Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge

Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?

Tom Rune Kongelf

Matematisk innhold og matematiske metoder i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge

Gullgruve eller fallgruve for utvikling av matematisk kompetanse i problemløsning og algebra?

Avhandling for graden philosophiae doctor (ph.d.)

Universitetet i Agder
Fakultet for teknologi og realfag
2019

Doktoravhandlinger ved Universitetet i Agder 241

ISSN: 1504-9272
ISBN: 978-82-7117-941-0

Trykk: 07Media, Kristiansand

Forord

Interessen min for algebra spesielt og problemløsing generelt strekker seg tilbake til ungdomsskolen i Sogndal på slutten av 1980-tallet. Allerede da gjorde det et stort inntrykk å se medelever slite med å løse matematikkoppgaver. Gjennom matematikkutdanningen min på videregående skole og lærerutdanningen i Sogndal forsterket dette inntrykket seg, og jeg bestemte meg for å ta til på hovedfagsstudiet i matematikkdidaktikk i Kristiansand i 1998. Ett av forskningsprosjektene på hovedfagsstudiet stammer fra et arbeid, innenfor det som ble kalt Mathematics Education Research Group, med tittelen «Skyldes elevvanskelighetene i algebra algebraens vesen og/eller undervisningsmåten?» (Johansen, 2000). I perioden 2001–2004 ble jeg stadig påminnet om norske studenters mangelfulle kunnskaper i problemløsning og algebra gjennom engasjementet som høyskolens representant i Norsk matematikkråd. I undervisningssammenheng har jeg brukt mye tid på å diskutere med matematikklærerstudenter hvordan forskjellige lærebøker presenterer matematiske begreper, emner, løsningsmetoder og oppgaver. I 2006 gav jeg sammen med to kollegaer ut en lærebok for det obligatoriske kurset i matematikk på lærerutdanningen (Bjørnestad, Myklebust & Kongelf, 2006). Andre utgave av boken kom i 2013 (Bjørnestad, Myklebust & Kongelf, 2013) og var tilpasset overgangen fra allmennlærerutdanningen til grunnskolelærerutdanningene 1–7 og 5–10. I begge utgavene har jeg skrevet om algebra og problemløsning. I 2006 ble jeg invitert av professor Barbro Grevholm til et tredagersseminar i Kristiansand om lærebøker i regi av Nordic Graduate School in Mathematics Education (NoGSME). Der ble jeg kjent med internasjonale lærebokforskere som B. Pepin og L. Haggert, foruten for B. Grevholm. Dette seminaret ble avgjørende for mitt videre engasjement om lærebøker, som etter hvert endte i en prosjektbeskrivelse og starten på doktorgradsprosjektet mitt tilknyttet den daværende Høyskolen i Agder, nå Universitetet i Agder.

Doktorgradsarbeidet mitt er bekostet av et stipend gitt av det som tidligere het Høgskulen i Sogn og Fjordane. Jeg vil takke for tildelingen, i tillegg til å takke NoGSME for deres sommer- og vinterskoler, og Network for Research on Mathematics Textbooks for deres støtte til presentasjoner og publiseringsmuligheter. I arbeidet med doktorgradsprosjektet har jeg dratt nytte av gode kollegaer i matematikkdidaktikkmiljøet rundt om i Norge. Jeg vil takke alle kollegaene på doktorgradskursene ved Universitet i Agder, både kursholdere, administrativt ansatte og medstudenter, for uvurderlige bidrag. Den samme takken går til opponenten min og deltakerne på 90%-seminaret.

Jeg ønsker også å takke ansatte i Kunnskapsdepartementet og Utdanningsdirektoratet for deres interesse i forskningen min, samt redaktører og reviewere i tidsskriftene NOMAD og FoU i praksis. I tillegg vil jeg rette en takk til NRK og ‘forskning.no’ som har formidlet funn fra studien min. En stor takk går også til mine gode kollegaer på Høgskulen på Vestlandet, som uavhengig av fagfelt har bidratt på ulike måter i doktorgradsarbeidet. Prosjektet hadde ikke blitt til det det er i dag hadde det ikke vært for veilederen min professor emerita Barbro Grevholm. Hennes kunnskap, engasjement og vennskap har betydd, og betyr fortsatt, mye for meg.

Til slutt vil jeg takke familien min. Takk til mamma og pappa som helt fra barndommen av har lagt forholdene til rette slik at jeg har kunnet arbeide systematisk med matematikk. Tusen takk til kona mi, Kari, som alltid er der for meg og barna. Takk til Henrik, Kristian, David og Maria for at dere har gitt pappa mange gode opplevelser i utfordrende tider. Takk også til venner og andre i familien som har hjulpet meg på veien frem mot målet.

Sammendrag

Formålet med avhandlingen er å undersøke hvordan lærebøker i matematikk behandler problemløsning og algebra, avgrenset til heuristiske tilnærmingsmåter og introduksjonen av algebra. Studien består av tre deler og fokuserer på matematiske metoder og matematisk innhold i seks lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge.

Først undersøker jeg hvordan lærebøkene behandler ni velkjente heuristiske tilnærmingsmåter ved å studere eksemplene og deres løsningsmetoder. Deretter blir introduksjonen av algebra studert i to deler. Den første tar for seg teksten og eksemplene som forfatterne anvender, og i den andre studeres oppgavene som lærebøkene tilbyr elevene.

Metodene som benyttes er innholdsanalyser der gjentatte og dyptgående studier av teksten, eksemplene og oppgavene muliggjør kategoriseringer av de matematiske metodene og det matematiske innholdet. I analysen om problemløsningsmetodene, er metoden deduktiv og basert på forhåndsdefinerte kategorier basert på tidligere forskning og teori. I de to analysene av algebra er metoden induktiv og kategoriene opprettes gradvis etterhvert som lærebøkene gjennomarbeides. Analysene i doktorgradsstudien baseres på tidligere forskning om lærebøker i matematikk, problemløsning, introduksjon av algebra i tillegg til oppgaver og eksempler. Det gis også en grundig analyse av hva de store internasjonale studiene om prestasjoner i matematikk, som TIMSS og PISA, viser for Norges del.

I første del av studien søker jeg svar på spørsmålet om hva som karakteriserer de heuristiske tilnærmingsmåtene i seks matematikklærebøker for 9. klasse i Norge. I del to forsøker jeg å svare på spørsmålet om hva som karakteriserer introduksjonskapitlet i algebra i fem lærebøker for 8. klasse og én for 9. klasse. I del tre gransker jeg hvordan algebra introduseres ved å studere de tilhørende elevoppgavene i fire av de fem lærebøkene for 8. klasse og den for 9. klasse.

Funnene viser at selv de enkle og tradisjonelle oppgavene inneholder ingredienser fra de ni problemløsningsmetodene som ble undersøkt. Dette er et overraskende funn ettersom internasjonale forskere hevder at de fleste rutinemessige oppgaver kan løses uten bruk av heuristiske tilnærmingsmåter. På samme måte er det overraskende at flere av metodene så å si er fraværende i lærebøkene. Det gjelder for eksempel metodene kalt ‘gjett og sjekk’ og ‘se etter mønster’. I de 740 eksemplene som analyseres, benyttes heuristiske tilnærmingsmåter 1170 ganger. Den mest anvendte metoden er ‘del opp problemet’ og dernest ‘bruke en visualisering’. Til tross for mange anvendelser av enkelte heuristiske tilnærmingsmåter beskrives ikke metodene i lærebøkene og de navngir dem

ikke. Det står i kontrast til det som anbefales av internasjonale forskere og det som skjer i lærebøker fra enkelte andre land.

I delstudie to konstateres det at introduksjonen til algebra presenteres på ulike nivå i lærebøkene, trinn 8 eller trinn 9, og presenteres på alt fra 24 til 114 sider. Det etterlyses samsvar mellom lærebøkenes fremstilling av emnet og læreplanens intensjon med å knytte tall og algebra sammen i ett hovedområde. Algebraen generaliserer tallæren i liten grad og mønster brukes ikke som introduksjon til variabelbegrepet. Lærebøkene har et manipulasjonsfokus og de benytter i liten grad elevenes kunnskaper om tall i forklaringer om hvordan en kan manipulere med algebraiske uttrykk. Algebraen fremstår som et isolert emne og inntrykket er at forkortede skrive- og utregningsmåter innføres for tidlig i lærebøkene.

I delstudie tre undersøkes 2547 oppgaver i algebra fordelt på fem lærebøker. Den dominerende oppgavetypen omhandler algebraiske uttrykk, som er én av fem hovedkategorier av oppgaver. Hovedkategoriene forgreiner seg i 41 underkategorier, og det viser seg at lærebøkenes fordeling av oppgavetyper varierer relativt mye blant underkategoriene og lite blant hovedkategoriene. Den dominerende hovedkategorien omhandler algebraiske uttrykk og har fire underkategorier i første forgrening. Den preges av manipulasjonsoppgaver i form av enkel regning med algebraiske uttrykk og innsetting av verdier i slike. Den viser også at det er få oppgaver om mønster som grunnlag for generaliseringer, og disse blir ikke brukt som introduksjon til variabelbegrepet.

En kritisk diskusjon om kvaliteten på doktorgradsarbeidet beskrives også, i tillegg til refleksjoner om hva studien tilfører av ny kunnskap.

Abstract

The aim of the thesis is to investigate how mathematics textbooks treat problem-solving and algebra, limited to the heuristic approaches in problem-solving and the introduction of algebra. The study consists of three parts and focuses on mathematical methods and mathematical content in six textbooks used in lower secondary school in Norway. First, I explore how the textbooks deal with nine well-known heuristic approaches by studying the examples and their solution methods. Subsequently the introduction of algebra is studied in two parts. The first one deals with the text and the examples, and in the second part, I study the tasks that are provided to the pupils in the textbooks.

The methods used are all within content analysis where repeated and deep studies of the text, the examples and the tasks make it possible to categorize the mathematical methods and the mathematical content. In the first part about problem-solving methods, the content analysis is deductive and based on pre-defined categories building on earlier research and theory. In the analysis of algebra, the method is inductive, and the categories are created in the process of examining the textbooks. The analyses are based on earlier research about mathematics textbooks, problem-solving, introduction of algebra, in addition to tasks and examples. I present a thorough analysis of what the large international studies on achievement in mathematics, TIMSS and PISA, are showing when it comes to Norwegian pupils.

In the first part of the study, I seek answers to the question regarding what characterizes the heuristic approaches in six mathematics textbooks for year 9 in Norway. In part two, I try to answer the question about what characterizes the introductory chapter in algebra in five textbooks for year 8 and one for year 9. Finally, in the third part, I explore how algebra is introduced by investigating the corresponding tasks in four out of five of the textbooks for year 8 and the one for year 9.

The findings show that even the simple and traditional tasks contain ingredients from the nine problem-solving methods that were explored. This is a surprising result, as international researchers claim that most routine tasks can be solved without the use of heuristic approaches. In the same way, it is surprising that several of the methods are absent in the textbooks. This is for instance the case for the methods labelled as ‘guess and check’ and ‘look for a pattern’. In the 740 examples that are analyzed, heuristic approaches are used 1170 times. The most used method is ‘solve part of the problem’, in addition to ‘make a visualisation’. Despite of frequent use of the individual heuristic approaches, the methods are not described in the textbooks and the books do not present the methods with names. This is contradictory to the recommendations

by international researchers and what is common in textbooks from some other countries.

In part two of the study, it is shown that the introduction of algebra is presented at different levels, year 8 or 9, and exposed on space ranging from 24 to 114 pages in the books. The correspondence between the textbooks and the intention of the curriculum that number and algebra should be linked is sought for. Algebra generalizes arithmetic and numbers to a low degree and few tasks use patterns to create a need for introducing letters as symbols for variables. The textbooks have a focus on manipulation, and barely make use of the pupils' knowledge about numbers in explanations on how one can manipulate algebraic expressions. Algebra appears as an isolated topic and the impression is that compressed algebraic ways of writing and calculating are introduced too early in the books.

In part three of the study, I analyse 2547 tasks in algebra, distributed over five textbooks. The dominating type of task deals with algebraic expressions, which is one of five main categories of tasks. The main categories split into 41 sub-categories, and I show that the variation in the textbooks is relatively high when it comes to the distribution of the types of tasks among the sub-categories, but not when it comes to the main categories. The dominating main category is about algebraic expressions and has four subcategories at the first level. The typical situation is manipulation tasks in the form of simple calculation with algebraic expressions and inserting values for the variables in such expressions. Few tasks are using patterns as basis for generalization, and they are not used as an introduction to the concept of variable.

A critical discussion on the quality of the doctoral work is also described, in addition to reflections on the new knowledge of which the study contributes.

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Helt siden 'PISA-sjokket' den 4. desember 2001 har Norge hatt et sterkt skolepolitisk realfagsfokus. Enhver minister etter dette har snakket om Norges realfagskrise. Først dro daværende utdannings- og forsknings-minister for Bondevik-II regjeringen, Kristin Clement, i gang satsingen 'Realfag, naturligvis' i 2002 (Utdannings- og forskningsdepartementet, 2002). I 2006 igangsatte Stoltenberg II-regjeringen, og kunnskapsminister Øystein Djupedal, 'Et felles løft for realfag' (Kunnskapsdepartementet, 2006), og i 2010 kom kunnskapsminister Kristin Halvorsen med 'Realfag for framtida' (Kunnskapsdepartementet, 2010). I 2015 la Solberg-regjeringen, og kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksen, frem 'Tett på realfag' (Kunnskapsdepartementet, 2015). I disse satsingene har det helt frem til sistnevnte vært lite fokus på læreboken i matematikk. I tillegg er det utført minimalt med forskning innenfor lærebokfeltet i Norge, til tross for lærebokens sterke posisjon i klasserommet.

Lærebokens sentrale rolle i matematikk er et verdensomspennende fenomen (Li, Chen & An, 2009), men den er ifølge Schmidt, McKnight, Valverde, Houang og Wiley (1996) særlig fremtredende i Norge. Lærebokens betydelige posisjon her i landet understrekes også av Alseth, Breiteig og Brekke (2003) og Utdanningsdirektoratet (2005a). Lærebøker i matematikk er en viktig del av Kunnskapsdepartementets pågående realfagsstrategi for 2015–2019 (Kunnskapsdepartementet, 2015) hvor blant annet Utdanningsdirektoratet har utviklet et sett med kvalitetskriterier for læremidler i matematikk. Bakgrunnen for oppdraget er Meld. St. 28 (2015-2016) som etterlyser tiltak som kan gjøre skoleledere og lærere mer bevisste i sin vurdering av læremidlenes kvaliteter frem mot ny læreplan i 2020.

Elevene i grunnskolen bruker mye av tiden i klasserommet til å arbeide med forberedt stoff som lærebøker, oppgaveark og informasjon og kommunikasjonsteknologi. Norske elever arbeider mye alene med oppgaver i lærebøkene og forklarer svarene sine lite (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turnmo, 2004; Danielsen, Skaar & Skaalevik, 2007; Grønmo & Onstad, 2009). Lærere støtter seg mye på lærebøker i deres daglige undervisning, og de definerer i stor grad hva som skal undervises og hvilke oppgaver som skal gjøres (Askew, Hodgen, Hossain & Bretscher, 2010; Lepik, Grevholm & Viholainen, 2015; Pepin & Haggerty, 2001, 2002; Schmidt m.fl., 2001).

Den nasjonale forskningen på ulike praksiser i klasserommet de siste 15 årene viser at fordelingen mellom praksisene har holdt seg relativt stabil, og at matematikk fortsatt er et fag preget av helklasseundervisning og individuelt arbeid (Gilje m.fl., 2016; Haug, 2012; Hodgson, Rønning & Tomlinson, 2012; Klette 2003; Klette m.fl., 2008). Gilje m.fl. (2016,

s. 68) har sammenfattet det slik: «Det er rimelig å anta at vanlig praksis er at læreren først forklarer på tavla i plenum, før elevene går over til å bruke lærebok, oppgavehefte og kladdebok når de skal jobbe med oppgaver.» I et slikt læringsmiljø er det nærliggende å anta at læreboken og dens innhold og metoder spiller en sentral rolle. Pepin, Gueudet og Trouche (2013) uttrykker at læreboken er det mest sentrale bindeleddet mellom kompetansemålene i læreplanen og de pedagogiske praksisene i skolen, mens andre (Jablonka & Johansson, 2010) mener at læreboken mer eller mindre erstatter læreplanen og får rollen som den implementerte læreplanen (Goodlad m.fl., 1979; Schmidt m.fl., 2001). Studier viser at lærere følger progresjonen og innholdet i læreboken i den tro at det vil sikre dem å følge læreplanen og en effektiv undervisning (Thomson & Fleming, 2004; Vincent & Stacey, 2008). Det betyr at hva, hvordan og hvor mye som presenteres i lærebøkene kan antas å påvirke lærerens undervisning og elevens læring.

I den opprinnelige prosjektbeskrivelsen hadde jeg tenkt å foreta en komparativ analyse av fire læreverk med hovedvekt på algebra. Tre av disse skulle være fra Norge og ett fra Singapore. Singapore var tiltenkt på grunn av deres høyt rangerte posisjon i PISA og TIMSS, deres vektlegging av problemløsning som kjernen i matematikkfaget (Ministry of education , 2007) og fokuset på generaliseringer og mønster i algebra (Kendel & Stacey, 2004; Sutherland, 2002, 2004). Etter hvert som jeg startet på doktorgradsarbeidet og begynte å se på lærebøker fra Norge, ble jeg mer og mer overbevist om at det var innholdet i disse jeg ville bruke tiden min på, siden en sammenligning med Singapore kunne by på forskningsmessige utfordringer som ulik kultur og levesett, samt forskjeller i læreplaner og landenes ulike praksis med hensyn til statlige godkjenninger av lærebøker. I tillegg er skoleorganisering, progresjon, mengde, målformuleringer og matematikkundervisning i stor grad kulturelt betinget (English & Sriraman, 2010).

Temaet for avhandlingen er lærebøker i matematikk brukt på ungdomstrinnet i Norge: Hvilken rolle har problemløsning i lærebøkene, hvordan introduseres algebra og hva karakteriserer algebraoppgavene? For å sette dette inn i en større sammenheng har jeg også vurdert hvordan lærebøkene samsvarer med læreplanverket og hvordan rammeverket for læreplanen samsvarer med rammeverkene til TIMSS og PISA. De matematiske emnene i doktorgradsstudien er algebra og problemløsning.

Motivasjonen for å studere algebra har røtter tilbake til egen ungdomsskolegang, men det er nærmere 20 års erfaring med lærerstudenter som strever med emnet, i tillegg til grunnskoleelever som presterer svakt på nasjonale og internasjonale tester, som har vært hovedmotivasjonen bak forskningsarbeidet. Siden 1995 har svake norske elevprestasjoner på den internasjonale TIMSS-testen, som er en læreplanbasert undersøkelse, blitt forklart med at norske elever er blant de yngste i utvalget, men den siste TIMSS-rapporten uttrykker tydelig at det ikke kan være grunnen (Grønmo & Hole, 2017, s. 88). Norge har nå det største negative avviket i verden mellom algebraskåren og det generelle prestasjonsnivået. Jeg har valgt å avgrense algebraen til introduksjonen til emnet delvis på grunn av at overgangen fra aritmetikk til algebra inneholder matematikk-didaktiske utfordringer og delvis på grunn av algebraens store virkeområde og ulike roller, som begge er rammefaktorer som påvirker forfatternes prioriteringer, lærernes undervisning og elevenes muligheter for kompetanseutvikling. Et sitat fra Wheeler (1996, s. 325) er beskrivende for den valgte avgrensingen:

> That is, we want students of algebra to come to know how to use it to solve problems, to model situations, to handle functions, and to make generalizations. Choosing one of these as a starting point affects how the others can be reached.

Motivasjonen for å studere problemløsning stammer hovedsakelig fra en litteraturgjennomgang knyttet til et doktorgradskurs i problemløsning ved Universitet i Agder og svake norske matematikkprestasjoner i PISA. Den internasjonale PISA-testen er ikke en læreplanbasert undersøkelse av elevenes kunnskap, men det matematiske innholdet samsvarer allikevel i høy grad med den norske læreplanen. PISA-rammeverket tar utgangspunkt i hva ledende matematikkdidaktikere mener er viktig kompetanse for utdanning, yrkesliv og deltakelse i samfunnet og består blant annet av tre problemløsningsprosesser. Det har vært problematisk å forklare de norske prestasjonene på PISA-testene fordi rammeverket i den og den norske læreplanen samsvarer godt. Men det betyr ikke at jeg har til hensikt å påvise en årsakssammenheng mellom lærebøkenes behandling av heuristiske tilnærmingsmåter og PISA, og tilsvarende mellom algebrainnholdet og norske prestasjoner på TIMSS. Ønsket mitt er å kunne bidra med ny kunnskap om rammevilkårene for elevenes utvikling av matematisk kompetanse innenfor algebra og problemløsning gjennom en karakteristikk av det matematiske innholdet og de matematiske metodene i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge. Sammenhengen mellom problemløsning og algebra kan eksemplifiseres ved å betrakte algebra som verktøy i problemløsning, og ved å se på problemløsningsheuristikker som løsningsmetoder i algebra. Jeg håper også at funnene mine kan bidra til at matematikkdidaktisk forskning i sterkere grad kan påvirke praksisene i skolen og bidra til å redusere ‘the research-practice gap’ (Silver & Lunsford, 2017). Den nye innsikten kan forfattere, lærere og skolepolitikere dra nytte av i sine respektive områder omhandlende matematisk kompetanseutvikling.

2 Forskningsspørsmål

Avhandlingen gir en beskrivelse av deler av det matematiske innholdet og de matematiske metodene i et bredt utvalg av lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge. Det matematiske innholdet er avgrenset til problemløsningsheuristikker og introduksjonen av algebra. De matematiske metodene omfatter både heuristikker og måter som lærebøkene benytter for å presentere fagstoffet på. Artikkelen knyttet til problemløsningsstudien, Kongelf (2011), er skrevet på engelsk hvor jeg bruker ordet 'heuristic approaches'. Jeg har valgt å oversette det til heuristiske tilnærmingsmåter. Kappen er skrevet på norsk og jeg vil bruke heuristikk, metode og tilnærmingsmåte om hverandre ut ifra konteksten ordene brukes i. Introduksjonen av algebra er analysert i to delstudier, definert som delstudie 2 og 3. Artiklene tilhørende hver av algebrastudiene er skrevet på norsk. Den første er basert på teksten og eksemplene i algebrakapitlene (Kongelf, 2015), mens den andre er basert på elevoppgavene i kapitlene (Kongelf, under revidering). Studien om heuristiske tilnærmingsmåter er basert på samtlige eksempler i lærebøkene, og definert som delstudie 1.

Den teoretiske rammen som jeg vil diskutere forskningsspørsmålene og funnene utfra, er beskrevet i kapittel 3. Her vil jeg med utgangspunkt i problemløsning og algebra presentere relevant forskning, litteratur og norske forhold knyttet til lærebøker, læreplaner og prestasjoner på internasjonale og nasjonale tester. Gitt lærebokens sentrale rolle i matematikk, gjør denne rammen meg i stand til å diskutere funnene i en skolekontekst som innbefatter matematikkdidaktisk forskning og litteratur, samt norske elevers prestasjoner på TIMSS og PISA. Det overgripende forskningsspørsmålet mitt er knyttet til hvilket matematisk innhold og hvilke metoder lærebøkene velger å gi algebra og problemløsning. En slik oversikt eksisterer ikke per i dag, så funnene vil kunne gi forfattere, lærere og politikere ny viten om lærebøker i matematikk som brukes på norske ungdomsskoler. Hvilket matematisk innhold og hvilke metoder som finnes i lærebøkene, antas å påvirke hva, hvordan og hvor mye elevene lærer.

2.1 Forskningsspørsmål i delstudie 1

Forskningsspørsmålet i den første delstudien, Kongelf (2011), har sitt utspring i et doktorgradskurs om problemløsning i matematikk. Alle deltakerne skulle skrive et vitenskapelig essay om problemløsning som en del av sertifiseringen i kurset, hvor av essayet mitt utviklet seg til å bli den første publiserte artikkelen i doktorgradsavhandlingen. Doktorgradsarbeidet mitt skulle handle om norske lærebøker i matematikk, og det ble derfor naturlig å knytte slike bøker opp mot innholdet i kurset, som blant annet tok for seg Polya sine velkjente heuristikker. I litteratursøket rundt problemløsning og lærebøker dukket det frem flere interessante forskningsarbeider fra Singapore, som etter hvert utgjorde en vesentlig del av motivasjon min for å undersøke norske lærebøkers behandling av problemløsning. Jeg ble spesielt inspirert av eksemplifiseringen av heuristiske problemløsningsmetoder i læreplaner fra Singapore og forskernes påvirkningskraft på lærebøkenes innhold og behandling av problemløsning (Zhu, 2003; Fan & Zhu, 2007a, Fan & Zhu 2007b).

Min egen erfaring med problemløsning frem til da var i stor grad knyttet til Polyas firetrinnsmodell for problemløsning, og i liten grad knyttet til Polyas heuristikker. Gitt matematikklæreboken sin sterke rolle i Norge, norske elevers svake prestasjoner på internasjonale tester, Singapore sitt fokus på problemløsning, og landets høye skår på PISA-testene, gjorde at jeg ville finne ut hvordan norske lærebøker presenterer problemløsning. Funnene kan gi forfattere, lærere og politikere ny innsikt i matematikklærebøkenes fremstilling av heuristiske tilnærmingsmåter.

I det vitenskapelige essayet analyserte jeg forekomsten av 17 ulike problemløsningsmetoder i fire læreverk på 9. trinn, Grunntall (Bakke & Bakke, 2007), Kode X (Christensen, 2007a, 2007b), Mega (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2007a, 2007b) og Tetra (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006b). Samtlige eksempler i 9. klassebøkene til læreverkene, totalt 433, ble kategorisert ut ifra de samme problemløsningsmetodene som Fan & Zhu (2007a) hadde benyttet. Disse 17 metodene ble etter hvert redusert til ni i den endelige og publiserte versjonen av studien min, hvor jeg analyserte seks læreverk på 9. trinn med følgende problemstilling: What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary school in Norway?

2.2 Forskningsspørsmål i delstudie 2

Forskningsspørsmålet i delstudie 2, Kongelf (2015), har røtter tilbake til tidligere nevnte forskningsarbeid om læring og undervisning i matematikk på hovedfagsstudiet (Johansen, 2000). I litteraturgjennomgangen av aktuelle algebraartikler ble jeg inspirert av blant annet Kieran (1990) og Sfard & Linchevski (1994) sine beskrivelser av kognitive prosesser i læringen av algebra. Også Booker (1987), Watson (1990), Costello (1990) og Mason (1996) sine tanker om algebra og generaliseringer, Putnam, Lesgold, Resnick & Sterett (1987) sine vektlegginger av forståelsen av algebraiske uttrykk og Mellin-Olsen (1994) sine tanker om prosedyreaspektet i matematikk, tente virkelig interessen for algebra. I min egen skolegang opplevde jeg til stadighet elever og studenter som strevde med algebra.

I 1995 deltok Norge for første gang i TIMSS, hvor de norske elevene på 7. trinn, tilsvarende 8. trinn i dag, skåret rett over gjennomsnittet, men likevel svakt i algebra. I perioden 2001–2004 ble jeg stadig påminnet om norske studenters mangelfulle kunnskaper i algebra som representant i Norsk matematikkråd. I undervisningssammenheng har jeg siden 2001 brukt tid på å sammen med lærerstudenter diskutere hvordan ulike lærebøker presenterer matematiske emner og begreper. Gjennom arbeidet med å skrive algebrakapitlet i læreboken Alfa (Bjørnestad m.fl., 2006, 2013), ble jeg ytterligere interessert i å gjøre en større vitenskapelig studie av hvordan lærebøker presenterer dette matematiske emnet. Med bakgrunn i norske elevers utpregete svake algebraresultater over tid og lærebokens betydelige rolle i norske klasserom, ønsker jeg å gi en karakteristikk av hvordan lærebøker i Norge introduserer algebra på ungdomstrinnet. Funnene gir innsikt i metoder og innhold i et bredt utvalg av matematikklærebøker. For å få til det har jeg analysert all tekst og alle eksemplene i algebrakapitlene, definert som delstudie 2 i avhandlingen. Problemstillingen er: Hva er karakteristisk for introduksjonskapitlet i algebra i seks lærebøker for ungdomstrinnet i Norge?

2.3 Forskningsspørsmål i delstudie 3

Undervisning og læring av matematikk i skolen er i stor grad organisert rundt elevenes arbeid med oppgaver (Hiebert m.fl., 2003; Shimizu, Kaur, Huang & Clark, 2010). Oppgavene påvirker hvordan elevene oppfatter matematikk generelt (Henningsen & Stein, 1997; Pepin, 2009) og emner spesielt (Hiebert m.fl., 1997). I tillegg kan oppgavene være med på å forsterke fremstillinger gjort tidligere i læreboken (Henningsen & Stein, 1997). En rekke forskere (Fan, 1999; Michael, 2002; Stigler, Fuson, Ham & Kim, 1986; Zhu & Fan, 2006) argumenterer for at både det totale antallet av oppgaver og hvor ofte de ulike oppgavetypene opptrer påvirker elevenes prestasjoner, men uttrykker samtidig at de ulike oppgavetypene er viktigere for prestasjonen enn totalantallet av oppgaver. Det kan bety at frekvensen av de ulike oppgavetypene påvirker den relative graden av elevvanskeligheter. Oppgavene er også med på å fokusere elevenes oppmerksomhet mot et bestemt matematisk innhold hvor de opptrer som en kontekst for læring både i og etter undervisning (Stein, Grover & Henningsen, 1996). Lærebokens rolle i Norge, organiseringen rundt elevenes arbeid med oppgaver, oppgavenes påvirkningskraft på elevenes syn på matematikk, samt svake norske algebraprestasjoner over tid gjør at en karakteristikk av oppgavetypene og fordelingen av disse kan bidra med ny viten knyttet til faktorer som kan antas å være viktige for utvikling av norske elevers kompetanse i algebra. Funnene kan være av interesse for lærere, forfattere og skolepolitikere som ønsker å se på ulike muligheter for å kunne forbedre norske prestasjoner i algebra. Oppgavene i fem lærebøker er analysert med utgangspunkt i følgende problemstilling: Hvordan introduseres algebra på ungdomstrinnet i

Norge? En kategorisering av oppgavetyper og deres fordeling i fem matematiklærebøker. Artikkelen om delstudie 3 er under revidering hos FoU i praksis.

Med de tre delspørsmålene fra hver sin delstudie forsøker jeg å svare mer helhetlig hva som karakterisere det matematiske innholdet og de matematiske metodene i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge avgrenset til heuristiske tilnærmingsmåter og introduksjon av algebra.

3 Teori

I dette kapitlet presenterer jeg det teoretiske fundamentet som arbeidet mitt hviler på. Det gjelder hovedsakelig nøkkelbegrepene som jeg fokuserer på i studien, som lærebøker, problem, problemløsning og heuristiske tilnærmingsmåter og algebra, i tillegg til betydningen av oppgaver og eksempler. Målet for arbeidet med lærebøkene, den matematiske kompetansen og de grunnleggende ferdighetene beskrives i læreplanene, og derfor belyses sider ved disse begrepene som ansees som vesentlige for studiens kontekst. De viktigste teoretiske rammene for matematisk kompetanse som den norske læreplanen hviler på, diskuteres i detalj. En gjennomgang og diskusjon av de norske prestasjonene på TIMSS og PISA, med vekt på algebra og problemløsning, presenteres fordi de gir en teoretisk bakgrunn for den rådende situasjonen som utgjør konteksten for studien min. En slik samlet diskusjon av norske prestasjoner i algebra og problemløsning har jeg ikke funnet i andre kilder.

3.1 Lærebøker

Med lærebok mener jeg den tradisjonelle fysiske klassetrinns-spesifikke boken som brukes til undervisning og læring av matematikk i skolen. I de siste tiårene har forskning på lærebøker fått økt oppmerksomhet internasjonalt. I Norden ble det utført relativt lite forskning på lærebøker i matematikk før Nordic Graduate School in Mathematics Education (NoGSME) initierte til 'the Network for research on mathematics textbooks in the Nordic and Baltic countries' i 2006. De første fem årene var det sjeldne og uregelmessige sammenkomster i nettverket på grunn av manglende økonomiske ressurser (Grevholm, 2011). I 2011 ble professor B. Grevholm tildelt midler etter søknad fra NordForsk til et utvidet og strukturert nettverk bestående av lærebokforskere fra Norden og de baltiske landene. Nettverket var aktivt frem til 2017 (Grevholm, 2017a).

Forskning på lærebøker i matematikk kan plasseres innenfor det store forskningsfelt som vi i Norge kaller matematikkdidaktikk. Den internasjonale matematikkdidaktikken har siden 1960-tallet utviklet seg mye både som kunnskapsområde og vitenskapsområde gjennom egne forskningstemaer og utviklingsprosjekt, professorat og doktorgradsprogram, vitenskapelige tidsskrift og konferanser. I 2004, på ICME-10 (10th International Congress on Mathematics Education), var temaet i en av diskusjonsgruppene (DG14) for første gang dedikert til lærebøker i matematikk (Fan, 2013). Veilande (2017) beskriver utviklingen i artiklene fra ICME-10 til ICME-12 som at en beveger seg fra selve innholdet i læreplanene til endringene i læreplanene og videre over til kvaliteten på lærebøkene tilhørende læreplanene. Veilande gir en skjematisk oversikt knyttet til de ulike fokusområder i paperene fra ICME-10, ICME-11 og

ICME-12, hvor hun todeler de som omhandler selve matematikklæreboken i ‘visible properties’ og ‘invisible properties’. Studien min inneholder elementer fra begge disse. Førstnevnte betegner egenskaper som matematisk innhold og mengde, mens ‘invisible properties’ inkluderer didaktiske aspekter og valg av oppgaver. Ifølge Grevholm (2017b) startet matematikkdidaktikken noe senere i Norden, men i dag rommer den likevel de viktigste sidene ved undervisning og læring av matematikk, inklusive lærebøker i matematikk.

Den internasjonale lærebokforskningen i matematikk er forsøkt sammenfattet av blant annet Fan (2013), og for Norden og Baltikum av Grevholm (2011, 2017b). En oversikt over metoder som er brukt i forskning om lærebøker i de nordiske landene er gitt av Rezat og Strässer (2017). Til tross for at forskning på lærebøker har fått økt oppmerksomhet internasjonalt de to siste tiårene (Schmidt m.fl., 1996), er lærebokforskning i matematikk fortsatt ikke fullt utviklet som forskningsfelt. Dets filosofiske fundament, teoretiske rammeverk og forskningsmetoder er ifølge Fan (2013) underutviklet sammenlignet med en rekke andre deler av matematikkdidaktikken. Lærebokforskning i matematikk utgjør en liten del av den internasjonale matematikkdidaktikken, men i Norden har det blitt gjennomført en del studier, inkludert doktorgradsstudien min. Rezat og Strässer (2017, s. 496) beskriver forskningen på lærebøker i matematikk som «a micro-cosmos of research in mathematics education», og tar utgangspunkt i et sosiodidaktisk tetraeder (Rezat & Strässer, 2012) når de tredeler denne forskningen. Forskningsområdene omhandler innflytelsen til læreboken, læreboken i seg selv og bruken av læreboken og dens innvirkning. Innenfor sistnevnte har Törnroos (2005) undersøkt sammenhenger mellom ulike typer av data knyttet til forskjellige sider ved elevers ‘muligheter-for-å lære’ og deres prestasjoner på TIMSS, hvor læreboken er en slik side. Studien til Törnroos (2005. s 315) viser at det spiller en rolle hvordan en måler ‘muligheter-for-å-lære’, og konkluderer med at «even a quite simple analysis of textbooks can produce valuable information when looking for explanations for student achievement in mathematics.» Senk, Thompson og Wernet (2014) undersøkte også slike sammenhenger og konkluderte med at læreboken var den sterkeste indikatoren på elevprestasjoner.

Doktorgradsstudien min kan plasseres innenfor Rezat & Strässer (2012) sitt andre forskningsområde, læreboken i seg selv, da det er det matematiske innholdet og de matematiske metodene i selve læreboken som er gjenstand for analyser. Deler av forskningsområdene som omhandler innflytelsen til læreboken, og bruken av den og dens innvirkning, benytter jeg som argumentasjon for å utføre innholdsanalyser av selve boken. Hovedargumentet her er at læreboken er det mest sentrale bindeleddet mellom kompetansemålene i læreplanen og de pedagogiske praksisene i skolen, og dermed må kunne antas å være en sentral brikke i elevens utvikling av matematisk kompetanse.

Studien min bidrar til den matematikkdidaktiske lærebokforskningen spesielt i Norden og de baltiske landene, hvor Bjarnadóttír, Christiansen og Lepik (2013) har sammenlignet aritmetikkbøker fra Norge, Island og Estland på 1800-tallet. Haggerty og Pepin (2017) har sett på elevers muligheter for læring med utgangspunkt i den mestselgende engelske læreboken. Österholm (2008) studerte elevers leseforståelse og bruk av lærebøker. Halldórsdóttír (2015) så på samsvaret mellom læreplaner og lærebøker på Island. Lepik m.fl. (2015) og Johansson (2006) studerte lærernes bruk av lærebøker. Viholainen, Partanen, Piiroinen, Asikainen og Hirvonen (2015) studerte i tillegg elevenes bruk av læreboken. Ahl, Koljonen, Gunnarsdóttír og Pálsdóttír (2015) sammenlignet lærerveiledninger fra Island og Sverige. Rensa og Grevholm (2015) studerte elevers syn på læreboken, og Veilande (2017) gav en karakteristikk av forandringene i ICME-papers fra ICME-10 til ICME-12.

I nordiske studier omhandlende læreboken i seg selv, er innholdsanalyser vanlig. Ved å studere formuleringene i M87 (KUF, 1987) og L97 (KUF, 1996), både i innledningen til matematikkdelen og i målformuleringen, ble fem fremtredende endringer fra forrige læreplan definert av Alseth m.fl. (2003). Ved å sammenligne det matematiske innholdet og elevoppgavene i lærebøker fra M87 (KUF, 1987) og lærebøker fra L97 (KUF, 1996) gjorde det Alseth m.fl. (2003) i stand til å konkludere med at endringene bare hadde skjedd innenfor geometri, og ikke innenfor algebra.

Jakobsson-Åhl (2006) studerte algebra i lærebøker for videregående skole i Sverige fra 1960 til 2000. Hun konsentrerte seg om innholdet i lærebøkene, inkludert definisjoner, beskrivelser, eksempler og oppgaver. Den algebraiske utviklingen i lærebøkene ble karakterisert gjennom tre perioder. Fra å være et separat skoleemne med fokus på manipulasjon (pre-New Math) via den moderne matematikken og abstrakt algebra (New Math) til mer fokus på likninger, numeriske eksempler og koblinger til tall (post-New Math).

Brändström (2005) analyserte graden av differensierte oppgaver i svenske lærebøker i 7. klasse ved å studere bruken av bilder, regneoperasjoner, kognitive prosesser og kognitive krav. De kognitive prosessene var inspirert av Blooms taksonomi (Bloom, 1956) og inneholdt verbene å memorisere, å forstå, å bruke, å analysere, å evaluere og å lage. De kognitive kravene ble analysert etter rammeverket til Stein og Smith (1998) og delt inn i fire, memorisering, prosedyrer med sammenheng til begrep, prosedyrer med ingen sammenheng og det å gjøre matematikk. Jeg valgte å ikke benytte et predefinert rammeverk i min oppgavestudie hovedsakelig på grunn av ønsket om å være mest mulig åpen i genereringen av oppgavetyper, i tillegg til at jeg ikke kjente til andre studier som hadde benyttet en slik induktiv tilnærming. Innenfor bruken av bilder viste Brändström (2005) at lærebøkene inneholdt flest bilder i de letteste oppgaveløypene, og at andelen av funksjonelle bilder var større dess lettere løypen var. Antall regneoperasjoner harmonerte med graden av kognitive krav. Den letteste oppgaveløypen innehold flest tilfeller av lave nivåer av kognitive prosesser og krav, men det var få oppgaver med høye kognitive utfordringer innenfor alle oppgaveløypene. Ett av hovedfunnene var at til tross for differensierte oppgaveløyper i lærebøkene, var de fleste oppgaver av lav vanskegrad. Blant andre nordiske forskere som har analysert lærebøker for 1.-10. klasse har Bjarnadóttir (2007) sett på tallene 1 og 0 i nordeuropeiske lærebøker, Keranto og Sarenius (2009) har analysert bruken av tallinjen i 1. og 2. klassebøker og i Norge har Randahl studert ingeniørstudenters bruk av lærebøker i kalkulus (Randahl & Grevholm, 2010).

