dette nøye, da seansen er tydelig lærerstyrt. MG stiller ledende spørsmål, der elevparet er passivt. Det skjer altså en traktkommunikasjon eller topaze-effekt (Læreren, velment, hjelper elevene ved å gi hjelp på en slik måte at elevene kommer frem til riktig svar på tross av at eleven ikke nødvendigvis lærer noe (Hana, 2013, s. 244)).

4.2.5 Presentasjon av andre elevpar sine løsninger

Eli og Åge er tidlig innpå hvordan de skal sette opp regnestykket:

8 Eli: […] Det er jentene som får mest. Jentene har tre sjokoladekaker å dele på åtte personer, guttene har en kake å dele på tre

Elevparet finner deretter ut at guttene får 0,33 kakestykker hver, mens jentene får 0,375 kakestykker hver.

Elevpar 4, Stein og Mia, gjør nøyaktig det samme som Eli og Åge. Stein, i linje 32, spør seg om det er noe i tre gangen som blir noe i åtte gangen. Elevparet finner da at 24 er fellesnevneren, og sier ikke særlig mye mer. De avslutter med å si at jentene får 3/8 mens guttene får 1/3.

Det viser seg altså at elevparene har løst kakeoppgaven rent aritmetisk, uten noen form for anstrengelse. Noen elever brukte litt tid på å utvide brøkene, men som Schoenfeld (1992, ss. 338-339) skriver, så vil ikke regnetekniske oppgaver bli definert som problemoppgaver. Jeg vil påstå at kakeoppgaven da ikke var en (rik) problemoppgave for noen elevpar bortsett fra Lea og Frida. Lea og Frida brukte tross alt tid og anstrengelse på problemet, der det ble dypt matematisk diskusjon ut fra deres løsningsforslag. Så til tross for at kakeoppgaven ikke kan hevdes å være rik, har det vært trekk fra rike oppgaver som har utspilt seg hos elevpar 5.

5 Drøfting

I denne drøftingsdelen vil jeg svare på forskningsspørsmålene om hvilke resonnementer elever genererer når de arbeider med rike oppgaver, og hva slags betingelser de setter til oppgavene.

Jeg vil først trekke frem de viktigste funnene som ble gjort i forskningen. Deretter vil jeg sammenligne de to ulike oppgavene som ble brukt i datainnsamlingsprosessen, der jeg vil få frem hvorfor de kan kobles opp mot rike oppgaver – som viser hvorfor mine resultater er relevant i arbeid med rike oppgaver.

Deretter vil jeg kommentere rundt resonnementsformene elevene brukte, før jeg går over til hva betingelser de satt. Jeg vil også komme innom et funn om at elever tallfester til tross for at de kom med generaliserte svar. Avslutningsvis vil jeg drøfte rundt lærerens rolle når han bruker rike oppgaver i sin undervisning.

Det må sies at det er uinteressant å utelukkende se på hva elevparene gjorde, ettersom jeg ikke kan generalisere ut fra et så lite datautvalg. Derfor vil jeg også nevne teori og tidligere forskning opp mot mine funn, i tillegg til mine egne refleksjoner.

5.1 Mine funn

Ut fra presentert datamaterialet fra beinoppgaven og kakeoppgaven, ser jeg at:

- Elevenes deduktive resonnementer bunner hovedsakelig ut fra aritmetikk
- Elevene resonnerte ikke induktivt, og det kom få hypotetiske deduktive resonnementer
- Elevene satt flere betingelser til beinoppgaven enn kakeoppgaven
- Elevene hadde et tydeligere matematisk fokus når de arbeidet med kakeoppgaven
- Det var en del avsporinger i arbeid med beinoppgaven – slik som å skulle erstatte ett firebeint dyr med et annet
- Elevene satt få betingelser til kakeoppgaven
- Elevene som kom med generaliserende utsagn, tallfestet det med høye tall

5.2 Forskjeller mellom beinoppgaven og kakeoppgaven, og sammenligningsgrunnlag

Beinoppgaven kan hevdes å være mer tvetydig i sin formulering, og det stilles flere spørsmål på arket. Kombinasjonsmulighetene var ikke eksplisitt skrevet, slik at elevene måtte selv avklare hvilke sifre de kunne kombinere. Kakeoppgaven er mer entydig i sin formulering, der parameterne er tydelige. Det kan tenkes at formuleringen gir mindre slingringsrom til å vurdere premisser. Dermed kan det hevdes at oppgavene er komplementære til en annen. I tillegg tok de for seg ulike matematiske idéer. Beinoppgaven innebærer kombinatorikk og det å skulle finne en metode for å finne alle mulige løsninger, mens kakeoppgaven tar for seg brøk og forhold mellom en del av en hel.

Det må også nevnes at beinoppgaven kan klassifiseres som rik ut fra Hagland et al. (2005) sine kriterier for en rik problemoppgave, mens kakeoppgaven ikke kan det samme. Dermed kan det stilles spørsmål til hvilken grad oppgavene har sammenligningsgrunnlag.

Jeg valgte oppgavene ut fra en tanke om at de skulle stimulere elevene til å resonnere og velge ut betingelser for å kunne løse oppgavene. Rike oppgaver har blant annet trekk om å være lett å forstå, kunne løses på ulike måter og initiere til matematiske samtaler ut fra elevenes svar. I begge oppgavene begynte samtlige elever å arbeide med problemet, de kom med ulike løsningsforslag og det var mulig å diskutere matematikk med elevene. Dermed fikk elevene resonnert i arbeid med begge oppgavene.

Rike oppgaver har også trekk om å skulle lede elever og lærere til å formulere nye interessante problem. I begge oppgavene kom det fram tilfeller der elevene selv var innpå å generere et nytt problem. Eli formulerte i beinoppgaven at Noa kunne sett antall dyr fremfor bein. Lea og Frida var innpå at det skulle være 2 2/3 jenter på en hel kake, der spørsmålet var hvor mye kake hver jente kunne få om det skulle vært rettferdig fordelt ut fra forholdstall. Jeg vil likevel hevde at kakeoppgaven er mer lukket i sitt omfang, der det ikke er naturlig at elevene bygger videre på problemet. Kakeoppgaven kunne strengt tatt vært en ren aritmetisk oppgave. Hadde jeg samlet inn data alene – og ikke med andre medstudenter – ville jeg ikke brukt kakeoppgaven. Jeg har likevel funnet interessante resultat ut fra Lea og Frida sitt arbeid med oppgaven.

Det var også slik at elevene stilte flere spørsmål til beinoppgaven enn kakeoppgaven. Her satt elevparene seg betingelser som endret det matematiske innholdet. Betingelsene påvirket kombinasjonsmulighetene. Tia og Rune satt blant annet seg en betingelse – å inkludere beinløse dyr – slik at de ikke klarte å finne en smart metode får å tallfeste alle mulige løsninger. Elevparet fikk derimot sagt at de kunne finne uendelig med kombinasjoner, som gjorde at de mistet deler av det matematiske innholdet. I kakeoppgaven ble det ikke satt betingelser fra elevene. Dermed arbeidet alle elevene med det som var formålet med kakeoppgaven, nemlig brøk. Jeg antar det har med hvordan oppgavene er formulert – beinoppgaven er mer tvetydig enn kakeoppgaven. Kakeoppgaven har også tydelige parametere.