3.2 Problemløsning, problem og heuristiske tilnærmingsmåter

Det har blitt utført relativt mye forskning knyttet til undervisning og læring av problemløsning i matematikk de siste 45 årene (Cai, 2010), og samlet sett har dette gitt vesentlig informasjon om affektive, kognitive og metakognitive sider ved problemløsning (Lesh & Zawojewski, 2007; Lester, 1994; Lester & Kehle, 2003; Schoenfeld, 1985) til tross for at det ikke eksisterer en felles forståelse av hva matematisk problemløsning er. En har heller ikke klart å enes om en definisjon av problemløsning avgrenset til skolen og matematikk-klasserommet. Schoenfeld (1992, s. 334) beskriver problemløsning som et felt som er «somewhat ill-defined and poorly grounded.» Hovedgrunnen til det er at begrepet problemløsning (problem-solving) har inneholdt ulike bestanddeler. Disse bestanddelene har Chamberlin (2008) skrevet om i sitt vitenskapelige forsøk på å komme frem til felles kriterier på hva problemløsning i matematikklasserommet er, ved å samle informasjon fra 22 problemløsningseksperter. Resultatene ble delt opp i to hoveddeler, problemløsning som prosess og problemløsning som karakteregenskaper. I førstnevnte er bestanddelene knyttet til hva som skal til for å løse problemet med hell. Problemløsning som karakteregenskaper handler om hva som er karakteristisk for problemløsningsaktiviteter. Ekspertgruppen var enige om 21 av totalt 38 bestanddeler, som kan stå som en illustrasjon på både rikholdigheten og mangelen på konsensus hva angår en allmenn definisjon på problemløsning. I delstudie 1 analyserer jeg en av mange bestanddeler som utgjør begrepet problemløsning ved å se på bruken av heuristiske tilnærmingsmåter i lærebøkene.

Det eksisterer ikke en komplett oversikt over forskningen som er gjort på problemløsning i matematikk. En av grunnene til det er at problemløsning er et komplekst felt som blant annet inkluderer matematisk innhold, strategier, tanke- og resonneringsprosesser, oppfatninger, følelser, i tillegg til kontekstuelle og kulturelle faktorer (English & Sriraman, 2010). Eksempelvis inkluderer lærebokens bruk av heuristiske tilnærmingsmåter av et, eller mer presist, flere typer av et matematisk innhold som berører leserens tanke- og resonneringsprosesser, oppfatninger og følelser. Det nærmeste en kommer en oversikt over forskningsfeltet er trolig Lesh og Zawojewskis (2007) problemløsningsstudie eller Törner, Schoenfeld & Reiss' (2007) samling av beskrivelser fra problemløsningseksperter og deres lands 'state of the art'. Andre grunner til manglende forskningsoversikt kan være at det er akkumulert lite kunnskap innenfor hver av bestanddelene av problemløsning, samt manglende teoriutvikling og tilhørende implikasjoner for klasserommet. Sistnevnte har jeg et ønske om kunne bidra med gjennom en tydelig formidling av forskningsresultatene, diskusjoner av funnene i en undervisning- og læringskontekst, og eksemplifiseringer på hvordan lærebøkene kan legge til rette for utvikling av kompetanse i problemløsning (Kongelf, 2011, s. 33). Den mangelfulle akkumulerte kunnskapen kan også forklares ved at skoleorganisering, progresjon, mengde, målformulering og matematikkundervisning i stor grad er kulturelt betinget (English & Sriraman, 2010).

I den gjeldende norske læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2005b, s. 1) uttrykkes det at: «Matematisk kompetanse innebærer å bruke problemløsning og modellering til å analysere og omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere gyldigheten av løsningen.» Stanic og Kilpatrick (1989) beskriver tre ulike roller og bruk av problemløsning i læreplaner. Disse er problemløsning som kontekst, ferdighet og kunst, der sitatet over kan tolkes til å omhandle ferdighetsaspektet når det uttrykkes at en skal bruke problemløsning til å analysere og omforme problemet, samt løse det og vurdere løsningen. I motsetning til kontekstaspektet innebærer ferdighetsaspektet at problemløsning er et mål i seg selv, hvor en eksempelvis underviser i og arbeider med heuristiske tilnærmingsmåter i oppgavesammenheng. Problemløsning som kunst stammer fra Polya som sammenlignet det med å spille piano, som han mente var mulig å lære gjennom imitasjon og øvelse. Polya brukte begrepet 'plausible reasoning', oversatt til troverdig resonnement, tolket som ideer frem mot matematiske oppdagelser. Stanic og Kilpatrick (1989) diskuterer begrepet og uttrykker at dersom elevene skal lære seg 'plausible reasoning' må de bli lært hvordan, men advarer samtidig mot faren å kunne gjøre problemløsning som kunst om til problemløsning som ferdighet når en forsøker å implementere Polyas ideer og presentere disse i lærebøker. En annen utfordring ved implementering av Polyas heuristikker er deres deskriptive snarere enn normative natur (Schoenfeld, 1992). Det vil si at karakteriseringene av heuristikkene (Polya, 1945) gjør at en kan kjenne igjen metodene når de blir brukt, men karakteriseringene inneholder ikke nok detaljer til at personer som ikke allerede er kjent med heuristikkene kan implementere dem. Problemløsningens ulike roller og Polyas deskriptive heuristikker kan også ha medvirket til manglende akkumulert kunnskap.

Når det gjelder forskning på elevers problemløsning i matematikk ser en spor tilbake til 1930-tallet, men det var boken *How to solve it* (Polya, 1945) som var drivkraften bak mye av forskningen i tiårene etter. Ifølge Cai (2010) innbefatter denne forskningen blant annet problemløsningsstrategier og heuristikker (Charles & Lester, 1984), metakognitive prosesser (Lester, Garofalo & Kroll, 1989) og problemformuleringer (English, 2003). I senere tid har modellering (Doerr & English, 2006), tverrfaglig problemløsning (English, 2009) og neurovitenskap (Zhou m.fl., 2018) også fått sin plass. Forskningen har også fulgt pendelen mellom basisferdigheter og anvendt matematikk, og spenningen mellom det absolutistiske og det fallibilistiske synet på matematikk (Ernest, 1991).

Innenfor forskning på problemløsning i lærebøker har jeg spesielt latt meg inspirere av studier fra Øst-Asia. Studiene til Fan og Zhu (2007a), Zhu (2003) og Zhu og Fan (2006) er alle sammenligningsstudier av lærebøker og deres behandling av problemløsning, der de to første handler om lærebøker fra Kina, Singapore og USA, mens den tredje omhandler bøker fra Kina og USA. Studien til Fan og Zhu (2007a) var hovedinspirasjonskilden til problemløsningsstudien min. De tok for seg hvordan lærebøker fra de tre landene representerte 'problem-solving procedures'. Analysen av det de kaller problemløsningsprosedyrer ble gjort i to omganger, der den første inneholdt Polyas firetrinnsmodell, som de kalte for 'general strategies', og den andre inneholdt 17 heuristikker, kalt for 'special strategies'. I litteraturen om problemløsning benyttes det en relativt stor mengde av suffikser som inkluderer metode, strategi, prosedyre, modell, heuristikk, tilnærmingsmåte, teknikk og måte om hverandre. Jeg ønsker å klargjøre hvordan jeg bruker enkelte av disse suffiksene i studien min. Inspirert av Schoenfeld (1985) benytter jeg begrepet problemløsningsstrategi når det handler om en person som bevisst benytter seg av en eller flere problemløsningsmetoder. Problemløsningsstrategier kan tenkes å utvikles gjennom at problemløsningsmetoder benyttes over tid. Problemløsningsmetode har konnotasjoner spesielt til problemløsningsmåte, problemløsningsteknikk og heuristisk tilnærmingsmåte, men er også beslektet med begrepet heuristikk. De to sistnevnte skiller seg fra hverandre ved deres ulike grad av subjektivitet i deres tilstøtende definisjoner av hva som ansees som et problem.

Innen matematisk problemløsning bruker en å definere et problem som en situasjon hvor en søker en løsning, men ikke har noen umiddelbar måte å få det til på. Jeg benytter i likhet med forskere som Nibbelink m.fl. (1987) og Fan og Zhu (2007a) en definisjon som er mer egnet for analyser av lærebøker. Denne definisjonen tar ikke hensyn til om problemet lar seg løse umiddelbart eller ikke, den skiller ikke på vanskegrad eller type. Jeg definerer et problem som «a situation that requires a decision and/or answer, no matter if the approach of solution is readily available or not to the problem solver» (Kongelf, 2011, s. 11). Oversatt til norsk er et problem en situasjon som krever en avgjørelse og/eller løsning, uavhengig av om problemløseren har noen umiddelbar måte å få det til på. Med utgangspunkt i denne lærebokoperasjonelle definisjonen av problem, og inspirasjon fra Björkqvist (2003), definerer jeg heuristiske tilnærmingsmåter som «rules of thumb for successfully solving problems, general approaches that help an individual to understand a problem better and/or to make progress toward its solution» (Kongelf, 2011, s. 12). En norsk oversettelse er at heuristiske tilnærmingsmåter er tommelfingerregler for å kunne løse problemer med hell, generelle tilnærminger som hjelper personen til å forstå problemet bedre og/eller gjøre fremskritt i retning av løsningen. Definisjonen forsøker å ta hensyn til en problemdefinisjon som er tilrettelagt for lærebokanalyser, matematikknivået på ungdomstrinnet i Norge og Schoenfelds (1985, s. 44) definisjon av heuristikker à la Polya (1945). Problemløsningssuffikset modell benytter jeg om Polyas firetrinnsmodell, mens problemløsningsprosedyre benytter jeg ikke. For meg betyr det likevel mye av det samme som problemløsningsmetode. Fan og Zhu (2007a) benytter begrepet problemløsningsprosedyre som et overordnet begrep som inkluderer det de kaller generelle strategier og spesielle strategier. Bruken av ordet strategi står her i kontrast til Schoenfeld (1985) og hans ide om at metoder er noe som over tid kan utvikle seg til strategier hos en person. Det Fan og Zhu (2007a) betegner som generelle strategier tilsvarer Polyas firetrinnsmodell, og spesifikke strategier tilsvarer heuristikker, problemløsningsmetoder, problemløsningsmåter og heuristiske tilnærmingsmåter.

Hovedfunnene i Fan og Zhu viste at eksemplene nesten aldri inneholdt alle fire trinnene i Polyas modell, og at den største forskjellen mellom landene var i hvor stor grad lærebøkene presenterte det siste trinnet, å se tilbake. Det trinnet ble videre inndelt i tre underkategorier hvor en skilte mellom å se tilbake på originalproblemet, å se tilbake på problemløsningsstrategiene og å se tilbake med utgangspunkt i det endelige svaret. Når det gjaldt de 17 spesifikke problemløsningsstrategiene viste datamaterialet at 14 % av eksemplene i de kinesiske og i de singaporske lærebøkene og 26 % i de amerikanske ble løst ved hjelp av disse. Det forklarer de med at mange av eksemplene inneholdt tradisjonelle og rutinepregede oppgaver, som lett kunne bli løst uten å bruke spesifikke problemløsningsstrategier. Fan og Zhu (2007a) fant bruk av 11 av 17 strategier i de kinesiske bøkene, 16 i de singaporske og 14 i de amerikanske. Ni av disse 17 var felles for alle tre landene hvor det å 'lage en visualisering' av problemet, å 'bruke likninger' til å løse det og å 'omformulere problemet' opptrådte hyppigst. Til tross for at det å 'visualisere problemet' var den mest brukte i alle tre landene, var den over dobbelt så ofte representert i de amerikanske lærebøkene som i de kinesiske. Dette lærebokfunnet er, ifølge Fan og Zhu (2007a), konsistent med funnene til Cai (1995) og Brenner, Herman, Ho og Zimmerman (1999) om bruken av lærebøker, som viste at de amerikanske elevene foretrakk, i motsetning til de kinesiske, å bruke visualiseringer i problemløsning. Denne korrelasjonen mellom selve læreboken og bruken av den kan sees på som et eksempel på det tredje forskningsområdet, innflytelsen til læreboken, i Rezat og Strässer (2012) sitt sosiodidaktiske tetraeder.

Når det gjelder lærebokforskning på problemløsning i Norden har blant annet Brehmer, Ryve og Van Steenbrugge (2016) analysert fordelingen av problemløsningsoppgaver innenfor kalkulus i tre svenske lærebøker på videregående skole. De fant at problemløsningsoppgavene hovedsakelig var plassert til slutt i kapitlet, på det høyeste vanskegradsnivået og gitt i en ren matematisk kontekst. En konkluderte med at lærebøkene ikke vektla problemløsning som noe viktig, i tillegg til at innholdet i de ikke tilfredsstilte verken formuleringene i styringsdokumentene eller anbefalinger gitt av matematikkdidaktikere. Brehmer m.fl. etterlyser tiltak som gjør at alle elever, også de svake, kan få utvikle sin kompetanse i problemløsning, og foreslår at lærebøkene endres slik at de inneholder flere enkle problemløsningsoppgaver gitt i en appellerende kontekst som plasseres i starten på kapitlene.

Innenfor lærebokforskningen i Norge har blant annet Leer (2009), Harder (2013), Leistad (2016), Aaseth (2016) og Yan (2018) skrevet masteroppgaver om problemløsning. Leer (2009) viste at det ble gitt svært få problemløsningsoppgaver på eksamen i 10. klasse, mens Harder (2013) fant at bruken av problemløsningsmetoder i matematikklærebøker for videregående skole var svært begrenset, lite variert og utydelig. Leistad (2016) studerte hvordan en høytpresterende og en lavtpresterende gruppe med elever arbeidet med problemløsningsoppgaver. Funnene viste at den høytpresterende gruppen benyttet seg mest av problemløsningsstrategier. Aaseth (2016) sammenlignet norske og russiske lærebøker på videregående skole og fant at ingen av dem hadde noe generell innføring i problemløsning eller behandling av spesifikke problemløsningsheuristikker. Yan (2018) sammenlignet norske og kinesiske lærebøker på ungdomsskolen, og konkluderte med at de kinesiske matematikk-bøkene hadde en mer gjennomgående bruk av problemløsning. I tillegg fokuserte de kinesiske mye mer på Polyas (1945) firetrinnsmodell, hvor de spesielt vektla det første trinnet med å forstå problemet. Harder (2013), Aaseth (2016) og Yan (2018) benyttet alle rammeverket som jeg utarbeidet i forbindelse med problemløsningsstudien (Kongelf, 2011).

3.3 Algebra og skolealgebra

På grunn av forskjellige tolkninger og vektlegginger av algebraens historie og algebraens store bruksområde eksisterer det ikke en gjengs definisjon av algebra. Historiske beskrivelser av algebra (Lins, 1990; Kieran, 1996) som operasjonell symbolisme, tenkemåte, generalisert tallære og strukturer viser deler av dette. Førstnevnte inneholder blant annet de tre historiske formene for symbolbruk i algebra. I likhet med algebra er det ikke noen uttalt enighet om hva algebraisk tenkemåte er, men Charbonneau (1996), Kieran (1996, 2007), Lee (2001) samt Hodgen, Oldenburg og Strømskag (2018) behandler dette. Mason (1996) beskriver forbindelser mellom algebraisk tenkemåte og generalisert tallære når han hevder at en av de viktigste sidene ved algebraisk tenking er evnen til å kunne generalisere. Han går så langt som å uttrykke at dersom elevene blir vant med å generalisere fra starten av, vil algebra opphøre å være et problem. Algebra som generalisert tallære er et utbredt syn på læring og undervisning av elementær algebra i skolen (Lee, 2001), og som ifølge Wu (2001) handler om to ting, abstraksjon og generalisering. Abstraksjonen kan være tenkemåter hvor en skiller ut enkeltelementer og generaliseringen muliggjør en beskrivelse av alle elementene. Hodgen m.fl. (2018, s. 36) beskriver generalisering som «a topic that is deeply integrated into the nature of algebra.» Generalisering finnes også i den norske læreplanen der algebra er satt sammen med tall (Utdanningsdirektoratet, 2005b, s. 2):

> Algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall. Det gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger. Algebra benyttes også i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner.

Sitatet er mulig å tolke på to måter (Kongelf, 2015), men jeg tolker det som at en skal ta utgangspunkt i tallære og introdusere algebra gjennom å studere mønster og tallmessige sammenhenger som en ønsker å beskrive generelt ved hjelp av algebraiske uttrykk. Zwetzschler og Prediger (2013, s. 559) påpeker at det er utført lite forskning på slike genererende aktiviteter, og karakteriserer slike algebraiske uttrykk som «pattern generalizers of arithmetical or geometrical pattern». Utfra tolkingen min av læreplanen, medfører det at klassisk algebramanipulasjon må komme etter at en har arbeidet med å skape mening til bokstavene gjennom generaliseringer. En lignende deling av innholdet i skolealgebraen finnes også i beskrivelsen til Kaput (2008). Den siste setningen i sitatet gjør at jeg ikke forventer en introduksjon av algebra gjennom et funksjonslære-perspektiv, til tross for at det ble gjort i Norge med M87 (KUF, 1987), og gjøres i en rekke land i dag (Kieran, 2007). Algebra var satt sammen med tall også i L97 (KUF, 1996, s.156), men her tydeliggjorde en spesielt matematikkdidaktiske utfordringer som diskontinuiteter knyttet til overgangen fra tall til algebra (Bjørnestad m.fl., 2013).

Tilsvarende som det er problematisk å enes om en definisjon på algebra, eksisterer det heller ingen enighet om hva algebra i skolen er. Kendal og Stacey (2004) konkluderer med bakgrunn i størrelsen på emnet at hvert land må velge ut hvilket innhold skolealgebraen skal ha. I tillegg er det slik at skolealgebraen har variert over tid og i læreplaner (Sutherland, 2002), som Jakobsson-Åhl (2006) beskriver når hun firedeler skolealgebraen i Sverige, kronologisk fra 1960 til 2000: som eget emne, som del av den moderne matematikken, som verktøy i problemløsning og som kompetanse. I den gjeldende norske læreplanen, LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2005b), mener jeg å finne belegg for å kunne hevde at en ser spor av den første og de to siste av disse (Kongelf, 2015).

Algebra er i likhet med problemløsning et stort forskningsfelt i matematikk, men dersom en snevrer det inn til skolealgebra er det lettere å få en oversikt. Kieran (2007) har i sin metastudie samlet relevant internasjonal forskning innenfor læring og undervisning av algebra i skolen. Ved å anta at algebra først og fremst er en aktivitet bruker hun GTG-modellen (Kieran, 1996) som et strukturelt rammeverk for å sammenfatte aktivitetene i skolealgebraen. Bokstavene i GTG-modellen står for henholdsvis 'Generational', 'Transformational' og 'Global/Meta'. Genererende aktiviteter er blant annet det å lage generelle uttrykk basert på mønster og å lage likninger med ukjente for å representere et tekstproblem. Radford (2001) beskriver algebraaktiviteten her som et språk for å uttrykke meninger gjennom. De mer transformerende aktivitetene inkluderer å løse likninger, samle like ledd i bokstavuttrykk og å sette inn verdier for de variable.

I enhver oversikt over litteratur og forskning på skolealgebra bør Küchemann (1981) sin beskrivelse av ulike elevtolkninger av bokstaver være med, og ifølge Hodgen m.fl. (2018) er funnene replikert i nyere studier og fortsatt like aktuelle. Küchemann identifiserte seks tolkninger som han gav navnene 'letter evaluated', 'letter not used', 'letter used as an object', 'letter used as a specific unknown or constant', 'letter used as a generalized number' og 'letter used as a variable'. Tolkingene knyttes til ulike kognitive nivåer hvor det innenfor hver av dem finnes flere varianter. De fem første tolkningene kan i ulik grad relateres til potensielle misoppfatninger hos elevene, eksemplifisert ved de tre laveste nivåene hvor bokstavene henholdsvis blir byttet ut med numeriske verdier, ignorert, eller betraktet som forkortninger på navnet til objektet eller som objektet selv.

MacGregor og Stacey (1997) har identifisert supplerende tolkinger som de mener må bli vurdert når en skal forklare hvordan elever tolker og skriver algebraiske uttrykk. De mener at elevenes (mis)oppfatninger også stammer fra intuitive antagelser om hva de algebraiske bokstavene står for. Eksempler på dette er at elevene assosierer bokstaven med dens posisjon i alfabetet, at de tillegger en verdi til den variable siden den ikke er gitt, eller at hver variabel størrelse bør tilordnes en egen bokstav. MacGregor og Stacey oppdaget også at flere elever trodde at den variable, for eksempel *x*, var 1. Det forklarer de delvis med at elevene misforstår lærerens eller lærebokens forklaringer, som at «når *x* er alene er det egentlig én *x*», og delvis med at elevene blir forvirret av nytt lærestoff, eksemplifisert ved $x^0 = 1$. Manglende forståelse av eksponentiell notasjon tilskriver de elevenes usikkerhet knyttet til gjentatt addisjon, multiplikasjon og gjentatt multiplikasjon. Et annet interessant funn er at en del elever tror at når koeffisienten er på venstre side av bokstaven indikerer det subtraksjon og når den er på høyre side indikerer det addisjon. Førstnevnte rettferdiggjøres ved forklaringer som at «når vi har $1x$ kan vi ta bort 1-tallet». Elevene kan da tenke at $1x$ betyr å ta bort 1 fra x. Vlassis (2004) poengterte at den ulike bruken av minustegnet kan virke kontraintuitivt, eksemplifisert med en symmetrisk tankegang om negative og positive tall på tallinjen og tolkningen av $-x = 1$ som det motsatte av x. MacGregor og Stacey (1997) mener at misoppfatningen 'bokstav som forkortninger på navn eller som objektet selv' ikke er en uunngåelig naiv misoppfatning hos elever, men en misoppfatning skapt av læreren eller av læreboken.

Kieran (2007) beskriver spenningen mellom det tradisjonelle og reformvennlige synet på innholdet i skolealgebraen. Det reformvennlige synet vektlegger funksjoner, som fikk sitt innpass på 1980-tallet gjennom framveksten av datateknologien. I Norge ble dette materialisert i M87 (KUF, 1986) hvor algebra og funksjoner var ett felles fagemne. Funksjonsperspektivet på algebraen er ikke uten kritikk, blant annet fordi algebraiske uttrykk kan bli brukt uten å beskrive funksjoner, og funksjoner kan bli representert uten algebraiske symbol. I denne spenningen advarer Kieran (2007) mot hybridversjoner som inkluderer elementer fra begge perspektiver fordi det kan føre til ytterligere problemer for elevenes læring av algebra. De ulike perspektivene på algebra får naturligvis konsekvenser for innholdet og hvordan elevene ser på algebra, og denne diversiteten er ifølge Kieran utbredt over hele verden. I Norge har algebraen vært knyttet til tall som ett felles målområde i L97 (KUF, 1996) og som ett felles hovedområde i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2005b).

Koedinger og Nathan (2004) konkluderte med at likninger var mye vanskeligere for elevene å løse enn matematisk ekvivalente tekstoppgaver. Dette mente de skyldes utfordringer med å forstå den bokstav-symbolske formen, hvor de anbefalte at en i større grad burde oversette frem og tilbake mellom tekst og matematiske symbol før en løste de tilhørende uoppstilte likningene.

Kieran (2007, s. 716) refererer til TIMSS og PISA og konkluderer med at elever internasjonalt skårer generelt dårlig i algebra. Men samtidig viser det seg at land som Singapore, rangert som nr. 1 flest ganger på TIMSS- og PISA-testene, har en betydelig vektlegging av generaliteter og mønster i forbindelse med algebra (Kendel & Stacey, 2004; Sutherland, 2002, 2004).

Espeland (2017) sin doktorgradsstudie om algebra på videregående skole viste at matematikken som ble presentert, både av læreren og i læreboken, var regel- og algoritmefokusert med få eller ingen koblinger til begrepene de bygger på. Oppgavene i lærebøkene var kognitivt lite krevende og viktige begreper og prinsipper var ikke eksplisitt nevnt. Espeland mente at læreboken ikke kunne være bygd på forskning på feltet.

Naalsund (2012) studerte norske 8. og 10. klassingers forståelse av algebra i sin doktorgradsstudie. Hun fant at begge elevgruppene hadde begrensede prosedurale kunnskaper, som ble forklart ved en korresponderende begrenset begrepsforståelse. Elevene klarte i liten grad å forklare egen tankegang eller fremgangsmåte. Et annet interessant funn var elevenes mangel på strategisk fleksibilitet i form av skifter mellom formell og uformell resonnering. Når elevene ikke kunne bruke en bestemt prosedyre på et problem, hadde de ingen andre alternativ. Et tankekors for læring og undervisning i algebra er at flere av de elevene som ikke kunne noen formelle prosedyrer skåret relativt sett høyere på slike oppgaver enn de som kunne formelle prosedyrer.

I Norge finner en interessant forskning om algebra også på masternivå, hvor blant annet Reinhardtsen (2012) sammenlignet introduksjonsoppgaver i lærebøker for 6. og 7. klasse i Norge, Finland, Sverige og USA. Hun konkluderte med at det bare var den finske læreboken som la forholdene til rette for at elevene kunne få oppdage behovet for algebraisk notasjon gjennom mønsteroppgaver med generaliseringer. Krovik (2013) studerte læreres introduksjon og elevenes forståelse av algebra på ungdomstrinnet og videregående skole. Hun fant at elevene sleit spesielt med det semantiske aspektet, og at undervisningen var sentrert rundt læreboken med et proseduralt og syntaktisk fokus. Karimzadeh (2014) sammenlignet algebraen i norske og singaporske lærebøker med utgangspunkt i frigitte oppgaver fra TIMSS 2011. Hovedfunnet var at de singaporske lærebøkene gjorde elevene bedre i stand til å kunne svare på

TIMSS-oppgavene ved at de inneholdt flere temaer og mer kognitivt krevende oppgaver enn de norske. Petersen (2015) brukte GTG-modellen til Kieran (1996) for å måle elevenes algebraferdigheter på 10. trinn, og konkluderte med at elevene hadde store utfordringer med både genererende og transformerende oppgaver.

3.4 Oppgaver

Matematikkundervisningen er i stor grad organisert rundt elevenes oppgaveløsning (Hiebert m.fl., 2003; Shimizu m.fl., 2010). Norske elever arbeider mye individuelt med oppgaver fra læreboken sammenlignet med det internasjonale gjennomsnittet (Grønmo m.fl., 2004; Grønmo & Onstad, 2009; Klette, 2003; Skjelbred, Solstad & Aamotsbakken, 2005). Boesen m.fl. (2014) og Johansson (2006) fant at svenske elever brukte i gjennomsnitt mer enn halve tiden på individuelt arbeid med oppgaver i læreboken. Ifølge Lepik m.fl. (2015, s. 144) benytter 97 % av finske og 69 % av norske lærere læreboken som eneste kilde i hver eller annenhver undervisningsøkt, og uttrykker at «in most lessons the textbook serves as the only source for exercises.» Forskere som Fan (1999), Michael (2002), Stigler m.fl. (1986) og Zhu & Fan (2006) hevder at både det totale antallet av oppgaver og hvor ofte de ulike oppgavetypene opptrer påvirker elevenes prestasjoner, men uttrykker samtidig at de ulike oppgavetypene er viktigere for elevprestasjonene enn totalantallet av oppgaver. Hodgen m.fl. (2018), på sin side, etterspør mer forskning på oppgaver i sin 'state-of-the-art'-beskrivelse av den internasjonale matematikkdidaktisk forskning i algebra de siste 20 årene.

I delstudie 3 har jeg analysert både typen og frekvensen av oppgaver tilhørende introduksjonskapitlet i algebra i fem lærebøker. Stein m.fl. (1996) poengterer at oppgavene retter elevenes oppmerksomhet mot et bestemt matematisk innhold, hvor oppgavene opptrer som en kontekst for læring både i og etter undervisning. Ifølge Hiebert m.fl. (1997) og Pepin (2009) påvirker oppgavene hvordan elevene oppfatter matematikk generelt og bestemte matematiske emner spesielt. Med det som en del av bakteppet antas det at oppgavetypene og fordelingen av disse tilhørende introduksjonskapitlet i algebra vil kunne påvirke elevenes tenking rundt bokstaver som symbol for variable størrelser. Bjuland (2012, s. 665) berører noe av det samme når han skriver at utvalgte oppgaver kan bli brukt som «an important entry point into pupils' early algebraic reasoning.»

Jukić Matić & Glasnović Gracin (2016, s. 370) refererer til resultatene fra Glasnović Gracin (2011) sitt spørreskjema til nesten 1000 matematikklærere når de uttrykker at «mathematics teachers in Croatia rely heavily on the textbook content and structure when teaching new concepts.» I tillegg kan oppgaver være med på å forsterke fremstillinger som er gjort tidligere i læreboken. Henningsen og Stein (1997, s. 525) beskriver betydningen av oppgaver slik:

> The tasks in which students engage provide the contexts in which they learn to think about subject matter. […] the nature of tasks can potentially influence and structure the way students think and can serve to limit or to broaden their views of their subject matter with which they are engaged.

I sitatet benyttes ordet 'tasks' om det jeg på norsk kaller for oppgaver, som kan brukes og defineres på ulike måter. Watson m.fl. (2013) diskuterer dette og eksemplifiserer oppgaver blant annet ved å referere til Mason og Johnston-Wilder (2006) som betrakter en oppgave som noe elevene blir bedt om å gjøre. Den norske akademis ordbok (Oppgave, 2018) definerer oppgave til å være «oppgitt(e) spørsmål som krever spesielle kunnskaper hos den som skal besvare det/dem», og eksemplifiserer bruken av ordet med 'en matematisk oppgave'. Stein og Smith (1998) definerer en oppgave som en klasseromsaktivitet som har til hensikt å fokusere elevenes oppmerksomhet mot et spesifikt innhold, ide eller ferdighet. De mener enhver oppgave inneholder tre faser. Den første er hvordan oppgaven fremstår i selve læreboken slik forfatteren har skrevet den. Den andre er hvordan læreren bruker oppgaven i klasserommet, og den tredje er elevens implementasjon av den. Alle tre fasene antas å påvirke elevens læringsprosess.

Oppgavene i studien min finner en materialisert i selve læreboken, avgrenset til det jeg tolker at lærebokforfatterne har planlagt at elevene, og delvis lærerne, skal gjøre i forbindelse med undervisning og læring i algebra. Jeg skriver 'delvis lærerne' fordi gjøremålene i form av oppgaver er i hovedsak tiltenkt noe elevene kan øve seg på frem mot mestring av et matematisk innhold. For læreren kan være snakk om å velge ut, justere eller presisere enkelte oppgaver. Betydningen av matematikklærerens rolle i forbindelse med elevoppgavene understrekes av Lappan og Briars (1995, s. 138):

> There is no decision that teachers make that has a greater impact on students' opportunities to learn and on their perceptions about what mathematics is than the selection or creation of the tasks with which the teacher engages students in studying mathematics.

Oppgavene er typisk presentert til slutt i kapitlet eller suksessivt etter hvert delkapittel, hvor de stort sett er nummererte og i enkelte lærebøker markerte som oppgaver gjennom en overskrift. Det at noen lærebøker velger å ikke presisere disse gjøremålene med overskrifter, forteller noe om hvor selvsagte slike tiltenkte gjøremål er i læreboksammenheng. I studien min definerer jeg oppgaver som de tiltenkte gjøremålene for elevene som er beskrevet i forbindelse med algebrakapitlene i de analyserte lærebøkene. Det vil si at jeg ikke skiller på om gjøremålene er av typen drilloppgaver, tekstoppgaver, diskusjonsoppgaver, flervalgsoppgaver med mer. Det jeg er interessert i, er hvilket matematisk innhold som finnes i oppgavene og hvordan dette presenteres i lærebøkene.

3.5 Eksempler

Den vanligste måten å strukturere en matematikklærebok på er å benytte seg av en repeterende syklus av det som kalles 'exposition-examples-exercises model', som jeg velger å oversett til 'forklaring-eksempel-øvelse-modellen' (Love & Pimm, 1996). Kapitlet starter ofte med en forklaring av det nye stoffet, etterfulgt av eksempler der en ser det nye i bruk, før en til slutt får presentert oppgaver omhandlende det nye stoffet. Et eksempel defineres av Zodik og Zaslavsky (2008, s. 165) som "a particular case of a larger class, from which one can reason and generalise". I Cambridge Dictionary (Example, 2018) definers 'example' som "something that is typical of the group of things that it is a member of" og "a way of helping someone to understand something by showing them how it is used". Språkrådet (https://www.sprakradet.no/) gir synonymene 'forbilde', 'norm', 'illustrerende tilfelle', 'belegg' og 'prototype' på begrepet eksempel. Definisjonene og synonymene gjør at jeg tolker et eksempel som en måte å hjelpe noen til å forstå noe gjennom å vise hvordan det blir brukt, hvor bruken er typisk for det den er en del av. Eksemplene er vanligvis presentert i symbolsk og/eller visuell form og inneholder som oftest et problem som skal løses.

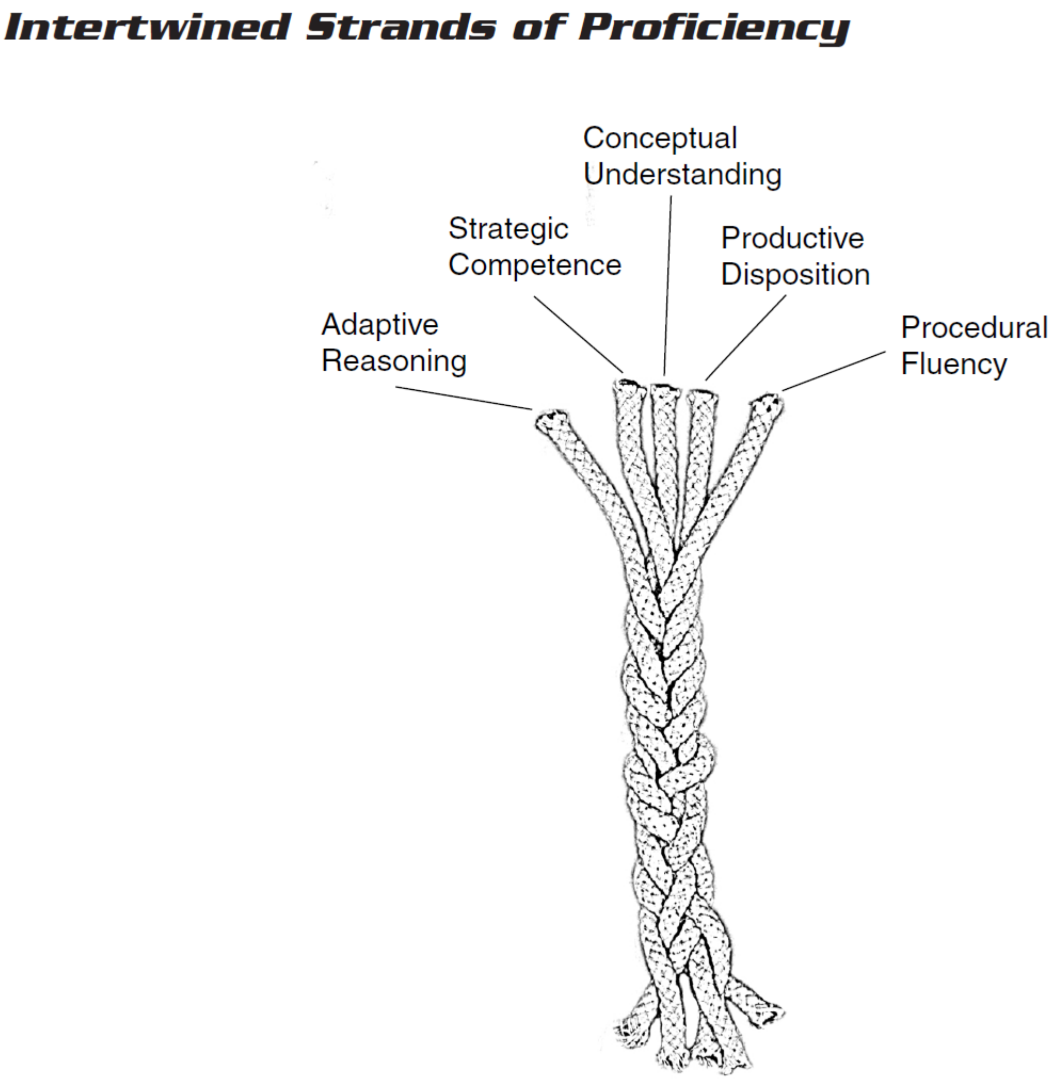
Foruten eksemplene inntar bruken av ulike fonter, farger, innrammminger og andre uthevninger rollen som en forkortet, eller kodet, versjon av det aller viktigste innholdet i lærestoffet. Ifølge Love og Pimm (1996) er elevene ofte utålmodige med forklaringene i læreboken og hopper direkte til det som er uthevet i en eller annen form. Rensaa og Grevholm (2015) studerte læreboken og studentenes syn på den, og konkluderte med at det var eksemplene i læreboken som studentene verdsatte høyest. Jukić Matić & Glasnović Gracin (2016, s. 3073), som refererer til tidligere nevnte spørreundersøkelse av Glasnović Gracin (2011), påstår at «most teachers select a textbook mainly according to the quality of its examples and problems.» Eksemplene i lærebøkene er til en viss grad generiske i det de viser en fremgangsmåte som ofte er ment å bli etterlignet i de etterkommende oppgavene. Antagelsen er at elevene er i stand til å generalisere ut ifra eksemplene hvordan en selv kan bearbeide og løse tilsvarende problem gitt i oppgavedelen. Ifølge Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson og Zaslavsky (2006) er det viktig å gjøre underliggende generaliteter og argumentasjon eksplisitt fordi elevene prøver å generalisere fra eksemplene. Studier om misoppfatninger (Kaur & Sharon, 1994) og læringshindringer uttrykker noe av den samme ønskede eksplisittheten. Niss (2003) hevder at dersom en virkelig vil at elevene skal lære noe, må undervisningen gjøres eksplisitt. Hiebert og

Grouws (2007, s. 383) hevder å ha god støtte i både teori og empiriske studier når de fremhever viktigheten av at «teachers and students attend explicitly to concepts», og med det mener «treating mathematical connections in an explicit and public way.»

I forskningsgjennomgangen til Bills m.fl. (2006) skilte de mellom eksempler omhandlende begrep og eksempler omhandlende prosedyrer. Hvor nyttig et eksempel er, er ifølge dem stort sett subjektivt og avhengig av konteksten og eleven. De argumenterte allikevel for at det er to komponenter som er avgjørende for om et eksempel kan klassifiseres som pedagogisk nyttig: gjennomsiktighet og generaliserbarhet. Førstnevnte handler om hvor lett eksemplet klarer å henlede elevenes, og lærerens, oppmerksomhet mot det som gjør eksemplet etterfølgelsesverdig. Love and Pimm (1996, s. 387) understreker også viktigheten av gjennomsiktighet, men konkluderer med at mange tekster ikke uttrykker direkte hvilke generaliseringer elevene antas å gjøre. Generaliserbarhet handler om hvor etterfølgelsesverdig eksemplet er. Det vil si omfanget til generaliseringen iboende i eksemplet når det gjelder hva som er nødvendig, og hva som er vilkårlig og foranderlig. Bills m.fl. (2006) mener det er nødvendig å gi elevene muligheter til å møte ulike typer eksempler, ikke-eksempler og mot-eksempler. Ikke-eksempler kan være eksempler på noe som ligner på noe, men som ikke er det allikevel, for eksempel at $3x + 4$ ikke er en likning. Lærebokstudien til Weinberg, Wiesner, Benesh og Boester (2011) bekrefter funnene til Love og Pimm (1996) og viser at elevene i mindre grad bryr seg om teksten mellom eksemplene, og heller går rett på eksemplene, reglene eller andre didaktiske uthevninger ved hjelp av fonter og farger.