Det kan også stilles spørsmål om kakeoppgaven egentlig var et problem for de fleste elevene. Som nevnt skal problemoppgaver ha en ukjent løsningsmetode for problemløseren (Björkqvist, 2003, s. 54; Hagland et al. 2005, s. 27; Kilpatrick, 1987, s. 125). Fire av fem elevpar løste den rent aritmetisk ved hjelp av målingsdivisjon. Elevpar 5, Lea og Frida, brukte derimot delingsdivisjon – som kan være en mulig årsak for at de arbeidet såpass lenge med problemet. Sånn sett vil jeg hevde at Hagland et al (2005, s. 29) sitt kriterium om at rike problemoppgaver skal oppleves som en utfordring, kreve anstrengelse og tidsbruk ble oppfylt hos elevpar 5. Av den grunn vil jeg si at jeg kan sammenligne beinoppgaven og kakeoppgaven – da mitt presenterte datamateriale viser elever som genererte resonnement i arbeid med problemene, der de brukte tid og anstrengelse og det skjedde matematiske samtaler ut fra deres løsninger. Elevene viser altså trekk fra rike oppgaver i sitt arbeid.

5.3 Hvilke resonnementer ble generert i arbeid med de rike oppgavene

Et av mine forskningsspørsmål handler om hvilke resonnementer elevene genererer i arbeid med rike oppgaver. Jeg har sett flere deduktive resonnement som omhandler aritmetiske regler. Eli og Åge bruker blant annet målingsdivisjon, der de kommer frem til slutningen om at dele ett dyr, vil gi to dyr med lik sum bein som det opprinnelige dyret. Reid (2002, ss. 135-136) nevner at barn sjeldent kommer med flersteg deduktive resonnement – og når barn først gjør det, så er det typisk at det blir generert i arbeid med problemer som innebærer aritmetikk. Han forklarer dette ut fra at tidlig skolematematikk gjerne fokuserer på aritmetikk. Muligens er det lettere for barn å komme med ettsteg deduktive resonnementer med aritmetikk også? Dette kan i så fall være en forklaring på hvorfor jeg hovedsakelig har sett deduktive resonnementer som omhandler aritmetiske regler

Reid (2002, s. 108) nevner det er utfordrende å se grunnskoleelever komme med flersteg deduktive resonnement, da elever sjeldent kommer med slike resonnement i tillegg til at de sjeldent uttrykker seg eksplisitt. Jeg så at Lea og Frida genererte et flersteg deduktivt resonnement i arbeid med kakeoppgaven, der de først fant ut det ble 2 2/3 jenter på en kake, for så å komme innpå at 3 hele jenter skulle få 1,33 kake. I prosessen til Lea og Frida foreslår de mange ulike løsninger, der det virker ut som at de glemmer tidligere informasjon. De hopper blant annet litt frem og tilbake hvorvidt det er 2 2/3 jenter eller 2 1/3 jenter som deler på en kake. En mulig forklaring på hvorfor flersteg deduktive resonnementer er utfordrende kan da være at elever må holde oversikt på informasjonen de har tilgjengelig, der en fallgruve er å glemme noe av informasjonen etter hvert.

Jeg så ingen induktive resonnementer. Jeg antar at det kan ha noe med at oppgavene hadde lave, naturlige tall, der elevene ikke trengte å gjøre mange utregninger. Hadde beinoppgaven hatt et høyere antall bein, slik som 120, ser jeg for meg at elevene måtte ha sett på flere konkrete eksempler, der det ville vært mer naturlig å prøve å se etter et eller flere mønstre. Elevene måtte hvert fall funnet en smart metode for å kunne finne alle mulige løsninger.

Det forekom ikke så mange hypotetiske resonnement. Disse så jeg kun i beinoppgaven. Reid (2002, s. 110) hevder at det er antatt at å resonnere hypotetisk er mer utfordrende enn å resonnere ut hva etablerte premiss man vet er sanne. Sidenvall et al. (2015, s. 543) peker ellers på at elever ofte kan velge vekk utfordrende oppgaver til fordel for lettere oppgaver. Resultatet mitt kan muligens forklares ut fra at elevene har valgt å ikke utfordre seg selv med hypotetiske deduktive resonnementer. Det kan derimot stilles spørsmål til om det er andre faktorer eller variabler enn at det er utfordrende, som påvirker hvorvidt elevene resonnerer med hypotetiske deduktive resonnement eller ikke. I mitt tilfelle ble elevene plassert i en setting der de fikk et oppdrag i å løse noen oppgaver, uten andre tydelige retningslinjer. Det kan da tenkes at det er unaturlig for elevene å gå inn i en rolle og forklare mulige løsningsforslag ut fra antatte premisser.

Det kan også stilles spørsmål til hvilken rolle elevenes forventinger til en oppgave er med på å påvirke hva slags resonnementer de genererer. Jeg så et tilfelle der Eli diskuterte hvordan de skulle plassere beinløse dyr som snegler eller slanger. Hun nevner at det ville vært vanskelig å regne ut, og konkluderer med å ikke inkludere sifferet null som kombinasjonsmulighet. Dette kan tyde til Eli sine forventninger til oppgaven – kanskje hun har en viss forventing til hva matematiske oppgaver innebærer, og hva de vanligvis krever? I dette tilfellet kan det være at en oppgave skal ta for seg et tydelig og konkret løsningsforslag, der en variabel i seg selv ikke er et akseptert løsningsforslag. Dette kan i så fall kobles opp mot begrepene didaktisk kontrakt og sosiomatematiske normer. Kort forklart handler didaktisk kontrakt om samspillet mellom de involverte i undervisningen, der det er gjensidige forventninger, oppfatninger, holdninger og rammebetingelser mellom lærer og elev (Lunde, 2008, s. 6). Sosiomatematiske normer er knyttet til hvordan man arbeider og snakker i arbeid med matematikk. Det kan sees på som retningslinjer for hva som verdsettes og aksepters (Johnsen-Høines & Herheim, 2016, s. 56). Cobb og Yackel (1996, referert i Skott et al., 2018) forklarer dette som en standard, slik som om hva som kan ansees som et godt matematisk spørsmål, og hva en stødig matematisk løsning er. Kan det være at Eli sine forventinger tilsa at en god matematisk løsning innebærer et konkret svar? Det er vanskelig for meg å hevde noe bastant, da jeg ikke kjenner elevgruppen mer enn de timene med datainnsamling.