3.6 Matematisk kompetanse

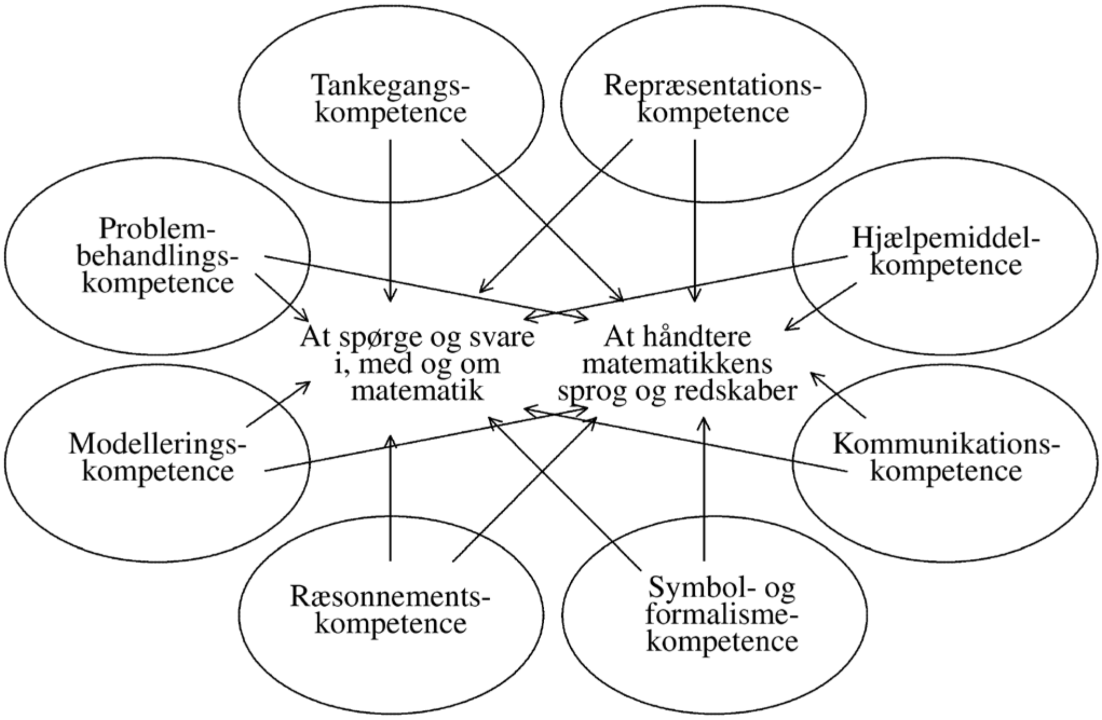
Den tradisjonelle pensumbaserte beskrivelsen av matematikkfaget i skolen ble rundt år 2000 utfordret av mer sammensatt kompetansebegrep som Kilpatrick, Swafford og Findells (2001) ‘mathematical proficiency’ og Niss og Jensens (2002) ‘matematiske kompetencer’. Spesielt Niss og Jensen sine tanker har inspirert og påvirket utviklingen av nye læreplaner i Norge, utarbeidelsen av nasjonale prøver i Norge og PISA-undersøkelsene. ‘Mathematical proficiency’, slik Kilpatrick m.fl. (2001) definerer det, består av komponentene ‘conceptual understanding’, ‘procedural fluency’, ‘strategic competence’, ‘adaptive reasoning’ og ‘productive disposition’. Disse fem komponentene blir ofte illustrert som sammenflettede tråder, som i et tau hvor alle trådene er forbundet med hverandre.



Figur 1. 'Mathematical proficiency' i Kilpatrick m.fl. (2001, s. 117).

'Conceptual understanding', oversatt til begrepsforståelse, handler om å forstå matematiske begrep, representasjoner, operasjoner, prosedyrer og relasjoner. Kilpatrick og Swafford (2002) poengterer at dersom elevene skal utvikle forståelse innenfor et emne, er det viktig at det fokuseres på selve fremgangsmåten i stedet for kun på løsningen av et problem. 'Procedural fluency', oversatt til prosedyreevne eller beregningsevne, handler om å kunne utføre ulike prosedyrer effektivt, nøyaktig og fleksibelt. 'Strategic competence', oversatt til strategisk kompetanse, handler om evnen til å avgrense og formulere problemer matematisk, å bruke hensiktsmessige løsningsstrategier og tolke resultat. 'Adaptive reasoning', oversatt til adaptiv resonnering eller tilpasset resonnering, handler om evnen til å tenke logisk, å reflektere, å forklare og å begrunne. Adaptiv resonnering innebærer også evnen til å reflektere over begreper, prosedyrer og fakta, og videre hvordan de logisk henger sammen med hverandre og konteksten rundt. Ifølge Kilpatrick og Swafford (2002) må elevene bli utfordret til å forklare og begrunne egne og andres løsninger, både det matematiske og det kontekstuelle aspektet, for å utvikle resonneringsevnen. 'Productive disposition', oversatt til engasjement, er tett forbundet med alle de fire andre komponentene. For at elevene skal kunne utvikle disse må de være motiverte for å lære, se på matematikk som nyttig og verdifullt og tro på at innsats bidrar til økt læring. Her spiller matematikklæreren, læreboken, klasse- og skolemiljøet og foreldrene viktige roller.

Niss og Jensen (2002) sine ideer til utvikling av matematikkundervisningen i KOM-prosjektet (Kompetencer og matematiklæring) resulterte blant annet i en kompetansebeskrivelse av matematikk i åtte innbyrdes forbundet og delvis overlappende deler.



Figur 2. 'Matematiske kompetencer' i Niss og Jensen (2002, s. 46).

De åtte kompetansene er delt inn i to grupper, 'At spørge og svare i, med og om matematik' og 'At håndtere matematikkens sprog og redskaber', men hvor alle åtte kompetanser i varierende grad bidrar til utvikling av begge gruppene. Hver enkelt kompetanse består av en undersøkende og en produktiv side. Den produktive siden av en kompetanse inkluderer det å være i stand til å kunne gjennomføre de prosessene som kompetansen inneholder. Den undersøkende siden handler om forståelse, analyse og kritisk vurdering av de utførte prosessene og deres produkt. Under vil jeg beskrive de enkeltkomponentene som kan tenkes å ha mest relevans til problemløsning og algebra. Med det mener jeg ikke at de utelatte komponentene ikke har relevans, men ønsket er å kunne fokusere på noe fremfor å ta litt om alt.

Problembehandlingskompetanse handler om å kunne stille opp og løse matematiske problem. Oppstillingen inneholder å kunne oppdage, formulere, avgrense og presisere ulike typer av problem. Løsningen handler om bruk av ulike strategier en kan benytte seg av. Problemene kan være av ulik type, lukkede eller åpne, anvendte eller rent matematiske. Å kunne løse problemer inkluderer evnen til å bruke ulike metoder, en forståelse av metodene samt andre sine metoder. Resonnementskompetansen handler om å kunne følge og vurdere andres matematiske resonnement, skriftlig og muntlig, og å kunne tenke ut og gjennomføre egne matematiske resonnement. Det inkluderer også å kunne vite og forstå hva et matematisk bevis er og hva som ikke er det.

Innenfor gruppen 'å håndtere matematikkens sprog og redskaber' består representasjonskompetansen i å kunne forstå og benytte seg av forskjellige representasjonsformer av matematiske objekt, problem og situasjoner. Representasjonsformene kan være visuelle, geometriske, grafiske, fysiske, verbale, algebraiske, i tabellform eller diagram. Det handler også om å kunne oversette mellom og forstå representasjonsformenes innbyrdes forbindelser, og å kunne velge hensiktsmessige representasjoner. Symbol- og formalismekompetansen handler om å kunne avkode, behandle og benytte seg av symbolske uttrykk, utsagn og formler, og å oversette fram og tilbake mellom det matematiske symbolspråket, inklusiv algebraisk notasjon, og hverdagsspråket. Kommunikasjonskompetansen inkluderer det å kunne tyde og forklare andres matematiske utsagn, det være seg skriftlig, muntlig eller visuelt, samt evnen til å kunne uttrykke seg på flere måter.

Niss og Jensen fremhever at enkelte av kompetansene har tettere bånd til hverandre enn andre. Det gjelder blant annet de tre kompetansene representasjon, symbol- og formalisme og kommunikasjon innenfor det å omgås språk og redskaper i matematikken. I representasjonskompetansen vektlegges selve representasjonen og mulighetene en har til å velge ulike representasjoner av det matematiske. Niss og Jensen kaller det en semantisk aktivitet. Noen av disse representasjonene kan være symbolske, men det behøver de ikke å være. Symbol- og formalismekompetansen kan sies å inneholde syntaktiske aktiviteter gjennom de spilleregler en må forholde seg til i matematikken. Kommunikasjonskompetansen er avhengig av representasjoner, symboler og regler, men den handler først og fremst om avsender og mottaker av denne kommunikasjonen. I denne kompetansen kan en se Krippendorffs (2004) epistemologiske betraktninger vedrørende innholdsanalyser, som at teksten ikke eksisterer uten en leser, at budskapet ikke eksisterer uten en fortolker og at data ikke eksisterer uten en observatør. Mer om dette i metodekapitlet.

3.7 Grunnleggende ferdigheter (og læreplaner)

Den gjeldende læreplanen for de analyserte lærebøkene er LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2005b). I denne skolereformen ble begrepet grunnleggende ferdigheter introdusert, men ifølge Alseth (2009, s. 75) var ikke innholdet i begrepet nytt i matematikkfaget. Den første utviklingen mot en bredere kompetansebeskrivelse i matematikk kom allerede med M74 (KUD, 1974) som ønsket å legge større vekt på forståelse av de matematiske begrepene. I M87 (KUF, 1986) førte inntoget av problemløsning og digitale hjelpemiddel til at det tradisjonelle ferdighetsaspektet ble tonet ned. Med L97 (KUF, 1996) ble forståelse og anvendelse ytterligere vektlagt, mens regneferdigheter i form av tabellkunnskap og automatiserte ferdigheter knyttet til de fire regneartene ble nedtonet (Alseth, 2009, s. 74). I lys av dette var nok begrepet grunnleggende ferdigheter mer kontroversielt enn selve innholdet i begrepet. Alseth mente at navnet var uheldig for matematikken, og poenget hans kan eksemplifiseres ved å se på den grunnleggende ferdigheten 'å kunne regne'. Begrepet regning har alltid utgjort er vesentlig del av læreplanene i grunnskolen, hvor emnet regning før Kunnskapsløftet (Utdanningsdirektoratet, 2005b) nesten utelukkende var knyttet til matematikkfaget, og hvor begrepene regning og matematikk til tider ble brukt om hverandre som betegnelse på faget. Begrepet ferdighet har tradisjonelt sett i matematikk vært synonymt med det å kunne utføre drillpregede prosedyrer, herunder regneteknikker og manipulering av symbol (Breiteig & Venheim, 1993; Solvang, 1986). Ordet grunnleggende har konnotasjoner som elementær og basis, og den grunnleggende ferdigheten å kunne regne kan av den grunn fort bli misforstått som å handle om et minimum bestående av tabellkunnskap og standardalgoritmer. Men de fem grunnleggende ferdighetene er mye mer enn det. Ferdighetene er redskaper for læring i alle fag, arbeid- og samfunnsliv, og en forutsetning for at elevene skal kunne vise sin kompetanse (Utdanningsdirektoratet, 2012). Ordlyden i de grunnleggende ferdighetene har ved flere anledninger blitt forandret siden de ble introdusert i grunnlagsdokumentet, St. meld. nr. 30 (2003–2004), for Kunnskapsløftet. I læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2005b), datert 01.08.2013, lyder definisjonen av grunnleggende regneferdighet slik:

> Å kunne regne i matematikk innebærer å bruke symbolspråk, matematiske begreper, framgangsmåter og varierte strategier til problemløsning og utforskning som tar utgangspunkt både i praktiske, dagligdagse situasjoner og i matematiske problemer. Dette innebærer å gjenkjenne og beskrive situasjoner der matematikk inngår, og bruke matematiske metoder til å behandle problemstillinger. Eleven må også kommunisere og vurdere gyldigheten av løsningene. Utviklingen av å regne i matematikk går fra grunnleggende tallforståelse og å gjenkjenne og løse problemer ut fra enkle situasjoner til å analysere og løse et spekter av komplekse problemer med et variert utvalg av strategier og metoder. Videre innebærer det i

økende grad å bruke ulike hjelpemidler i beregninger, modellering og kommunikasjon.

Den grunnleggende regneferdigheten har tydelige likhetstrekk med PISA sitt rammeverk, og er ifølge Alseth (2009, s. 72) beskrevet som en kompetanse som innbefatter alle de tre kompetanseklassene i PISA, som igjen er en syntese av Niss og Jensen (2002) sine åtte matematiske kompetanser definert som en kognitiv klassifisering. Kjærnsli & Roe (2010, s. 145) støtter dette og uttrykker at de fem grunnleggende ferdighetene i matematikkfaget refererer eksplisitt til kompetansene til Niss og Jensen (2002). Den grunnleggende regneferdigheten skal forstås som noe mer enn det Bloom m.fl. (1956) ville kalt lavereordens kunnskap som faktakunnskap, og det en tidligere oppfattet som ferdigheter i matematikk. Den type kunnskap er absolutt nødvendig, men langt fra tilstrekkelig for innholdet i begrepet grunnleggende regneferdighet. Begrepet handler først og fremst om bruken av kunnskap, hvor anvendelsesdelen fremtvinger et behov for høyereordens kunnskap som det å kunne vurdere, være kreativ og sette ting i sammenheng. Veldig forenklet kan en si at grunnleggende regneferdighet har to sider, faktakunnskap og elementære ferdigheter på den ene siden, og utfordringer og problemløsning av både praktisk og teoretisk art på den andre. Det vil si at elevenes håndtering av både algebra og problemløsning er en del av den grunnleggende regneferdigheten.

I forbindelse med revideringen av læreplanene publiserte Utdanningsdirektoratet (Utdanningsdirektoratet, 2012) et rammeverk for de grunnleggende ferdighetene. Rammeverket er et grunnlagsdokument som definerer de grunnleggende ferdighetene, skisserer deres funksjon, samt beskriver progresjonen til hver av dem ut fra fem ulike nivå. Rammeverket skal også bidra til å synliggjøre de grunnleggende ferdighetene i sterkere grad ut fra fagenes egenart og formål. Det gjøres gjennom matriser som beskriver hva som er typisk innenfor hver ferdighet. Matrisen er ikke trinnspesifikk, men inndelt etter fire ferdighetsområder og fem nivåer, der den siste inndelingen konkretiserer progresjonen. Det vil si at hver ferdighet er konkretisert gjennom 20 beskrivelser, totalt 100 til sammen for de fem grunnleggende ferdighetene. Innholdet i matrisene ligger til grunn for beskrivelsene av kompetansemålene. Det betyr at de grunnleggende ferdighetene integreres i de spesifikke kompetansemålene tilpasset fagets egenart og formål. Å kunne regne som grunnleggende ferdighet er beskrevet gjennom følgende matrise:

Å kunne regne som grunnleggende ferdighet					
Ferdighets-områder	**Nivå 1**	**Nivå 2**	**Nivå 3**	**Nivå 4**	**Nivå 5**
Gjenkjenne og beskrive	Gjenkjenner konkrete situasjoner som kan løses ved regning, og formulerer spørsmål til dem.	Gjenkjenner mønstre og formulerer problemer som kan løses i ett trinn. Analyserer innholdet i tekster og situasjoner der regning inngår.	Analyserer tekster og situasjoner som forutsetter matematisk problemløsing i flere trinn. Forenkler situasjonen eller problemet slik at det blir håndterbart.	Analyserer mer sammensatte matematiske problemstillinger i dagligdagse og faglige sammenhenger. Identifiserer størrelser som varierer.	Analyserer et vidt spekter av matematiske problemstillinger som kan beskrives med en modell. Omformer og formulerer modellen for videre arbeid.
Bruke og bearbeide	Bruker enkle strategier for opptelling og klassifisering av mengder og geometriske former. Utfører enkle beregninger på ulike måter.	Velger hensiktsmessig regneart og bruker ulike metoder for å finne svaret. Bruker blant annet geometriske former, måleenheter, tabeller og grafiske framstillinger i prosessen.	Sammenlikner størrelser og uttrykker sammenhengen mellom dem. Velger hensiktsmessige måleenheter og gjennomfører egne undersøkelser.	Vurderer sjanse og utfører enkle statistiske beregninger. Bruker symboler for å uttrykke størrelser som er ukjente eller varierer. Kobler sammensatte problemstillinger til kjente løsnings-metoder.	Bruker et variert utvalg problemløsingsstrategier og kan begrunne metodevalg. Uttrykker sammenhenger med ord og bokstavuttrykk.
Kommunisere	Bruker ulike virkemidler for å utrykke enkle beregninger.	Beskriver resultatene ved blant annet å bruke geometriske former, måleenheter, tabeller og grafiske framstillinger.	Presenterer resultater fra regneprosesser på en egnet måte ut fra problemstillingen.	Setter sammen ulike måter å presentere resultater fra regneprosesser på.	Presenterer resultater fra regneprosesser i tekster i ulike fag og i egen hverdag.
Reflektere og vurdere	Avgjør om et resultat er svar på spørsmålet som ble stilt.	Vurderer om resultatet er rimelig og tar beslutninger ut fra foreliggende fakta.	Vurderer prosessen og vurderer om andre fremgangs-måter er mer effektive og enklere å kommunisere.	Vurderer betydningen resultatet har for den situasjonen det skal brukes i. Drøfter feilkilder og gjør eventuelle justeringer.	Sammenlikner ulike modeller og vurderer dem i lys av forholdet de beskriver.

Figur 3. (Utdanningsdirektoratet, 2012)

Tre av de fire ferdighetsområdene har likheter med Niss og Jenssen (2002) sine åtte delkompetanser og PISA sine tre kompetanseklasser: gjenkjenne og formulere, bearbeide og bruke samt tolke og vurdere. Ferdighetsområdene har også likheter med TIMSS sine tre kognitive dimensjoner: å kunne, å anvende og å resonnere.

Fire av Kilpatrick og Swafford (2002) sine fem delkomponenter kan vi også finne her i form av beregning, anvendelse, begrepsmessig forståelse og resonnering. De ulike cellene i matrisen rommer også algebra og problemløsning. Algebra finner vi både innenfor lave og høye nivå, eksemplifisert på nivå 2 innenfor ferdighetsområdet 'gjenkjenne og beskrive'. Å gjenkjenne mønstre kan eksempelvis være en form for pre-algebra eller inngangsport til variabelbegrepet. Å analysere innholdet i tekster og situasjoner der regning pågår kan sees på som en forutsetning for å kunne bevege seg mot nivå 4 hvor en skal identifisere størrelser som varierer. Polya (1945) sine fire generelle strategier finner en gradvis tydeligere og tydeligere for hvert nivå innenfor ferdighetsområdet reflektere og vurdere. De mer spesifikke problemløsningsheuristikkene til Polya (1945) finner en tydeligst innenfor ferdighetsområdet bruke og bearbeide, hvor eksempelvis nivå 5 krever at en kan bruke et variert utvalg problemløsningsstrategier.

Med bakgrunn i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2005b) og de grunnleggende ferdighetenes likheter med rammeverkene i PISA og TIMSS vil jeg beskrive de to internasjonale undersøkelsene nærmere. Lærebøkene som inngår studien min er alle gjeldene etter LK06 og funnene kan brukes til å kaste lys over norske prestasjoner på disse undersøkelsene. Det gjelder spesielt de to algebradelstudiene og TIMSS, og problemløsningsstudien og PISA.

3.8 TIMSS

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) er en internasjonal komparativ studie av matematikk og naturfag i skolen. Rammeverket for TIMSS består av flere deler som kategoriserer elevenes matematikkompetanse i to dimensjoner. Den ene beskriver hvilke matematiske områder oppgavene skal hentes fra. På ungdomsskolens 8. og 9. trinn er det tall, algebra, geometri og statistikk. Tall og algebra utgjør hver 30 %, mens geometri og statistikk utgjør 20 % hver. Algebra inneholder gjenkjenning og utvidelse av mønstre og symbolrepresentasjon av matematiske situasjoner, inklusiv løsning av lineære likninger. De sentrale delemnene er mønster, algebraiske uttrykk, likninger, formler og funksjoner. Denne inndelingen er tydelig fordi den får frem de ulike fasettene av bokstavbruken i algebra. Den andre delen av matematikkompetansen blir kalt for den kognitive dimensjonen. Den består av de tre områdene ‘å kunne’, ‘å anvende’ og ‘å resonnere’. Den prosentvise fordelingen på 8. og 9. trinn er henholdsvis 35 %, 40 % og 25 %. Å kunne betyr å huske fakta, beherske de fire regneartene, forstå informasjon i tabeller og diagram, å gjenkjenne uttrykk og objekt samt å måle og klassifisere. Å anvende innebærer valg av metoder og strategier, representasjon av informasjon, modellering, følge instrukser og løse rutineproblem. Å resonnere inneholder evnen til å tenke logisk, analysere situasjoner og sammenhenger, kombinere informasjon, generalisere, begrunne påstander og løse oppgaver som ikke er rutinepregete. Studien har røtter tilbake til begynnelsen på 1980-årene, og Norge var med for første gang i 1995. Norge var ikke med i 1999, men har vært med siden, det vil si i 2003, 2007, 2011 og 2015.

TIMSS er en læreplanbasert undersøkelse der analyser av de deltakende landenes læreplaner gir føringer for utvelgelsen av oppgaver. For å kunne utføre studier som viser utvikling over tid har TIMSS valgt å ta utgangspunkt i TIMSS 1995-studien ved fastsettelse av gjennomsnitt og spredning, henholdsvis 500 og 100 poeng. Alle senere TIMSS-studier benytter denne skalaen for å beregne landenes gjennomsnittlige skåre. I 1995, da grunnskolen fortsatt var 9-årig, deltok Norge med to elevpopulasjoner. Den første bestod av elever på 2. og 3. trinn, og den andre bestod av elever på 6. og 7. trinn. I begge populasjonene hadde de nordiske landene de yngste elevene, og de hadde gått ett år mindre på skolen enn elevene i de fleste andre deltakerlandene. De norske 6. klassingene skåret vesentlig lavere enn gjennomsnittet, 461 poeng, mens 7. klassingene skåret rett over gjennomsnittet, 503. Sammenligner en disse norske resultatene med tilsvarende klasser i Singapore, var begge årstrinnene 140 poeng etter toppnasjonen, som hadde henholdsvis 601 og 643 poeng. En måte å sammenligne Norge og Singapore på er å se at forskjellen på 140 poeng utgjorde godt over tre ganger så stor økning som de 42 poengene de norske elevene forbedret seg med fra 6. til 7. klasse. En annen måte å illustrere det på er at kun fem prosent av de beste norske elevene var på samme nivå som gjennomsnittseleven i Singapore. Blant de matematiske emnene skilte de norske elevene seg ut ved å skåre spesielt svakt i algebra (Lie, Kjærnsli & Brekke, 1997).

I TIMSS 2003 skåret norske 8. klassinger 461 poeng, 42 poeng lavere enn i 1995, hvor algebra var det emnet som skilte seg mest ut negativt, med 428 poeng. Sammen med Sverige var Norge det landet med den største tilbakegangen fra 1995, for eksempel hadde 8. trinn i Norge i 2003 samme skår som 7. klasse i 1995 (Grønmo m.fl., 2004). Når det gjaldt lærernes utdannelse, viste både TIMSS 1995 og TIMSS 2003 at norske lærere hadde et generelt høyt utdanningsnivå, men med lite fordypning i matematikk. De deltok også svært lite på etter- og videreutdanning. I undervisningssammenheng arbeidet elevene mye på egen hånd, hørte lite på læreren snakke om emner over tid, og leksene ble i liten grad fulgt opp (Grønmo m.fl., 2004). I et slik læringsmiljø er det nærliggende å anta at læreboken og dens innhold og metoder spiller en sentral rolle.

I TIMSS 2007 presterte norske elever fortsatt svakt i forhold til land det var naturlig å sammenligne seg med, til tross for at det var første gangen en kunne dokumentere fremgang i prestasjoner. For 8. trinn gikk en fra 461 til 469 poeng (Grønmo & Onstad, 2009). Fremgangen ble delvis forklart med skolepolitiske faktorer og delvis med undervisningsrelaterte faktorer. Førstnevnte inneholdt blant annet opprettelsen av Kvalitetsutvalget som forslo en styrket satsing på realfagene (NOU 2002:10, NOU 2003:16), innføringen av nasjonale prøver, og opprettelsen av Matematikksenteret. Utvalgets arbeid la også mye av grunnlaget for innføringen av Kunnskapsløftet i 2006 (Utdanningsdirektoratet, 2005b), som blant annet førte til 85 timer mer matematikk på barnetrinnet. Kunnskapsdepartementet utviklet også en strategiplan, *Et felles løft for realfagene 2006–2009* (Kunnskapsdepartementet, 2006), der forskning på undervisning og læring i realfag ble forsterket. Av undervisningsfaktorer ble det pekt på at norske lærere deltok noe mer på faglig relevant etter- og videreutdanning, noen flere lærere hadde fordypning i matematikk, samt et økt fokus på oppfølging av lekser. Norske elever presterte relativt sett svakest fortsatt i algebra, og i et internasjonalt perspektiv var prestasjonene så svake at Grønmo m.fl. (2004, s. 57) mente at en nasjonal debatt rundt dette burde initieres. Det store frafallet på ingeniørutdanningen i Norge ble blant annet forklart med dårlige kunnskaper i matematikk. En pekte videre på at en mangelfull forståelse for og kompetanse i algebra ville gi elever som siktet mot yrker som forutsatte gode kunnskaper i matematikk, store problem.

Resultatene fra TIMSS 2011 viste 6 poeng fremgang fra TIMSS 2007 for 8. trinn, men samtidig at det var langt fram til de gode prestasjonene (Grønmo & Onstad, 2012). Norge skåret 475 poeng, og algebra pekte seg fremdeles ut som spesielt svakt. Det svake nivået ble forklart med at de norske elevene fortsatt var blant de yngste, men også med at algebra ikke kunne anses som viktig i norsk skole siden elever på alle trinn presterte svakt, med referanser til tidligere TIMSS-undersøkelser (Grønmo, Onstad & Pedersen, 2010), TEDS-M i 2008 (Grønmo & Onstad, 2012) og Norsk matematikkråds test (Nortvedt, 2012). Så på tross av en positiv framgang på 8. trinn i to målinger etter bunnåret i 2003, fra 461 til 469 og 475 i 2011, ble konklusjonen at de norske prestasjonene fortsatt var svake sett i et internasjonalt perspektiv. På 4. trinn var fremgangen mer markant, fra 451 til 473 og 495 i 2011. Grønmo og Onstad (2012) forklarte den positive utviklingen på 4. trinn med blant annet økt timetall i matematikk på barnetrinnet.

Norske elever hadde helt siden TIMSS 1995 vært blant de yngste, men i TIMSS 2011 testet Norge for første gang både 4. klassinger og 5. klassinger i den yngste populasjonen. En av grunnene til det var at for eksempel Finland og Sverige regnet opplæringen av seksåringer som førskole, mens det i Norge var definert som skole. Det vil si at norske 5. klassinger var tilnærmet like gamle som finske og svenske 4. klassinger. Resultat ble at de norske 4. klassingene, som var blant de yngste i hele TIMSS 2011-populasjonen, skåret 495 poeng, mens 5. klassingene, som var blant de eldste i populasjonene, skåret 549. Finland var med igjen for første gang siden TIMSS 1999, der Norge ikke deltok. Sammenlignet med finnene gjorde de norske 5. klassingene det 4 poeng bedre, mens de norske 8. klassingene som var jevngamle med de finske 7. klassingene, gjorde det 7 poeng dårligere. Finland brukte 7. trinn for deres trenddata fordi de hadde testet 7. klassinger i TIMSS 1999. Finland brukte 8. trinn i hovedresultat i TIMSS 2011. Nedgangen i matematikkprestasjoner for Finland fra 1999 til 2011 var tilnærmet lik nedgangen til Norge og Sverige i perioden 1995–2003. Tilbakegangen ble av Grønmo og Onstad (2012, s. 21) forklart, med henvisning til Astala m.fl. (2005), at mer ren og abstrakt matematikk, som algebra, hadde lidd i Finland på grunn av det store fokuset på hverdagsmatematikk. Dette samsvarer med funnene i studien til Eriksson, Helenius og Ryve (2019) som påviser at i de fleste land, og spesielt i Sverige, er det de elevene som rapporterer om mer pugging av formler og prosedyrer, mindre hverdagsmatematikk og flere gjennomganger av læreren om hvordan en kan løse problemer, som gjør det best på TIMSS-testen. Det vil si at ifølge denne studien er hverdagsmatematikk en negativ indikator, mens pugging og det at læreren viser hvordan problemer kan løses er positive indikatorer på elevprestasjoner i TIMSS.

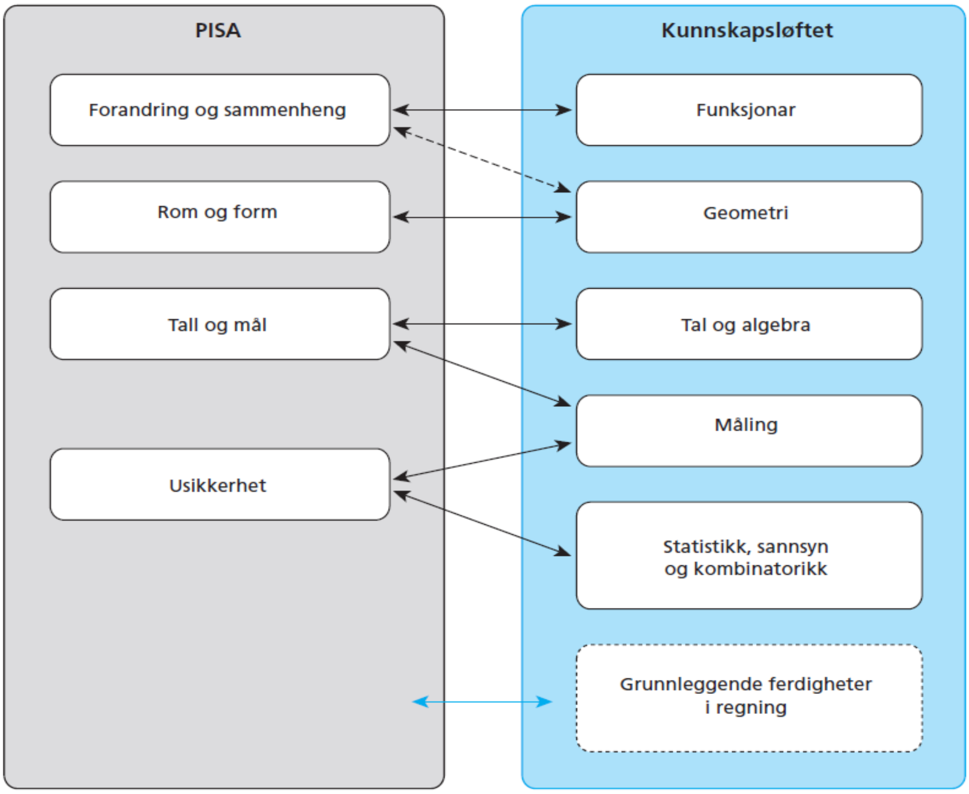
I TIMSS 2015 deltok Norge for første gang med både 4. og 5. klasse og 8. og 9. klasse. 4. og 8. klasse ble brukt til å se på trenddata, mens 5. og 9. klasse ble brukt i hovedresultatene. Trenddataene viste at norske 4. klassinger hadde en liten tilbakegang, fra 495 til 493 poeng. Det ble tolket som at fremgangen fra bunnåret 2003 hadde stabilisert seg. I motsetning til 4. klassingene fortsatte 8. klassingene sin fremgang også i TIMSS 2015 med 487 poeng, men de skåret fortsatt lavere enn i 1995 da skåren var 498. Det vil si at de norske prestasjonene fortsatt ikke var tilbake på det middels 1995-nivået, til tross for to tiår med realfagssatsinger. De norske 5. klassingene, som var blant de eldste i TIMSS 2015, presterte godt med 549 poeng. De norske 9. klassingene, som også var blant de eldste, presterte også bra med 512 poeng. Men til tross for en generell forbedring i norske elevers matematikkprestasjoner i 2015, ble det målt en vesentlig tilbakegang i algebra på 8. trinn fra studien i 2011. Grønmo og Hole (2017) mente at dette var spesielt alarmerende siden de norske resultatene i algebra allerede var på et lavt nivå. De poengterer også at 8. og 9. trinn i Norge har det største negative avviket i verden mellom skåren i algebra og det generelle prestasjonsnivået. Det gir sterke signaler om at forklaringen på gjentatte svake norske prestasjoner i algebra som noe som skyldes elevenes unge alder, har mistet mye av sin styrke. Grønmo og Hole (2017, s. 88) gir vesentlig tyngde til denne påstanden og uttrykker at «Årsaken til de svake norske resultatene i algebra på ungdomstrinnet i Norge stikker mye dypere enn at det var alderen til elevene som førte til det.»

I diskusjonsdelen om funnene fra de to algebrastudiene mine vil jeg forsøke å kaste lys over de norske algebraprestasjonene på TIMSS-undersøkelsen. Det samme vil jeg gjøre med funnene fra problemløsningsstudien og norske prestasjoner på PISA-undersøkelsen.

3.9 PISA

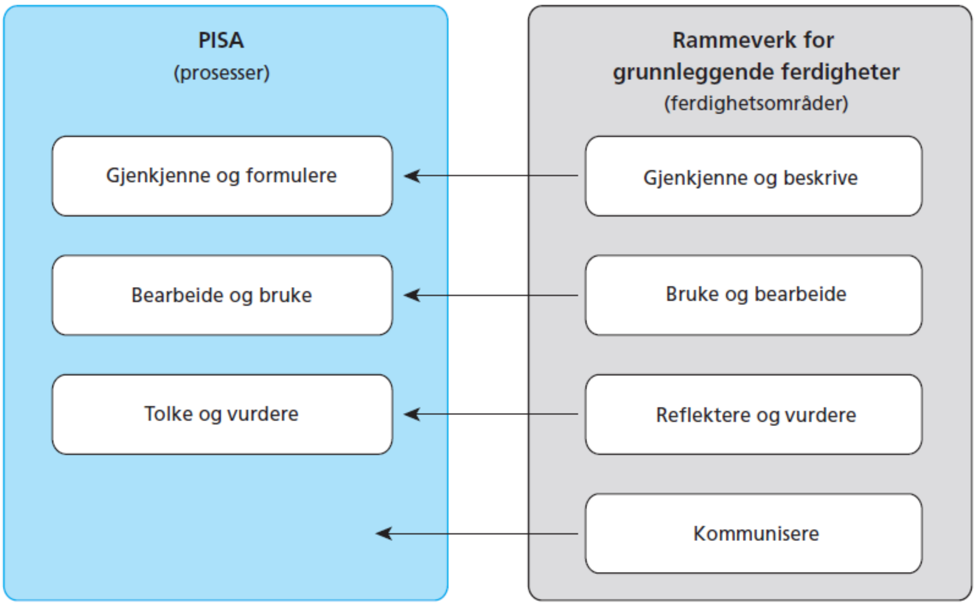
PISA (Programme for International Student Assessment) er en internasjonal komparativ undersøkelse av skolesystemene i en rekke land. Det er OECD som står bak undersøkelsen, og det er 15-åringers kompetanse innen 'reading literacy', 'mathematical literacy' og 'scientific literacy' som undersøkes. Disse tre begrepene er vanskelige å oversette til norsk på en meningsfull måte, men i norske rapporter om PISA er 'mathematical literacy' oversatt til både matematikk, matematisk kompetanse og matematikken i PISA.

I PISA-undersøkelsene ønsker en å finne ut hvordan elevene bruker sin matematiske kompetanse for å løse virkelighetsnære problem, og her har problemløsning sin naturlige plass. PISA er ikke en læreplanbasert undersøkelse av elevenes kunnskaper, men det matematiske innholdet samsvarer allikevel i høy grad med den norske læreplanen. PISA-rammeverket tar utgangspunkt i hva ledende matematikkdidaktikere mener er viktig kompetanse for videre utdanning, yrkesliv og deltakelse i samfunnet for øvrig. Forskjellen mellom PISA og LK06 handler først og fremst om at i kompetansemålene i læreplanen vektlegges både ren matematisk kompetanse og anvendt kompetanse, mens i PISA-undersøkelsen måler en hvordan elevene anvender sin matematiske kompetanse. Til forskjell fra TIMSS-undersøkelsene (Grønmo & Onstad, 2012) inneholder ikke PISA-undersøkelsen oppgaver som måler teknisk regneferdighet i form av å løse oppstilte oppgaver. Regneferdigheter og god kjennskap til metoder er likevel viktige for å kunne lykkes med PISA-oppgavene. Innholdsområdene i PISA og LK06 kan illustreres slik:



Figur 4. Kjærnsli og Olsen (2013, s. 60)

En ser at de ulike prosessene i PISA-rammeverket samsvarer med rammeverket for de grunnleggende ferdighetene i regning i LK06. Begge rammeverkene beskriver problemløsningsprosessen, hvor rammeverket for den grunnleggende regneferdigheten inkluderer et fjerde aspekt, kommunikasjon, som kan sees på som implisitt i de tre PISA-prosessene:



Figur 5. Kjærnsli og Olsen (2013, s. 61)

I et forsøk på å avgrense definisjonen på matematisk kompetanse i PISA, kan en kort gi en beskrivelse av de tre problemløsningsprosessene. Matematisk handling i form av problemløsning og modellering, består av tre prosesser som elevene må arbeide seg gjennom for å kunne løse oppgaven. Den første prosessen er å gjenkjenne og formulere, som innebærer å omforme det opprinnelige problemet til et matematisk problem. Den andre prosessen er å bearbeide og bruke de ferdighetene og metodene en har til å gjennomføre matematiske operasjoner, beregninger og resonnement. Spesielt innenfor den andre prosessen, men også delvis innenfor den første, er det naturlig å plassere heuristikker. Det matematiske resultatet må deretter forstås og vurderes i lys av den opprinnelige konteksten, som utgjør den siste fasen med å tolke og vurdere. Disse tre prosessene utgjør til sammen problemløsningsprosessen tilsvarende slik den ble fremstilt første gang av Polya (1945). Kort forklart inneholder det internasjonale begrepet ‘mathematical literacy’ et bredere spektrum av kunnskaper og ferdigheter enn det som tradisjonelt forbindes med matematikk. I PISA vektlegges ferdigheter og kunnskaper som en antar blir viktige for at unge mennesker skal kunne spille en konstruktiv rolle i samfunnet (Kjærnsli, Lie, Olsen, Roe & Turmo, 2004).

Ved å gjennomføre undersøkelsen hvert tredje år er det mulig å se utviklinger over tid. Alle tre fagområdene, norsk, matematikk og naturfag, blir testet hver gang, men bare ett av dem har til enhver tid hovedfokus. PISA-undersøkelsen ble første gang gjennomført i år 2000, da med lesing som hovedfokus. I 2003 og 2012 var det matematikk som var hovedfokus, som inkluderte elevenes evne til problemløsning.

Ifølge Kjærnsli m.fl. (2004) har PISA etter all sannsynlighet spilt en rolle utdanningspolitisk og faglig i Norge, som også er intensjonen med PISA-undersøkelsen slik den er definert. Siden de første PISA-resultatene i år 2000 har det blitt satt i gang en rekke endringsprosesser i norsk skole. En av disse er innføringen av obligatoriske nasjonale prøver innen lesing, skriving, matematikk og engelsk. Våren 2004 ble disse prøvene gjennomført for første gang på 4. og 10. trinn, blant annet i matematikk. Det var første gangen en innførte et så omfattende nasjonalt evalueringssystem i Norge. Til da hadde en bare hatt avgangsprøver i 10. klasse og eksamen i videregående opplæring, prøver som i de aller fleste tilfellene bare gjaldt et utvalg av elevene.

I 2002 presenterte Utdannings- og forskningsdepartementet (Utdannings- og forskningsdepartementet, 2002) en femårig strategiplan for realfagene, hvor de presenterte både en situasjonsbeskrivelse av realfagene i Norge, og tiltak for å endre på situasjonen som ble beskrevet som alvorlig. Noen av tiltakene var å styrke kompetansen hos lærere, elever og ledere, samt å få frem nytteverdien og skape mer positive holdninger til realfagene. Planen forholdt seg tydelig til PISA-resultatene: for eksempel kunne en finne et uttalt mål som om at norske elever skulle plassere seg blant den beste firedelen sammenlignet med øvrige OECD-land i matematikk og naturfag (Utdannings- og forskningsdepartementet, 2005, s. 12). Opprettelsen av nasjonale sentre innenfor lesing, matematikk og naturfag kan ifølge Kjærnsli m.fl. (2004) også ses i sammenheng med Norges deltakelse i PISA. Matematikksenteret ble åpnet i 2002, og har siden da vært et nasjonalt ressurssenter for matematikkdidaktisk kompetanse.