I kakeoppgaven kom det frem et kreativt resonnement. Her var det Lea og Frida som arbeidet uten en tydelig fremgangsmåte tilgjengelig, der de prøvde å konstruere eller finne en fremgangsmetode selv. De foreslo en rekke ulike løsningsforslag, der alt bunnet i matematikk. Lithner (2006, s. 6) hevder at kreative resonnement spiller en vesentlig rolle når elever arbeider med problemoppgaver uten en tydelig fremgangsmåte. Ut fra at problemoppgaver sin definisjon om at problemløseren ikke skal vite en metode på forhånd for å løse oppgaven, og at den skal kreve anstrengelse og tankevirksomhet (Hagland et al., 2005, s. 27) – kan det tenkes at alle problemoppgaver – inkludert rike – har potensiale til å la elevene resonnere kreativt. Det kan da spørres hvorfor ikke flere elever resonnerte kreativt. Sidenvall et al. (2015, s. 534) hevder at høyere vanskelighetsgrad kan gjøre slik at elever resonnerer kreativt. Det kan være at mine oppgaver til datainnsamlingen burde hatt noe høyere vanskelighetsgrad for at elevene skulle generert flere kreative resonnementer.

5.4 Hva betingelser satt elevene

I beinoppgaven satt elevene betingelser som påvirket kombinasjonsmulighetene deres. Betingelsene som elevene tok i bruk omhandlet bein. Tia og Rune kom fram til at de kunne modifisere antall bein et dyr kunne ha, ved å kutte bein. Samme elevpar valgte også å kunne inkludere dyr uten bein, slik som slanger. På denne måten kunne elevparet fortrinnsvis lage kombinasjoner med sifrene mellom 0-12. At de kunne kombinere med sifferet null gjorde at elevparet ikke klarte å tallfeste et løsningsforslag – de generaliserte at de kunne finne evig med kombinasjoner. Dette gjorde at oppgavens opprinnelige parameter om at de skulle være 12 bein ikke hadde noe å si for elevparet – antall bein kunne vært 30, 178 eller 1028 – elevparet sitt svar om evig kombinasjonsmuligheter står gjeldende uansett. På en slik måte forsvant litt av det matematiske innholdet. Dette ligner på hva Hansen og Hana (2015, s. 37) skriver om at elever, under frie tøyler, kan komme med ikke matematiske problemstillinger, altså problemer som ikke kan løses med matematikk.

Det må sies at elevparet kunne laget en eksplisitt formel som tok for seg alle mulige løsninger, om de hadde brukt variabler. Jeg antar at det ikke falt naturlig for elevparet å tenke slik, da det hadde omhandlet å regne med noe ukjent i et stort omfang. Elevparet måtte da delvis gått vekk fra den konkrete situasjonen – noe Balacheff (1988, s. 217) kaller for å de-kontekstualisere seg. Han hevder det er kognitivt krevende å gjøre. Kombinatorikk, eller kombinatoriske oppgaver, er ellers satt i en kontekst, som kan gjøre det mer naturlig å bli i den gitte konteksten. Man kan dermed ikke forvente at elevene skulle funnet en eksplisitt formel selv. Hana og Hansen (2015, s. 37) mener at læreren har en viktig rolle med å bidra elevene til å finne eller omformulere elevenes problemstillinger. Det kan tenkes at elevparet kunne – i lag med en av oss studenter – strekt seg lengre i sin matematiske tenkning om vi hadde fungert som støttende stillas, blant annet ved hjelp av pocket questions. Vi hadde dog som nevnt et formål om å ikke gjøre for store innspill hos elevene.

Fabian og Marie, og Eli og Åge valgte å ikke modifisere antall bein, og ikke inkludere dyr uten bein, slik at de hadde færre kombinatoriske muligheter å arbeide med, samt så kunne de komme fram til et tydelig løsningsforslag bestående av ulike kombinasjoner.

Beinoppgaven er hentet fra matematikksenteret, uten at jeg gjorde noen endringer på oppgaveteksten. I etterkant ser jeg at dette med å plassere beinløse dyr kan være litt uheldig, da i Tia og Rune sitt tilfelle fikk tapte matematiske muligheter. Jeg tror egentlig at de som laget oppgaven ikke hadde som formål at elevene skulle bruke så mye tankekrefter på dette. I tillegg så jeg tilfeller der elevene ville erstatte ett firebeint dyr med et annet, noe som ikke har et matematisk innhold. Det må sies at matematikksenteret foreslo veiledende spørsmål læreren kan stille elevene sine. Det må altså forståes at beinoppgaven ikke kan sees i et vakuum, og at oppgavene kan ta ulike vinklinger. En rik oppgave kan bli mindre rik om de arbeides med ukritisk, eller uten noen form for innskrenkninger. Læreren spiller dermed en viktig rolle, der han blant annet må passe på at elevene arbeider med et matematisk innhold.

I kakeoppgaven ble det ikke satt betingelser – elevene kom kun innpå mulige betingelser de kunne satt seg. Som nevnt er kakeoppgaven mer entydig i sin formulering, uten noe særlig slingringsrom. Dette tenker jeg er grunnen for at elevene hadde et tydeligere matematisk fokus på kakeoppgaven enn beinoppgaven. Det var derimot flere elever som brukte tid og anstrengelse på beinoppgaven enn kakeoppgaven – slik at beinoppgaven kan tenkes å ha vært en problemoppgave for flere elever enn kakeoppgaven. Det kom derimot flere ikke-matematiske avsporinger fra elevene og studentene i beinoppgaven. Beinoppgaven ble muligens mindre rik på den måten.

5.5 Et trekk ved elevenes generaliseringer

I beinoppgaven kom både elevpar 2 og 3 innpå at å tillate dyr med null bein, gav dem mulighet til å skape uendelig med kombinasjoner. Elevene brukte store tall for å eksemplifisere dette. Man kan da spørre seg om det blir for utfordrende for enkelte elever å resonnere abstrakt? Sånn sett sier elevene at de har funnet en variabel som kan representere alle mulige tall som kombinasjonsmulighet – som de likevel velger å tallfeste. Kan det være noe med elevenes algebraiske tenkning – at det er utfordrende å se strukturer, for så å generalisere og analysere hvordan ting endrer seg uten å peke på noe konkret? Balacheff (1988) er innom dette i sin studie om elever som bevisfører. Hans resultat viser at elever blir mer overbevist av det avgjørende eksperimentet enn generiske eksempler. Han hevder også at tankeeksperiment er tungt kognitivt krevende, der den som resonnerer må de-kontekstualisere seg fra situasjonen. I tillegg, som nevnt, er kombinatoriske oppgaver satt i en kontekst, slik at det kan føles naturlig for elevene å fortsette å arbeide i samme kontekst. Det kan spørres hvorvidt det er for vanskelig for enkelte elever å gå vekk fra den konkrete konteksten, eller om de velger å unngå å plassere seg i en krevende situasjon.

Dette med å unngå å plassere seg i krevende situasjoner kan sees i Sidenvall et al. (2015) sin studie. Der fikk elever på videregående velge mellom tre oppgaver med ulik vanskelighetsgrad, der 13 av 15 elever valgte de letteste oppgavene. Det kan trekkes en parallell til elever som arbeider med rike oppgaver – rike oppgaver inneholder rikelig med matematiske idéer og begreper, som elevene kan møte. Det er derimot ikke gitt at elevene møter all denne matematikken – og det kan tenkes at elevene, alene, ikke velger å gjøre en oppgave mer vanskelig enn hva de trenger. Det kan da stille spørsmål til hva som skal til for at elevene plasserer seg i en mer krevende situasjon. Lærerens innspill er et åpenbart svar her, der gode spørsmål kan føre elevene innpå ulike matematiske spor. Det kan også tenkes at elevenes egne forventinger spiller inn – eller klasserommets sosiomatematiske normer – der elever vil utfordre seg selv om de oppfatter at det er forventet av dem. Et oppfølgingsspørsmål blir da hvordan man kan bygge opp slike normer. Blomhøj (1994, ss. 36-43) er innpå at det må foregå en utfordrende dialog mellom lærer og elev mens elevene er i en arbeidsprosess. Det kan imidlertid være utfordrende for lærere å tilrettelegge og gjennomføre undervisning som bestandig utfordrer hver enkelt elev. Læreren må tross alt forholde seg til (ofte) store individuelle forskjeller mellom elevene, og ta hensyn til motivasjon for å delta i undervisningen, vilje til å samarbeide, tålmodighet og faglige forutsetninger.

Hagland et al. (2005, ss. 67-68) nevner at metakognisjon spiller en vesentlig rolle i problemløsning. Det handler om en persons kunnskap om kontroll over sine egne tanker og læring. Det blir hevdet at elever som er bedre til metakognisjon har lettere for å arbeide med problemoppgaver. Metakognisjon kan kobles opp mot Balacheff (1988) sitt utsagn om at tankeeksperiment – for å kunne distansere seg selv fra handling, løsningsprosess og tid av problemet så tenker jeg at oppgaveløseren må ha en viss form for kontroll over sine egne tanker. Mulig det blir for fjernt å stille spørsmål til elevparenes metakognitive evner, men det kan tenkes at rike oppgaver kan trene opp elever på dette området. Dette fører meg over til siste ting jeg ønsker å diskutere – nemlig lærerens rolle når han bruker rike oppgaver i sin undervisning. Jeg tror ikke rike oppgaver er en rask løsning der elevene – helt på egenhånd – utfordrer seg selv.

5.6 Lærerens rolle i arbeid med rike oppgaver

Som nevnt tidligere i masteren har rike oppgaver en del trekk som kan bistå lærerne i sitt omfattende oppdrag. Jeg har nevnt at rike oppgaver har en intensjon om å være selvdifferensierende (Utdanningsdirektoratet, 2015), har lav inngangsterskel (Gilderdale & Kiddle, 2014) og kan initiere til fruktbare diskusjoner samt virke som brobygger mellom ulike matematiske emner (Hagland et al., 2005, s. 29). Disse trekkene kan føre elever innpå ulike matematiske spor. Rike oppgaver har altså mange muligheter – men hvordan kan man gripe disse mulighetene?

I min datainnsamlingsprosess fikk elevene arbeide med problemene stort sett på egenhånd. Det må nevnes at jeg hadde pocket questions på lur, for å kunne utvide oppgavene og stille veiledende spørsmål der elevene satt fast. Formålet var å la elevene stå i problemene, uten for mye innspill. Det forekom likevel hendelser der medstudentene og meg kom med mer innspill enn hva som var opprinnelig planlagt – det kan sies at det var en liten konflikt mellom forskerrollen og lærerrollen. Jeg tror vi kom særlig med innspill der vi så at elevene fokuserte på ikke-matematiske problemstillinger. Eksempelvis fikk noen elevpar kommentar fra mine medstudenter om at elevparene ikke trengte å fokusere på å bytte ut ett firebeint dyr med et annet.

Formålet med avsnittet ovenfor er å få frem at elevene ikke nødvendigvis arbeidet med et matematisk innhold da de arbeidet med beinoppgaven. Slik som Hansen og Hana (2015, s. 37) skriver, så kan elever, under frie tøyler, komme med problemer som ikke kan løses med matematikk. Av den grunn har læreren en viktig rolle med å bidra elevene til å finne eller omformulere elevenes problemer til å inneholde matematikk. Jeg tror at medstudentene mine og jeg kjente litt på lærerrollen, der vi så det var nødvendig å rette elevene mot et mer matematisk fokus. Som nevnt er beinoppgaven tvetydig i sin formulering, der det stilles flere spørsmål – slik at elevene hadde flere ting å ta stilling til. Hadde jeg skulle brukt samme oppgave i min undervisning – som lærer – hadde jeg ansett det som nødvendig å komme med noen innsnevringer i introduksjonen av oppgaven. Eksempelvis kunne man blant annet hatt samtale med hele klassen – spørre hvordan man kan plassere dyr uten lemmer, og muligens fjerne den betingelsen – da jeg så at et elevpar fikk noen tapte matematiske muligheter av det.

Det kan tenkes at læreren bør ha en mer fremtredende rolle enn hva jeg hadde i dette forskningsprosjektet. På ene siden kan læreren stille spørsmål som retter elevenes matematiske fokus mot de matematiske idéene han vil at elevene skal møte. På en annen side kan et rikt problem bli gjort fattig (Hagland et al., 2005, s. 30; Hana, 2013, s. 245) ut fra modifikasjoner. Læreren kan gjøre et rikt problem fattig gjennom at problemet forenkles av læreren, eller ved å gi elevene hjelp som er mer rettet mot å finne svaret på bekostning av å lære matematikk. Det kan ligne på hva som skjedde med Lea og Frida i arbeid med kakeoppgaven. Elevparet brukte tid, tankevirksomhet og krefter på å løse oppgaven, der de kom med flere ulike matematiske resonnement. Det virket som at det var misforståelser mellom studentene og elevparet. Elevparet uttrykte mye frustrasjon – det ble blant annet sagt «ingen skjønner hva vi mener». Avslutningsvis endte MG med å ta styring, og brukte traktkommunikasjon for å lede elevparet innpå riktig løsning. Elevparet gikk da vekk fra det kreative resonnementet, og ble passive mottakere i oppgaveløsningen. Man kan stille spørsmål om elevparet da mistet eierskap over løsningsprosessen, og om MG inhiberte elevenes mulighet til å resonnere selv.

Jeg vil hverken påstå at det var fullstendig riktig eller graverende feil av MG å ta styring da han snakket med Lea og Frida. Elevparet hadde arbeidet lenge med problemet, der de uttrykte frustrasjon over at ingen av studentene forstod hva elevparet mente. Dette viser en utfordring med rike oppgaver – slike oppgaver kan ta ulike retninger, og læreren må i øyeblikket ta imot elevenes matematiske tanker og idéer, spille videre på dem og klare å gi respons som kan stimulere elevenes matematiske kompetanse. Det er ikke sikkert at læreren sitter på den nødvendige kompetansen der og da. I tilfellet med Lea og Frida var det mye forvirring i samtalene mellom dem og studentene. Man kan spørre seg hvor lang tid læreren skal bruke på å forstå elevenes resonnementer – læreren har flere elever i sitt klasserom, der det er begrenset med tid til å høre på alle elevene. Om hver elev sitter på egne og vidt forskjellige matematiske tanker, kan det muligens bli overveldende mye for læreren å ta tak i. Av den grunn blir det lurt for læreren å ha en plan for hvilke matematiske idéer og begreper elevene skal komme i kontakt med når læreren bruker spesifikke rike oppgaver, slik at han er forberedt på hva matematiske tanker han kan høre fra elevene sine.