I 2004 kom St.meld. nr. 30 (2003–2004) hvor de fem PISA-inspirerte ferdighetene skulle danne grunnlaget for samtlige fagplaner i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2005b). Målet var at en lærer i hvilket som helst fag skulle legge vekt på at elevene forstod det de leste om faget, at de forstod og selv kunne bruke matematiske fremstillinger knyttet til faget, at de kunne uttrykke sin fagforståelse skriftlig og muntlig, og at de kunne benytte IKT både til å lære og til å vise hva de hadde lært. Matematikken i PISA blir ifølge Kjærnsli m.fl. (2004, s. 34) sett på som «et verktøy for å beskrive, bearbeide og analysere fenomener, samt et perspektiv som vektlegger at matematikken har en egenart knyttet til det å gjøre matematikk (prosessene).» Denne operasjonaliseringen av matematikk har tydelige likhetstrekk med problemløsning i matematikk, hvor en går fra et virkelig problem, som en omgjør til et matematisk problem, som en finner en matematisk løsning på, og som en må vurdere om er en virkelig løsning av det opprinnelige problemet. Oppgaver som egner seg for trinnvise løsningsprosesser antas å være den typen av oppgaver som er best egnet for å få innsikt i elevenes matematiske kompetanse, slik PISA definerer den. De ulike trinnene har likheter med Polyas (1945) firetrinns modell for problemløsning, hvor en finner de ulike heuristiske tilnærmingsmåtene først og fremst innenfor trinn to og tre, lage og utføre planen.

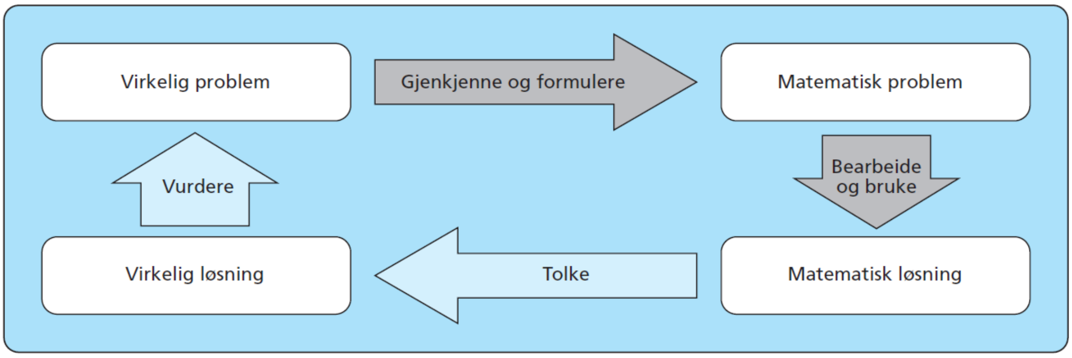
Oppgavene i PISA har sitt utgangspunkt i tre sentrale begreper. Disse består av fire sentrale matematiske ideer som definerer innholdsaspektet, tre kompetanseklasser som beskriver de underliggende kognitive prosessene og fire kontekster som beskriver de situasjonene som problemene springer ut fra (Kjernsli m.fl., 2004). De fire matematiske ideene er ‘forandring og sammenheng’, ‘rom og form’, ‘tall og mål’, og ‘usikkerhet’. Rammeverket i PISA gir en bred og omfattende beskrivelse av disse fire ideene (OECD, 2003). De tre kompetanseklassene er en kognitiv klassifisering av hvordan en elev skal kunne ta i bruk sin matematiske kunnskap og er en syntese av Niss og Jensen (2002) sine åtte matematiske kompetanser. Kompetanseklasse 1 i PISA er ‘reproduksjon’, ‘definisjoner’ og ‘beregninger’. Kompetanseklasse 2 er å se forbindelser og kunne integrere informasjon som grunnlag for problemløsning. Kompetanseklasse 3 er matematisk innsikt og generalisering, som er den mest avanserte klassen. Det følger imidlertid ikke at dette er en beskrivelse av varierende vanskegrad til oppgaver, da en kan tenke seg komplekse utregninger i kompetanseklasse 1 og enkle matematiske bevis i kompetanseklasse 3. Likevel er det åpenbart at økende kompetanseklasse svarer til en økt grad av kompleksitet. Oppgavene i PISA skal knyttes til fire kontekster som er tenkt å være relevant for livet til en 15-åring i vid forstand. Noen av problemstillingene er nære elevens liv, kalt personlig kontekst. Andre er rettet mot skole og fritid, kalt sosial kontekst. I tillegg er noen av mer offentlig og samfunnsmessig kontekst, og til slutt problemstillinger som kjennetegnes ved at det er matematikken i seg selv som er konteksten, kalt vitenskapelig kontekst.

PISA ble første gang gjennomført i år 2000, da med lesing som hovedfokus. De norske matematikkresultatene viste at elevene presterte 1 poeng under gjennomsnittet, og vesentlig lavere enn de andre nordiske landene (Lie, Kjærnsli, Roe & Turmo, 2001). I PISA 2003 var matematikk hovedfokus og de norske elevene skåret 495 poeng totalt. De øvrige nordiske landene skåret alle over OECD-snittet på 500, og Finland skilte seg særdeles positivt ut. Innenfor de fire sentrale ideene skåret norske elever godt over gjennomsnittet på usikkerhet (513), og godt under gjennomsnittet på forandring og sammenheng (488) og rom og form (483). Innenfor tall og mål (494) presterte de like under OECD-gjennomsnittet. Singapore, det landet med flest topprangeringer i PISA og TIMSS, var ikke med, men Hongkong var med og toppet lista i 2003. Kjernsli m.fl. (2004) uttrykte at den norske profilen fra TIMSS 1995 ble bekreftet i PISA 2003 gjennom gode prestasjoner innen statistikk og sannsynlighetsregning, og svake prestasjoner innen geometri, funksjoner og algebra. Det ble også pekt på vanskeligheter med å kunne forklare de relativt svake norske resultatene når en samtidig visste at den norske læreplanen vektla et perspektiv på matematikk som var svært sammenfallende med definisjonen i PISA. Innenfor den kognitive dimensjonen, inndelt i tre kompetanseklasser rangert fra lavere ordens kognitive ferdigheter, som for eksempel reproduksjon, til høyere ordens kognitive ferdigheter, som for eksempel generalisering, skilte de norske elevene seg ikke ut sammenlignet med det internasjonale snittet. De andre nordiske landene skåret riktignok alle høyere enn OECD-snittet innenfor alle tre kompetanseklassene, med Finland på topp.

I PISA 2006 og 2009 var ikke matematikk hovedfokus, men det var det i PISA 2012. I matematikkrammeverket for PISA 2012 (Kjærnsli & Olsen, 2013) beskrives elevene som aktive problemløsere, hvor innholdet i den matematiske kompetansen først og fremst handler om å kunne formulere, bruke og vurdere matematikk i et bredt spekter av kontekster. I PISA 2012 har en med utgangspunkt i Niss og Jensen (2002) definert sju matematiske kompetanser som blant annet inneholder algebra og problemløsningsingredienser som det å kunne bruke symbol- og formalspråk, og planlegge, velge ut og bruke problemløsningsstrategier. Det vil variere fra oppgave til oppgave i hvor stor grad de forskjellige kompetansene tas i bruk for å løse problemet, men ifølge Kjærnsli og Olsen (2013) kan hver av de sju tas i bruk i alle tre prosessene. Til PISA 2012 ble det utviklet matematikkprøver både i digital form og på papir. Alle deltakerlandene gjennomførte den på papir, og Norge var også med på den digitale. Den største forskjellen mellom den papirbaserte og den digitale prøven var at den digitale inneholdt dynamiske oppgaver hvor en kunne ta i bruk regneark og graftegner. I slike oppgaver kunne elevene se animasjoner, manipulere figurer eller tallmateriale, og i mye større grad løse oppgavene ved hjelp av problemløsningsmetoden gjett og sjekk.

I PISA 2012 skåret norske elever 489 poeng, noe som var 6 poeng svakere enn i 2003. Alle de andre nordiske landene hadde større tilbakegang enn Norge, og Sverige hadde den største tilbakegangen fra 509 til 478. Finland skåret 544 poeng i 2003 og 519 poeng i 2012. Som en tommelfingerregel regner en at 35 poeng på PISA-skalaen tilsvarer ca. ett års skolegang. Kjærnsli og Olsen (2013) karakteriserte matematikkferdighetene til norske elever fra 2003 til 2012 som relativt stabile, men uttrykte bekymring fordi antall elever på høyt nivå, nivå 5 og 6, hadde sunket kraftig fra 2003 til 2012.

I PISA 2012 ble det for første gang rapportert resultater for hver av de tre delene i problemløsningsprosessen, gjenkjenne og formulere, bearbeide og bruke, og vurdere:

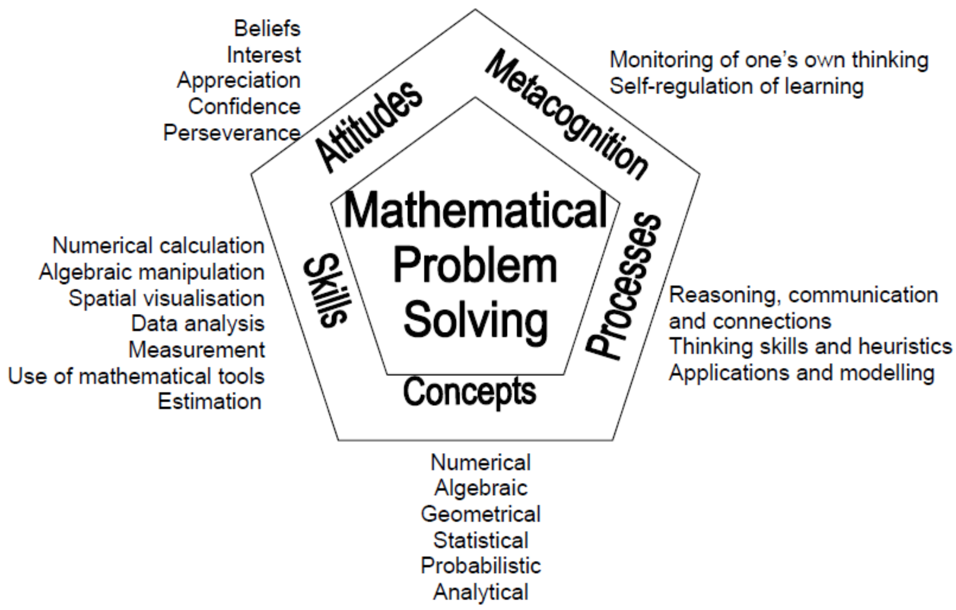


Figur 6. Kjærnsli og Olsen (2013, s. 47)

De norske elevene skåret noe under OECD-snittet på prosessen med å gjenkjenne og formulere og på å bearbeide og bruke. På den siste prosessen, vurdere, skåret de litt over. De høyt presterende landene hadde alle det til felles at de skåret høyere i det å formulere enn for de andre prosessene og for matematikk samlet. For norske elever var det motsatt.

Kjernsli & Olsen (2013, s. 79) karakteriserer de høyeste nivåene innenfor den andre prosessen, bearbeide og bruke, som det at elevene har en velutstyrt verktøykasse med matematiske metoder og prosedyrer som de kan anvende fleksibelt, og uttrykker at det kan være «gunstig å fokusere mer på å tilegne seg matematiske metoder i matematikkundervisningen, for på den måten å øke antall metoder man har til rådighet til modellering og problemløsning.»

I PISA 2015 var ikke matematikk hovedområde, og det ble av den grunn ikke rapportert noe om elevenes kompetanse innenfor de tre problemløsningsprosessene. I PISA 2012 deltok ca. 60 prosent av utvalget på en digital prøve i tillegg til den papirbaserte. I PISA 2015 var hele undersøkelsen digital, men en benyttet ikke de digitale oppgavene fra PISA 2012. For å kunne opprettholde muligheten med trenddata helt tilbake til PISA 2002 valgte en å digitalisere de papirbaserte oppgavene som en tidligere hadde brukt (Kjærnsli & Jensen, 2016). For Norge viste trendanalysen at endringer i skår fra PISA 2012 til PISA 2015 var vesentlig, men ser en på endringer fra PISA 2003 til PISA 2015, så var den liten (Kjærnsli & Jensen, 2016). Fremgangen for norske elever fra PISA 2012 til PISA 2015 blir delvis forklart ved at de i større grad enn andre bruker digitale verktøy i matematikkundervisningen. Også de svenske og danske elevene hadde fremgang, mens de finske og islandske elevene fortsatte sin tilbakegang. Gjennomsnittseleven i Finland og Danmark presterte på samme nivå i PISA 2015. I PISA 2015 var det nok en gang asiatiske land som skåret høyest, og elevene i Singapore skåret i gjennomsnitt aller høyest. Deres fokus på problemløsning, som utgjør selve kjernen i læreplanen, har stått sterkt siden 1990 og antas å være en medvirkende årsak til deres dominante posisjon både i TIMSS og PISA.



Figur 7. Rammeverk for læreplaner i Singapore (Ministry of education, 2007, s. 2).

Innenfor prosessdelen på figuren finner en blant annet 'thinking skills and heuristics' hvor førstnevnte er ferdigheter som kan brukes i tenkeprosessen slik som å klassifisere, sammenligne, sekvensere, analysere deler, identifisere mønster og sammenhenger, induksjon, deduksjon og visualisering. Konkrete 'heuristics' har helt siden 1990 blitt presentert, her eksemplifisert med 12 heuristikker gruppert i fire kategorier i læreplanen:

- To give a representation,
  e.g. draw a diagram, make a list, use equations
- To make a calculated guess,
  e.g. guess and check, look for patterns, make suppositions
- To go through the process,
  e.g. act it out, work backwards, before-after
- To change the problem,
  e.g. restate the problem, simplify the problem, solve part of the problem

Figur 8. Liste over heuristikker i læreplaner i Singapore. (Ministry of education, 2007, s. 4).

En tilsvarende opplisting av heuristikker har vi sett eksempel på i arbeidet frem mot ny læreplan i Norge gjeldende fra 2020:

• Problemløsing og utforsking	Problemløsing innebærer å løse oppgaver der eleven i utgangspunktet ikke kjenner en løsningsmetode. For å bli gode problemløsere må elevene utvikle varierte og effektive strategier. Dette fordrer kreativitet og utholdenhet. • stille matematiske spørsmål • identifisere problem • utvikle utholdenhet • utvikle problemløsingsstrategier som: o se etter mønster, systematisere, visualisere, gjett og sjekk, løse deler av problemet, arbeide baklengs, tenke på tilsvarende problem, løse et enklere problem, endre angrepsmåte • utvikle algoritmisk tenkning

Figur 9. Utdanningsdirektoratet (2017)

I læreplanversjonen gjengitt over kan det poengteres at de ni problemløsningsstrategiene er de samme som jeg analyserte i delstudie 1, de er til og med gjengitt i samme rekkefølge som jeg presenterte dem (Kongelf, 2011). I senere versjoner av den nye læreplanen er de ni spesifikke problemløsningsstrategien erstattet med mer generelle beskrivelser av strategier i problemløsning.

I dette kapitlet har jeg forsøkt å beskrive det teoretiske fundamentet for studien og dens kontekst gjennom definisjoner og diskusjoner av nøkkelbegrep, samt læreplandokumenter, rammeverk og norske prestasjoner på internasjonale undersøkelser. I neste kapittel vil jeg berette om de vitenskapelige metodene som er benyttet i studien.

4 Metode

4.1 Design

I studien har jeg benyttet et tverrsnittdesign. I denne type design samler en inn data fra mer enn ett tilfelle i samme tidsrom som muliggjør å få samlet en kvantitativ eller kvantifiserbar mengde av data knyttet til to eller flere variabler som blir undersøkt med den hensikt å kunne oppdage eventuelle mønstre. De ulike lærebøkene, som alle er skrevet ut ifra samme læreplan (Utdanningsdirektoratet, 2005b), utgjør tilfellene. I den første delstudien er variablene forhåndsdefinert i form av ni problemløsningsheuristikker. I de to andre delstudiene er variablene ikke definert på forhånd. Datainnsamlingen innenfor hver delstudie pågikk tilnærmet samtidig hvor jeg suksessivt og repeterende arbeidet meg igjennom bøkene. Suksessivt i form av at jeg tok for meg en og en bok, og repeterende i form av gjentatte runder med gjennomlesninger og stadige justeringer av datamaterialet. Dette arbeidet har vært svært arbeidskrevende, for eksempel ved at jeg i første delstudie analyserte 740 eksempler en rekke ganger. Det samme gjaldt for delstudie 2 og 3, hvor henholdsvis 295 tekstsider inklusive eksempler i introduksjonskapitlene til algebra, og 2547 oppgaver tilhørende introduksjonskapitlene ble gjennomgått enda flere ganger. Jeg skriver enda flere ganger fordi i disse to delstudiene ble det benyttet en induktiv tilnærming til opprettelsen av kategorier i motsetning til den deduktive tilnærmingen i delstudie 1 som hadde forhåndsdefinerte kategorier ut ifra teori. Hver delstudie genererte et kvantifiserbart datamateriale hvor de innsamlede dataene gjorde meg i stand til å oppdage mønstre i materialet.

4.2 Innholdsanalyse

I Fan, Zhu og Miao (2013) sin statusoppdatering av forskning på lærebøker i matematikk viser de at det er en overvekt av innholdsanalysestudier, hvor det typisk fokuseres på et bestemt matematisk emne som innrettes mot en sammenligning av andre lærebøker. Ifølge Rezat og Strässer (2017) er forskning som er basert på innholdsanalyser i stand til å svare på spørsmål om innholdet i lærebøker og sammenhenger mellom innholdet i lærebøkene og konteksten som de blir brukt. I denne konteksten er ikke innholdet begrenset til et matematisk innhold, men omfatter også didaktiske aspekter knyttet til det matematiske innholdet. I delstudie 1 har jeg benyttet en kvantitativ innholdsanalyse, mens i delstudie 2 og 3 har jeg benyttet en kvalitativ innholdsanalyse. Begge metodene er vitenskapelige metoder for analyse av innholdet i trykte tekster, dokumenter og massekommunikasjonsmidler, men den kvalitative er underrepresentert i forhold til den kvantitative innholdsanalysen innenfor både litteratur og forskning. Cho og Lee (2014, s. 17) beskriver likheter og ulikheter mellom 'grounded theory' og kvalitativ innholdsanalyse, og konkluderer med at:

> Fewer debates and suggestions on how to use qualitative content analysis are available, and systematic guidelines or rules for its analysis procedures are lacking. Little consensus exists in what qualitative content analysis is. Qualitative content analysis has not been introduced in many qualitative method books as a result of the dominance of quantitative content analysis (Schreier, 2012).

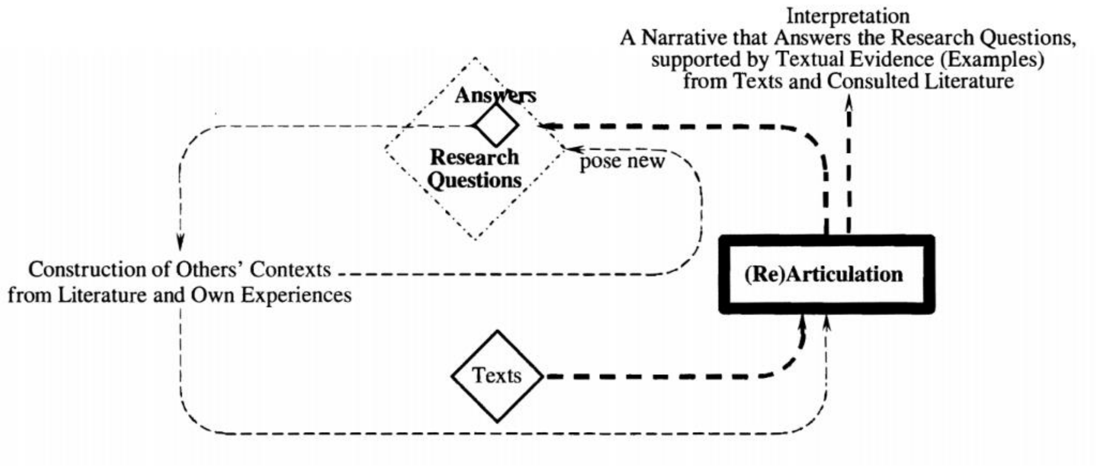
Elo & Kyngäs (2008) berører noe av det samme når de uttrykker at siden kvalitative innholdsanalyser er mindre standardiserte og formulerte, fører det til at de ofte blir mer komplekse enn kvantitative innholdsanalyser. Krippendorff (2004) beskriver den kvantitative/kvalitative forskjellen som en misforstått dikotomi og understreker at alle tekster i utgangspunktet er kvalitative og at innholdsanalyser kan resultere i både tall og verbale kategorier. Til tross for at tilhengere av den kvalitative tilnærming argumenterer for at enhver tekst er unik og at den muliggjør forskjellige tolkninger, mener Krippendorff (2004, s. 87) at

> both approaches sample text, in the sense of selecting what is relevant; unitize text, in the sense of distinguishing words or propositions and using quotes or examples; contextualize what they are reading in light of what they know about the circumstances surrounding the texts; and have specific research questions in mind.

Mayring (2014, s. 31) kritiserer også den metodiske dikotomiseringen og definerer den kvalitative innholdsanalysen som en blandet metodetilnærming hvor han ser på tildelingen av kategorier til teksten som et kvalitativt trinn og analysen av frekvensen til kategoriene som et kvantitativt trinn.

Kvalitative innholdsanalytikere befinner seg ofte innenfor såkalte hermeneutiske sirkler (Krippendorff, 2004) eller en hermeneutisk spiral (Mayring, 2014) hvor en bruker kjent litteratur til å kontekstualisere lesingen av teksten og til å reartikulere innholdet i teksten med tanke på dens tiltenkte kontekst. Forskningsspørsmålet og svaret på det utvikles gradvis etter hvert som en arbeider seg dypere og dypere inn i teksten. Prosessen bestående av rekontekstualisering, retolking, og redefinering av forskningsspørsmålet foregår inntil en tilfredsstillende tolking er fremkommet. I motsetning til den kvantitative passer det i mindre grad den kvalitative innholdsanalytikeren å følge en bestemt sekvens av analytiske steg. Gjennom å anerkjenne de holistiske kvalitetene til teksten rettferdiggjøres det å stadig gå tilbake til tidligere tolkninger i lys av nyere lesing. Ifølge Krippendorff (2004) er slike tekstlesinger arbeidsomme og ikke lette å standardisere, og en viktig årsak til at forskeren må foreta en avgrensning på tekstmengden som skal analyseres. I studien min er algebra avgrenset til introduksjonskapitlene i algebra i lærebøkene og problemløsning er avgrenset til eksemplene i lærebøkene.

Kvalitative innholdsanalytikere underbygger ofte tolkningene sine ved å veve inn autentiske tekstutdrag og litteratur som berører konteksttene som tekstene blir brukt i:



Figur 10. Illustrasjon av den kvalitative innholdsanalysen (Krippendorff, 2004, s. 89).

Fremstillinger av forskningsresultater som vever inn tekstutdrag og litteratur på denne måten får ofte utfordringer knyttet til publisering på grunn av tidsskriftenes ordbegrensninger, men den appellerer til personer som har interesser av både det faglige innholdet og konteksten som tekstene blir brukt i, eksemplifisert i forskningen min med matematikklærere, matematikkdidaktikere og skolepolitikere.

Mayring (2014, s. 31) beskriver innholdsanalyser som «a systematic procedure of assignment of categories to portions of text.» Doktorgradsstudien min bygger på innholdsanalyser hvor kategoriseringen i problemløsningsstudien har en deduktiv tilnærming, og kategoriseringen i de to algebrastudiene har en induktiv tilnærming. I den deduktive tilnærmingen lages kategoriene ut fra teori, mens i den induktive utvikles de fra selve datamaterialet. Tildelingen av kategorier til datamaterialet i deduktive tilnærminger kan sies å benytte en lukket koding, mens tildelingene i induktive tilnærminger benytter en åpen koding. Det er kategorisystemet som er det sentrale analyseverktøyet i innholdsanalyser. Kategoriene bidrar også til intersubjektivitet ved at de gjør det mulig å kunne rekonstruere eller gjenta analysen for andre. De gjør det også mulig å sammenligne funn og vurdere graden av pålitelighet i studien.

Krippendorff (2004, s. 18) definerer innholdsanalyse på følgende måte: «Content analysis is a research technique for making replicable and valid inferences from texts (or other meaningful matter) to the contexts of their use.» Krippendorff beskriver videre innholdsanalysen som et vitenskapelig verktøy, hvor den som teknikk inkluderer spesifiserte prosedyrer. Prosedyrene skal sørge for at en kommer frem til funn som er replikerbare og valide. Dersom prosessen skal være replikerbar, må den være styrt av regler som er eksplisitt angitt og anvendt lik på alle analyseenhetene. Validitet handler om funnenes gyldighet, og inkluderer åpenhet om hvordan en velger ut, leser og analyserer tekster og det å være konsekvent i måten en anvender prosedyrene på. Det ideelle innenfor innholdsanalyse, spesielt den kvantitative, er å beskrive og følge prosedyrene så nøyaktig som mulig, hvor målet er at enhver som benytter seg av de samme prosedyrene på det samme datamaterialet vil få det samme resultatet.

Både definisjonen over og kravene om replikerbarhet og validitet passer utvilsomt bedre til den kvantitative tilnærmingen enn den kvalitative. Kvalitative innholdsanalytikere tenderer ifølge Krippendorff (2004) til å benytte andre kriterier enn disse når de skal vurdere forskningsresultatene, og spekulerer på om det delvis kan skyldes at det er vanskelig å påvise intersubjektivitet. Som forskningsmetode skiller innholdsanalysen seg ut i form av å være mer en tilnærming til analysen av datamaterialet enn som en metode for å generere data. Dette gjelder i sterkere grad den kvantitative enn den kvalitative innholdsanalysen.

Innenfor kvantitativ innholdsanalyse (Elo & Kyngäs, 2008) benytter en seg ofte av et kodeskjema for å maksimere objektiviteten og systematikken. Kodeskjemaet består av en kodeoversikt og en kodemanual, som en lager før en starter å analysere datamaterialet. Jeg vil beskrive kodeskjemaet i problemløsningsstudien min i neste kapittel. Innenfor mer kvalitative innholdsanalyser velger en ikke koder på forhånd, de dukker gradvis opp gjennom analysen hvor en koder alt i starten som en etter hvert samler i større og større grupper. Innholdsanalyse, underforstått kvantitativ innholdsanalyse, er ifølge Bryman (2008) en godt etablert kvantitativ forskningsmetode hvor målet er å kunne gi en kvantitativ beskrivelse av datamaterialet i form av kategorier som er spesifiserte på forhånd. I tillegg til å gi en beskrivelse av det som finnes i materialet, er det ofte nesten like interessant å få en oversikt over hva som ikke finnes der.

4.3 De tre delstudiene

De seks lærebøkene, Grunntall (Bakke & Bakke, 2007), Kode X (Christensen, 2007a, 2007b), Mega (Guldbrandsen m.fl., 2007a, 2007b), Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006b), Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007b, 2007c) og Tetra (Hagen m.fl., 2006b), er alle skrevet ut ifra LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2005b) hvor samtlige 740 eksempler i disse utgjorde analyseenhetene i delstudie 1. Analysen av disse pågikk tilnærmet samtidig hvor jeg suksessivt og repeterende arbeidet meg igjennom bøkene. Suksessivt i form av at jeg tok for meg en og en bok, og repeterende i form av at jeg hadde flere runder med stadige justeringer. Dette arbeidet var tidkrevende, hvor hvert av de 740 eksemplene ble analysert en rekke ganger. Hver lærebok genererte et kvantifiserbart datamateriale som var knyttet opp mot forekomsten, innholdet og det karakteristiske ved de ni forhåndsdefinerte heuristiske problemløsningsmetodene. Når det var gjort kunne jeg starte å studere de innsamlede dataene fra alle lærebøkene samtidig, i håp om å kunne oppdage mønstre i datamaterialet. Metoden kan i hovedsak karakteriseres som deduktiv og kvantitativ. Deduktiv gjennom de forhåndsdefinerte kategoriene i kodeskjemaet, og kvantitativ gjennom den tallmessige fordelingen av de forskjellige kategoriene. Kodeskjemaet bestod av en kodeoversikt og en kodemanual. Kodeoversikten inneholdt fire dimensjoner med ulike kategorier innen hver dimensjon.

Text-book	**Ex-ample**		**Main subject area**					**Heuristic approach**								
	total	approaches	numbers and algebra	geometry	measuring	statistics, probability and combinatorics	functions	look for a pattern	make a systematic table	make a visualisation	guess and check	solve part of the problem	work backwards	think of a related problem	simplify the problem	change your point of view

Figur 11. Kodeoversikt til delstudie 1 om heuristiske tilnærmingsmåter.

Dimensjonen 'textbook' er ikke kodet som noe annet enn navnet på de analyserte lærebøkene. 'Example'-dimensjonen er delt i to, hvor den ene inneholder det totale antallet eksempler i hver lærebok og den andre det totale antallet av heuristiske tilnærmingsmåter. 'Main subject area' er delt inn i fem, bestående av de samme matematiske emnene som finnes i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2005b). 'Heuristic approach' er delt i ni deler, hver bestående av en heuristisk tilnærmingsmåte. I designet av kodeoversikten er det et mål at de ulike dimensjonene er adskilte i betydningen at det ikke er noe begrepsmessig eller empirisk overlapp mellom dem. Det er uproblematisk i de fire dimensjonene som utgjør vidt forskjellige fasetter av lærebøkene. Det er også et mål at kategoriene innenfor hver dimensjon er så gjensidig utelukkende som mulig i betydningen av ikke-overlappende kategorier. Det har til en viss grad vært utfordrende innenfor den fjerde dimensjonen. I pilotstudien benyttet jeg de samme 17 problemløsningsheuristikken som Fan og Zhu (2007) gjorde i deres internasjonale sammenligningsstudie av hvordan lærebøker i Kina, Singapore og USA presenterte disse. Disse heuristikkene kom som resultat av læreplaner, standarder og pensumet i de tre landene. Pilotstudien viste at det var flere av de 17 heuristikkene som ikke fantes i norske lærebøker, i tillegg til at enkelte av dem krevde matematisk kunnskap utover norsk ungdomsskolenivå. Det var også noen av heuristikkene til Fan og Zhu som var vanskelige å skille fra hverandre. Det var for eksempel tilfelle med 'restate the problem' og 'simplify the problem'. Jeg valgte å kutte ut Fan og Zhu sin 'use an equation' fordi den vanligvis er betraktet mer som en standard og tradisjonell løsningsmetode enn en typisk heuristisk tilnærming innenfor problemløsningslitteraturen. I etterkant av piloten og etter å ha studert Lester (1996) og Björkqvist (2003) sine beskrivelser og lister over heuristiske tilnærminger, ble delstudien basert på ni heuristiske tilnærminger.

Kodemanualen skal gi klare beskrivelser av de forskjellige kategoriene slik at den som koder har så liten frihet som mulig når en skal tildele koder til analyseenhetene. Analyseenhetene var samtlige 740 eksempler i de seks utvalgte lærebøkene, hvor kodemanualen over de ni heuristiske tilnærmingsmåtene var slik:

Heuristic approaches	**Descriptions**
1. Look for a pattern	Identifying patterns in the given problem based on observation of common characteristics, variations, or differences in the problem.
2. Make a systematic table	Constructing a systematic list or table containing the possibilities for a given situation.
3. Make a visualisation	Creating a visualisation on the available information to visually represent the problem.
4. Guess and check	Making a reasonable guess of the answer and then checking the result to see if it works. If necessary, repeating the procedure to find the answer, or at least a close approximation.
5. Solve part of the problem	Dividing a problem into sub-problems, then solving them one by one in order to solve the original problem.
6. Work backwards	Approaching a problem from its outcomes or solutions backwards to find what conditions they eventually need to meet.

7.	Think of a related problem	Using methods or results of a related problem, or recalling a related problem, or considering a similar problem solved before in order to solve the problem.
8.	Simplify the problem	Changing the complex numbers or situations in the problem into simpler ones without altering the problem mathematically.
9.	Change your point of view	Approaching a problem from another angle.

Figur 12. Kodemanual til delstudie 1 om heuristiske tilnærmingsmåter.

I arbeidet med lærebøkene oppstod det etter hvert et behov for å kategorisere eksempler som tilhørte enkelte av de ni heuristiske tilnærmingsmåtene i underkategorier. Grunnen til det var at eksemplene kunne være relativt ulike, men allikevel bli kodet med den samme heuristiske tilnærmingsmåten. Det gjaldt spesielt 'make a visualisation'. I den nye runden med koding av eksemplene som tilhørte denne tilnærmingen, var det i større grad en induktiv kategorisering siden disse underkategoriene ikke var predefinerte. Delstudie 1 kan av den grunn sies å ha benyttet en kvantitativ innholdsanalyse i utgangspunktet, men tildelingen av underkategorier av eksemplene gjorde at studien også hadde kvalitative innslag. I tillegg er det slik at det ligger kvalitative momenter i kodingen av eksemplene også fordi disse må tolkes, det er ikke bare å telle opp heuristikkene. Dette kan være et eksempel på Mayring (2014) og Krippendorff (2004) sin påstand om en feilaktig dikotomisering av den kvantitative og kvalitative innholdsanalysen.

I delstudie 2, om introduksjonen av algebra, har jeg benyttet en induktiv kvalitativ innholdsanalyse: «a research method for the subjective interpretation of the content of text data through the systematic classification process of coding and identifying themes or patterns» (Hsieh & Shannon, 2005, s. 1278). Den kvalitative innholdsanalysen kan i likhet med den kvantitative innholdsanalysen plasseres innenfor et tverrsnittdesign hvor jeg samler inn data fra flere dokumenter relatert til samme tidsrom. De ulike lærebøkene utgjør variablene som blir undersøkt med den hensikt å kunne oppdage eventuelle mønstre. En av grunnene for at jeg valgte en induktiv innholdsanalyse var fordi jeg ikke klarte å finne tilsvarende studier av algebraoppgaver i matematikkbøker. I tillegg ønsket jeg å ta hensyn til at hva som defineres som algebra varierer fra land til land, og fra læreplan til læreplan, og kanskje fra lærebok til lærebok innenfor samme land også. Målet mitt har vært å belyse algebrainnholdet i de norske lærebøkene på en vitenskapelig måte som ingen har gjort tidligere.

Jeg hadde et ønske om å starte med så åpne øye som mulig i betydningen at jeg ikke skulle utarbeide ferdige kategorier på forhånd, men i stedet la kategoriene oppstå gradvis fra selve datamaterialet etter gjentatte gjennomlesninger og sammenligninger. Gjennom den induktive tilnærmingen til datamaterialet har jeg ønsket å behandle alle komponentene som kapitlene bestod av på like linje, og med det kan argumentere for at studien gir en form for helhetlig framstilling av hvordan lærebøkene introduserer algebra. De genererte kategoriene er et resultat av sammenfallende enkeltkomponenter i de analyserte lærebøkene. Gjennom meningssøkende og tolkende gjennomlesninger har den kvalitative innholdsanalysen gitt meg muligheten til å karakterisere innholdet i introduksjonskapitlene i algebra på en subjektiv, men vitenskapelig måte: Subjektiv i kraft av at funnene er et produkt av mine ferdigheter, kunnskaper og analytiske evner, vitenskapelig i kraft av at studien er replikerbar.

Den vitenskapelige innholdsanalysen startet med å lokalisere analyseenhetene, som var de respektive kapitlene i de ulike lærebøkene som introduserte bokstaver som symbol for variable størrelser for første gang. Det er i algebrakapitlet i 8. klassebøkene til Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006a), Nye Mega (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2006), Tetra (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006a) og Grunntall (Bakke & Bakke, 2006), i 9. klasseboken til Kode X (Christensen, 2007), og i funksjonskapitlet i 8. klasseboken til Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a).

Lærebok	**Kapittelnavn**	**Antall sider**
Faktor 1	Tall og algebra	26
Kode X9A	Algebra	114
Nye Mega 8B	Algebra	36
Tetra 8	Algebra	41
Sirkel 8B	Sammenhenger	54
Grunntall 8	Algebra	24
Totalt		295

Figur 13. Datamaterialet til delstudie 2 om introduksjonen til algebra.

Alle sidene i introduksjonskapitlene ble analysert bortsett fra øvingsoppgavene, som utgjorde analyseenhetene i delstudie 3. Når analyseenhetene i delstudie 2 var på plass, var det neste å få en oversikt over datamaterialet og etter hvert prøve å forstå hvilket matematisk innhold det rommet. Det skjedde gradvis gjennom en rekke gjennomlesninger hvor jeg etter hvert kunne ta til å organisere de kvalitative dataene gjennom en åpen koding der jeg skrev ned egne kommentarer for hver ny gjennomlesning. Dette arbeidet var meget tidkrevende og stilte krav til systematikk og analytiske ferdigheter. Kommentarene som ble mer eller mindre supplert og endret på for hver nye gjennomlesning, gjorde meg etter hvert i stand til å systematisere og samle tilnærmet like kommentarer i større og mer generelle kategorier. Kommentarene skrev jeg først i margen på lærebøkene, før jeg begynte å bruke fargede postit-lapper som start på grupperingene. Disse fikk etter hvert egne navn og beskrivelser, som jeg tilslutt overførte til Word-dokument. Disse dannet grunnlaget for den første virkelige genereringen av kategorier, hvor hver kategori bestod av kommentarer med tilnærmet likt innhold. Jeg leste så igjennom lærebøkene på ny med disse kategoriene som referanse for å forsøke å gruppere enkelte av kategoriene i enda større kategorier. I tillegg hadde det en kontrollerende funksjon i form av om jeg var av den oppfatning at innholdet jeg tidligere hadde tillagt enkeltkomponentene i datamaterialet, fortsatt gjaldt. Ved å gruppere datamaterialet på denne måten reduserte jeg antall kategorier ved å samle observasjoner som var tilnærmet like, men like viktig var det at denne klassifiseringen innebar en kontinuerlig sammenligning mellom ulike deler av materialet som ikke hørte til samme kategori (Bryman, 2008). Datamaterialet ble gjennomarbeidet mange ganger, og jeg gjorde stadig mindre justeringer hva gjaldt omtale av og fordeling innenfor samlekategoriene, i tillegg til at det utkrystalliserte seg enkelte undergrupper av kategorier innenfor hovedkategoriene.

Den kvalitative innholdsanalysens gyldighet som metode er gitt siden det jeg studerer er deler av innholdet i de fysiske lærebøkene som jeg har fått tilsendt av forlagene. Med tanke på metodens pålitelighet, har jeg valgt å presentere en rekke autentiske tekstutsnitt sammen med beskrivelser av analysen som ligger til grunn for kategoriseringen. Når det gjelder gyldighet av innhold har jeg brukt en erfaren matematikklærer og matematikkdidaktikker til å undersøke funnene i en tilfeldig valgt lærebok. Resultatene var i høy grad sammenfallende. De gangene vi var i tvil hadde vi en meningsutveksling og foretok en analyse av den aktuelle teksten på nytt, før vi ble enige om en felles tolking av teksten.

En annen utfordring ved kvalitative innholdsanalyser er at de i mindre grad er standardiserte og formulerte, noe som fører til at de blir mer komplekse enn tradisjonelle kvantitative innholdsanalyser (Elo & Kyngäs, 2008). I tillegg krever funnene fra slike kvalitative analyser ofte et format som ikke er like forenelig med plass og ordbegrensninger i vitenskapelige artikler. Jeg har forsøkt å imøtekomme dette gjennom en selektiv presentasjon av de typiske funnene sammen med illustrerende autentiske eksempler, hvor hovedkategoriene med de viktigste underkategoriene er presentert i tabellform. For å vise rikholdigheten i datamaterialet valgte jeg å eksemplifisere enkelte ikke-typiske funn i artikkelen også. Algebradelstudien kan plasseres innenfor segmentet lærebok – matematikk i Rezat og Sträßers (2013, s.471) didaktiske tetraeder. Studien kan videre plasseres innenfor et algebradidaktisk perspektiv.

Delstudie 3 er basert på den samme forskningsmetoden som delstudie 2, en induktiv kvalitativ innholdsanalyse. Fremgangsmåten og de samme fordelene og ulempene som jeg har beskrevet i delstudie 2, gjelder fullt ut også for delstudie 3. Delstudie 3 utgjør en viktig delmengde av algebrakapitlene i det den gir en karakteristikk av oppgavene tilhørende lærebokkapitlene. Delstudie 2 og 3 kompletterer hverandre, og gir til sammen et mer utfyllende bilde av hvordan norske lærebokforfattere introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser. Målet for delstudie 3 er å analysere og beskrive det matematiske innholdet i oppgavene som lærebøkene tilbyr elevene i det de skal introduseres for bokstaver som symbol for variable størrelser. Det har jeg gjort gjennom å analysere samtlige oppgaver, 2547 (del)oppgaver, i de fem læreverkene som introduserer variable størrelser gjennom et algebrakapittel.