Situasjonen med Lea og Frida kan også vise noe som er problematisk med problemoppgaver i seg selv – inkludert rike oppgaver, da de skal kreve anstrengelse av problemløseren, samt være utfordrende å kreve tidsbruk i tilfellet med rike oppgaver. Lea og Frida brukte mye tid og anstrengelse på kakeoppgaven, der de resonnerte dypt matematisk. Elevparet uttrykte som nevnt mye frustrasjon, i form av å spørre om ny oppgave og utsagn om at ingen forstod hva de mente. Man kan spørre seg i hvilken grad elevene skal bruke tid, oppleve anstrengelse og utfordring. Det kan være fruktbart for elevene å stå i oppgaven en stund – Hagland et al. (2005, ss. 67-68) hevder blant annet at elevene kan få trent opp sine metakognitive evner. Det finnes derimot en grense for hvor mye akademisk utholdenhet et menneske har. Hvordan kan man vite hvor lenge en elev tåler å stå i et problem?

For å komprimere dette delkapittel 5.6. ser jeg to sentrale variabler: 1) Lærerens deltakelse og 2) tidsbruk. Læreren kan være alt fra aktiv til passiv, der jeg stiller spørsmål til hvilken grad læreren burde komme med innspill til elevene, og hva slags type innspill han bør komme med. Disse innspillene kan vedlikeholde at oppgaven er rik, eller at den blir mer fattig. Dette spørsmålet kan ikke jeg svare på, da jeg hverken har hatt fokus på det, eller har stort nok datamaterialet til å peke det ut. Dermed kunne det vært interessant i videre forskning å se hva innspill fra læreren som er fruktbare – og hvor mye innspill læreren skal komme med til elevene når de arbeider med rike oppgaver. En annen variabel er tidsbruk. Lea og Frida arbeidet lenge med kakeoppgaven, der de kom med deduktive- og et kreativt resonnement. De avsluttet derimot med å være passive mottakere av traktkommunikasjon. Man kan da spørre seg hvor mye tid, anstrengelse og utfordring elevene skal møte når de arbeider med rike oppgaver – hva gir fruktbart matematisk utbytte? Hva er best for å øke elevenes matematiske kompetanse? Igjen må jeg nevne at jeg ikke kan svare på dette. Jeg kan tenke meg at det avhenger fra individ til individ – noe som speiles i selve definisjonen av problemoppgaver.

6 Avslutning og veien videre

Gjennom dette forskningsprosjektet har jeg fokusert på to ting: 1) Elevenes resonnementer når de arbeider med rike oppgaver, og 2) hva betingelser de satt til de ulike oppgavene, og hva betingelsene har hatt å si for de matematiske resonnementene. Jeg har primært tatt utgangspunkt i Hagland et al. (2005) sine kriterier til rike oppgaver, der jeg har prøvd å koble noen av kriteriene opp mot hvordan de kan stimulere elever til å resonnere og få elevene til å sette betingelser til de gitte oppgavene. Rike oppgaver har blant annet trekk om å ha lav inngangsterskel, kunne initiere til matematiske samtaler ut fra elevenes svar og kunne lede elever og lærere til å formulere nye interessante problem.

Jeg har støttet meg på deler av Baroody (1993), Hana (2013), Lithner (2006; 2008) og Reid (2002) sine definisjoner på ulike former for resonnementer for å belyse enkelte av elevenes resonnementer. Jeg har hovedsakelig fokusert på deduktive resonnementer. I tillegg har jeg støttet meg på Balacheff (1988) sin studie om elever som bevisfører. Hensikten var å kunne peke på eventuelle årsaker til forekomsten av enkelte resonnementer.

Jeg har hatt ulike inspirasjonskilder for å se på hva betingelser elevene satt til rike oppgaver. Fortrinnsvis er det ut fra Silver (1993) og Stoyanova og Ellerton (1996) sine definisjoner om problem posing. Essensen er at en elev, med utgangspunkt i matematikkerfaringer, konstruerer personlige tolkninger av situasjoner og formulerer meningsfulle matematiske problem. Dette har jeg koblet opp mot Stylianides (2016) sine «proving tasks with ambiguous conditions». Denne oppgavetypen er med hensikt tvetydig – slik at den er gjenstand for ulike legitime antagelser – med formål å føre elevene til å stille spørsmål til oppgaven. Disse spørsmålene, som eventuelt blir betingelser, kan påvirke det matematiske innholdet elevene arbeider med – som også kan påvirke elevenes matematiske resonnementer.

Mine resultat viser at elever på 7. trinn ofte brukte deduktive resonnementer knyttet opp mot aritmetiske regler. Jeg så også tilfeller der elever resonnerte med antatte premisser, som vil si at de brukte hypotetisk deduktive resonnementer. Jeg har også sett ett kreativt resonnement. Dette kom fram hos et elevpar som brukte særlig tid, anstrengelse og tankevirksomhet i arbeid med en oppgave.

Videre så jeg at elevene – i møte med de rike oppgavene – både satt betingelser som påvirket det matematiske innholdet, og de var innom betingelser som virket avsporende fra det matematiske innholdet. Jeg ser at lærerens innspill i slike tilfeller er en sentral variabel for å sette elevene tilbake til et matematisk spor. Jeg har også stilt spørsmål til hvor mye tid, utfordring og anstrengelse som er fruktbart for elevene å bruke når de arbeider med rike oppgaver.

Det finnes mange veier videre med lignende forskning. Etter å ha lest en rekke matematikkfaglig litteratur, samt erfaringen med innsamlingsprosess av datamaterialet og bearbeiding av empiri, sitter jeg igjen med en lyst til å fortsette med et elevperspektiv. Jeg har sett elever komme med ulike betingelser, der de også har lagt vekk andre betingelser. Det kan tenkes at elevenes forventinger til oppgavene har vært en faktor i valg av betingelser. Ut fra dette kunne det vært interessant å se forske på elevenes forventinger til matematiske oppgaver, og koble det opp mot hvordan eller hvorvidt de ulike forventingene påvirker elevenes arbeidsprosess eller konklusjoner. Man kunne da sett på hva resonnementer som er mest fremtredende ut fra ulike holdninger. En annen måte å si det på er å undersøke korrelasjon mellom sosiomatematiske normer, rike oppgaver og hva resultat som er mest fremtredende, eksempelvis om hva resonnementer som blir generert.

7 Bibliografi

Anker, T. (2020). *Analyse i praksis: En håndbok for masterstudenter.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (ss. 216-235). London: London: Hodder and Stoughton in association with the Open University.

Bjerke, A. H., Kroknes, T.-E., & Svingen, O. E. (2015). *Matemagisk 6A Grunnbok.* Oslo: Aschehoug.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm, *Matematikk for skolen* (ss. 51-68). Bergen: Fagbokforlaget.

Blomhøj, M. (1994). Ett osynlight kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren, 4*, ss. 36-45.

Bonotto, C., & Sante, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. I F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai, *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (ss. 103-124). New York: Springer.

Bratberg, Ø. (2017). *Tekstanalyse for samfunnsvitere.* Oslo: Capellen Damm Akademisk.

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. I H. Cooper, P. M. Comic, D. L. Long, A. T. Panter, D. Rindskopf, & K. J. Sher, *APA handbook of research methods in psychology, Vol 2: Research design: Quantitative, qualitative, neuropsychological and biological* (ss. 57-71). Washington, DC: American Psycholoical Association.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing.* New Jersey: Taylor and Francis.

Dahl (leder), T., Askling, B., Heggen, K., Iversen Kulbrandstad, L., Lauvdal, T., Qvortrup, L., . . . Mausethagen (sekretær), S. (2016). *Om lærerrollen.* Olso: Fagbokforlaget. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/17f6ce332c47437c8935d7ccc0a72769/rapport-om-laererrollen.pdf

Danielsen, A. G. (2013). Kunnskapsbygging i skolen via kvantitative verktøy - statistikk og spørreskjema. I M. Brekke, & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid* (ss. 138-154). Oslo: Universitetsforlaget.

Eilertsen, T. V. (2013). Eksemplets makt - casestudier som lærings- og forskningsredskap. I M. Brekke, & T. Tiller (Red.), *Læreren som forsker: Innføring i forskningsarbeid i skolen* (ss. 173-188). Oslo: Universitetsforlaget.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007, April). The interaction between intuitive and formal mathematical thinking: a case study. *International journal of mathematical education, 38(3)*, ss. 353-365.

Gilderdale, C., & Kiddle, A. (2014, September). *What are rich tasks?* Hentet fra NRICH: https://nrich.maths.org/11249

Hagland, K., Hedrén, R., & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem.* Stockholm: Liber.

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner.* Bergen: Caspar.

Hana, G. M. (2014). *Matematiske tenkemåter: Metamatematikk for lærerutdanningen.* Bergen: Caspar Forlag AS.

Hansen, R., & Hana, G. M. (2015). Problem posing from a modelling perspective. I F. M. Singer, N. F. Ellerton, & K. Cai, *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (ss. 35-46). New York: Springer.

Hsu, E., Kysh, J., & Resek, D. (2007). Using rich problems for differentiated instruction. *New England Mathematics Journal, 39*, ss. 1-24.

Hunt, R. (2000). *The origins of proof IV: The philosophy of proof*. Hentet fra +Plus: https://plus.maths.org/content/os/issue10/features/proof4/index

Johnsen-Høines, M., & Eskeland Rangnes, T. (2016). Å endre matematikkundervisningen - et risikoforetak. I M. Johnson-Høines, H. Alrø (Red.), T. Fosse, R. Hansen, M. I. Haugsbakk, I. Lilland, . . . G. Monstad Hana, *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis: Bok 1* (2. utg., ss. 103-116). Bergen: Caspar Forlag.

Johnsen-Høines, M., & Herheim, R. (2016). *Matematikksamtaler: Undervisning og læring - analytiske perspektiv.* Bergen: Caspar.

Khoury, H. A. (2002). Central role of students' reasoning. I R. G. Fuller, *A love of discovery: Science education - The second career og Robert Karplus* (ss. 97-104). New York: Kluwer Academic / Plenum Publisers.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? I A. H. Schoenfeld (Red.), *Cognitive science and mathematics education* (ss. 123-147). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy of Sciences.

Kleven (Red.), T., Hjardemaal, F., & Tveit, K. (2002). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: En hjelp til kritist tolkning og vurdering.* Oslo: Unipub.

Koning, E. d., Hamers, J. H., Sijtsma, K., & Vermeer, A. (2002). Teaching inductive reasoning in primary education. *Developmental review, 22*, ss. 211-241.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. I P. Cobb, & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning making: Interaction in classroom cultures* (ss. 229-270). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Kunnskapsdepartementet. (1999, August 1). *Opplæringslova - oppll*. Hentet fra Lovdata: https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61

Kunnskapsdepartementet. (2016, April 15). *Fag - Fordypning - Forståelse: En fornyelse av Kunnskapsløftet.* Hentet fra (Meld. St. nr 28 2015-2016): https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/?ch=1

Kunnskapsdepartementet. (2018, Juni 26). *Fornyer innholdet i skolen*. Hentet fra Regjeringen: https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics, 41(2)*, ss. 165-190.

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning.* Umeå: Umeå University.

Lithner, J. (2008, Mars). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational studies in mathematics*, ss. 255-276. Hentet fra https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-007-9104-2

Lunde, O. (2008, Februar). Å tilpasse den tilpassede opplæringen. *Tangenten*, ss. 2-8.

Løkken, G. (2012). *Levd observasjon: En vitenskapsteoretisk kommentar til observasjon som forskningsmetode.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Macphee, K. (1999). *The origins of proof.* Hentet fra Plus+: https://plus.maths.org/content/os/issue7/features/proof1/index#deduction

Mosvold, R., & Fauskanger, J. (2014, Januar). Innholdsanalysens muligheter i utdanningsforskning. *Norsk pedagogisk tidsskrift, 98(2)*, ss. 127-139.

Naidoo, J. (2019, Juli 1-5). Exploring the role of the mathematics education within the fourth industrial revolution. *Association for mathematics education of south africa, 1*, ss. 37-39.

NESH. (2016, April 27). *Forkningsetiske rettningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Hentet fra De nasjonale forskningsetiske komiteene: https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Niss, M. (2003). Den matematikkdidaktiske forskningens karakter og status. I B. Grevholm (Red.), *Matematikk for skolen* (ss. 333-362). Bergen: Fagbokforlaget.

Opheim, L. G., & Simensen, A. M. (2018). *Læreren som matematikkstudent.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Reid, D. (2002). Describing reasoning in early elementary school mathematics. *Teaching children mathematics, 9 (4)*, ss. 234-237.

Reid, D. (2002). Describing young childen's deductive reasoning. *Proceedings of the Twentieth-sixth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, IV* (ss. 105-112). Norwich: PME.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334-370). New York: Macimillan Publishing Company.

Schwarz, B. B., & Asterhan, C. (2008). Argumentation and reasoning. I K. Littleton, C. Wood, & J. Kleine Staarman, *International Handbook of Psychology in Education* (ss. 137-176). Bingley: Emeral Group Publishing Limited.