Lærebok	**Kapittelnavn**	**Antall (del)oppgaver**
Faktor 1	Tall og algebra	198
Nye Mega 8B	Algebra	317
Grunntall 8	Algebra	367
Tetra 8	Algebra	419
Kode X9A	Algebra	1246
Totalt		2547

Figur 14. Datamaterialet til delstudie 3 om algebraoppgaver i introduksjonen til algebra.

Disse oppgavene utgjør analyseenhetene i studien. Oppgavene er definerte som alle tiltenkte gjøremål for elevene i form av problemer, øvinger, spørsmål og aktiviteter tilhørende algebrakapitlene. De er hentet fra 9. klasseboken til Kode X (Christensen, 2007a) og 8. klassebøkene til Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006a), Nye Mega (Guldbrandsen m.fl., 2006), Tetra (Hagen m.fl., 2006a) og Grunntall (Bakke & Bakke, 2006). Delstudien kan plasseres innenfor samme segment som de to andre delstudiene, lærebok – matematikk, i Rezat og Sträßers (2013) didaktiske tetraeder.

Sammenlignet med de to første delstudiene, beskrevet i Kongelf (2011) og Kongelf (2015), handler oppgavestudien (Kongelf, under revidering) kun om de lærebøkene som introduserer den variable gjennom et algebrakapittel. Læreboken Sirkel (Thorkildsen & Maugesten, 2006) ble valgt bort fordi den introduserer den variable gjennom et funksjonslærekapittel, kalt sammenhenger. Et av hovedmålene mine var å kunne generere felles kategorier basert på sammenfallende oppgavetyper i de ulike lærebøkene, og et funksjonsperspektiv, med sine tilhørende prioriteringer av det matematiske innhold i oppgavene, hadde gjort det arbeidet vanskeligere. På den andre siden kan en argumentere for at det nettopp er på grunn av denne forskjellen mellom lærebøkene at det hadde vært interessant å ta med alle seks. Læreboken Sirkel (Thorkildsen & Maugesten, 2006) var med i den første runden med analyser i delstudie 3, men oppgavene viste seg å være vesentlig forskjellige fra de som var presentert i de andre fem lærebøkene. Som et forsøk på å endre angrepsmåte utførte jeg en pilotstudie hvor jeg brukte Kieran (1996) sin GTG-modell for algebraisk aktivitet som utgangspunkt for en analyse av alle seks lærebøkene. Denne piloten var en blanding av en deduktiv og induktiv tilnærming til innholdet i oppgavene. Dette forsøket hjalp ikke nevneverdig med hensyn på å kunne gi en mer felles karakteristikk av algebraoppgavene med utgangspunkt i hva læreplanen uttrykker om overgangen fra tall til algebra. Resultatet ble at det var kun oppgavene fra de fem lærebøkene som introduserte bokstaver som symbol for den variable gjennom et ikke-funksjonskapittel som ble med i den endelige delstudien.

Analyseenhetene i delstudie 3 er 2547 (del)oppgaver fordelt på fem lærebøker, som jeg ble gradvis mer og mer fortrolig med for hver nye gjennomlesning. Det gjorde at jeg etter hvert kunne starte med å organisere de kvalitative dataene. Dette gjorde jeg på samme måte som jeg har beskrevet under delstudie 2, hvor jeg gjennom en åpen koding skrev ned kommentarer for hver ny gjennomlesning. Kommentarene overførte jeg etter hvert til Word- og Excel-dokument. Disse dannet det første grunnlag for opprettelsen av mer generelle beskrivelser systematisert i kategorier, som bestod av kommentarer knyttet til oppgavetyper med tilnærmet likt matematisk innhold. Oppgavene ble deretter gjennomgått på ny med disse kategoriene som referanse, slik at jeg kunne gruppere kategorier som utgjorde større felles kategorier. Gjennom stadige gjennomlesninger utkrystalliserte hovedkategoriene seg. Denne formen for klassifisering innebar også en kontinuerlig sammenligning mellom ulike deler av materialet som ikke hørte til samme kategori, som på den måten hjalp til med å tydeliggjøre forskjellene på kategoriene. Hovedkategoriene sammen med de tilhørende underkategorier muliggjør både en oversikt over det matematiske innholdet i oppgavene samlet sett og muligheten til å sammenligne hvilket innhold de ulike forfatterne har prioritert når de skal implementere læreplanens intensjoner med hovedområdet tall og algebra i oppgavene.

4.4 Kritisk metodediskusjon

Å benytte seg av innholdsanalyser i lærebokforskning har, som med de fleste andre metoder, både positive og negative sider. Men før jeg går mer konkret til verks rundt dette vil jeg dvele litt rundt Krippendorffs

(2004) epistemologiske betraktninger av innholdsanalysen. I litteraturgjennomgangen finner Krippendorff (2004, s. 19) i hovedsak tre typer av definisjoner på innholdsanalyse:

1. Definitions that take content to be inherent in a text.
2. Definitions that take content to be a property of the source of a text.
3. Definitions that take content to emerge in the process of a researcher analyzing a text relative to a particular context.

Krippendorff omtaler sin egen definisjon på innholdsanalyse som den tredje typen, som i større grad enn de to første fokuserer på selve prosessen og tar hensyn til forskerens interesser og begrepsmessige deltakelse. I det ligger det epistemologiske betraktninger som at en tekst ikke eksisterer uten en leser, at et budskap ikke eksisterer uten en fortolker og at data ikke eksisterer uten en observatør. I en innholdsanalyse er det metodisk trente forskere som er kjente med teksten, som designer analysen, som beskriver koder, og som ender opp med å tolke resultatene i andres forventede forståelse. Satt på spissen kan en si at tekster ikke har leseruavhengige kvaliteter: Andre lesere og innholdsanalytikere leser bare ulikt. I forlengelse av det ligger at tekster ikke bare har én fortolkningsmulighet, de kan bli analysert ut fra mange ulike perspektiver. I tillegg er det slik at tekster henvender seg til noe annet enn teksten selv. Tekster kan gi informasjon om hendelser på fjerne steder, om ting som ikke eksisterer lengre, om ideer i folks sinn, tilsvarende som at symboler kan representere ting i deres fravær. Slike fenomener knytter lesingen av teksten sammen med noe annet enn selve teksten. Av dette følger det at innholdsanalytikeren må se utenfor det umiddelbare ved teksten, for eksempel til hvordan andre bruker teksten, hva teksten forteller dem og til ideene som teksten oppmuntrer til. Det betyr at i motsetning til innholdsanalyser utført av datamaskiner gjør menneskers intelligens en i stand til å lese og dra slutninger som ligger utenfor det umiddelbare ved teksten.

Samtidig er det viktig å påpeke at innholdsanalyser bare kan få frem muligheter for elevenes kompetanseutvikling. De kan ikke si noe om den faktiske innvirkningen på matematikkompetansen, og at eventuelle slutninger bør sees i sammenheng med innholdsanalytikerens ståsted. Alle analytikere har sine egne disiplinbaserte grunner for å tolke gitte påstander ulikt. En lingvist og en matematikkdidaktiker vil betrakte den samme teksten forskjellig. Krippendorff (2004) betegner slike ulikheter for kontekster som innholdsanalytikere velger å lese teksten i. Denne bruken av kontekstbegreper trenger ikke, men kan, sammenfalle med kontekstbegrepet Krippendorff (2004, s. 18) benytter i sin definisjon av innholdsanalyse: «Content analysis is a research technique for making replicable and valid inferences from texts (or other meaningful matter) to the contexts of their use.» Kontekstbegrepet i definisjonen handler om konteksten som teksten blir brukt i, ikke konteksten som innholdsanalytikeren velger. Jeg har forsøkt å la disse kontekstene være så like som mulig, ved at jeg plasserer meg selv innenfor disiplinen matematikkdidaktikk, og ved at jeg gjennom innholdsanalyser har hatt til hensikt å gi en karakteristikk av det matematiske innholdet og de matematiske metodene i læreboktekster, eksempler og oppgaver, gitt konteksten disse er ment for og brukes i. Men på tross av dette kan en aldri nekte for at innholdsanalytikerens interesser og begrepsmessige deltakelse er med på å påvirke det analysen avdekker. I hvor stor grad konteksten min sammenfaller med andres kontekster er et vanskelig spørsmål å svare på. Og i hvor stor grad min analytiske verden gir mening til vitenskapelige kollegaer og andre avhenger blant annet av hvor overbevisende jeg klarer å presentere den verdenen. I artiklene har jeg forsøkt å maksimere dette ved blant annet å presentere typiske eksempler på funn og beskrive analysen som ligger bak.

Innholdsanalyse som metode blir sett på som en transparent metode, hvor kodeoversikter og kodemanualer, som i delstudie 1, gjør replikasjon- og oppfølgingsstudier mulig. Det er denne gjennomsiktigheten som først og fremst gjør at innholdsanalyse, hovedsakelig i betydningen kvantitative innholdsanalyse, blir sett på som en objektiv metode. Objektivitet er et begrep som er brukt i en rekke definisjoner av innholdsanalyse. Bryman (2008, s. 278) refererer til Holsti (1969) sin definisjon, som er en av de mest kjente: «Content analysis is any technique for making inferences by objectively and systematically identifying specified characteristics of messages.» Det å være så objektiv og systematisk som mulig er helt avgjørende for enhver innholdsanalyse. Målet om så høy grad av objektivitet som mulig, innebærer at retningslinjene er klart spesifisert i forkant av tilordningen av rådatamaterialet i kategorier. Objektivitet handler også om gjennomsiktighet i de prosedyrene en gjennomfører når en tilordner materialet i kategorier med vekt på å minimere personlig påvirkning og sjanse for feil. Systematikk handler om å være konsekvent i måten en anvender prosedyrene på slik at også det er med på å minimere personlig bias. Krippendorff (2004, s. 19) problematiserer selve objektivitetsbegrepet og retter noe mer fokus mot selve prosessen og den vitenskapelige metoden når han hevder at «Replicability is measurable and validity is testable, but objectivity is neither.»

Krippendorff (2004) benytter begrepene replikabilitet og validitet, mens Holsti (1969) benytter objektivitet og systematikk. Ifølge Krippendorff (2004) inneholder hans validitetsbegrep noe mer enn det å være systematisk ettersom han krever at prosessen med å velge ut, lese og analysere teksten må tilfredsstille ytre kriterier. Jeg tolker Holsti (1969) sin definisjon som noe mer fokusert på kriterier som angår forskeren, mens Krippendorff (2004) fokuserer noe mer på kriterier som angår forskningsmetoden.

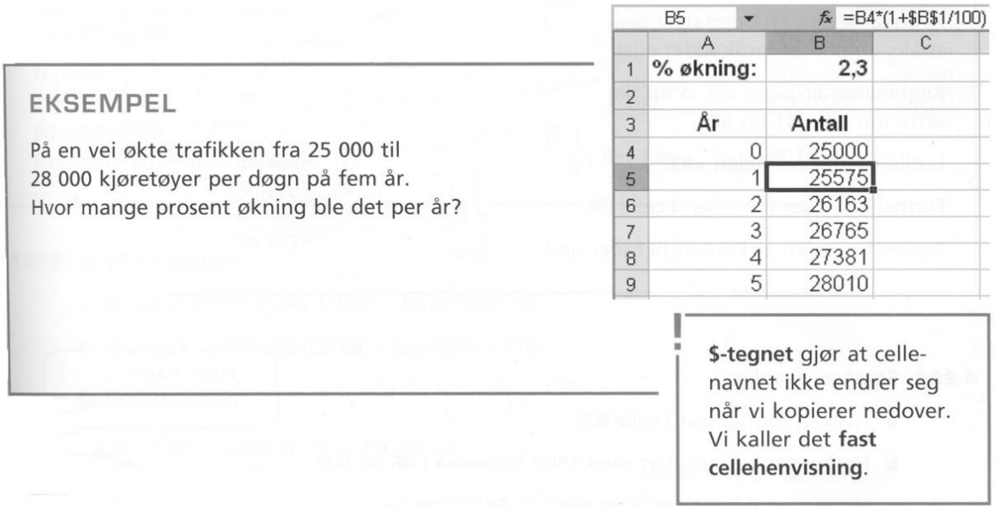
Innholdsanalyser er egnet til longitudinelle studier, som for eksempel Jakobsson-Åhls (2008) algebrastudie av svenske lærebøker fra 1960 til 2000. Metoden kan sies å være både diskret og ikke-påtrengende, i betydningen av at metoden muliggjør observasjoner uten å bli observert. Metoden er derfor å regne som ikke-reaktiv. Dette gjelder i stor grad for de analyserte lærebøkene i studien min, fordi ingen av dem er trolig skrevet med tanke på å bli utsatt for en innholdsanalyse. Det vil med andre ord si at innholdsanalyseprosessen i seg selv ikke er reaktiv, men etter hvert som funnene i slike lærebokanalyser blir mer og mer kjent, vil fremtidige lærebøker generelt sett i det minste kunne bli påvirket av dette. Dette kan være aktuelt siden to av delstudiene mine utgjør deler av Utdanningsdirektoratets kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremidler i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018a), og er en del av innholdet i den digitale veilederen, som skoleeier, skoleledelse og lærere kan bruke når de skal vurdere kvaliteten og velge ut læremidler i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018b).

Innholdsanalysen kan ikke være bedre enn de dokumentene som forskeren arbeider med. Det betyr at dokumentene må vurderes med hensyn til autentisitet, troverdighet og representativitet (Bryman, 2008). Autentisiteten handler om dokumentene faktisk er det de utgir seg for å være. I mitt tilfelle vil det si om de analyserte lærebøkene er ekte og utgitt fra det aktuelle forlaget. Dette er uproblematisk siden jeg har fått tilsendt alle lærebøkene direkte fra dem. Troverdighet handler om muligheten for at dokumentene har blitt eller kan endres på. Dette er lite sannsynlig, til tross for at jeg har informert forlagene om at de tilsendte lærebøkene skal analyseres i et doktorgradsarbeid. Det er en lang og kostbar prosess å lage nye alternative versjoner av lærebøkene hvor sjansen for å bli oppdaget med tilhørende markedskonsekvenser er relativ stor, i tillegg til at det er nesten umulig for forlagene å vite hva som vil bli analysert. For å maksimere troverdigheten i delstudie 1 har jeg valgt å presentere både originalversjonen på norsk og den oversatte engelske versjonen i artikkelen (Kongelf, 2011). I tiden fremover kan denne formen for troverdighet bli et større forskningsmessig problem etter hvert som flere og flere går over til digitale læremidler.

Representativitet handler om de utvalgte lærebøkene er representative for alle mulige relevante dokumenter, for eksempel om noen aktuelle dokumenter ikke er mulig å få tak i eller ikke eksisterer lengre. Representativiteten til lærebøkene har jeg forsøkt å få så høy som mulig gjennom kontakt med personer i forlagene, på lærerutdanningene, samt skoleledere og lærere. Det var ikke mulig å oppdrive noe oversikt over alle lærebøkene på markedet i Norge eller deres salgstall. Basert på de uformelle undersøkelsene og min egen kunnskap om lærebokmarkedet klarte jeg å identifisere sju ulike læreverk som var i bruk på ungdomsskoler i

Norge i det jeg startet doktorgradsarbeidet mitt. Seks av de sju ble med videre i studien fordi de var bygd opp etter et tydelig prinsipp med lærebøker tilpasset hvert årstrinn. Jeg ønsket å analysere problemløsning i lærebøkene for de høyeste alderstrinnet på ungdomstrinnet, og når jeg startet på det arbeidet hadde ikke alle forlagene publisert alle bøkene, og jeg endte da opp med lærebøker for 9. klasse i min første delstudie (Kongelf, 2011). Det sjuende læreverket ble ikke med i det endelige utvalget. Det bestod av ti temahefter uten en tydelig årstrinnsinndeling. Det var svært vanskelig å plukke hvilke(n) av de ti temabøkene jeg eventuelt skulle ha tatt med, og en sammenligning mellom de ulike læreverkene hadde også blitt problematisk hovedsakelig fordi temaheftene bygde på en klassetrinnsuavhengig filosofi.

En annen ulempe med innholdsanalyser er knyttet til kodemanualen som nesten er umulig å bruke uten noen form for tolkning hos den som koder. Bryman (2008), som refererer til Beardsworth (1980), mener det er diskutabelt om en kan forutsette samme tolking av de som laget dokumentene og den som koder i innholdsanalysen. Denne kritikken er jeg delvis enig i, men det kommer selvfølgelig an på hvordan en forstår dette. Dersom forfatterne etter å ha laget ferdig bøkene ble bedt om å kode eksemplene, er det ikke sikkert at kodingen deres hadde skilt seg så mye fra min koding. Men som jeg skriver om i delstudie 1 (Kongelf, 2011), kan det virke som om at mangelen på eksplisitt å navngi og forklare problemløsningsmetodene delvis kan skyldes en ubevisst kulturell lærebokpraksis i Norge. Det betyr at selv om forfatterne ikke navngir og forklarer metodene i lærebøkene, kan de allikevel komme frem til de samme funnene som meg etter en innholdsanalyse med forhåndsdefinerte kategorier. Uansett så har jeg kunnet gjøre lite med eventuelle forskjeller i tolkninger. Det jeg har kunnet gjøre noe med er å øke sjansene for at mine vurderinger av eksemplene er så riktige som mulig, i betydningen av at dersom noen andre hadde gjennomført den samme analysen på de samme eksemplene, ville de ha kommet frem til den samme kodingen. Til det har jeg brukt en erfaren lærer og forsker innen matematikkutdanning til separat og uavhengig kode alle 214 eksemplene i 9. klassebøkene til Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007b, 2007c) i delstudie 1. Våre koderesultater var i høy grad konsistente, og i de tilfeller vi ikke hadde kodet likt diskuterte vi sammen og ble enige om kodingen. Et eksempel på en slik inkonsekvens var:



EKSEMPEL

På en vei økte trafikken fra 25 000 til 28 000 kjøretøyer per døgn på fem år. Hvor mange prosent økning ble det per år?

B5 f_x =B4*(1+B1/100)

	A	B	C
1	% økning:	2,3	
2			
3	År	Antall	
4	0	25000	
5	1	25575	
6	2	26163	
7	3	26765	
8	4	27381	
9	5	28010	

$-tegnet gjør at cellenavnet ikke endrer seg når vi kopierer nedover. Vi kaller det **fast cellehenvisning**.

Figur 15. Eksempel på inkonsekvens i koding av heuristiske tilnærmingsmåter (Torkildsen & Maugesten, 2007c, s. 51).

I eksemplet over hadde den ene kodet det som bruk av én tilnærmingsmåte, ‘make a systematic table’, mens den andre hadde kodet det som bruk av to, ‘make a systematic table’ og ‘guess and check’. Det var i dette tilfelle uproblematisk å komme til enighet om at eksemplet burde bli kodet som at det inneholdt begge tilnærmingen. Siden majoriteten av eksemplene inneholdt lite informasjon om hvilke løsningsmetoder som ble benyttet og hvordan metodene fungerte, var det i enkelte tilfeller utfordrende å kode fordi jeg til en viss grad måtte tilskrive eksemplene et latent innhold. Det vil med andre si at det i ulik grad har vært en kvalitativ vurdering av hvert eksempel innenfor den kvantitative innholdsanalysen som er benyttet i delstudie 1.

En annen kritikk som innholdsanalysestudier av og til blir beskyldt for, er at de er ateoretiske (Bryman, 2008). Det betyr at en søker det som er målbart og ikke det som er teoretisk viktig. Det gjelder i sterkere grad den kvantitative enn den kvalitative innholdsanalysen. Skillet eller forskjellen mellom målbare problemløsningskomponenter i lærebokeksempler og teoretisk viktige sider ved problemløsning ser jeg ikke på som problematisk i delstudie 1, fordi de fleste som har interesse av funnene, som lærere, politikere, lærebokforfattere og matematikkutdannere, er klar over at det er mange andre faktorer enn innholdet i lærebøkene som er med på å tilrettelegge for elevenes matematiske kompetanseutvikling. Eksempler på det kan være hvordan læreren bruker læreboken (Ayalon & Even, 2010), det generelle skole- og klassemiljøet, undervisningsformer, motivasjon, familieforhold og sosioøkonomisk bakgrunn. Det samme kan en si om delstudie 2 og 3. Problemløsningsstudien og de to algebrastudiene kan alle plasseres innenfor segmentet lærebok – matematikk i Rezat og Sträßers (2013, s. 471) didaktiske tetraeder, som er en beskrivelse av metodologiske tilnærminger i matematikkdidaktikken.

Innholdsanalyser er designet for å få frem ulike sider av innholdet i skrevne tekster. Den kan for eksempel gi innblikk i hva lærebøker tilbyr av innhold og metoder, og hva som ikke tilbys. En svakhet er derfor at materialet som skal studeres, er omfattende. Som forsker må jeg derfor begrense meg til å analysere deler av lærebøkene, i mitt tilfelle algebra og problemløsning. Men på en annen side kan forskning av denne typen gi informasjon om styrker og svakheter i lærebøkenes innhold og metoder, som kan være til hjelp for andre som har behov for å vurdere kvaliteten på lærebøker i en eller annen form. En slik type forskning kan fungere som veiledning for lærere, foreldre, skoleledere, forfattere, politikere og skolemyndigheter. Men selv om innholdsanalyser kan spille en viktig veiledningsrolle, bør en huske på at de fleste slike studier er begrenset til kun å gjelde deler av læremidlene.

En annen svakhet ved innholdsanalyser som dette er at jeg som forsker bare ser på boken, mens læreboken i bruk inneholder samhandling med og mellom elev, lærer, klasse- og skolemiljø, den spesifikke læringssituasjon med mer. Hvor bra en bok fungerer for utviklingen av den matematiske kompetansen avhenger derfor av andre faktorer også. En studie av selve læreboken kan imidlertid motiveres ved at det at boken tilbyr, eller ikke tilbyr, et spesifikt innhold og metoder, påvirker elevenes matematisk utvikling. Niss (2003, s. 360) beskriver det slik: «Hvis det er noe vi vil at elevene våre skal vite, forstå eller klare, må vi gjøre dette til formål for en eksplisitt og nøye tilrettelagt undervisning.» I studien min har jeg valgt å fokusere på lærebøkenes matematiske innhold og metoder. I kraft av å være utdannet allmennlærer og lærerutdanner i matematikk har doktorgradsstudien min sannsynligvis også blitt påvirket av erfaringene, begrepene og tankene mine som lærebokforfatter. Når en forfatter skriver en lærebok, er det bokens innhold og metoder som er i fokus fordi andre faktorer som påvirker selve bruken av læreboken er noe forfatteren ikke i like stor grad kan innvirke på. Forskningen min har også trolig vært påvirket av et ønske om å legge forholdene best mulig til rette for utvikling av matematisk kompetanse for norske elever ut ifra mine kunnskaper og meninger om matematikkdidaktikk. Det vil si at jeg har et ønske om at læreboken skal være en gullgruve for utvikling av matematisk kompetanse hos norske elever.

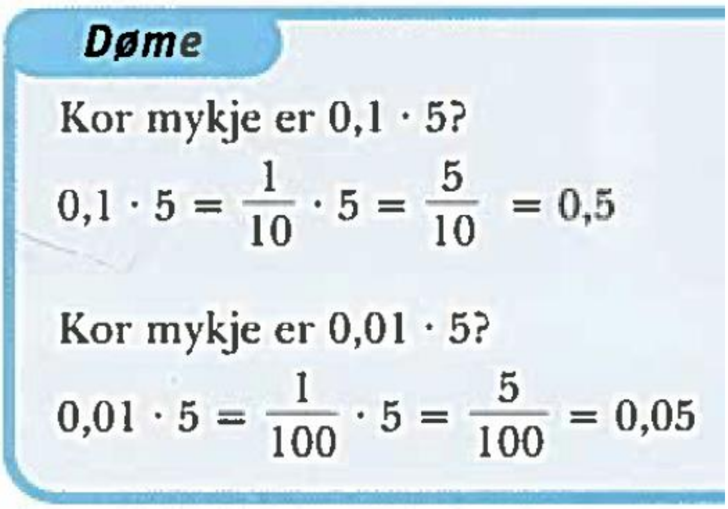
5 Presentasjon av funnene

5.1 Delstudie 1

Til sammen er 740 eksempler i lærebøkene Mega (Guldbrandsen m.fl., 2007a, 2007b), Grunntall (Bakke & Bakke, 2007), Tetra (Hagen m.fl., 2006b), Kode X (Christensen, 2007a, 2007b), Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007b, 2007c) og Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006b) analysert. Alle lærebøkene er skrevne av norske forfattere, bortsett fra Tetra som er en oversettelse fra svensk.

Funnene i studien gir ny kunnskap på spesielt to områder. Det første er at lærebokeksemplene er fulle av heuristiske tilnærmingsmåter, samtidig som at enkelte velkjente tilnærmingsmåter er bortimot fraværende. De fire mest frekventerte utgjør 96 % og er ‘solve part of the problem’ (48 %), ‘make a visualisation’ (27 %), ‘change your point of view’ (16 %) og ‘make a systematic table’ (6 %). De resterende 4 % er ‘look for a pattern’, ‘simplify the problem’, ‘guess and check’, ‘work backwards’ og ‘think of a related problem’. I de 740 analyserte eksemplene ble det registrert bruk av heuristiske tilnærmingsmåter 1170 ganger. Det vil si at det i snitt er benyttet over 1,5 problemløsningsmetoder per eksempel. Men til tross for at eksemplene inneholder en rekke heuristiske tilnærmingsmåter, blir innholdet i og bruken av dem lite vektlagt, og metodene blir ikke navngitte med informative navn.

Det andre studien har gitt ny kunnskap om er at også eksempler som inneholder tradisjonelle og enkle problem inneholder heuristiske tilnærmingsmåter. Problemløsningsheuristikker har ofte blitt forbundet med vanskelige problem og noe som passer best for de flinke elevene. Studien min viser at ingredienser i disse heuristikkene også finnes i lærebokeksempler som omhandler selv de mest tradisjonelle problemer:


Døme

Kor mykje er 0,1 · 5?

$$0{,}1 \cdot 5 = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Kor mykje er 0,01 · 5?

$$0{,}01 \cdot 5 = \frac{1}{100} \cdot 5 = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

Figur 16. Variant av ‘change your point of view’ (‘change of form of representation’) (Hage m.fl., 2006, s. 28).

Funn fra delstudien tyder på et mulig utvidet bruksområde for heuristiske tilnærmingsmåter både i form av vanskegraden på problemene og mestringsnivåene hos elevene, i tillegg til å kaste lys over norske prestasjoner på PISA-undersøkelsen.

5.2 Delstudie 2

I delstudie 2 analyseres det matematiske innholdet i lærebøkene når de introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser for første gang. De samme seks læreverkene som er analysert i delstudie 1 er også gjenstand for analyse i delstudie 2. I delstudie 1 er det seks 9. klassebøker, i delstudie 2 er det fem 8. klassebøker, Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006a), Nye Mega 8B (Guldbrandsen m.fl., 2006), Tetra 8 (Hagen m.fl., 2006a), Sirkel 8B (Torkildsen & Maugesten, 2007a), Grunntal 8 (Bakke & Bakke), og én 9. klassebok, Kode X9A (Christensen, 2007).

Funnene kan deles inn i ulike nivå. På et overordnet nivå viser det seg at lærebøkene praktiserer ulikt når det gjelder på hvilket årstrinn og i hvilken mengde og kontekst de velger å introdusere bokstaver som symbol for variable størrelser på. Årstrinnene varierer fra 8. til 9. klasse, mengden varier fra 26 sider til 114, mens konteksten varierer fra et manipulasjonsperspektiv til et funksjonsperspektiv. Det er til dels manglende samsvar mellom min fortolkning av læreplanenes intensjon med emnet 'tall og algebra' og lærebøkenes fremstilling. Det er kun én lærebok som benytter samme navn på kapitlet som læreplanen bruker på hovedområdet. Det manglende samsvaret arter seg ulikt i bøkene, men felles for dem alle er at algebraen i liten grad generaliserer tallæren. Introduksjonskapitlene er først og fremst preget av et manipulasjonsfokus, hvor den variable, som en naturlig konsekvens av det, gis lite oppmerksomhet utover å bli regnet med. Men på tross av manipulasjonsfokuset gis lite oppmerksomhet til hvorfor en kan manipulere med uttrykkene, og en benytter seg i liten grad av mulighetene til å knytte forklaringer til elevenes eksisterende kunnskaper om tall.

På et mer detaljert nivå viser mangelen på samsvar seg i lærebokforfatternes valg av progresjon og kontekst i en rekke eksempler. Progresjonen kan eksemplifiseres ved at den eneste læreboken som har med mønster benytter det som avslutning på kapitlet og ikke som introduksjon til variabelbegrepet. Konteksten kan eksemplifiseres med lærebøker som velger å introdusere bokstaver som symbol for variable størrelser gjennom eksempler som er lite egnet til å få frem et behov for dem og innholdet i selve variabelbegrepet. Bokstavene som innføres opptrer mer som ukjente enn som en variable til tross for at det ikke er i en ligningskontekst de innføres. Lærebøkene inneholder også mangelfulle og feilaktige forklaringer som kan legge forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger, samt feil bruk av multiplikator og multiplikand i oversettelser mellom tekst og matematiske symbol. Lærebøkene gir et inntrykk av at algebra er et formelt og isolert emne, noe som forsterkes av at de introduserer forkortede skrive- og utregningsmåter umiddelbart. I tillegg varierer bruken av store og små bokstaver skrevet med og uten kursiv som symbol for den variable. Den inkonsekvente bruken av symboler er illustrerende for lærebøkenes lite tydelige og konsekvente fremstilling av den variable spesielt, og av algebra generelt.

5.3 Delstudie 3

De fem lærebøkene som oppgaveanalysen er basert på er 9. klasseboken Kode X9A (Christensen, 2007) og 8. klassebøkene Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006a), Nye Mega 8B (Guldbrandsen m.fl., 2006), Tetra 8 (Hagen m.fl., 2006a) og Grunntal 8 (Bakke & Bakke).

Funnene viser at introduksjonen av bokstaver som symbol for variable størrelser skjer gjennom fem hovedkategorier av oppgaver med 41 tilhørende underkategorier. Men til tross for at lærebøkene samlet sett inneholder mange ulike oppgavetyper, er algebramanipulasjon den dominerende aktiviteten. Manipulasjonen dreier seg i hovedsak om å regne med algebraiske uttrykk og sette inn verdi(er) for variable(r) i algebraiske uttrykk. I oppgaver hvor en lager algebraiske uttrykk fra figur eller tekst er det matematiske innholdet ofte regning med algebraiske uttrykk. Under 1 % av de analyserte oppgavene etterspør et algebraisk uttrykk etter å ha studert et mønster, og mønsteroppgavene brukes som avslutning på kapitlet, ikke som introduksjon. Det virker som at lærebøkene legger opp til at elevene skal løse klassiske manipulasjonsoppgaver før en har gitt mening til bokstavene som symbol for variable størrelser. Alle manipulasjonsoppgavene medfører lite fokus på selve variabelaspektet, som svekkes ytterligere gjennom oppgaver hvor den praktiske konteksten gjør at bokstavene opptrer mer som ukjente enn som variabler. Det samme gjelder for oppgavene med en deduktiv progresjon hvor det bes om et algebraisk uttrykk i den første deloppgaven som egentlig ikke trengs for å kunne svare på de etterfølgende deloppgavene.

Men til tross for at det matematiske innholdet i oppgavene først og fremst er manipulasjon med algebraiske uttrykk, finnes det enkelte mer utradisjonelle regneoppgaver som for eksempel ber elevene om å forklare feilsvar eller innsettinger som innbyr til å se på strukturelle likheter i algebraiske uttrykk. Slike oppgavetyper kan føre til at elevene blir mer bevisste sin egen tenkemåte og i større grad klarer å se på algebraiske uttrykk som objekt og ikke prosess.

5.4 Hva tilfører studien av ny kunnskap og innsikt på området?

Lærebøker er tekster som har til formål å hjelpe elever og lærere i undervisning- og læringsarbeidet i skolen. Det som skal læres ved hjelp av lærebøkene, framgår av læreplanen for hvert enkelt fag. Bøkene har dermed en spesiell intensjon med fremstillingen. Som tekst behandles lærebøkene på en særegen måte i det at andre publiserte tekster vanligvis blir gjennomgått, kritisert og diskutert offentlig i forskjellige sammenhenger i samfunnet, hvor aviser, radio og tv til og med har egne avdelinger og program for den slags. Det hender også at publikasjoner er opphavet for omfattende debatter i samfunnet. Det gjelder derimot ikke for lærebøker i skolen. Det er svært sjeldent at noen gjennomgår en lærebok eller diskuterer den offentlig i forbindelse med publiseringen. De offentlige bibliotekene har de fleste publikasjonene som er publisert i samfunnet, men det gjelder vanligvis ikke for lærebøker som er ment for undervisning og læring i skolen. Slike bøker lever sitt eget liv i den delvis lukkede verdenen som skolen utgjør, hvor det stort sett kun er lærere og elever som har interesse av dem og som bruker dem. Med dette som bakteppe kan det synes å være viktig å undersøke hva lærebøkene inneholder med tanke på hva som tilbys elevene og lærerne.

Lærebøkene er som tidligere nevnt bare en av flere ulike faktorer som påvirker utviklingen av den matematiske kompetansen. På tross av det har jeg bevisst ikke involvert andre faktorer enn selve læreboken (Rezat & Strässer, 2012). Innholdsanalyser har i all hovedsak blitt benyttet på andre tekster enn lærebøker i matematikk, og som begrep har innholdsanalyse eksistert siden 1941, til tross for at systematiske analyser av tekst har spor tilbake til 1800-tallet (Krippendorff, 2004). Det eksisterer relativt lite forskning på hvordan forfattere velger ut og setter sammen innholdet i de bøkene de publiserer, og på hvordan lærere og elever bruker lærebøkene i matematikk. Disse områdene bør bli gjenstand for mer detaljerte studier, mens jeg har valgt å fokusere fullt ut på hvilke matematiske metoder og hvilket matematisk innhold som forekommer i bøkene med utgangspunkt i læreplanen og det elevene skal lære.

Innholdsanalyser blir ofte omfattende studier fordi intensjonen er å studere tekstene i detalj, og jeg har derfor måttet begrense studien min til heuristiske tilnærmingsmåter i problemløsning, eksempler og tekst i introduksjonen av algebra og oppgavene som tilbys i den innledende algebraen. Men til tross for dette utvalget er det relativt store tekstmasser som er blitt analysert og kategorisert, og når disse tekstene skal leses og tolkes, gjentatte ganger, med den hensikt å fremskaffe en dyp forståelse og innsikt av tekstene, er det nødvendig med lang tid. Studien min viser at innholdsanalyser kan fungere som forskningsmetoden for lærebokanalyser og at ny kunnskap fremkommer som har betydning for forfattere, lærere, elever, skolepolitikere og andre beslutningstagere innenfor utdanningsfeltet. Ingen andre enn en forsker som har viet sin oppmerksomhet i slike studier over lang tid kan påvise den form for resultat som fremvises her. Ikke engang erfarne lærere har mulighet til å gjøre de analyser og sammenligninger av tekstene som trengs, og å så grundig tenke igjennom hvilke typer av tilnærminger, eksempler og oppgaver som finnes i bøkene.

Studien har påvist at lærebøkene har mangelfulle sider på flere områder, og at det er potensial for å forbedre mulighetene for utvikling av matematisk kompetanse. Jeg har også vist hvordan det med enkle midler er mulig å forbedre deler av innholdet og metodene i lærebøkene til i større grad være i tråd med den gjeldende læreplanen og matematikkdidaktisk forskning (Kongelf, 2011). Doktorgradsstudien kompletterer den matematikkdidaktiske lærebokforskningen spesielt i Norden gjennom beskrivelsene av delstudiene og funnene knyttet til det matematiske innholdet og de matematiske metodene innenfor problemløsning og algebra. Problemløsningsstudien gir innsikt i hvilke heuristiske tilnærmingsmåter som finnes i bøkene, hvordan de blir benyttet, samt hyppigheten og fordelingen av tilnærmingene i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge. Studien gir ny kunnskap ettersom det er påvist utbredt bruk av heuristiske tilnærmingsmåter i lærebokeksempler i alle former for problem. Det gir ny kunnskap om et mulig utvidet bruksområdet for heuristisk tilnærmingsmåter i form av vanskegrad på problemet og at dette er noe alle elever uavhengig av mestringsnivå bør få kjennskap til. Men på tross av at lærebøkene inneholder over 1,5 heuristiske tilnærmingsmåter i snitt per eksempel har studien også vist at lærebøkene ikke vier oppmerksomhet til selve tilnærmingen i form av innhold, bruksområde og navnsetting. Den nye innsikten kan lærere, forfattere, politikere, personer i departement og direktorat benytte seg av i sin planlegging av fremtidens undervisning og læring av problemløsning i matematikk. Innsikten kan også brukes som delforklaring på svake norske prestasjoner på PISA-undersøkelser.

De to algebradelstudiene gir ny kunnskap om hvordan et bredt utvalg av lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser. Delstudie 2, om eksemplene og teksten i algebrakapitlene, viser at den variable introduseres på ulike årstrinn, og at én lærebok velger et funksjonslæreperspektiv til tross for at algebra er satt samen med tall i læreplanen. Felles for lærebøkene er at de ikke lager forbindelser til tallæren om notasjon, at variabelbegrepet er vagt fremstilt og at de ikke gir overbevisende eksempler på hvorfor variabelbegrepet har verdi i matematikken. Valget av kontekst som oppgavene presenteres i, gjør det heller ikke lettere med tanke på å utvikle kompetanse for hva en variabel er. Den nye kompetansen i algebra som elevene skal utvikle forsøkes i liten grad å knyttes til eksisterende kompetanse om tall, og kan ikke sies å være i tråd med gjeldende læreplan.

Delstudie 3, om algebraoppgavene, viser at lærebøkene preges av manipulasjonsoppgaver der variabelbegrepet er lite fremtredende. Oppgavetypene forsterker manipulasjonsfokuset i tekstdelene og eksemplene som er påvist i delstudie 2, ved at de fleste oppgavene inneholder regning med algebraiske uttrykk og innsetting av verdi(er) i slike. De ulike nivåene av underkategorier av oppgavetyper gir ny kunnskap om variasjonsmuligheter som forfattere og lærere kan benytte seg av i fremstillinger av algebra. Den nye innsikten kan også politikere og personer i departement og direktorat benytte seg av i sin planlegging av fremtidens undervisning og læring i algebra. Innsikten kan også brukes som delforklaring på svake norske prestasjoner på TIMSS-undersøkelser.

Gjennom analyser og diskusjoner av autentiske tekstutdrag, eksempler og oppgaver gir de tre delstudiene detaljert innsikt om innholdet og metodene som benyttes i forbindelse med problemløsning og algebra. I tillegg gir de innsikt i forfatterens prioriteringer og tolkninger av læreplanen. Funnene fra doktorgradsstudien har tilført ny kunnskap som allerede er benyttet av Utdanningsdirektoratets i deres veileder og grunnlagsdokument (Utdanningsdirektoratet, 2018a, 2018b) for kvalitetskriterium for læremidler i matematikk. Disse er tiltenkt som hjelp for lærere og skoleledere i deres vurdering av kvaliteten på læremidlene i matematikk. Kvalitetskriteriene kan også benyttes av lærebokforfatterne i utviklingen av nye læremidler tilpasset fagfornyelsen i læreplanen fra 2020. Funnene mine bør også kunne påvirke lærere og etter hvert elever ved at flere av funnene er formidlet i media og i foredrag rundt om i landet. Eksempelvis har grunnskolene i Skien kommune de ni heuristiske tilnærmingsmåtene illustrert, forklart og hengt opp i klasserommene. I tillegg er artiklene sendt til forlagene, og delstudie 2 og 3, sammen med kappen, er skrevet på norsk, noe som øker sjansene for at funnene når ut til flere matematikklærere i den norske skolen. De samme funnene hadde vært vanskelige å oppnå på annen måte enn ved å benytte innholdsanalyser på den måten jeg har gjort. Doktorgradsarbeidet har tilført forskningsfeltet tre unike delstudier som til sammen synliggjør et behov for innholdsanalyser av lærebøker, et behov som trolig vil øke i styrke med tanke på de nye mulighetene som ligger i fremtidige digitale læremidler. Innholdsanalyser av det matematiske innholdet og de matematiske metodene vil derfor fortsatt være en relevant måte å studere en av flere deler av det som antas å være av betydning for utviklingen av elevenes matematiske kompetanse. Rammeverket mitt fra delstudie en, som hadde en deduktiv tilnærming, er allerede brukt i flere norske masteroppgaver, og delstudie 2 og 3, som hadde en mer induktiv tilnærming, kan forhåpentligvis være til inspirasjon for andre nordiske forskere, og fremtidige forskere i hvordan en kan bedrive en slik type innholdsanalyse av lærebøker i matematikk.