Sidenvall, J., Lithner, J., & Jäder, J. (2015). Students' reasoning in mathematics textbook task-solving. *International journal of mathematical education in science and technology*, ss. 533-552.

Silver, E. A. (1994, Februar). On mathematical problem posing. *For the learning og mathematics, 14(1)*, ss. 19-28.

Skott, J., Skott, C. K., Jess, K., & Hansen, H. (2018). *Matematik for lærerstuderende: Delta 2.0 Fagdidaktik, 1.-10. klasse* (2.. utg.). Frederiksberg: Samfundslitteratur.

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelseslandskaber. I H. Alrø, H. Bødtkjer, I. M. Christiansen, E. Emborg, M. Geldmann, K. Jess, . . . M. Blomhøj (red.), *Kan det virkelig passe? - om matematikklæring* (ss. 143-157). København: L.

Stanovich, K. E. (2013). *How to think straight about psychology* (10.. utg.). Harlow: Pearson. Hentet fra https://epdf.pub/how-to-think-straight-about-psychologyeb809042a6d069b6ac068e0c7cdab01666421.html

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000). *How students (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules.* New York: Teachers College Press.

Store Norske Leksikon. (2019, Februar 19). *Resonnement*. Hentet fra SNL: https://snl.no/resonnement

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in mathematics education, 38(3)*, ss. 289-321.

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom.* Oxford: Oxford University Press.

Svendsen, S. (2020). Bevisets stilling i matematikkundervisningen. *Bedre skole - Tidsskrift for lærere og skoleledere, 32(1)*, ss. 41-45.

Svorkmo, A.-G. (2007). *Rike matematiske problemer og spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen: Hvordan kan samspillet mellom disse fremme 11-åringers matematiske resonnementer?* (Masteravhandling). Trondheim: NTNU.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande*. Umeå: (Doktoravhandling, Umeå University). Matematik och matematisk statistik. Hentet fra https://www.avhandlingar.se/avhandling/35b8df4c8b/

Utdanningsdirektoratet. (2006). *Læreplan i matematikk felelsfag (MAT1-04).* Hentet fra Udir.no: https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Kompetansemaal/kompetansemal-etter-4.-arssteget-

Utdanningsdirektoratet. (2015, September 11). *Vær bevisst i valg av oppgaver*. Hentet fra Udir: https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/regning/god-regneopplaring/2.-var-bevisst-i-valg-av-oppgaver/

Utdanningsdirektoratet. (2020, Februar 4). *Kjerneelement*. Hentet fra Udir: https://www.udir.no/lk20/mat01-05/om-faget/kjerneelementer

Walton, D. N. (1990, August). What is reasoning? What is an argument? *Journal of Philosophy, 87(8)*, ss. 399-419.

Widding, L. Ø. (2005). *Case som metode: Hovedutfordringer knyttet til ulike forskningsdesign når hensikten er å generalisere.* Bodø: Handelshøgskolen i Bodø.

Yumiati, M. N. (2017). Abilities of reasoning and mathematics representation on guided inquiry learning. *Journal of Education and Learning, 11(3)*, ss. 283-290.

Vedlegg

Vedlegg 1: Informasjonsskriv

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet
«Å begrunne sine egne svar i matematikk»

I dette skrivet informerer vi om innholdet i prosjektet og hva det innebærer for deres barn å delta. Det er forskere og masterstudenter ved Høgskulen på Vestlandet (HVL) som gjennomfører prosjektet. Studien er knyttet til forskningsprosjektet LATACME. Utvalgte elever i 7. trinn blir spurt om å delta.

Bakgrunn og formål
Studiet har som formål å erverve ny kunnskap om resonnement og argumentasjon hos elever på mellomtrinnet. Det vil være særlig fokus på hvordan elever arbeider med problemløsningsoppgaver. Vi vil se nærmere på elevers og lærers rolle innad i oppgavene.

Dette prosjektet er ment for å heve lærerstudenters kompetanse i å legge til rette for matematikkundervisning for elever i flerspråklige klasserom på barneskolen. Prosjektet varer i fire år, og baserer seg på samarbeid mellom lærerutdannere, lærerstudenter, lærere og elever. Prosjektgruppen består av masterstudenter, PhD-studenter og tilsatte ved HVL som arbeider med matematikkundervisning, og prosjektet har nasjonale og internasjonale samarbeidspartnere. Det er medlemmer fra prosjektgruppen som samler inn data - i dette tilfelle tre masterstudenter.

Hva innebærer det å delta?
Deltagelse innebærer at noen undervisningstimer eleven deltar i vil bli observert og dokumentert ved lydopptak. Noen elever kan bli intervjuet om undervisningen som fant sted. Etter samtykke kan også skriftlige elevarbeid bli samlet inn. Deltakelsen går ikke ut over opplæringen på skolen.

Personvern - Hva skjer med opplysningene?
Alle personopplysninger blir behandlet konfidensielt. Kun forskere tilknyttet prosjektet har tilgang til datamateriale. Datamaterialet skal kun benyttes i forskningssammenheng. I forskningspublikasjoner vil det kun opplyses om elevenes klassetrinn. Det vil også inkludere kopier av skriftlig elevmateriell, og transkripsjoner av samtaler i klasserom og av intervju. Alle personopplysninger vil være **fullt anonymisert**, og kan ikke spores tilbake til hverken [redacted] skole eller enkeltpersoner.

Prosjektet, inkludert arbeid med publikasjoner, skal etter planen avsluttet 1. august 2020. Eventuelt datamateriale som lagres etter dette tidspunktet vil være anonymisert og ikke inneholde personopplysninger.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn.
Dersom du trekker deg underveis, vil innsamlet data bli slettet. Barnet vil ikke være med på videre datainnsamling. Dersom barnet ditt uttrykker et ønske om å ikke delta, vil det ansees som at samtykket er trukket.

Det blir ikke konsekvenser for de barna som ikke ønsker å være med på studien. Barnas forhold til lærer, skole og undervisning vil ikke bli påvirket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Har du spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Masterstudenter:
  Thea Trengereid på epost: thea.trengereid@gmail.com
  Richard Børven på epost: richard.borven@gmail.com
  Jonas Ramon Bernales på epost: jonas.bernales@hotmail.com
- Ansvarlig for prosjektet ved Høgskulen på Vestlandet: Tamsin Meaney,
  Epost: Tamsin.Jillian.Meaney@hvl.no
- HVLs personvernombud: Advokat Halfdan Mellbye, personvernombud@hvl.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller
  telefon: 55 58 21 17.

Samtykke til deltakelse i forskningsprosjektet «Å begrunne sine egne svar i matematikken»

Jeg har mottatt informasjon om forskningsprosjektet «Å begrunne sine egne svar i matematikken», og samtykker i at mitt barn kan delta i studien.

(Signert av foresatt/forelder, dato)

(Navn på barn)

Det er mulighet til å delta i studien, men reservere seg mot deler av datainnsamlingen:

Jeg samtykker i at mitt barn inngår på lydopptak

☐Ja ☐Nei

Vedlegg 2: Beinoppgave

Noa så 12 ben som gikk ombord i arken.
Hvor mange dyr kan han ha sett?

Hvor mange forskjellige svar kan du finne?
Kan du forklare hvordan du kom fram til de forskjellige svarene?

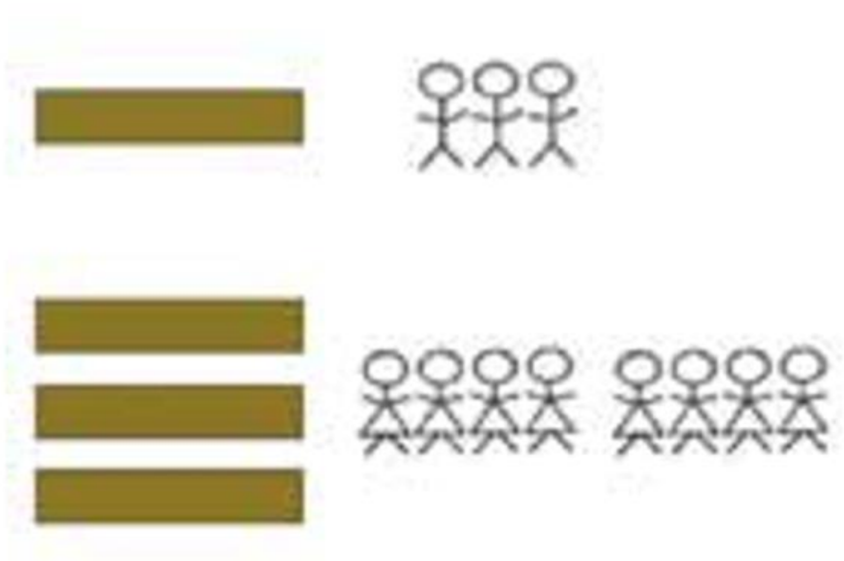
Vedlegg 3: Kakeoppgave

Thomas er lærer på sjette trinn, og klassen skal arbeide med følgende oppgave:

Hvis guttene deler en sjokoladekake likt,

og jentene deler sine tre sjokoladekaker likt.

Hvem får mest? En jente eller en gutt? Hvor mye mer?



Noa så 12 ben som gikk ombord i arken.
Hvor mange dyr kan han ha sett?

Hvor mange forskjellige svar kan du finne?
Kan du forklare hvordan du kom fram til de forskjellige svarene?

Forespørsel om deltakelse i forskningsprosjektet
«Å begrunne sine egne svar i matematikk»

I dette skrivet informerer vi om innholdet i prosjektet og hva det innebærer for deres barn å delta. Det er forskere og masterstudenter ved Høgskulen på Vestlandet (HVL) som gjennomfører prosjektet. Studien er knyttet til forskningsprosjektet LATACME. Utvalgte elever i 7. trinn blir spurt om å delta.

Bakgrunn og formål
Studiet har som formål å erverve ny kunnskap om resonnement og argumentasjon hos elever på mellomtrinnet. Det vil være særlig fokus på hvordan elever arbeider med problemløsningsoppgaver. Vi vil se nærmere på elevers og lærers rolle innad i oppgavene.

Dette prosjektet er ment for å heve lærerstudenters kompetanse i å legge til rette for matematikkundervisning for elever i flerspråklige klasserom på barneskolen. Prosjektet varer i fire år, og baserer seg på samarbeid mellom lærerutdannere, lærerstudenter, lærere og elever. Prosjektgruppen består av masterstudenter, PhD-studenter og tilsatte ved HVL som arbeider med matematikkundervisning, og prosjektet har nasjonale og internasjonale samarbeidspartnere. Det er medlemmer fra prosjektgruppen som samler inn data - i dette tilfelle tre masterstudenter.

Hva innebærer det å delta?
Deltagelse innebærer at noen undervisningstimer eleven deltar i vil bli observert og dokumentert ved lydopptak. Noen elever kan bli intervjuet om undervisningen som fant sted. Etter samtykke kan også skriftlige elevarbeid bli samlet inn. Deltakelsen går ikke ut over opplæringen på skolen.

Personvern - Hva skjer med opplysningene?
Alle personopplysninger blir behandlet konfidensielt. Kun forskere tilknyttet prosjektet har tilgang til datamateriale. Datamaterialet skal kun benyttes i forskningssammenheng. I forskningspublikasjoner vil det kun opplyses om elevenes klassetrinn. Det vil også inkludere kopier av skriftlig elevmateriell, og transkripsjoner av samtaler i klasserom og av intervju. Alle personopplysninger vil være **fullt anonymisert**, og kan ikke spores tilbake til hverken [redacted] skole eller enkeltpersoner.

Prosjektet, inkludert arbeid med publikasjoner, skal etter planen avsluttet 1. august 2020. Eventuelt datamateriale som lagres etter dette tidspunktet vil være anonymisert og ikke inneholde personopplysninger.

Frivillig deltakelse
Det er frivillig å delta i studien, og du kan når som helst trekke ditt samtykke uten å oppgi noen grunn.
Dersom du trekker deg underveis, vil innsamlet data bli slettet. Barnet vil ikke være med på videre datainnsamling. Dersom barnet ditt uttrykker et ønske om å ikke delta, vil det ansees som at samtykket er trukket.

Det blir ikke konsekvenser for de barna som ikke ønsker å være med på studien. Barnas forhold til lærer, skole og undervisning vil ikke bli påvirket.

Hvor kan jeg finne ut mer?
Har du spørsmål til studien, eller ønsker å benytte deg av dine rettigheter, ta kontakt med:

- Masterstudenter:
  Thea Trengereid på epost: thea.trengereid@gmail.com
  Richard Børven på epost: richard.borven@gmail.com
  Jonas Ramon Bernales på epost: jonas.bernales@hotmail.com
- Ansvarlig for prosjektet ved Høgskulen på Vestlandet: Tamsin Meaney,
  Epost: Tamsin.Jillian.Meaney@hvl.no
- HVLs personvernombud: Advokat Halfdan Mellbye, personvernombud@hvl.no
- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS, på epost (personverntjenester@nsd.no) eller
  telefon: 55 58 21 17.

Samtykke til deltakelse i forskningsprosjektet «Å begrunne sine egne svar i matematikken»

Jeg har mottatt informasjon om forskningsprosjektet «Å begrunne sine egne svar i matematikken», og samtykker i at mitt barn kan delta i studien.

(Signert av foresatt/forelder, dato)

(Navn på barn)

Det er mulighet til å delta i studien, men reservere seg mot deler av datainnsamlingen:

Jeg samtykker i at mitt barn inngår på lydopptak

☐Ja ☐Nei

Kakeoppgave

Thomas er lærer på sjette trinn, og klassen skal arbeide med følgende oppgave:

Hvis guttene deler en sjokoladekake likt,

og jentene deler sine tre sjokoladekaker likt.

Hvem får mest? En jente eller en gutt? Hvor mye mer?