6 Diskusjon

6.1 Arbeidet generelt

De tre studiene har pågått over lang tid av ulike personlige grunner. Dette har hatt både positive og negative sider. Positive i form av at jeg har fått tid til å fordype meg i litteratur og forskning, og at studiene har blitt mer gjennomtenkte og grundigere gjennomført. Jeg har også fått anledning og har hatt tid til å formidle funnene fra spesielt de to første delstudiene underveis. Det kan eksemplifiseres gjennom deltakelse i NRKs Forsker Grand Prix 2012, og som gjest i Dagsrevyen på NRK den 3.12. 2013, hvor jeg også fikk presentert funnene mine for daværende Kunnskapsminister Torbjørn Røe Isaksen. I etterkant av opptredenen på NRK hadde Kunnskapsministeren og jeg mailkorrespondanse om funnene i delstudie 1. Jeg fikk også anledning til å presentere delstudie 1 og 2 for Statsminister Erna Solberg den 08.04.2014, hvor jeg i etterkant ble invitert av Kunnskapsdepartementet til å fortelle om disse funnene for opplæringsavdelingen i departementet og avdelingene for læreplanutvikling og læreplanimplementering i Utdanningsdirektoratet den 14.11.2014. Jeg har også fått presentere delstudiene for daværende statssekretær i Kunnskapsdepartementet Bjørn Haugstad, den 18.11.2014, og for Utdanningsdirektoratets arbeidsgruppe for utvikling av kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk, den 30.01.2017. Artikkelen tilhørende delstudie 2 (Kongelf, 2015) er brukt som referanse i Meld. St. 28 (2015-2016) vedrørende fornyelsen av Kunnskapsløftet, og artiklene tilhørende delstudie 1 og 2 (Kongelf, 2011, 2015) er brukt i kunnskapsgrunnlaget for Utdanningsdirektoratets utarbeidelse av kvalitetskriterium for læremidler i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018a). Doktorgradsstudien min er også hovedgrunnen til at jeg ble utnevnt til å sitte i Utdanningsdirektoratets referansegruppe i utarbeidelsen av den digitale veilederen for læremidler i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018b).

De to første artiklene er publisert i NOMAD og jeg vil takke redaktørene som valgte å publisere dem på tross av at de retter et kritisk blikk på lærebøkene i matematikk. Sammen med Utdanningsdirektoratets læremiddelveileder (Utdanningsdirektoratet, 2018b) kan studien min forhåpentligvis være en bidragsyter til at læremiddel som blir publisert i forbindelse med ny læreplan i 2020 i større grad er i tråd med innholdet i den gjeldende læreplan og oppdatert på matematikkdidaktisk forskning. Lærerutdannere, lærerstudenter og lærere i grunnskolen kan også ha nytte av doktorgradsarbeidet mitt med tanke på dets faglige og didaktiske innhold, i tillegg til det Grevholm (2017b, s. 19) uttrykker som: «student teachers’ lack of opportunities to learn about textbook analysis and frameworks or criteria for evaluating textbooks.»

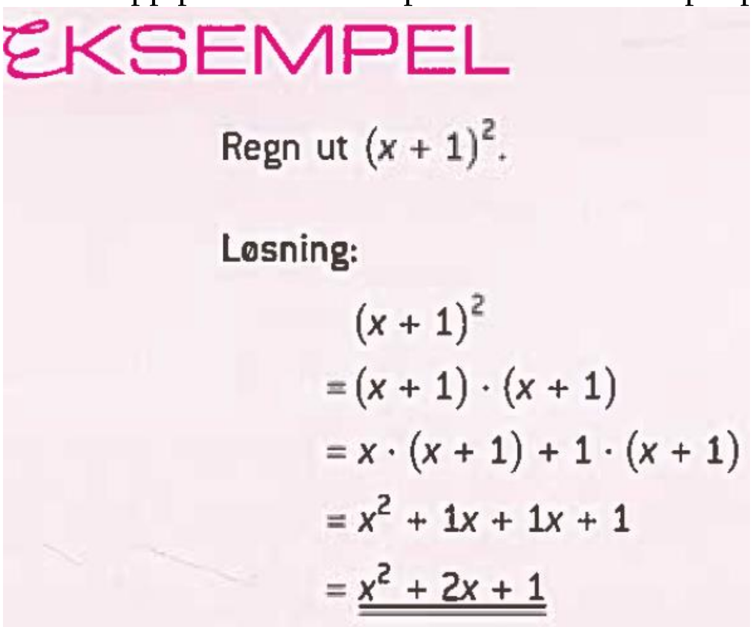
Jeg har bevisst valgt å skrive artiklene tilhørende delstudie 2 og 3, i tillegg til kappen, på norsk for å øke sjansene for at funnene kan nå ut til et større publikum i Norge og Norden. Artikkel 3 er under revidering hos FoU i praksis.

6.2 Delstudie 1

I studien om de heuristiske tilnærmingsmåtene har jeg beskrevet pilotstudien som jeg gjennomførte mens jeg gjennomførte et doktorgradskurs om problemløsning, MA-604 Problem Solving, ved Universitet i Agder. Denne piloten la grunnlaget for hovedstudien hvor jeg gir en karakteristikk av seks lærebøkers behandling av ni velkjente problemløsningsmetoder. Gjennom den deduktive innholdsanalysen kommer det frem at metodene er hyppig representert i de 740 eksemplene, som typisk inneholder en oppgave og en eller flere løsningsforslag. I gjennomsnitt inneholder eksemplene en og en halv problemløsningsmetode, noe jeg ikke hadde ventet på forhånd. Til tross for at de ni metodene jeg skulle analysere lærebøkene ut ifra ble forhåndsdefinert, hadde jeg ikke spesielt mye erfaring med problemløsning generelt, problemløsningsmetoder spesielt eller lærebøkenes behandling av dette. Da jeg fikk tildelt doktorgradsstipendet var det etter en søknad der jeg hadde forespeilet å sammenligne lærebøker fra Singapore og Norge, med fokus på algebra. Jeg vil derfor påstå at problemløsningsstudien ble gjennomført med et svært åpent sinn hvor jeg hadde begrenset med erfaringer og tanker knyttet til lærebøkenes behandling av metodene. Pilotstudien var i utgangspunktet ikke en pilotstudie fordi den utgjorde en obligatorisk del av kurset i form av en empirisk datainnsamling knyttet til pensumlitteraturen som skulle resultere i et avsluttende essay. Studien fra problemløsningskurset ble en pilotstudie i det jeg valgte å bygge videre på erfaringene fra denne studien. Det var slik sett en viss form for tilfeldighet at min første doktorgradsartikkel ble omhandlende problemløsningsmetoder i lærebøker.

I delstudie 1 finner jeg at lærebokeksemplene er fulle av heuristiske tilnærmingsmåter, samtidig som at enkelte velkjente tilnærmingsmåter er bortimot fraværende. Antallet av heuristiske tilnærminger i eksemplene overrasket meg, og står i kontrast til Fan og Zhu (2007) som påviste en lav frekvens av heuristikker i lærebøkene fra Singapore, Kina og USA. Fan og Zhu ble også overrasket over sine funn, men i motsatt tilfelle, som ble forklart med at majoriteten av problemene var av rutinemessig og tradisjonell art som enkelt kunne bli løst uten bruk av problemløsningsheuristikker. Det at jeg har funnet så mange tilfeller av heuristiske tilnærmingsmåter i løsninger av selv de enkleste og mest tradisjonelle oppgaver kan tyde på at tilnærmingene har et større bruksområde enn tidligere antatt, til tross for at Schoenfeld (1985, s. 74) forutsetter en viss grad av matematisk modenhet når han i beskrivelsen av problemløsere og heuristikker i Polyas ånd uttrykker at «learning to use heuristics calls for a (reasonably) firm foundation of mathematical resources and for a fair amount of sophistication as well», og setter en lavere aldersgrense til elever på videregående skole. Men det betyr ikke at elevene må vente helt til videregående før de møter på heuristiske tilnærmingsmåter. Grunnlaget for bruken av slike kan og bør etableres under hele elevens matematiske utdanning i mindre streng forstand enn det som generelt behandles i matematisk problemløsning, skriver Schoenfeld (1985, s. 75): «Younger students can recognize, appreciate, and mimic the use of such strategies.» Sitatet står ikke i motsetning til Brehmer m.fl. (2015) sitt ønske om flere enkle problemløsningsoppgaver i lærebøkene. Betrakter en sitatet fra Schoenfeld (1985), ønsket fra Brehmer m.fl. (2015) og det utvidete bruksområde for heuristiske tilnærmingsmåter funnet i studien min, gir det mening å hevde at problemløsning er noe alle elever, uavhengig av alder og nivå, bør få mulighetene til å lære noe om.

I problemløsningsstudien utgjorde de fire mest frekventerte tilnærmingene, 'solve part of the problem' (48 %), 'make a visualisation' (27 %), 'change your point of view' (16 %) og 'make a systematic table' (6 %), til sammen 96 % av alle tilfeller av de ni heuristiske tilnærmingsmåtene. Sammenlignet med funnene til Fan og Zhu (2007) og deres 17 heuristikker, viser det seg at det er 'solve part of the problem' som skiller seg mest ut. Det høye antallet av heuristiske tilnærmingsmåter generelt sett i studien min, og spesielt av 'solve part of the problem', skyldes trolig at jeg ikke tar hensyn til vanskegraden på problemet og at eksempler som inneholder problem som løses ved hjelp av mellomregninger blir registrert som å dele opp problemet i delproblem. Et eksempel på dette er:


EKSEMPEL

Regn ut $(x+1)^2$.

Løsning:

$$\begin{aligned} &(x+1)^2 \\ &= (x+1)\cdot(x+1) \\ &= x\cdot(x+1) + 1\cdot(x+1) \\ &= x^2 + 1x + 1x + 1 \\ &= \underline{\underline{x^2 + 2x + 1}} \end{aligned}$$

Figur 17. Eksempel på mellomregning som kodes som 'solve part of the problem' (Christensen, 2007a, s. 60).

‘Draw a diagram’ er den mest frekventerte heuristikken i lærebøkene fra Singapore, Kina og USA, og den nest mest brukte heuristiske tilnærmingsmåten i de norske. Dette reflekterer trolig bruksnytten og en gjengs oppfattelse av viktigheten av metoden, men ikke nødvendigvis uttalt eksplisitt, blant lærebokforfattere fra ulike deler av verden. Visualiseringer har også sin plass i Niss og Jensen (2002) sin kommunikasjonskompetanse som handler om å kunne uttrykke seg på flere måter og forklare andres matematiske utsagn. Men det høye antallet av denne tilnærmingen i de norske lærebøkene skyldes delvis at all form for visualisering er blitt registrert. Underkategorier av de 320 tilfellene hvor visualiseringer er brukt, viser at det er kun i 128 tilfeller at visualiseringen er en del av løsningsprosessen og uten at oppgaven eksplisitt ber om en visualisering.

	Part of the problem statement		Part of the solution process	Directly asking	Total
	Informative	Decorative			
Sirkel	28	16	43	16	103
Grunntall	8	0	13	18	39
Tetra	7	5	36	16	64
Faktor	17	3	5	6	31
Mega	12	0	14	6	32
Kode X	18	3	17	13	51
Total	90	27	128	75	320

Figur 18. Underkategorier av den heuristiske tilnærmingsmåten ‘make a visualisation’ (Kongelf, 2011, s. 29).

‘Use an equation’ var den nest mest brukte heuristikken i lærebøkene fra Singapore, Kina og USA, og som jeg valgte å kutte ut fordi den i litteraturen tradisjonelt sett blir regnet mer som en generell tilnærming i matematikk enn en tilnærming i problemløsning. I en praktisk skolesammenheng vil jeg allikevel ikke hatt betenkeligheter med å inkludere ‘bruk av likning’ som en av flere tilnærmingsmåter når en eksempelvis skal løse et tekstproblem. I begge studiene var ‘make a table’ den fjerde mest benyttede tilnærmingen, mens den tredje var henholdsvis ‘restate the problem’ hos Fan og Zhu (2007) og ‘change your point of view’ hos meg. ‘Restate the problem’ var ikke med i studien min fordi den var delvis overlappende med ‘simplify the problem’ og ‘change your point of view’, og således er det en mulighet for at funnene også her er relativt sammenfallende hva angår de mest frekventerte tilnærmingsmåtene. De resterende heuristikkene, ‘look for a pattern’, ‘simplify the problem’, ‘guess and check’, ‘work backwards’ og ‘think of a related problem’, utgjør tilsammen 4 % av alle tilfeller av de ni heuristiske tilnærmingsmåtene i studien min. Spesielt overraskende er det at de tre første av disse er så lite benyttet om en henholdsvis tar i betraktning generaliseringer fra tallæren til algebra, metoden ‘veien om én’ og det store bruksområdet til metoden ‘gjett og sjekk’.

I de 740 analyserte eksemplene ble det registrert bruk av heuristiske tilnærmingsmåter 1170 ganger. Det vil si at det i snitt er benyttet over 1,5 problemløsningsmetoder per eksempel. Funnet er overraskende hvis en legger til grunn at problemløsningsmetoder som Polyas (1945) heuristikker forutsetter matematisk kompetanse over det en kan forvente hos norske 9. klassinger, samt det tradisjonelle synet på at problemløsning forutsetter problemer av en viss vanskegrad og noe som passer best for de flinkeste elevene. Brehmer m.fl. (2015) sin analyse av tre lærebøker på videregående skole i Sverige fant at 99 % av problemløsningsoppgavene var plassert på det høyeste nivået, 85 % var plassert til slutt i kapitlet og 63 % av oppgavene var gitt i ren matematisk form. Disse funnene kan tolkes som en bekreftelse på at et slikt syn fortsatt er gjeldene i skolesammenheng. Det tradisjonelle problemløsningssynet kan en også se igjen i rammeverket for den grunnleggende regneferdigheten i Norge, hvor det å kunne bruke et variert utvalg problemløsningsstrategier tilhører det øverste nivået, nivå fem, innenfor ferdighetesområdet ‘bruke og bearbeide’ (Utdanningsdirektoratet, 2012).

Den populariserte versjonen av Polyas (1945) ideer om problemløsning som en har sett eksempler på i skolen i læreplaner og lærebøker fra 1980-tallet, er naturligvis mindre kompleks enn originalutgaven, og mer på linje med Schoenfeld (1985) som uttrykker at heuristikker i mindre strenge former er noe enhver elev bør få oppleve gjennom hele sin skolegang. Dette har jeg forsøkt å tilpasse gjennom definisjonen min av heuristiske tilnærmingsmåter og en lærebokvennlig definisjon av hva et problem er.

Det mest overraskende funnet i delstudie 1 er trolig kombinasjonen av antall metoder per lærebokeksempel og lærebøkenes ikke-eksplisitte behandling av disse. Dette står i kontrast til Schoenfelds (1979) anbefalinger om eksplisitt å navngi problemløsningsheuristikkene, hvor bruken av dem bør utforskes på samme måte som andre matematiske metoder og teknikker. Det står også i kontrast til Fan og Zhu (2007) som fant at de singaporske og amerikanske lærebøkene eksplisitt navnga heuristikkene i eksemplene, i tillegg til å liste dem opp samlet. Det er heller ikke i tråd med Gray og Talls (2007) mer grunnleggende forutsetning for i det hele tatt å kunne få elevene, og lærerne, til å tenke og snakke om begrep, nemlig å navngi begrepene. Lærebøkene fra Singapore skilte seg ut fra de amerikanske ved en større mengde av kapitler som ble viet til problemløsning, og hvor enkelte av dem var viet til bruken og innholdet av spesifikke heuristikker. De kinesiske lærebøkene introduserte spesifikke heuristikker mer implisitt, men de underliggende ideene i metodene ble likevel presentert. De norske bøkene kan også sies å introdusere problemløsningsmetodene implisitt, men i motsetning til de kinesiske blir ikke de underliggende ideene i metodene viet oppmerksomhet. Dette bryter med Bills m.fl. (2006) som framhever viktigheten av å gjøre underliggende generaliteter og argumentasjon eksplisitt ettersom elevene forsøker å generalisere fra eksemplene. Mangelen på tydelighet står også i kontrast til Niss (2003) og Hiebert og Grouws (2007), som hevder at dersom en virkelig vil at elevene skal lære noe, må undervisningen av det gjøres eksplisitt. Det manglende fokuset på problemløsningsmetoder spesielt og problemløsning generelt gjør at det blir mye opp til den enkelte lærer i hvor stor grad elevene får undervisning i heuristiske tilnærmingsmåter og oppfatter problemløsning som viktig i matematikk. Det harmonerer med Brehmer m.fl. (2015) sin konklusjon om de svenske lærebøkene, men dårlig med komponentene 'conceptual understanding', 'strategic competence' og 'adaptive reasoning', i Kilpatrick m.fl. (2001) sin definisjon av 'mathematical profiency'. I førstnevnte poengterer Kilpatrick og Swafford (2002) at hvis elevene skal utvikle begrepsmessig forståelse, er det avgjørende at det fokuseres på selve fremgangsmåten. Strategisk kompetanse handler om å kunne bruke hensiktsmessige løsningsstrategier, og adaptiv resonnering handler om utvikling av resonneringsevnen som inneholder det å kunne forklare og begrunne. Det at de norske lærebøkene i liten grad beskriver innholdet i løsningsmetodene er ikke i tråd med Niss og Jensen (2002) sin beskrivelse av problemløsningskompetanse og representasjonskompetanse. Innenfor problemløsningskompetansen finnes evnen til å bruke ulike metoder samt forståelse av egne og andres metoder. Representasjonskompetansen inneholder å forstå, velge ut, bruke og oversette mellom ulike representasjonsformer, det være seg visuelle, geometriske, grafiske, algebraiske eller diagram og tabeller. Det manglende fokuset på selve metoden, i betydningen innhold, bruksområde og navnsetting, bekreftes i studiene til Aaseth (2016) og Harder (2013), og harmonerer lite med læreplanens (Utdanningsdirektoratet, 2005b) beskrivelser av den grunnleggende ferdigheten 'å kunne regne', som inkluderer å kunne bruke varierte strategier til problemløsning. Det er også problematisk å kunne snakke, og tenke, om egne og andres strategier dersom en ikke har et felles begrepsapparat for det i klassen (Grevholm, 2004). Funnene legger heller ikke forholdene til rette for å kunne oppfylle enkeltceller i matrisen som beskriver rammeverket til den grunnleggende regneferdigheten (Utdanningsdirektoratet, 2012), som inkluderer å kunne bruke et variert utvalg problemløsningsstrategier og begrunne metodevalg.

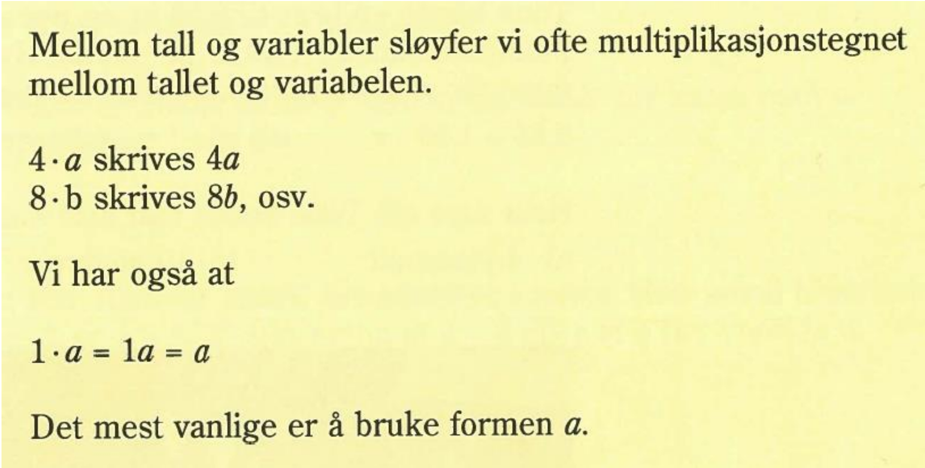
Med bakgrunn i at rammeverkene for PISA-undersøkelsen og den norske læreplanen i høy grad samsvarer, har det ifølge Kjærnsli og Olsen (2013) vært vanskelig å forklare de norske PISA-resultatene, hvor skåren var 489 poeng på PISA 2012, en nedgang på 6 poeng fra 2003 da matematikk sist var hovedfokus. Selv om nedgangen ikke er dramatisk, blir det uttrykt bekymring fordi antall elever på høyt nivå har sunket kraftig. Resultatene for de tre ulike problemløsningsprosessene viser at de norske elevene er relativt sett svakest på de to første prosessene, gjenkjenne og formulere, og bearbeide og bruke, som blant annet rommer spesifikke heuristiske tilnærmingsmåter som de ni jeg har studert forekomsten av. Det at norske elever gjør det svakt her kan forståes i lys av mine funn om lite fokus på heuristiske tilnærmingsmåter. Å beherske slike angrepsmåter vil i mange tilfeller gjør elevene i stand til å kunne formulere problemet i en matematisk språkdrakt, for eksempel etter at en har laget en visualisering i prosessen med å forstå problemet. Dersom eleven klarer å omgjøre det språket som problemet er presentert i til et språk som står nærmere ens egne tanker (Johnsen Høines, 1998), vil det både kunne være klargjørende for hva problemet handler om og gjøre en bedre i stand til å kunne løse problemet. Den potensielle årsaksforklaringen mellom manglende metodefokus i norske lærebøker og norske PISA-resultater passer sammen med Kjærnsli og Olsen (2013, s. 79) sin påstand om norske elever om at det kan være «gunstig å fokusere mer på å tilegne seg matematiske metoder i matematikkundervisningen, for på den måten å øke antall metoder man har til rådighet til modellering og problemløsning.»

Naalsund (2012) hevder i sin studie at når elevene ikke kunne bruke en bestemt prosedyre på et problem, hadde de ingen andre alternativ. Det at problemløsningsmetodene er så frekventerte i lærebøkene, samtidig som at de ikke er gjort eksplisitte hverken i form av innhold, bruksområde eller navn, kan bety at det ligger en gullgruve for utviklingen av problemløsningskompetanse latent i lærebøkene som lærebokforfatterne og forlagene kan ta utgangspunkt i når de skal forfatte nye læremidler tilpasset læreplanen for 2020. Det kan en allerede se spor av i ulike dokumenter knyttet til den nye læreplanen som er under utarbeidelse. For eksempel er det tydelig i Kunnskapsdepartementet (2018) sine fastsatte føringer for utformingen av læreplaner for fag med utgangspunkt i kjerneelementene. Utforsking og problemløsning er det første kjerneelementet hvor en finner formuleringen (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15): «Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene.» Formuleringen kan leses som at en i mye sterkere grad ønsker å være eksplisitte om både innhold og bruksområde for det jeg har kalt heuristiske tilnærmingsmåter. Et slikt økt fokus på selve tilnærmingen vil kunne føre til at lærebokforfatterne i større grad beskriver innholdet og bruksområdet for metodene, samt navngir dem med informative navn som forteller noe om selve metodene. Det vil videre kunne føre til en økt bevisstgjøring rundt metodene fordi en legger forholdene til rette for at elevene og lærerne kan tenke og snakke om de matematiske metodene og det matematiske innholdet (Grevholm, 2004; Gray & Tall, 2007). Slike endringer vil kunne legge forholdene til rette for hovedprinsippene for undervisning i problemløsning slik Lester (1996) beskriver det etter sin granskning av forskningslitteraturen, som konkluderer med at elevene tjener på en systematisk undervisning i problemløsning over tid. Funnene mine har også hatt innvirkning på innholdet i kvalitetsveilederen for læremidler fra Utdanningsdirektoratet (Utdanningsdirektoratet, 2018b), for eksempel i påstand 3.5 om koblingen til læreplanverket: «Læremiddelet har gode eksempler som viser hvordan eleven kan bruke ulike problemløsningsstrategier.» Påstanden kan stå som avslutning på diskusjonsdelen av delstudie 1 i det den uttrykker en naturlig konsekvens av funnene og et skritt på veien frem mot å gjøre læreboken til en gullgruve for utvikling av matematisk problemløsningskompetanse.

6.3 Delstudie 2

Introduksjonen til bokstaver som symbol for variable størrelser varierer i lærebøkene med hensyn på årstrinn, mengde og perspektiv. Årstrinnene varierer fra 8. til 9. klasse, noe som kan bety at de skolene som benytter læreverket Kode X (Christensen, 2007) har elever som ikke har hatt undervisning i algebra når TIMSS-testen blir gjennomført på våren i 8. klasse. Mengden i lærebøkene varierer fra 26 sider i kapitlet 'Tall og algebra' (Hjardar & Pedersen, 2006a) til 114 sider i kapitlet 'Algebra' (Christensen, 2007). Det er kun én lærebok som benytter samme navn på kapitlet som læreplanen bruker på hovedområdet, og det er til dels manglende samsvar mellom læreplanens fortolkede intensjon av emnet og lærebøkenes fremstilling. Dette funnet stemmer godt overens med det Alseth m.fl. (2003) fant i deres studie av algebra i lærebøker fra L97-perioden. De konkluderte med at forfatterne i liten grad hadde inkorporert endringene i den nye læreplanen.

I delstudien min arter det manglende samsvaret seg på ulike måter i de enkelte lærebøkene, men felles for dem er at algebraen i liten grad generaliserer tallæren, som Mason (1996) mener er den viktigste siden ved algebraisk tenking og nøkkelen til at algebra ikke forblir et problememne. Mangelen på generaliseringer med utgangspunkt i tallæren kan eksemplifiseres ved at tallmønster ikke benyttes som inngang til variabelbegrepet, men heller som en avslutning på kapitlet. Det samme kan hevdes ved at algebraiske skrivemåter ikke blir forklart med utgangspunkt i tallæren:



Mellom tall og variabler sløyfer vi ofte multiplikasjonstegnet mellom tallet og variabelen.

$4 \cdot a$ skrives $4a$
$8 \cdot \mathrm{b}$ skrives $8b$, osv.

Vi har også at

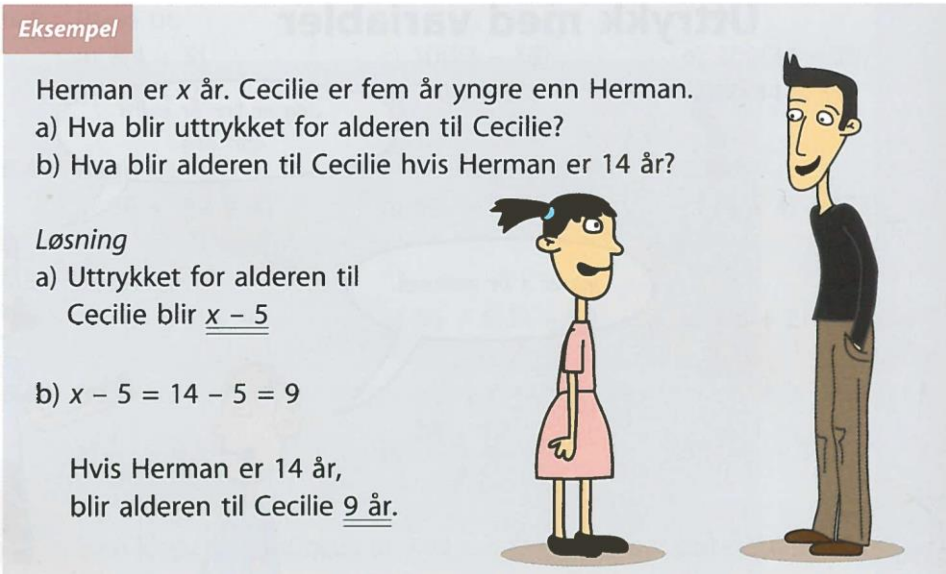
$1 \cdot a = 1a = a$

Det mest vanlige er å bruke formen a.

Figur 19. Eksempel på at en ikke knytter forklaringer av algebraiske skrivemåter til tall (Guldbrandsen m.fl., 2006, s. 32).

Ingen av de analyserte lærebøkene har en forklaring på hvorfor det gir mening å skrive at $1a = a$. Læreplanen legger opp til å knytte tall og algebra i sammen gjennom generaliseringer, der forfatterne kan ta utgangspunkt i elevenes kunnskaper om tall og erfaringer med multiplikasjon med 1, eksempelvis $1 \cdot 2 = 2, 1 \cdot 3 = 3, 1 \cdot 4 = 4, \dots, 1 \cdot 10 = 10, \dots 1 \cdot 250 = 250, \dots, 1 \cdot n = n$, som argumentasjon for å kunne hevde at $1n$ er det samme som n.

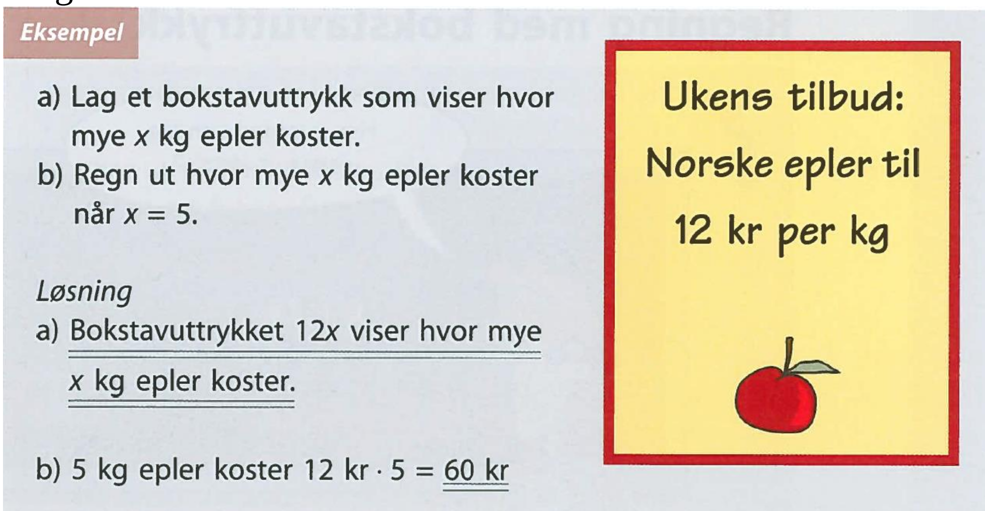
Perspektivene i lærebøkene som bokstavene blir introdusert i, gjenspeiler spenningen mellom det tradisjonelle og reformvennlige synet på skolealgebraen (Kieran, 2007), hvor eksempelvis den ene læreboken (Torkildsen & Maugesten, 2007a) introduserer den variable gjennom et funksjonsperspektiv og de andre fem gjennom et manipulasjonsperspektiv. Manipulasjonsfokuset gjør at variabelaspektet gis lite oppmerksomhet utover å være bokstaver som det går an å regne med. Introduksjonen av bokstaver som variable størrelser gjøres i hovedsak gjennom eksempler hvor den variable varierer lite, i tillegg til at det generelle uttrykket i form av et algebraisk uttrykk ofte blir laget først, før en setter inn en tallverdi for den variable:



Figur 20. Eksempel på introduksjon av den variable (Hjardar & Pedersen, 2006a, s. 186).

I eksemplet er alderen til Herman den variable, men å forestille seg at alderen til en konkret person er noe som kan variere, kan by på tankemessige utfordringer, spesielt i en introduksjonsfase til variabelbegrepet. Siden en ikke kjenner alderen til Herman, kan det være mer nærliggende å tolke den som en ukjent. I b) er det meningen å bruke det algebraiske uttrykket fra a) til å finne hva alderen til Cecilie er, gitt at Herman er 14 år og Cecilie er 5 år yngre. Problemet i b) er enkelt å svare på, og en trenger egentlig ikke svaret fra a) for å løse det. En kan diskutere hvor meningsfullt det virker for elevene å lage et algebraisk uttrykk som en ikke trenger for å kunne svare på deloppgaven til slutt. En del elever vil kunne oppleve det å lage slike generelle uttrykk først, for så å måtte sette inn verdier i dette etterpå som uforståelig, tungvint og lite motiverende. Bokstaver som symbol for variable størrelser kan da oppfattes som noe en ikke har bruk for og som kompliserer problemet. Booker (1987) understreker viktigheten av at undervisningen av algebra oppleves som meningsfull for elevene, og Watson (1990) mener at den viktigste grunnen til at elever har problemer med algebra er at de ikke ser nytten av den, som igjen får konsekvenser for motivasjon og vilje til å arbeide med algebra. Valget av eksempler hvor den variable blir introdusert kan tenkes å påvirke deler av det Kilpatrick m.fl. (2001) kaller for elevenes ‘productive dispositon’, som inneholder i hvor stor grad matematikken fremstår som nyttig og verdifull, og for elevenes ‘conceptual understanding’ i form av å kunne forstå matematiske begrep og fremgangsmåter. Costello (1991) berører også dette når han poengterer at den matematiske aktiviteten må virke fornuftig for elevene, og at symbolene, og prosedyrer for manipulasjon av symboler, må velges slik at de passer aktiviteten. Lite egnede eksempler, spesielt knyttet til variabelbegrepet og progresjonen i eksempeloppgavene, kan også tenkes å påvirke utviklingen av det Niss og Jensen (2002) kaller for tankegangskompetanse og representasjonskompetanse. Førstnevnte i form av kjennskap til hvilke spørsmål som er typiske for matematikk og hvilke svar som kan forventes. Representasjonskompetansen inkluderer det å kunne oversette mellom og forstå representasjonsformenes innbyrdes forbindelser og å kunne velge hensiktsmessige representasjonsformer, hvor det å lage en algebraisk representasjon i deloppgave a) for å kunne svare på deloppgave b), vil kunne oppleves som lite hensiktsmessig. Costello (1991) understreker i tillegg viktigheten av å velge hensiktsmessige algebraiske aktiviteter og det at det ikke er fornuftig å starte introduksjonen til algebraiske symbol med for lette eksempler.

Når det gjelder Bills m.fl. (2006) sine to komponenter for klassifisering av eksemplenes pedagogiske nyttighet, gjennomsiktighet og generaliserbarhet, kan det virke som at det er et potensial for forbedring i valg av pedagogisk nyttige eksempler når lærebøkene skal introdusere bokstaver som symbol for variable størrelser. Bokstavene som innføres opptrer mer som ukjente enn som variable til tross for at det ikke er i en likningskontekst de innføres i. Det kan tenkes å påvirke utviklingen av det Kilpatrick m.fl. (2001) beskriver som adaptiv resonnering, som innebærer refleksjon over begreper og fremgangsmåter, og hvordan de logisk henger sammen med hverandre og konteksten rundt. Det samme kan sies om lærebøkenes feilaktige bruk av multiplikator og multiplikand i oversettelser mellom tekst og det matematiske symbolspråket, og det at lærebøkene innfører forkortede skrivemåter med en gang. Disse kan henge sammen, og en mulig forklaring på det er at ønske om en formell skrivemåte med tallfaktoren fremst og variabel til slutt påvirker hvordan forfatterne velger å oversette tekster:


Eksempel

a) Lag et bokstavuttrykk som viser hvor mye x kg epler koster.
b) Regn ut hvor mye x kg epler koster når $x = 5$.

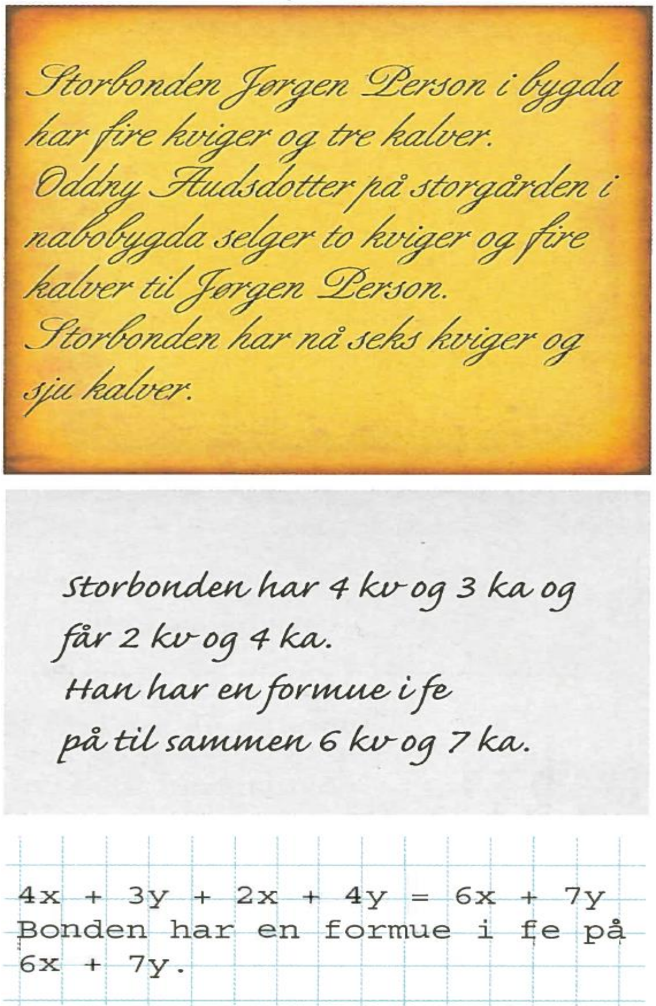
Løsning
a) Bokstavuttrykket $12x$ viser hvor mye x kg epler koster.

b) 5 kg epler koster 12 kr · 5 = 60 kr

Figur 21. Eksempel på formell skrivemåte i introduksjonen av algebra (Hjardar & Pedersen, 2006a, s. 189).

Kieran (1990) uttrykker at kraften til den symbolske algebraen fjerner mange av forskjellene hverdagsspråket har, og på den måten utvider brukermulighetene. Men hun påpeker samtidig at kostnaden er i form av at den symbolske algebraen er semantisk fattig, og på grunn av at den er så allsidig og brukervennlig innenfor mange kontekster, kan språket føles som om det ikke hører hjemme noe sted. Lærebøkenes fokus på det formelle i introduksjonen til algebraen kan være med på å forsterke dette, samt utviklingen av det Niss og Jensen (2002) kaller for symbol- og formalismekompetansen, som innebærer å kunne oversette fram og tilbake mellom det matematiske symbolspråket og hverdagsspråket. Costello (1991) poengterer viktigheten av å skape meningsinnhold i algebra og understreker at dersom elevene skal trives og utvikle kompetanse i algebra, må de gjenkjenne og sette pris på innholdet i forskjellige algebraiske utsagn og symbolene som utgjør utsagnet.

I delstudien ble det også funnet mangelfulle og feilaktige forklaringer i lærebøkene, noe som kan legge forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger (Küchemann, 1981), da spesielt misoppfatningen hvor en betrakter bokstaver som forkortninger på navn eller som konkrete objekt:



Figur 22. Eksempel på hvordan læreboken kan legge forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger (Christensen, 2007, s. 9).

Eksemplet over passer til MacGregor og Staceys (1997) påstand om at slike misoppfatninger ikke er uunngåelige misoppfatninger hos elevene, men heller misoppfatninger skapt av læreren eller læreboken.

Funn fra delstudien kan male et relativt dystert bilde av introduksjonskapitlene i algebra i lærebøker brukt på ungdomstrinnet i Norge, men samtidig er det ikke nødvendigvis så store forandringer som skal til for at mangelfulle sammenhenger til tallære kan unngås ved for eksempel å inkludere mer induktive fremstillinger der en eksemplifiserer en rekke enkelttilfelle med tall som grunnlag for den generelle beskrivelsen med algebraiske symbol.

6.4 Delstudie 3

I delstudie 2 fant en at introduksjonen til bokstaver som symbol for variable størrelser varierte med hensyn på årstrinn, mengde og perspektiv i seks læreverk. Delstudie 3 gir en kategorisering av oppgavetyper og deres fordeling i de respektive algebrakapitlene, hvor de genererte hovedkategoriene er:

Oppgavetype/ lærebok	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	Totalt
Algebraisk uttrykk	33 %	87 %	77 %	81 %	82 %	77 %
Algebraisk formel	-	-	12 %	-	4 %	4 %
Algebraisk likning	44 %	3 %	-	-	-	4 %
Kun tall	18 %	10 %	10 %	12 %	14 %	13 %
Spill, pc, grublis	5 %	-	1 %	7 %	-	2 %

Figur 23. Prosentvis fordeling av hovedkategorier av oppgavetyper innen hver lærebok og totalt.

Alle lærebøkene har til felles at de både har oppgaver av typen ‘algebraisk uttrykk’ og ‘kun tall’. Disse to hovedkategoriene av oppgaver utgjør 90 % av alle oppgavene i studien. På et overfladisk nivå kan det tolkes som om at lærebokforfatterne har innarbeidet læreplanen sine intensjoner om å knytte algebra sammen med tall i elevoppgavene. Det gjelder spesielt fire av fem analyserte lærebøker. Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006a) har en annen oppgavesammensetning, hvor likninger utgjør majoriteten (44 %). Innenfor disse likningsoppgavene er det ingen som handler om å lage en likning, for eksempel ved å oversette fra tekst til matematisk symbol. 85 % av oppgavene dreier seg om å løse likninger, hvor av de resterende 15 % innebærer å sette prøve på likningen (se vedlegg til artikkel 3 for oppgavekategorier og fordelinger blant lærebøkene). Vurderer en denne sammensetningen opp mot Kieran (1996) sin GTG-modellen, kan en påstå at oppgavene i stor grad inneholder transformerende aktiviteter.

For å kunne si noe mer om lærebokforfatternes behandling av overgangen fra tall til algebra må en se på fordelingen av underkategorier av oppgavetypene, da spesielt innenfor den mest frekvente hovedkategorien, omhandlende algebraiske uttrykk (77 %). Jeg velger ikke å presentere noe mer utdypende fra kategorien 'kun tall', som 13 % av oppgavene omhandler, utover at poengtere at disse oppgavene er relativt isolerte fra algebraen og stort sett handler om repetisjon av tallregning og annen manipulering av talluttrykk.

Innenfor oppgaver omhandlende algebraiske uttrykk eksisterer det fire underkategorier som videre er fininndelt i nye underkategorier, totalt bestående av 25 underkategorier på et eller annet nivå. En oversikt over den prosentvise fordelingen innenfor de fem lærebøkene og de fire underkategoriene av algebraiske uttrykk er:

Algebraisk uttrykk	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	Totalt
lage	28 %	13 %	-	77 %	7 %	20 %
forklare el. diskutere	3 %	2 %	-	4 %	6 %	4 %
sette inn verdi(er)	23 %	49 %	32 %	16 %	6 %	18 %
regne med	46 %	36 %	68 %	3 %	81 %	58 %

Figur 24. Prosentvis fordeling av underkategorier av oppgavetypen 'algebraisk uttrykk' innenfor hver lærebok og totalt.

Matrisen viser at introduksjonen av bokstaver som symbol for variable størrelser i all hovedsak skjer gjennom manipulasjonsoppgaver i form av å regne med algebraiske uttrykk (58 %) og sette inn verdi(er) (18 %) i algebraiske uttrykk. Det vil si at oppgavene domineres av transformerende aktiviteter (Kieran, 1996). I oppgaver hvor en regner med algebraiske uttrykk er det generert flere underkategorier av oppgaver, hvor den første delingen skjer i oppgaver som har med potensuttrykk (25 %) og ikke potensuttrykk (75 %). Innenfor manipulasjonsoppgaver som inneholder algebraiske uttrykk uten potensuttrykk er underkategoriene og fordelingen slik:

Algebraisk uttrykk – regne med – uten potens	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	Totalt
addisjon og subtraksjon	100 %	100 %	72 %	89 %	37 %	55 %
multiplikasjon	-	-	28 %	11 %	37 %	29 %
brøk	-	-	-	-	26 %	16 %

Figur 25. Fordeling av regneoppgaver med algebraiske uttrykk uten potens.

Fordelingen viser at alle lærebøkene inneholder underkategorier av oppgaver med addisjon og subtraksjon av algebraiske uttrykk uten potenser som den største andelen av disse introduksjonsoppgavene. KodeX9A (Christensen, 2007) skiller seg ut fra de andre ved å ha en bredere fordeling av oppgavetyper, som delvis kan forklares med at introduksjonen til algebra ikke skjer før i 9. klasseboken i dette læreverket.

Alle lærebøkene foruten Tetra 8 (Hagen m.fl., 2006a) har en overvekt av regneoppgaver eller innsettingsoppgaver. 77 % av Tetra sine oppgaver om algebraiske uttrykk er av typen der en lager slike uttrykk. For å kunne si noe mer om i hvor stor grad denne læreboken skiller seg fra de andre, må en se mer detaljert på underkategoriene og fordelingen innenfor denne oppgavetypen:

Algebraisk uttrykk – lage	
fra figur	29 %
til figur	-
fra tekst	14 %
til tekst	-
fra mønster	57 %

Figur 26. Prosentvis fordeling av underkategorier av oppgavetyper der en lager algebraiske uttrykk i Tetra 8 (Hagen m.fl., 2006a).

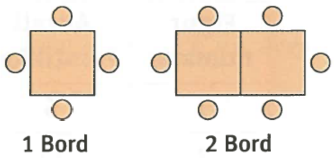
Oversikten på figur 26 viser at oppgavetypen dreier seg som å lage algebraiske uttrykk fra figur, fra tekst og fra mønster. Mønsteroppgavene er videre inndelt i følgende underkategorier:

<table>
<tr><th colspan="4">fra mønster</th></tr>
<tr><td colspan="2">tallmønster
24 %</td><td colspan="2">geometrisk mønster
76 %</td></tr>
<tr><td>tallutregning
75 %</td><td>generelt uttrykk
25 %</td><td>tallutregning
88 %</td><td>generelt uttrykk
12 %</td></tr>
</table>

Figur 27. Prosentvis fordeling av underkategorier av oppgavetyper der en lager algebraiske uttrykk fra mønster i Tetra (Hagen m.fl., 2006a).

Matrisen i figur 26 tyder på at relativ mange oppgaver (57 %) handler om å lage algebraiske uttrykk fra mønster, men oversikten i figur 27 modererer dette inntrykket betydelig ved å vise at disse oppgavene primært dreier seg om tallbehandling i form av enkel regning med tall:

Vi har kvadratiske bord med plass til én person på hver side. Dersom vi har ett bord, er det plass til 4 personer. Når vi skal ha plass til flere, setter vi bordene inntil hverandre slik som på figuren.



Hvor mange personer får plass ved bordene?

Lag en slik tabell i arbeidsboka di og fyll inn det som mangler.

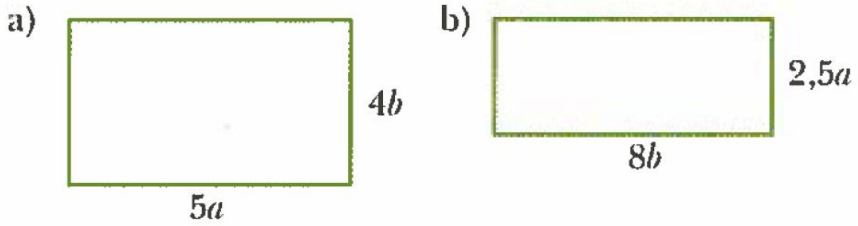
Antall bord	Antall personer
1	
2	
3	
4	
5	
20	
100	
n	

Figur 28. Eksempeloppgave der en lager et algebraisk uttrykk fra figur (Hagen m.fl., 2006a, s. 97).

Oppgaven tar utgangspunkt i en figur og er derfor kategorisert som at en lager et algebraisk uttrykk fra en figur til tross for at den også består av et tallmønster i tabellen. Eksempeloppgaven innebærer sju utregninger i tabellen for til slutt å kunne lage det ene generelle algebraiske uttrykket for n. Det betyr at kodingen av slike oppgaver gjør at det blir et uforholdsmessig høyt antall mønsteroppgaver, men der underkategoriene sørger for å nyansere bildet av det matematiske innholdet. Lærebøkene etterspør slike generelle algebraiske uttrykk etter å ha studert et mønster totalt 23 ganger, som utgjør under 1 % av de 2547 analyserte oppgavene.

Matrisen på figur 24 viser videre at 20 % av oppgavene handler om å lage algebraiske uttrykk fra figur, og med det kan gi et inntrykk av at disse oppgavene innbefatter noe annet enn manipulasjon av algebraisk uttrykk. Et eksempel på en karakteristisk oppgave av denne typen viser imidlertid at de ikke er så forskjellige som det ved første øyekast kan se ut som:

37 Skriv et uttrykk for arealet av figurene.



Figur 29. Eksempeloppgave der en lager algebraiske uttrykk fra figur (Hagen m.fl., 2006a, s. 97).

Oppgaven ber eleven om å skrive et uttrykk for arealet av figurene når sidelengdene er gitt som algebraiske uttrykk. Selv om oppgaven tar utgangspunkt i en figur og en kjent kontekst for elevene, i form av areal av rektangler, kan en si at oppgaven egentlig handler om algebramanipulasjon, eksemplifisert i a) med $A = l \cdot b = 5a \cdot 4b = 20ab$. Elevene har mest sannsynlig arbeidet med arealformelen og rektangler med spesifikke sidelengder i flere år, uten å ha snakket så mye om variabelaspektet i matematiske formler, når de møter oppgaver av denne typen. De er vant med å erstatte bokstavene l og b i arealformelen med konkrete størrelser, for eksempel 5 m og 4 m, for så å regne ut arealet som gis i antall kvadratmeter. I møtet med algebraen er de konkrete sidelengdene byttet ut med bokstavuttrykk som i form ligner tilsynelatende på de konkrete størrelsene de har arbeidet med tidligere. Eneste ytre forskjell er at bokstavuttrykkene skrives med kursiverte bokstaver og ingen mellomrom mellom tallet og bokstaven. I slike typer av oppgaver definerer stort sett ikke lærebøkene hva bokstavene står for, utover at de er inntegnet på figurene. I hvor stor grad det gir mening for elevene i introduksjonsfasen til algebra at sidelengdene er henholdsvis $5a$ og $4b$, har jeg ikke undersøkt eller kjenner forskning på, men jeg antar at det ikke er trivielt å kunne gi mening til at sidelengdene er et multiplum av ulike variable størrelser, som elevene vil kunne forbinde med et visst antall av en eller annen enhet. Det vil med andre ord si at enheten, eller enhetene, vites ikke, at hva variablene a og b står for ikke er definert ut over at de er skrevet på figuren, at hvorfor lengden består av en variabel og bredden av en annen, og at hvorfor uttrykket $4b$ er brukt om bredden b mens lengden l ikke er oppgitt som et uttrykk hvor bokstaven l inngår, heller ikke vites. Hva med selve arealet, hva forteller $20ab$ om arealet til dette rektanglet, hva kan og skal en bruke det til? Poenget jeg prøver å få frem er at selv om oppgaven er kategorisert som et algebraisk uttrykk som er laget fra en figur, er ikke det ensbetydende med at det er en oppgave som får frem behovet for bokstaver som symbol for variable størrelser, eller at den legger forholdene til rette for å kunne knytte mer mening til bokstavene enn klassiske manipulasjonsoppgaver i algebraen.

Hva så med oppgaver som går ut på å lage algebraiske uttrykk fra tekst? Er disse mer egnet til å få frem variabelaspektet eller behovet for å introdusere bokstaver som symbol for variable størrelser? Under gjengis en typisk eksempeloppgave på denne underkategorien som utgjør 14 % av oppgavene tilhørende hovedkategorien som går ut på å lage algebraiske uttrykk i Tetra 8 (Hagen m.fl., 2006a):

17 Langflette har en kniv som er x cm lang.
Lillepirats kniv er 5 cm lengre.

a) Hvilket uttrykk beskriver hvor mange centimeter lang Lillepirats kniv er?

$5x$ $\quad\quad$ $x + 5$ $\quad\quad$ $x - 5$

b) Hvor lang er Lillepirats kniv dersom Langflettes kniv er 10 cm?

Figur 30. Eksempeloppgave på å lage algebraisk uttrykk fra tekst (Hagen m.fl., 2006a, s. 92).

Det er deloppgave a) som er klassifisert som å lage et algebraisk uttrykk fra tekst, hvor elevene skal velge ett av tre algebraiske uttrykk som uttrykk for lengden på kniven til Lillepirat. Denne deloppgaven er trolig egnet til å arbeide med elevenes utvikling av både representasjonskompetansen og symbol- og formalismekompetansen gjennom å oversette fra tekst til matematiske symbol. Konteksten som bokstavuttrykkene er gitt i er, i motsetning til forrige eksempeloppgave, trolig enklere å forstå for elevene, og på den måten også mer egnet til å få frem behovet for bokstaver som symbol for variable størrelser. Davies-Dorsey, Ross & Morrison (1991) skriver om at konteksten som problemet er gitt i, påvirker den mentale representasjonen av problemet og elevens motivasjon til å løse det, og i Kieran (1996) sin beskrivelse av algebraiske aktiviteter passer deloppgave a) inn under det hun kaller for en genererende aktivitet. Men progresjonen i oppgaven, som går fra et generelt uttrykk i deloppgave a), som trolig skal kunne brukes for å svare på deloppgave b), trengs egentlig ikke. Spørsmålet i b) er så enkelt å svare på at en del elever vil kunne bli usikre på hva en skal med det generelle uttrykket i a). En slik form for oppgaveprogresjon går igjen i lærebøkene. En kan stille spørsmål om hvor godt egnet denne progresjonen er for å skape et behov for å innføre bokstaver som symbol for variable størrelser. Oppgavetypen er med på å forsterke inntrykket av at bokstaver er noe som innføres i matematikken for at en skal kunne regne med dem, i dette tilfellet å regne med dem gjennom å erstatte en bokstav med et tall. Det vil si at den genererende aktiviteten i slike tilfeller kan virke relativt meningsløs for elever ettersom slutten på oppgaven er den transformerende aktiviteten å sette inn en tallverdi i et generelt uttrykk som egentlig ikke trengs.

Deloppgave b) i eksempeloppgaven over er klassifisert som å sette inn en verdi for den variable. Innenfor denne hovedtypen av oppgaver finnes det også flere ulike typer, hvor den induktive innholdsanalysen har hjulpet med å generere følgende underkategorier:

sette inn verdi(er)			
direkte 88 %		indirekte 12 %	
én variabel 28 %	flere variabler 72 %	figur 23 %	tekst 77 %

Figur 31. Prosentvis fordeling av underkategorier av oppgavetyper der en setter inn verdi(er) i algebraiske uttrykk totalt i lærebøkene.

Innenfor disse underkategoriene er deloppgave b) på figur 30 tolket som å omhandle at en indirekte setter inn en verdi fra en tekst. Det indirekte er at oppgaveformuleringen ikke eksplisitt ber om at en skal sette inn verdien, der det algebraiske uttrykket er gitt som en del av en tekst, i motsetning til inntegnet på en figur. Generelt sett kan en hevde at oppgaver hvor en skal erstatte bokstaver med tall gir et inntrykk av at bokstaven er noe annet enn et konkret objekt, og med det kan tenkes å være med på å dempe denne misoppfatningen. Men samtidig kan det tenkes at det er med på å forsterke den misoppfatningen som går på at elevene erstatter bokstaven med tall uten at de blir bedt om å sette inn en tallverdi for den variable. Som det fremgår av fordelingen over er 88 % av alle slike innsettingsoppgaver av typen der læreboken direkte ber om at en skal sette inn verdi(er) for de variable. 28 % av disse er oppgaver hvor en setter inn én verdi for én bokstav. De resterende 72 % av disse oppgavene involverer flere variabler på en eller annen måte, hvor flesteparten er av typen der en skal sette inn én verdi for hver bokstav, eksempelvis 5 for a og 4 for b i $2a + 3b$. Det vil si at i tilfeller hvor det algebraiske uttrykket består av flere variabler kommer ikke nødvendigvis variabelaspektet tydeligere frem, ettersom én verdi blir satt inn for hver variabel.

Oppsummert kan en si at underkategoriene av hovedkategorien av oppgavetyper omhandlende algebraiske uttrykk, ‘regne med’ og ‘sette inn verdi(er)’ (58 % og 18 %), sammen med majoriteten av oppgavene kategorisert som ‘lage algebraisk uttrykk’ (20 %), som i de fleste tilfellene handler om en eller annen form for regning med bokstaver, gir et overveldende inntrykk av at lærebøkene introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser fordi en skal regne med bokstaver i en eller annen form. Et slikt transformasjonsfokus gjør at variabelaspektet, i betydningen av at det er noe som varierer, er lite fremtredende. Det samme gjelder for flere av de tilsynelatende praktiske kontekstene de algebraiske uttrykkene blir presentert i, hvor bokstavene opptrer mer som ukjente eller enheter, og ikke som variabler. Funnene gjør at det settes spørsmålstegn ved hvorvidt lærebøkene oppfyller den fortolkede læreplanen og de rådende matematikkdidaktiske anbefalingene på overgangen fra tall til algebra. Oppgavene kan heller ikke sies å leve opp til

Zwetzschler og Predigers (2013, s. 559) beskrivelsen av algebraiske uttrykk som «pattern generalizers of arithmetical or geometrical pattern». Det inntrykket forsterkes gjennom plasseringen av mønsteroppgaver til slutt i kapitlet i den eneste læreboken som har med flere enn én slik oppgave. Men samtidig finnes det oppgaver, som bottentalet (Ulin, 1983), som har potensial til å motvirke misoppfatninger knyttet til likhetstegnet og å kunne se på algebraisk uttrykk som objekt. Det samme kan sies om oppgaver som oppfordrer til å bruke strukturelle likheter ved løsning av innsettingsoppgaver.

6.5 Kritisk kvalitetsdiskusjon av arbeidet

Jeg vil med utgangspunkt i Lester og Lambdin (1998) sine sju kvalitetskriterier gi en evaluering av min egen doktorgradsforskning. Det første kriteriet, som også er det viktigste kriteriet, er 'worthwhileness', oversatt til verdifullhet, handler om forskningens relevans og potensialet den har til å utvide og øke forståelsen av undervisning og læring av matematikk. Relevansen på forskningen min er stor om en vurderer det opp imot skolepolitiske endringer. Det gjelder for eksempel dens betydning for oppstarten og utarbeidelsen av både grunnlagsdokumentet for kvalitetskriteriene for læremidler i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018a) og den den digitale veilederen fra Utdanningsdirektoratet (Utdanningsdirektoratet, 2018b), som bygger på Meld. St. 28 (2015-2016) hvor det refereres til forskningen min. I arbeidet med å utvikle den nye læreplanen for 2020 kan en også se deler av forskningen min i opplistingen av de ni problemløsningsmetodene i den andre skissen til kjerneelementer i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2017), og mer generelt i det tydelige fokusskiftet fra en læreplan (Utdanningsdirektoratet, 2005b) hvor problemløsning er integrert og vanskelig å få øye på det, til planen for 2020 hvor problemløsning har en mer sentral og eksplisitt rolle. Det første kjerneelementet ligger an til å bli 'utforskning og problemløsning' hvor ett av foreløpig fire underpunkter omhandler problemløsningsstrategier. Også algebra ser ut til å få økt oppmerksomhet i den nye læreplanen, hvor en allerede fra 1. klasse skal arbeide med algebraisk tenkemåte (Utdanningsdirektoratet, 2018c).

Vurderer jeg forskningen min opp mot graden av verdi for matematikklærere og lærebokforfattere, er det trolig mer delt. Delt fordi jeg ikke vet om funnene mine vil nå frem til læremiddelforfatterne, selv om jeg har sendt artiklene mine til forlagene som har publisert de analyserte lærebøkene. Jeg vil også sende dem avhandlingen i sin helhet. Når det gjelder nytteverdien for matematikklærerne har jeg forsøkt å maksimere denne ved å skrive om delstudie 2 og 3, samt kappen, på norsk. I tillegg har jeg holdt foredrag på en rekke seminar og kurs for lærere rundt om i landet, samt at jeg har formidlet forskningen til en rekke lærerstudenter ved Høgskulen på Vestlandet siden 2011. Det aller mest spennende er om forskningen min vil føre til endringer i klasserommene og påvirke elevenes kompetanseutvikling i problemløsning og algebra. I hvor stor grad det eventuelt vil skje er ikke lett å gi noe svar på, utover det at de to viktigste dokumentet alle lærere og læremiddelforfattere skal forholde seg til i tiden fremover ser ut til å ha blitt påvirket av funn fra forskningen min.

Det andre kriteriet er 'coherence', oversatt til koherens, som i hovedsak handler om sammenhengen mellom forskningsspørsmålet, forskningsmetoden og analyseteknikken jeg har benyttet for å kunne svare på forskningsspørsmålet. I alle tre studiene har jeg benyttet en innholdsanalyse for best mulig å kunne svare på forskningsspørsmålene som omhandler det matematiske innholdet og de matematiske metodene i lærebøkene. Forskningsspørsmålene i delstudiene er formulert slik at en innholdsanalyse kan få frem det karakteristiske ved lærebøkenes behandling av ni problemløsningsmetoder og introduksjonen av emnet algebra, da både igjennom teksten og eksemplene, og oppgavene.

I den første delstudien hadde jeg en deduktiv tilnærming gjennom forhåndsdefinerte kategorier ut fra teori og tidligere forskning på feltet. Kodingen av eksemplene ble gjort ved hjelp av et forhåndsdefinert kodeskjema og kodemanual. I arbeidet med eksemplene oppstod det etter hvert et behov for undergrupper innenfor enkelte av de forhåndsdefinerte kategoriene, hvor jeg hadde en induktiv tilnærming i det at disse ikke var definert på forhånd, men i stedet dukket opp fra selve datamaterialet etter en rekke gjennomlesninger. I de to algebrastudiene benyttet jeg en induktiv tilnærming dels fordi jeg ikke kjente til tilsvarende studier, dels fordi jeg ikke ville forhåndsdefinere hva jeg skulle lete etter i datamaterialet og med det i større grad kunne være åpen for hvilke som helst funn. Jeg likte også tanken på at en gjennom en rekke gjennomlesninger og systematiske observasjoner kunne klare å indusere et matematisk innhold i de ulike introduksjonskapitlene. Analyseteknikken har jeg eksemplifisert i artiklene og i kappen, både gjennom en generell beskrivelse av den, men også gjennom autentiske eksempler og oppgaver hvor jeg beskriver analysene som ligger til grunn og diskuterer ut ifra de resulterende funnene.

Det tredje kriteriet er 'competence', oversatt til kompetanse, som handler om i hvilken grad jeg er trent i å utføre innholdsanalyser som dette. Da jeg først startet på problemløsningsstudien var det samtidig som jeg gjennomførte metodekurset, MA607 – Research design and research methods in mathematics education, på PhD.-studiet ved Universitet i Agder. Det ble ikke undervist eller gitt opplæring i hvordan en kan gjennomføre innholdsanalyser, men jeg utførte pilotstudien i problemløsningskurset, MA604 – Problem solving, før jeg skrev det avsluttende essayet i metodekurset. Det vil si at jeg i stor grad måtte lese meg opp på teorien rundt metode og forskning som benyttet innholdsanalyser gjennom eget litteratursøk i startfasen. Etter hvert som jeg fikk tildelt veiledere for doktorgradsarbeidet har jeg kunnet diskutere metoden når jeg har følt behov for det med professor Barbro Grevholm, som selv har benyttet seg av metoden flere ganger. Men samtidig har jeg fått merke at det eksisterer langt færre beskrivelser av den kvalitative innholdsanalysen enn av den kvantitative (Cho & Lee, 2014). I tillegg er problematikker knyttet til at kvalitative innholdsanalyser kan ha kvantitative elementer og motsatt, lite belyst. Eksempler på det er at selv om en i utgangspunktet er interessert i en kvantifisering av et sett med heuristiske tilnærmingsmåter er en avhengig av en kvalitativ vurdering, fordi en må tolke eksemplene, når en skal plassere dem i kategorier, det er ikke bare å telle opp. Det samme gjelder de to algebradelstudiene som har et kvalitativt utgangspunkt, hvor en eksempelvis i delstudie 3 tolker oppgaver som generer kategorier av oppgavetyper, men hvor en også er interessert i en fordeling og kvantifisering av kategoriene.

Fjerde kriterium har fått etiketten 'openness', oversatt til åpenhet, og handler spesielt om to momenter. Det første er i hvor stor grad jeg som forsker er bevisst min egen 'bias', oversatt til partiskhet. Det vil si at min forutinntatthet er både med på å bestemme hva jeg vil forske på, og til dels hvilke funn jeg kommer opp med. Valget med å studere lærebøker kom nok delvis fra troen på deres viktighet for undervisning og læring i skolen, men også delvis på grunn av mine erfaringer som lærebokforfatter og lærerutdanner i matematikk. Jeg vil allikevel presisere at jeg mener at delstudie 1 i mindre grad er påvirket av en eller annen form for forutinntatthet fordi problemløsning er et emne jeg hadde lite erfaring med da jeg startet. Jeg analyserte de norske lærebøkene etter å ha blitt begeistret for problemløsningens posisjon i Singapore og landets gode skår på internasjonale tester som PISA og TIMSS.

De to algebrastudiene er i større grad et resultat av årelang interesse for emnet. Jeg har over tid lest meg opp på forskning og teori som har motivert meg til å utføre to delstudier i håp om å kunne belyse enkelte rammefaktorer som antas å påvirke utviklingen av norske elevers kompetanse i algebra. Det andre delkriteriet om åpenhet handler om hvor godt jeg har klart å beskrive analyseteknikken som er benyttet. Det har jeg forsøkt å gjøre gjennom en detaljert beskrivelse av hvordan de ulike delene av analysearbeidet har foregått, fra rene gjennomlesninger, via notater i marg og på postit-lapper, til overføring i Excel- og Worddokument og videre grupperinger og repeterende gjennomlesninger med en gradvis større forståelse av datamaterialet. Det samme gjelder for presentasjoner av enkelte tekstutdrag og analysene som ligger bak kategoriseringen.

Det femte kriteriet er 'ethics', oversatt til etikk, som ifølge Lester og Lambdin (1998) består av to deler. Den første er hvordan forskningen er blitt gjennomført, med hensyn til det jeg har forsket på. Forlagene som lærebøkene er utgitt på, ble alle informert om forskningsprosjektet via eposter. Lærebøkene fikk jeg tilsendt gratis fra forlagene, og vi avtalte at etter hvert som forskningsartiklene ble klare skulle jeg sende disse til forlagene. I artiklene er lærebøkene presentert med navn og forlag, men det har ikke vært et mål for forskningen min å rangere eller henge ut enkeltbøker på bakgrunn av funnene. For meg har det viktige hele tiden vært å kunne gi en generell karakteristikk av det matematiske innholdet og de matematiske metodene i lærebøkene. Utvalget av autentiske eksempler og eksempeloppgaver er gjort for å utdype karakteristikken, ikke for å fremheve eller henge ut enkeltlærebøker. Dette har jeg til en viss grad lykkes med, tror jeg, fordi jeg har blitt kontaktet av veldig mange lærere og skoleledere via epost og telefon som har ønsket å få anbefalinger om hvilket læreverk de bør kjøpe inn. Jeg har konsekvent svart disse at det hverken vil jeg svare på eller har kunnskap nok om, fordi læring av matematikk er et produkt av mange flere faktorer enn det matematiske innholdet og metodene i lærebøkene. Men det faktumet at så mange personer har tatt kontakt med meg vedrørende valg av lærebøker, kan tyde på at det er behov for matematikkdidaktikkstudier som dette og for den nyutviklede digitale veilederen for vurdering av kvalitetskriterium i læremiddel som Utdanningsdirektoratet har laget.

Det andre etikk-kriteriet er anerkjennelse. Anerkjennelsen går både på de personene rundt meg som har bidratt til forskningen min, veilederen min, professor emerita Barbro Grevholm, og andre som jeg har omtalt i forordet, og andre forskere som har betydd ekstra mye for meg, som Fan og Zhu (2000, 2007), som jeg også har tydeliggjort tidligere i kappen.

Det nest siste kriteriet er 'credibility', oversatt til troverdighet, handler om hvorvidt lesere med et nøytralt og fordomsfritt syn på problemløsning, algebra og lærebøker mener at funnene mine er troverdige, samt om det er mulig å verifisere eller motbevise konklusjonene jeg har dratt. I håp om å lykkes med det har jeg blant annet gitt en detaljert beskrivelse av analyseteknikkene, definert nøkkelord, tydeliggjort forskningsspørsmålene, presentert teorien jeg har lagt til grunn, presentert tidligere forskning på området, presentert tolkningene mine sammen med alternative tolkninger av blant annet den gjeldende læreplanen, samt konkretiseringer av analysen gjennom autentiske eksempler fra lærebøkene i tillegg til de mer kvantitative oversiktene av datamaterialet. Datamaterialet er i tillegg fritt tilgjengelig for alle, og lærebøkene er lette å få tak i.

Det siste kriteriet er en samling av ulike moment som enhver god studie bør inneholde, som for eksempel tydelighet, kortfattethet og originalitet. Tydeligheten har jeg etterstrebet spesielt gjennom de autentiske lærebokeksemplene sammen med analysebeskrivelsene knyttet til disse, i tillegg til å plassere lærebøkenes problemløsningsmetoder i navngitte kategorier, og å navngi og markere skiller mellom de induktive algebrakategoriene i delstudie 2 og 3. Jeg har også vært tydelig på hvordan en konkret kan endre på eksisterende eksempler slik at de i større grad kan sies å harmonere med læreplanen, i tillegg til å knytte funnene til eksisterende rapporter og pågående arbeid om matematikk i norsk skole og skolepolitikk. Kortfattethet har jeg i mindre grad lykkes med, mye på grunn av innholdsanalysens natur og behovet for å eksemplifisere aktuelle funn. I tillegg innebærer bruk av innholdsanalyser ofte utfordringer knyttet til publisering på grunn av tidsskriftenes ordbegrensninger. Originalitet eksemplifiserer Lester og Lambdin (1998) med hvordan forskningsfunnene er ordnet og fremstilt med tanke på å få leseren til å reflektere over sine egne oppfatninger og tenke nye tanker. I hvilken grad jeg har lykkes med dette, er vanskelig å si med sikkerhet, men studiene mine har fått mye oppmerksomhet både i skolepolitikk, media og skole, og det kan indikere en form for originalitet. Dersom flere andre hadde forsket på de samme sidene ved undervisning og læring i matematikk som meg, hadde det trolig vært vanskeligere å skille seg ut og med det en mindre grad av originalitet.

7 Implikasjoner

7.1 For læremidler

En tydelig implikasjon er at lærebokforfattere og forlag får signaler om at det er mulig å forbedre kvaliteten på læremidler. Avhandlingen kommer trolig til å føre til visse revisjoner av de aktuelle lærebøkene, og de mulige implikasjonene vil dermed kunne ha betydning for elevens kompetanseutvikling, gitt læreboken som et viktig bindeledd mellom læreplanen og de pedagogiske praksisene i skolen (Jablonka & Johansson, 2010; Pepin m.fl., 2013).

Implikasjoner for læremidler kan deles i to typer. Den første typen er i større grad knyttet til tenkte implikasjoner, mens den andre er mer i retning av allerede gjeldende implikasjoner, med potensial til å kunne påvirke fremtidige læremidler. Jeg velger å starte med sistnevnte, og det jeg tidligere har skrevet om at delstudie 1 (Kongelf, 2011) og 2 (Kongelf, 2015) utgjør deler av Utdanningsdirektoratets kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremidler i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2018a). Funn fra disse kan sees igjen i innholdet i den digitale veilederen, som skoleeier, skoleledelse og lærere kan bruke når de skal vurdere kvaliteten og velge ut læremidler i matematikk. Veilederen, som er basert på forskningsresultater, kan sees på som et skritt på veien frem mot det Li (2008) etterlyser når han hevder at skriving av lærebøker i større grad bør være som et forskningsarbeid og ikke bare overføring av tidligere erfaringer. Ser en på hele den digitale veilederen under ett, oppdager en at algebra, sammen med problemløsning og modellering, er de eneste matematiske emnene som eksplisitt er nevnt. Det i seg selv forteller noe om aktualiteten i doktorgradsstudien min. Et eksempel fra veilederen er delpunkt 3.5, om utforskning og problemløsning, der en skal ta standpunkt til om «læremidlet har gode eksempler som viser hvordan eleven kan bruke ulike problemløsningsstrategier.» Sitatet kan sees på som en konsekvens av funnene fra problemløsningsstudien, og som forhåpentligvis vil kunne påvirke læremidlenes behandling av dette. Delpunktet berører også Stanic & Kilpatrick (1989) sin ferdighetsbeskrivelse av problemløsning, der en eksempelvis underviser i og arbeider med heuristiske tilnærmingsmåter. Delpunkt 3.6 i veilederen tolker jeg som at en etterspør et kontinuerlig arbeid med problemløsning gjeldende for alle elever når en skal ta stilling til om «læremiddelet har med problemløsningsoppgaver gjennomgående og integrert i de ulike kunnskapsområdene.» Sitatet kan sies å tilfredsstille Lesters (1996) påstand om at elever må løse mange problemer over lang tid fordi problemløsningsevnen utvikles langsomt. Det samme kan sies om Polyas (1945, s. 33) påstand om at «heuristic aims at generality, at the study of procedures which are independent of the subject-matter and apply to all sorts of problems.» Delpunktet kan også sies å tilfredsstille Brehmer m.fl. (2015) sin etterlysning av tiltak som kan føre til at alle elever får utviklet sin problemløsningskompetanse når de foreslår å endre læreboktradisjonen. Endringene går ut på å flytte plasseringen av problemløsningsoppgaver bort ifra slutten på kapitlet og å inkludere flere enkle problemløsningsoppgaver. Jeg støtter Brehmer m.fl., og funn fra delstudie 1 kan tyde på at tiltakene ikke trenger å være så omfattende for lærebokforfatterne siden en benytter heuristiske tilnærmingsmåter i løsningsprosessen også på enkle oppgaver. Delpunkt 3.9 i den digitale veilederen (Utdanningsdirektoratet, 2018b), om resonnering og argumentasjon, inneholder implikasjoner fra delstudie 1, hvor jeg etterspør mer fokus på selve tilnærmingsmåten, ettersom veilederen ber om at en skal ta stilling til om «læremiddelet synliggjør de bærende ideene i de ulike resonnementene som gjøres.» Delpunktet kan også tenkes å kunne påvirke introduksjonen av bokstaver som symbol for variable størrelser fordi punktet omhandler læremiddelets eksempler, regler og andre didaktiske uthevninger. Funn fra alle de tre delstudiene kan i ulik grad sees igjen i delpunkt 2.4, om pedagogisk og didaktisk kvalitet, når en skal ta stilling til om «læremiddelet bruker ulike representasjoner og forklarer overgangen mellom dem», og delpunkt 3.11, representasjon og kommunikasjon, når en skal vurdere om «læremiddelet legger opp til at eleven må oversette mellom det matematiske symbolspråket, dagligspråket og mellom ulike representasjoner.» Spesielt det første sitatet kan sies å berøre den heuristiske tilnærmingsmåten ‘use a visualisation’ og underkategorien ‘change of form of representation’ innenfor ‘change your point of view’, som var henholdsvis den andre og tredje mest brukte tilnærmingsmåten. Oversettelser mellom ulike representasjoner, og mellom det matematiske symbolspråket og hverdagsspråket, behandles i delstudie 2 og 3, hvor jeg i førstnevnte påviser feil bruk av multiplikator og multiplikand i oversettelser mellom situasjoner beskrevet i tekst og matematiske symbol, og sistnevnte i form av at algebraoppgavene i svært liten grad handler om slike oversettelser. Maffei og Mariotti (2011) påpeker viktigheten av hverdagsspråket, oppgavedesignen og matematikklæreren i arbeidet med å lage algebraiske uttrykk. I begge algebrastudiene fant jeg at introduksjonen av bokstaver som symbol for variable størrelser i all hovedsak skjer gjennom et manipulasjonsperspektiv, hvor oversettelser mellom det matematiske symbolspråket og dagligspråket i mindre grad trengs. I tilfeller der lærebøkene inneholder oversettelser fra tekst eller figur til matematiske symbol, lages det ofte et generelt algebraisk uttrykk først som egentlig ikke trengs for å kunne svare på de resterende oppgavene. Det gjør at en kan stille spørsmål ved hvorvidt elever finner det algebraiske symbolspråket som nyttig. Delpunkt 3.12, om abstraksjon og generalisering, i Utdanningsdirektoratets veileder (Utdanningsdirektoratet, 2018b), handler også om algebra, der en ber om å ta stilling til om «læremiddelet legger opp til at elevene skal utvikle algebraisk tenkning. Det vil si at elevene selv skal kunne generalisere og finne sammenhenger ut ifra mønstre og strukturer.» Mason (1996, s. 25) uttrykker seg slik: «Generalization is the heartbeat of mathematics and appears in many forms. If teachers are unaware of its presence, and are not in the habit of getting students to work at expressing their own generalizations, then mathematical thinking is not taking place. » Legger en til grunn delstudie 3, hvor jeg finner at det er svært få mønsteroppgaver, og at de mønsteroppgavene som er, plasseres til slutt i kapitlet, kan en implikasjon være at en bør gir større rom for mønsteroppgaver og at en bruker slike oppgaver som introduksjon til algebraisk tenking – altså slik jeg mener at læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2005b) uttrykker at algebra skal introduseres i norsk skole.

Når det gjelder andre mulige implikasjoner for læremidler blir det mer opp til hver enkelt forfatter eller forfattergruppe, som har fått tilsendt de publiserte artiklene via redaktørene i forlagene tilhørende de respektive analyserte lærebøkene. Jeg vil også sende avhandlingen i sin helhet til de samme forlagene. I hvor stor grad og på hvilken måte funnene mine er blitt, og vil bli, gjenstand for interne prosesser innad i de enkelte forlagene vites ikke, men de har potensial til å kunne påvirke utviklingen av nye og forhåpentligvis bedre læremidler tilpasset problemløsning og algebra og den digitale veilederen fra Utdanningsdirektoratet (2018b).

7.2 For undervisning

Dersom Utdanningsdirektoratets (2018b) veileder og studien min kan påvirke fremtidige læremidler, vil det kunne påvirke undervisningen i klasserommet gitt at matematikkfaget fortsatt vil preges av å være læremiddelfokusert. Jeg skriver læremiddelfokusert, og ikke lærebokfokusert, for å understreke at skolen står trolig ovenfor en betydelig digitalisering innen læremidler i matematikk. Men funnene mine og punktene i veilederen er like aktuelle for digitaliserte versjoner og andre typer læremiddel som de tradisjonelle lærebøkene. Den nye læreplanen som trer i kraft i 2020 har potensial til å forsterke undervisningsrelaterte implikasjoner fra studien min. Lester (1996) vektlegger betydningen av systematisk undervisning, å løse mange oppgaver og å ta hensyn til at problemløsningsevnen utvikles langsomt over tid dersom elevene skal utvikle kompetanse i problemløsning. Vurderer en dette opp imot funnene i delstudie 1 tyder det på at det i dagens situasjon er mye opp til matematikklæreren om elevene får muligheter til å utvikle seg til problemløsere i matematikk. Lester mener også at det er vesentlig at elevene tror at læreren mener problemløsning er viktig, noe som i større grad vil kunne skje om funnene når matematikklærerne i skolen eller om de får innvirkning på nye læremidler.

Når det gjelder algebra vil også den nye læreplanen kunne forsterke mulige implikasjoner. Det gjelder spesielt introduksjonen til algebra hvor det kan se ut som at spesielt mønster og overgangen fra aritmetikk til algebra har fått økt oppmerksomhet (Utdanningsdirektoratet, 2018c), i tillegg til bruken av begrepet algebraisk tenkemåte. Jeg leser forslaget til læreplan som at en vil tone ned manipulasjonsfokuset og i sterkere grad arbeide med selve variabelbegrepet gjennom arbeid med mønster hvor generaliseringer av disse etter hvert blir skrevet med algebraiske symbol. Når det gjelder andre undervisningsrelaterte implikasjoner går jeg ut ifra at siden jeg har skrevet kappen, artikkel 2 og artikkel 3 på norsk vil det øke sjansene for at norske, og eventuelt nordiske, lærere vil få med seg funnene og vurdere egen praksis. Jeg er enig med Veilande (2017, s. 490) sin vektlegging av matematikklærerrollen i forbindelse med funn knyttet til lærebokforskning når hun uttrykker at: «The presented findings deserve attention in order to increase the quality of teaching, to eliminate the faults detected in textbooks, and to avoid over-simplification of mathematics content. The role of the teacher is highly valued.»

Når det gjelder funn fra problemløsningsstudien har disse nådd klasserommene i Skien kommune, hvor de ni heuristiske tilnærmingsmåtene er illustrert, forklart og hengt opp på veggene. Ved at disse er synlige for både elever og lærere i deres hverdag, kan det føre til at de i sterkere grad oppfattes som en integrert del av matematikken og legge forholdene mer til rette for å tilegne seg kompetanse i problemløsning. Ved å få matematikklærere til å lese og reflektere over forskningsartiklene mine, vil de forhåpentligvis også kunne utvikle et mer kritisk øye for å evaluere innholdet og metodene i læreboken, og på den måten i større grad kunne velge ut selv hvilke forklaringer, eksempler, tilnærmingsmåter og oppgaver som passer til ulike elever og deres eksisterende kompetanse. Dersom matematikklæreren eller annet skolepersonell mener at norske prestasjoner på internasjonale tester som TIMSS og PISA bør tas hensyn til, og tror at disse kan delforklares med funn fra doktorgradsstudien min, vil det kunne gi impulser for å undervise på en måte som er mer tilpasset kompetansekravene i disse. Med det mener jeg ikke at den norske læreplanen ikke vil bli fulgt, fordi som jeg tidligere har referert til så samsvarer både den læreplanbaserte TIMSS-undersøkelsen og det matematiske innholdet i PISA med den norske læreplanen.

Endringer knyttet til undervisningsrelaterte faktorer som manglende samsvar mellom de analyserte lærebøkene og den gjeldende læreplanen, vil også kunne påvirke matematikklærerens praksis i klasserommet. Koblingen mellom læreplanen og læremidlet er også fremhevet som en av tre innholdselementer i Utdanningsdirektoratets (2018b) digitale veileder, som kan forsterke betydningen av denne koblingen i fremtidige læremiddel.

7.3 For matematikkutdanning

Når det gjelder lærerutdanningen i Norge, har det ikke vært noe utpreget fokus på verken problemløsning, algebra eller lærebøker i matematikk de siste to tiårene. Men fra og med studieåret 2019/2020 skal det innføres nasjonal eksamen i algebra som alle grunnskolelærerstudenter i matematikk må gjennomføre. Det vil bli utarbeidet to eksamener, hvor hver av disse er tilpasset henholdsvis utdanningsløpene 1–7 og 5–10. Det er ikke oppgitt noen offisiell begrunnelse for hvorfor algebra er valgt, men en kan anta at det har noe å gjøre med de norske prestasjonene på den siste TIMSS-undersøkelsen, hvor norske elever på 8. og 9. trinn har det største negative avviket i verden mellom algebraskåren og det generelle prestasjonsnivået.

Problemløsning og algebra i grunnskolen ligger begge an til å få et betydelig løft med innføringen av den nye lærerplanen i 2020, som forhåpentligvis vil bane vei også for et løft for disse to emnene i matematikkutdanningen i Norge. Blant annet vil den nye 5-årige lærerutdanningen gi flere muligheter for å knytte den obligatoriske masteroppgaven til ulike forhold som har med problemløsning og algebra i skolen å gjøre, samt innholdet og bruken av læremidler generelt. Det vil si at forskningen min kan bidra til å inspirere og konkretisere hvordan en kan gjennomføre forskning på læremidler i matematikk. En har allerede sett eksempler på at rammeverket mitt fra delstudie 1, med den deduktive tilnærmingen, er brukt i flere norske masteroppgaver. De to andre delstudiene, som begge har en mer induktiv tilnærming, eksemplifiserer også hvordan fremtidige lærerstudenter og andre kan utføre innholdsanalyser av læremidler i matematikk. Men uavhengig om matematikklærerstudenter vil skrive masteroppgaver om læremidler eller ei, indikerer funnene i studien min at matematikkutdanningen bør inkluderer undervisning som kan føre til at studentene utvikler en bevissthet rundt læremidlenes innhold, metoder, koblinger til læreplanverket, samt sterke og svake sider. Jeg selv har forsøkt dette gjennom å belyse lærebøkenes behandling av heuristiske tilnærmingsmåter i læreboken Alfa (Bjørnestad m.fl., 2013) for lærerutdanningen, og i undervisningssammenheng innenfor algebra og andre matematiske emner på lærerutdanningen i snart to tiår.

7.4 For videre studier

Grevholm (2017a) skriver i sin bok om ulike områder innenfor lærebok-forskning som bør bli gjenstand for videre og ny forskning. Hun trekker blant annet fram studier om hvordan lærebøker påvirker elevene og deres læringsutbytte, om det er mulig å hjelpe elevene og lærerne til å bruke lærebøkene mer effektivt, og hvordan lærebokforfattere resonnerer når de utformer sine lærebøker. Internasjonalt etterspør blant annet Hodgen m.fl. (2018) mer forskning på oppgaver etter å ha gjennomgått mye av den internasjonale matematikkdidaktisk forskning i algebra de siste 20 årene. I den forbindelse hadde en storskalaundersøkelse om algebraopp-gaver, gjerne komparativ med flere lands læremidler involvert, i mine øyne vært særdeles interessant. Det er også naturlig å tenke seg at tilsva-rende studier som min kan gjennomføres innenfor andre matematiske områder som for eksempel geometri, statistikk, sannsynlighet og tall. Med utgangspunkt i fokuset på selve innholdet og metodene i lærebø-kene, ser jeg for meg at det hadde vært interessant å forske videre på hvordan de analyserte lærebøkene benyttes i praksis når lærerne skal in-trodusere bokstaver som symbol for variable størrelser i klasserommene. Tilsvarende ville det vært interessant å forske på hvordan det arbeides med heuristiske tilnærmingsmåter i klasserommene. Som forskningsfelt vil både algebra og problemløsning trolig øke i tiden fremover med inn-føringen av ny læreplan i 2020. Forhåpentligvis vil rammeverket som jeg har benyttet, kunne inspirere andre til å utføre lignende studier. I tillegg vil det forventede inntoget av digitale læremidler kunne by på nye forsk-ningsaktuelle problemstillinger generelt og innenfor algebra og problem-løsning spesielt.

8 Referanser

Aaseth, N. (2016). *Problemløsning i norske og russiske matematikklærebøker for videregående skole. En sammenlignende studie av eksempler i norske og russiske lærebøker*. Masteroppgave, Universitetet i Bergen. Hentet fra: http://bora.uib.no/bitstream/handle/1956/15811/143493278.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ahl, L., Gunnarsdóttir, G. H., Koljonen, T. & Pálsdóttir, G. (2015). How teachers interact and use teacher guides in mathematics – cases from Sweden and Iceland. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 179-197.

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus.* Telemarksforsking – Notodden.

Alseth, B. (2009). Kompetanse og grunnleggende ferdigheter i matematikk. I H. Traavik, O. Hallås & A. Ørvig (red.), *Grunnleggende ferdigheter i alle fag* (s. 104–128). Oslo: Universitetsforlaget.

Askew, M., Hodgen, J., Hossain, S. & Bretscher, N. (2010). *Values and variables. Mathematics education in high-performing countries*. London: Nuffield foundation. Hentet fra: https://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/Values_and_Variables_Nuffield_Foundation_v__web_FINAL.pdf

Astala K., Kivelä, K., Koskela, P., Martio, O., Näätänen, M. & Tarvainen, K. (2005). *The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children's mathematical skills.* Matematiikkalehti SOLMU. Hentet fra: http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik/PisaEng.html

Ayalon, M. & Even, R. (2010). Offering proof ideas in an algebra lesson in different classes and by different teachers. *CERME6* (s. 430-439).

Bakke, B. & Bakke, I. H. (2006). *Grunntall 8. Matematikk for ungdomstrinnet.* Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bakke, B. & Bakke, I. H. (2007). *Grunntall 9. Matematikk for ungdomstrinnet.* Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. I J. Novotná, H. Moraová & N. Stehlíková (red.), *Proceedings of the 30th Conference* *of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (Vol. 1, s. 126-154). Prague: PME.

Bjarnadóttir, K. (2007). The numbers one and zero in Northern European textbooks. *International Journal for the History of Mathematics Education*, *2*(2), 3-20.

Bjarnadóttir, K., Christiansen, A. & Lepik, M. (2013). Arithmetic textbooks in Estonia, Iceland and Norway – similarities during the nineteenth century. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *18*(3), 27-58.

Bjuland, R. (2012). The mediating role of a teacher's use of semiotic resources in pupils' early algebraic reasoning. *ZDM – the International Journal on Mathematics Education*, *44*(5), s. 665-675.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I B. Grevholm, (red.), *Matematikk for skolen* (s. 51-70). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2006). *Alfa – Matematikk for allmennlærerutdanningen*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa – Matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1-7 og 5-10*. 2. utgave. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Bloom, B. M., Englehart, E., Furst, E. H., Hill, W. & Krathwohl, D. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals.* New York, NY: McKay.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 72–87.

Booker, G. (1987). Conceptual obstacles to the development of algebraic thinking. I J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (red.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (s. 275-281). Montreal: Canada.

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty.* Licentiate Thesis, Luleå University of Technology, Sweden.

Brehmer, D., Ryve, A. & Van Steenbrugge, H. (2016). Problem solving in Swedish mathematics textbooks for upper secondary school. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *60*(6), 577-593.

Breiteig, T. & Venheim, R. (1993). *Matematikk for lærere*. Bind I. Oslo: Tano.

Brenner, M. E., Herman, S., Ho, H. & Zimmermann, J. (1999). Cross-national comparison of representational competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(5), 541-557.

Bryman, A. (2008). *Social research methods*. Third Edition. Oxford University Press.

Cai, J. (2010). Helping students becoming successful problem solvers. I D. V. Lambdin & F. K. Lester (red.), *Teaching and learning mathematics: Translating research to the elementary classroom* (s. 9–14). Reston, VA: NCTM.

Chamberlin, S. A. (2008). What is problem solving in the mathematics classroom? *Philosophy of Mathematics Education*, *23*. Hentet fra http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome23/Chamberlin %20What %20is %20Math %20Prob %20Solving.doc

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. I N. Bednarz, C. Kieran & Lee, L. (red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, (s. 15-37). Dordrecht: Kluwer Academic.

Charles, R. & Lester, F. K. (1984). An evaluation of a process-oriented mathematical problem solving instructional program in grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*, 15-34.

Cho, J. Y. & Lee, E. (2014). Reducing confusion about Grounded Theory and Qualitative Content Analysis: Similarities and differences. *The Qualitative Report*, *19*(32), 1-20. Hentet fra http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol19/iss32/2

Christensen, A. S. (2007a). *Kode X 9A. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Forlaget fag og kultur.

Christensen, A. S. (2007b). *Kode X 9B. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Forlaget fag og kultur.

Costello, J. (1991). *Teaching and learning mathematics 11-16*. London, UK: Routledge.

Danielsen, I. J., Skaar, K. & Skaalvik, E. M. (2007*). De viktige få: analyse av elevundersøkelsen 2007*. Kristiansand: Oxford Research.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M. & Morrison, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problems. *Journal of Educational Psychology*, *83*(1), 61–68.

Doerr, H. & English, L. D. (2006). Middle-grade teachers' learning through students' engagement with modelling tasks. *Journal for Research in Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 5-32.

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, *62*(1), 107-115.

English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. I B. Sriraman & L. English (red.). *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*, 263-290. Berlin/Heidelberg: Springer.

English, L. D. (2009). Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *41*(1), 161-181.

Eriksson, K., Helenius, O. & Ryve, A. (2019). Using TIMSS items to evaluate the effectiveness of different instructional practices. *Instructional Science*, *47*(1), s. 1-18. Springer Link. Hentet fra: https://link.springer.com/article/10.1007 %2Fs11251-018-9473-1

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer.

Espeland, H. (2017). *Algebra at the start of upper secondary school. A case study of a Norwegian mathematics classroom with emphasis on the relationship between the mathematics offered and students' responses.* PhD-avhandling i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Universitetet i Agder. Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2435518/Hildegunn %2BEspeland.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Example. (2018, 5. september). I Cambridge Dictionary. Hentet fra: https://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/example

Fan, L. (1999). Applications of arithmetic in US and Chinese textbooks: A comparative study. I G. Kaiser, E. Lina & I. Huntley (red.), *Studies* *in mathematics education series: II. International comparisons in mathematics education* (s. 151-162). London: Falmer Press.

Fan, L. & Zhu, Y. (2000). Problem solving in Singaporean secondary mathematics textbooks. *The Mathematics Educator, 5*(1-2), 117-141.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007a). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 61-75.

Fan, L. & Zhu, Y. (2007b). From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *39*(5-6), 491-501.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *45*, 765-777.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 633-646.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., … Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK og APP 2016– Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer*. Oslo: Universitetet i Oslo. Hentet fra: http://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf

Glasnović Gracin, D. (2011). *Requirements in mathematics textbooks and PISA assessment.* PhD-avhandling. Klagenfurt, Østeriket: Universitetet i Klagenfurt.

Goodlad, J. I. & Associates. (1979). *Curriculum inquiry: The study of curriculum practice*. New York, NY: McGraw-Hill Book.

Gray, E., & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, *19*(2), 23-40.

Grevholm, B. (2004). Mathematics worth knowing for a prospective teacher. I B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D.

V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby & K. Wallby (red.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (s. 519-536). Göteborg: National Centre for Mathematics Education.

Grevholm, B. (2011). Network for research on mathematics textbooks in the Nordic countries. *Nordic Studies in Mathematics Education, 16*(4), 91-102.

Grevholm, B. (2017a). The network for research on mathematics textbooks, its birth, life and results. I B. Grevholm (red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries,* (s. 21-38). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grevholm, B. (red.) (2017b). *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli, M., Lie, S. & Turmo, A. (2004). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003.* Oslo: Universitetet i Oslo.

Grønmo, L. S. & Hole, A. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken. Nøkkelen til å lykkes i realfag. Analyser av data fra TIMSS Advanced og TIMSS*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk. Hentet fra https://press.nordicopenaccess.no/index.php/noasp/catalog/book/26

Grønmo, L.S. & Onstad, T. (red.) (2009). *Tegn til bedring: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L. S., Onstad, T. & Pedersen, I. F. (2010). *Matematikk i motvind. TIMSS Advanced 2008 i videregående skole*. Oslo: Unipub.

Grønmo, L.S. & Onstad, T. (red.) (2012). *Mange og store utfordringer. Et nasjonalt og internasjonalt perspektiv på utdanning av lærere i matematikk basert på data fra TEDS-M 2008*. Oslo: Unipub.

Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2006). *Nye Mega 8B. Matematikk for ungdomsstrinnet* (3. utg.). Oslo: N. W. Damm & Søn.

Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2007a). *Nye Mega 9A. Matematikk for ungdomsstrinnet* (3. utg.). Oslo: N. W. Damm & Søn.

Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2007b). *Nye Mega 9B. Matematikk for ungdomsstrinnet* (3. utg.). Oslo: N. W. Damm & Søn.

Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K.B. & Öberg, B. (2006a). *Tetra 8. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Det norske samlaget.

Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K.B. & Öberg, B. (2006b). *Tetra 9. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Det norske samlaget.

Haggarty, L. & Pepin, B. (2017). Learning opportunities offered to pupils in England: a cause for concern. I B. Grevholm (red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries*. (s. 117-128). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Halldórsdóttir, R. (2015). Comparison of three textbooks published for 8th grade in Iceland. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 111-128.

Harder, V. K. (2013). *Problemløsning i norske matematikklærebøker for videregående skole*. Masteroppgave, Universitetet i Oslo.

Haug, P. (2012). Aktivitetane i klasseromma. I Haug, P. (red.): *Kvalitet i opplæringa*. Oslo: Det Norske Samlaget.

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(5), 524-549.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., … Human, P. (1997). *Making sense – teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hiebert, J., Gallimore R., Garnier H., Givvin K. B., Hollingsworth H., Jacobs J., … Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study* (NCES 2003-013, U.S. Department of Education). Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects on classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 371-404). Charlotte, N.C.: Information Age.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2006a). *Faktor 1. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet* (1. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2006b). *Faktor 2. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet* (1. utg.). Oslo: Cappelen Damm.

Hodgen, J., Oldenburg, R. & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. I T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (red.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (s. 32-45). London, New York: Routledge.

Hodgson, J., Rønning, W. & Tomlinson, P. (2012). *Sammenhengen mellom undervisning og læring*. NF-rapport nr. 4. Bodø: Nordlandsforskning.

Hsieh, H. F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, *15*(9), 1277-1288.

Jablonka, E. & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. I B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl, B. D. Söndergaard & L. Haapasalo (red.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark and contributions from Finland* (s. 363-372). Charlotte, NC: IAP-Information Age Publishing.

Jakobsson-Åhl, T. (2006). *Algebra in upper secondary mathematics: a study of a selection of textbooks used in the years 1960-2000 in Sweden.* Licentiatavhandling, Luleå tekniska universitet.

Jakobsson-Åhl, T. (2008). Word problems in upper secondary algebra in Sweden over the years 1960-2000. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *13*(1), 7-28.

Johansen, T. R. (2000). *Skyldes elevvanskelighetene i algebra algebraens vesen og/eller undervisningsmåten?* Mathematics education research group 6. Kristiansand: Høgskolen i Agder.

Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments. Three teachers’ way to organize their mathematics lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *11*(3), 5-30.

Jukić Matić, L. & Glasnović Gracin, D. (2016). The use of the textbook as an artefact in the classroom – A case study in the light of a sociodidactical tetrahedron. *Journal für Mathematik- Didaktik. 37*(2), 349–374.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? I J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (red.), *Algebra in the early grades* (s. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Karimzadeh, A. (2014). *Algebra i norske og singaporske matematikklærebøker. En sammenligning på bakgrunn av resultatene frå TIMSS 2011.* Masteroppgave i realfagsdidaktikk. Oslo: Universitetet i Oslo.

Kaur, B. & Sharon, B. H. P. (1994). Algebraic misconceptions of first year college students. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 16*(4), 43-58.

Keranto, T. & Sarenius, V.-M. (2009). Number line as a teaching aid in the grades 1–2: textbook analysis and pupil interview. I M. Lepik (red.), *Teaching mathematics: retrospective and perspectives. Proceedings of the 10th international conference* (s. 206–217). Tallinn University.

Kendal, M. & Stacey, K. (2004). Algebra: A world of difference. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study* (s. 329-346). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I P. Nesher & J. Kilpatrick (red.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (s. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. I C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (red.), *Eighth international congress on mathematical education: selected lectures* (s. 271-290). Seville, Spania: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. I F. K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 707-762). Charlotte, NC: Information Age.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Mathematics Learning Study Committee, National Academy Press, Washington, DC.

Kilpatrick, J. & Swafford, J. (2002). *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Kjærnsli, M., Lie, S., Olsen, R. V., Roe, A. & Turmo, A. (2004). *Rett spor eller ville veier? Norske elevers prestasjoner i matematikk, naturfag og lesing i PISA 2003*. Oslo: Universitetsforlaget.

Kjærnsli, M. & Jensen, F. (2016). *Stø kurs. Norske elevers kompetanse i naturfag, matematikk og lesing i PISA 2015.* Oslo: Universitetet i Oslo ILS. Hentet fra: https://www.udir.no/tall-og-forskning/finn-forskning/rapporter/pisa-2015/

Kjærnsli, M. & Olsen, R. V. (2013). *Fortsatt en vei å gå. Norske elevers kompetanse i matematikk, naturfag og lesing i Pisa 2012*. Oslo: Universitetsforlaget. Hentet fra: https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/publikasjoner/publikasjoner/fortsatt-en-vei-a-ga.pdf

Kjærnsli, M. & Roe, A. (red.) (2010). *På rett spor*. *Norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag i PISA 2009*. Oslo: Universitetsforlaget.

Klette, K. (2003). Klasserommets praksisformer etter Reform 97. Oslo, Norge: *Pedagogisk Tidsskrift*, *91*(4), 344-358.

Klette, K., Lie, S., Ødegaard, M., Anmarkrud, Ø., Arnesen, N., Bergem, O. K., Roe, A. (2008). *PISA+: Lærings- og undervisningsstrategier i skolen*. Oslo: Norges forskningsråd.

Koedinger, K. R. & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representation on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(2), 129-164.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 5-44.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 83-110.

Kongelf, T. R. (under revidering). Hvordan introduseres algebra på ungdomstrinnet i Norge? En kategorisering av oppgavetyper og deres fordeling i fem lærebøker. *FoU i praksis*.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology*. 2. utgave. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Krovik, Ø. (2013). *Introduksjon av algebra i den norske skole. En sammenligningsstudie av lærers introduksjon og forståelse av algebra på ungdomstrinnet og i den videregående skole.* Masteroppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Universitetet i Agder.

KUD. (1974). *Mønsterplan for grunnskolen.* Oslo: Aschehoug.

KUF. (1987). *Mønsterplanen for grunnskolen.* Oslo: Aschehoug.

KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Kunnskapsdepartementet. (2006). *Et felles løft for realfagene. Strategi for styrking av realfagene 2006-2009.* Oslo. Hentet fra https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kilde/kd/nyh/2006/0014/ddd/pdfv/290281-strategiplan_for_realfagene.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2010). *Realfag for framtida. Strategi for styrking av realfag og teknologi 2010-2014.* Hentet frå https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kd/realfagstrategi.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen (2015-2019)*. Hentet fra https://www.regjeringen.no/contentassets/869faa81d1d740d297776740e67e3e65/kd_realfagsstrategi.pdf

Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. Hart (red.), *Children's understanding of mathematics* (s. 11-16). London: John Murray.

Lappan, G. & Briars, D. (1995). How should mathematics be taught? I I. M. Carl (red.), *Seventy-five years of progress: Prospects for school mathematics* (s. 131–156). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, L. (2001). Early algebra – but which algebra? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), *The future of teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 2, s. 392-399). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Leer, L. G. (2009). *Vurdering av matematisk problemløsning: en studie av sammenhengen mellom fokuset på problemløsning i læreplanen i matematikk og oppgavene som gis på eksamen*. Masteroppgave. Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Leistad, A-M. (2016). *Problemløsning i matematikk. Hvordan resonnerer elever på 9. trinn under arbeid med problemløsningsoppgaver i multiplikasjon?* Masteroppgave i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Universitet i Agder.

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in mathematics classrooms – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 129-156.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modelling. I F. K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 660-675.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur. I G. Emanuelsson, K. Wallby, B. Johansson & R. Ryding (red.), *Nämnaren Tema Matematikk – ett kommunikationsämne* (s. 85-91). Göteborg, Sverige: Kompendiet.

Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition. Key influences on problem-solving behaviour. I D. B. McLeod & V. M. Adams (red.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (s. 75-88). New York: Springer.

Lester, F. K. & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modelling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. I R. Lesh & H. Doerr, (red.), *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (s. 501-518), Mahwah, NL: Erlbaum.

Lester, F. & Lambdin, D. V. (1998). The ship of Theseus and other metaphores for thinking about what we value in mathematics education research. I A. Sierpinska, & J. Kilpatric, (red.) *Mathematics education as a research domain: A search for identity: An ICMI study*, (s. 415-425). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Li, Y., Chen, X. & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *41*(6), 809–826.

Li, Z. (2008). Characteristics and issues of China's primary mathematics textbooks based on the current curriculum standard. I M. Niss (red.) *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education, 4-11 July, 2004*. IMFUFA, Danmark: Roskilde University.

Lie, S., Kjærnsli M. & Brekke, G. (1997): *Hva i all verden skjer i realfagene? Internasjonalt lys på trettenåringers kunnskaper, holdninger og undervisning i norsk skole.* Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling. Oslo: Universitetet i Oslo.

Lie, S., Kjærnsli, M., Roe A. & Turmo, A. (2001). *Godt rustet for framtida? Norske 15-åringers kompetanse i lesing og realfag i et internasjonalt perspektiv.* Acta Didactica, 4/2001. Oslo: Universitetet i Oslo ILS. Hentet fra: https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/publikasjoner/publikasjoner/godt-rustet-for-framtida.pdf

Lins, R. (1990). A framework for understanding what algebraic thinking is. I G. Booker, P, Cobb & T. N. Mendicuti (red.), *Proceedings of the fourteenth PME conference for the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, s. 93- 100). Oaxtepec, Mexico: Program committee.

Love, E. & Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. I A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (red.) *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, s. 371-409). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 1-19.

Maffei, L. & Mariotti, M. A. (2011). The role of discursive artefacts in making the structure of an algebraic expression emerge. *CERME7* (s. 511-520).

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 65-86). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans, U.K.: Tarquin.

Mayring, P. (2014). *Qualitative content analysis: theoretical foundation, basic procedures and software solution*. Klagenfurt, Australia. Hentet fra https://www.ssoar.info/ssoar/bitstream/handle/document/39517/ssoar-2014-mayring-Qualitative_content_analysis_theoretical_foundation.pdf?sequence=1

Meld. St. 28. (2015-2016). *Fag – fordypning – forståelse – en fornyelse av Kunnskapsløftet.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/meld.-st.-28-20152016/id2483955/

Mellin-Olsen, S. (1994). *Eleven, matematikken og samfunnet*. Larvik: NKI Forlaget.

Michael, N. (2002). *Inside the PISA: Comparing two high achieving countries from the west (Finland) and from the east (Japan).* Paper presented in the ICMI Comparative Study Conference 2002, Hong Kong, October, 2002.

Ministry of eduaction. (2007). *Secondary mathematics syllabuses*. Singapore. Hentet fra: http://www.etuitions.org/Singapore_Secondary_Maths.pdf

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. PhD-avhandling i matematikkdidaktikk. Oslo: Universitetet i Oslo.

Nibbelink, W. H., Stockdale, S. R., Hoover, H. D. & Mangru, M. (1987). Problem solving in the elementary grades: textbook practice and achievement trends over the past thirty years. *Arithmetic Teacher, 35*(1), 34-37.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling av matematikundervisning i Danmark.* København, Danmark: Uddannelseministeriet. Hentet fra http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf.

Niss, M. (2003). Den matematikkdidaktiske forskningens karakter og natur. I B. Grevholm, (red.), *Matematikk for skolen* (s. 335-364). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Nortvedt, G. A. (2012). *Rapport. Norsk matematikkråds forkunnskapstest 2011*. Oslo: Norsk matematikkråd.

NOU 2002:10. (2002). *Førsteklasses fra første klasse. Kvalitetsvurderingssystem for norsk grunnopplæring.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2002-10/id145378/sec1

NOU 2003:16. (2003). *I første rekke. Forsterket kvalitet i en grunnopplæring for alle.* Norges offentlige utredninger. Hentet fra https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/nou-2003-16/id147077/

OECD. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework.* Organisation for Economic Co-Operation and Development.

Oppgave. (2018, 15. september). Det Norske Akademies Ordbok. Hentet fra: https://www.naob.no/ordbok/oppgave

Pepin, B. (2009). *Mathematical tasks and learner dispositions: a comparative perspective*. Proceedings of CERME 6, Lyon, Frankrike, s. 2504-2512. Hentet fra http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf

Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *46*, 685-698.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33*(5), 158–175.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, *28*(4), 567-590.

Petersen, I. J. (2015). *Hvordan kan elevers ferdigheter i algebra måles detaljert? En kvantitativ kartlegging av 215 elever på tiende trins ferdigheter i algebra.* Masteroppgave i lærerutdanningen 5.-10. trinn. Tromsø: Norges Arktiske Universitet.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Putnam, R. T., Lesgold, S. B., Resnick, L. B. & Sterret, S. G. (1987). Understanding sign change transformations. I J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (red.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (s. 275-281). Montreal: Canada.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. I R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins (red.), *Perspectives in*

School Algebra (s. 13-63). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Randahl, M. & Grevholm, B. (2010). Learning opportunities offered by a classical calculus textbook. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *15*(2), 5-27.

Reinhardtsen, J. (2012). *The introduction of algebra: comparative studies of textbooks in Finland, Norway, Sweden and USA.* Masteroppgave i matematikkdidaktikk. Universitetet i Agder. Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/138112

Rensaa, R. J. & Grevholm, B. (2015). A textbook in linear algebra – the use and views of engineering students. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 223-245.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2012). From triangle to tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 659-670.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2013). Methodologies in Nordic research on mathematics textbooks. I B. Grevholm, P.S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko & P.-E. Persson (red.), *Nordic research in didactics of mathematics: past, present and future* (s. 469-482). Oslo, Norge: Cappelen Damm Akademisk.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. I B. Grevholm (red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries* (s. 495-514). Oslo, Norge: Cappelen Damm Akademisk.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*, 173-187.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334-370). New York: Macmillan Publishing Company.

Schmidt, W. H., McKnight C. C., Valverde G. A., Houang R. I. & Wiley D. E. (1996). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. London, UK: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S. & Wolfe, R. G. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Senk, S. L., Thompson, D. R. & Wernet, J. L. W. (2014). Curriculum and achievement in algebra 2: influences of textbooks and teachers on students' learning about functions. I Y. Li & G. Lappan (red.), *Mathematics curriculum in school education* (s. 515-540). Dordrecht: Springer.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R. & Clark, D. (2010). The role of mathematical tasks in different cultures. I Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang & D. Clark (red.) *Mathematical tasks in classrooms around the world. The learner's perspective study* (s. 1-14). Rotterdam, Nederland: Sense Publishers.

Silver, E. A. & Lunsford, C. (2017). Linking research and practice in mathematics education: perspectives and pathways. I J. Cai (red.), *Compendium for research in mathematics education* (s. 28-47). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Skjelbred, D., Solstad, T. & Aamotsbakken. (2005). *Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis*. Tønsberg: Høgskolen i Vestfold.

Solvang, R. (1986). *Matematikk-didaktikk* (1. utg.). Bekkestua, Norge: NKI Forlaget.

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. I R. I. Charles & E. A. Silver (red.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (s. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, *33*(2), 455-488.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical task as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268–275.

Stigler, J., Fuson, K., Ham, M. & Kim, M.S. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, *3*(3), 153-171.

St. meld. nr. 30 (2003-2004). *Kultur for læring*. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-030-2003-2004-/id404433/sec1

Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula*. London, UK: Qualifications and Curriculum Authority.

Sutherland, R. (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. I K. Stacey, Chick, H., and Kendal, M. (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. *The 12th ICMI Study* (Vol. 8, s. 71-96). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Thomson, S. & Fleming, N. (2004). *Summing it up: Mathematics achievement in Australian schools in TIMSS 2002.* Melbourne: ACER.

Törner, G., Schoenfeld, A. H. & Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39*(5-6), 353-551.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*(4), 315-327.

Torkildsen, S. H. & Maugesten. M. (2007a). *Sirkel 8B. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo, Norge: H. Aschehoug & Co.

Torkildsen, S. H. & Maugesten. M. (2007b). *Sirkel 9A. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo, Norge: H. Aschehoug & Co.

Torkildsen, S. H. & Maugesten. M. (2007c). *Sirkel 9B. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo, Norge: H. Aschehoug & Co.

Utdanningsdirektoratet. (2005a). *Kartlegging av læremiddel og læremiddelpraksis*. København, Danmark: Rambøll Management AS.

Utdanningsdirektoratet. (2005b). *Kunnskapsløftet*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/.

Utdanningsdirektoratet. (2012). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/grunnleggende-ferdigheter/rammeverk-for-grunnleggende-ferdigheter/

Utdanningsdirektoratet. (2017). *Andre skisse til kjerneelement i matematikk*. Hentet fra: https://hoering.udir.no/Hoering/v2/162?notatId=252.

Utdanningsdirektoratet. (2018a). *Kunnskapsgrunnlag for kvalitetskriterium for læremiddel i matematikk*. Hentet fra https://www.udir.no/contentassets/9178af2725fd4773a46374be4ba54de9/grunnlagsdokument_kvalitetilareremidler_udir_2018.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2018b). *Veileder for kvalitet i læremidler i matematikk*. Hentet fra: https://reflex.udir.no/egenvurdering/oversikt?mode=Veileder

Utdanningsdirektoratet. (2018c). *Matematikk fellesfag*. Hentet fra: https://hoering.udir.no/Hoering/v2/286?notatId=573

Utdannings- og forskningsdepartementet. (2002). *Realfag, naturligvis! Strategi for styrking av realfagene 2002-2007. Kompetanse-Motivasjon-Rekruttering*. Oslo. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/realfag-naturligvis/id105788/

Utdannings- og forskningsdepartementet. (2005). *Realfag, naturligvis! Strategi for styrking av realfagene 2002-2007. Kompetanse-Motivasjon-Rekruttering*. Redigert versjon av januar 2005. Oslo. Hentet fra: https://www.regjeringen.no/globalassets/upload/kilde/ufd/rap/2002/0013/ddd/pdfv/235427-realfag.pdf

Ulin, B. (1983). *Att finna ett spår. Motiv och metoder i matematikundervisningen – Erfarenheter ur waldorfpedagogiken*. Järna: Robygge.

Veilande. I. (2017). The characteristics of mathematics textbook research: A meta-study of papers from ICME-10, ICME-11, and ICME-12. I B. Grevholm (red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries*, (s. 471-494). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. *Learning and Instruction. 14*(5), 469-484.

Viholainen, A., Partanen, M., Piiroinen, J., Asikainen, M. A. & Hirvonen, P. E. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 157-178.

Watson, L. (1990). Research for teaching: Learning and teaching algebra. *Australian Mathematics Teacher, 46*(3), 12-14.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Frant, J. B., Doorman, M., Kieran, C., … Yang, Y. (2013). Introduction. I C. Margolinas (red.), J. Ainley, J. B. Frant, M. Doorman, C. Kieran, A. Leung, M. Ohtani, P. Sullivan, D. Thompson, A. Watson, Y. Yang. *Task design in mathematics education proceedings of ICMI study 22* (s. 7-14). Hentet fra: https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/837488/filename/ICMI_STudy_22_proceedings_2013-FINAL_V2.pdf

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B. & Boester, T. (2011). *Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. Problems, resources, and issues in mathematics undergraduate studies, 22*(2), 152-175. Hentet fra https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10511970.2010.509336?needAccess=true

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflection on different approaches to algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (s. 317-325). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator, 25*(2), 10-17.

Yan, Q. (2018). *Problemløsning i norske og kinesiske lærebøker i matematikk for ungdomsskolen. En sammenlignende studie av eksempler fra norske og kinesiske lærebøker i matematikk på ungdomsskolen.* Masteroppgave i skolerettet utdanningsvitenskap med fordypning i matematikk og matematikkdidaktikk, OsloMet – storbyuniversitet. Hentet fra: https://oda-hioa.archive.knowledgearc.net/handle/10642/6233

Zhou, X., Li, M., Li, L., Zhang, Y., Cui, J., Liu, J. & Chen, C. (2018). The semantic system is involved in mathematical problem solving.

NeuroImage 166, 360-370. Hentet fra: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053811917309242?via %3Dihub

Zhu, Y. (2003). *Problem solving in China, Singapore and US mathematics textbooks: A comparative study*. Unpublished doctoral dissertation. National Institute of Education, Singapore.

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*, 609-626. Taiwan: National Science Council.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 165–182.

Zwetzschler, L. & Prediger, S. (2013). Conceptual challenges for understanding the equivalence of expressions: A case study. *CERME8* (s. 558-567).

Österholm, M. (2008). Do students need to learn how to use their mathematics textbooks? The case of reading comprehension. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *13*(3), 53-73.

9 Appendiks

Appendiks 1:

Artiklene

Liste over artiklene

1. Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 5-44.

2. Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 83-110.

3. Kongelf, T. R. (under revidering). Hvordan introduseres algebra på ungdomstrinnet i Norge? En kategorisering av oppgavetyper og deres fordeling i fem lærebøker. *FoU i praksis.*

Artikkel 1

What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway?

TOM RUNE KONGELF

In this paper I present findings of an analysis of how mathematics textbooks treat heuristic approaches. The aim of this analysis is to give a characterisation of the occurrence of nine well-known heuristic approaches by analysing 740 examples presented in six ninth grade textbook series. The findings show that many of the problems in the examples are being solved by using one or more heuristic approaches, but the characteristics of the examples and the textbooks' lack of discussion of the approaches themselves make it challenging to teach and learn these in school. The heuristic approaches seem to be used rather incidentally, which is supported by the fact that none of the textbooks explicitly treat or mention problem solving.

Textbooks have received increased attention from the international education community in recent decades, and in mathematics education this can be exemplified by the TIMSS analysis of 318 textbooks from almost 50 countries in 1995. Schmidt et al. (1996) found that the textbook plays an important role in mathematics in school, and that it is a worldwide phenomenon, but that in USA, Spain and Norway it seems to play an exceptionally strong role. The significance of mathematics textbooks in Norway is most likely alone worth an analysis. If we add the chance of the smallest improvement in a textbook and multiply it by the large number of pupils, teachers and parents using it, it indicates a potential for a much greater improvement over all.

Alseth, Breiteig and Brekke's (2003) review of L97 (KUF, 1996) and a report from the Utdanningsdirektoratet (The Norwegian directorate for education and training) (2005) in Norway about teaching materials

Tom Rune Kongelf
University of Agder and Sogn og Fjordane University College

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16 (4), 5–44.

and their use support Schmidt et al.'s (1996) finding by claiming that the textbooks are the foundation for teaching, legitimising and taking care of the sequencing of the teaching. Similar findings are reported from Sweden (Skolverket, 2003; Johansson, 2006), Finland (Röj-Lindberg, 1999), England, France and Germany (Pepin & Haggerty, 2001, 2002).

Teachers frequently use the textbook as their primary source for planning teaching, and therefore it plays an important role for sequencing the material, choosing content of topics and providing the teacher with ideas for instruction and pupil activities (Freeman & Porter, 1989; Apple, 1992; Robitaille & Travers, 1992; Fan & Kaeley, 2000; Schmidt et al., 2001; Fan & Zhu, 2007a; Pepin & Haggerty, 2001, 2002). Reys, Reys and Chávez (2004, p. 1) claim that "the choice of textbook often determines what teachers will teach, how they will teach it, and how their students will learn". The teaching approaches used by teachers in the classroom and those presented in the textbooks are often highly alike (Bierhoff, 1996; Fan & Kaeley, 2000). Garner (1992) claims that the textbook is the primary tool for the pupils to acquire knowledge, and makes the point that the textbook can replace the teacher as the most important source of information. Schoenfeld (1988, p. 163) states that even though good teaching practice can compensate for possible inadequacy of the textbooks "there is evidence to suggest, however, that it does not". The number of pages in the textbook that is assigned to each topic influences the amount of time the teacher spends on the topic and the corresponding level of performance (Chávez, 2003). The textbook has a function as an interpreter of mathematics for teachers, pupils and parents. In addition it has an important role in the implementation of changes in the curriculum. The textbook often defines the implemented curriculum, which may diverge considerably from the intended one.

In comparison with the international average teacher exposition to the whole class forms a proportionately small part of pupils' experience in Norway. Pupils to a great extent work alone with problems in the textbook (Grønmo et al., 2003; Danielsen, Skaar & Skaalvik, 2007). Doyle (1988) argues that problems serve as a context for thinking not only in class but also afterwards. He argues from the assumption that problems, most likely found in the textbook, to a large extent influence how pupils perceive mathematics and understand its meaning. This assumption is supported by Johansson (2006) who found that pupils were exclusively working with problems in the textbook during individual work at school, which on average was more than 50 % of the time, and that the examples and problems were mainly from the textbook. Norwegian pupils do not deviate from the international average in the amount of homework assigned, but the amount of time the teacher uses for feedback to pupils in response to their homework is substantially below the international average (Grønmo et al, 2003). In addition Norway is considerably below the international average in time spent in mathematics lessons per year in fourth grade and slightly below in eight grade (Grønmo & Ostad, 2009). The report from the Utdanningsdirektoratet (2005, p. 23) gives substantial recognition of the importance of textbooks in Norway by stating that "changes in the teaching happen through changes in the textbooks" (author's translation). This statement is of special interest because of the ongoing implementation process of the latest curriculum, LK06 (UFD, 2005a), and its pertaining new textbooks. Pehkonen (1995) claims that teaching can be influenced through new textbooks, which was practised in Finland in the 1980s.

Nasjonalt læremiddelsenter (National centre for teaching aids) was until the year 2000 a special centre for teaching materials in Norway with authorisation to approve school textbooks. Today there is a national centre for mathematics called *Matematikksenteret* (Norwegian centre for mathematics education) without this authorisation. In theory this means that textbooks used by pupils and teachers in school can be written and published by anyone. Since the abolition of the Nasjonalt læremiddelsenter there has been little research on textbooks in mathematics besides the work by Alseth et al. (2003). By comparing the formulations in the curricula M87 (KUF, 1987) and L97 (KUF, 1996), they identified five defining areas and compared them to the textbook topics of geometry and algebra. Problem solving, which was the main new topic in M87 (KUF, 1987), was not one of the defining areas, even though problem solving ingredients like experimenting, exploration, creativity and reflection were found in M87 (ibid.). This reflects the shift within problem solving in Norway from a prominent topic of its own in M87 (ibid.) to a more implicit part in L97 (KUF, 1996). The analysis by Alseth et al. (2003) consisted of content and task analysis, both producing similar findings. Changes according to the defining areas were demonstrated in geometry but not in algebra, thus indicating that textbook authors had only partly captured the defining areas in L97 (KUF, 1996).

In Sweden more research on mathematics textbooks has been undertaken than in Norway, exemplified by Johansson's (2005, 2006) study of the use of textbooks, Jakobsson-Åhl's (2008) study of word problems in algebra and Brändström's (2005) study of differentiated tasks. In Finland Törnroos (2001) has studied mathematics textbooks and students' achievement, Röj-Lindberg (1999) studied the use of textbooks and Pehkonen (1995) has written about pupils' reaction to the use of open-ended problems in textbooks. Based on the assumption that textbooks are important for the teaching and learning of mathematics, research on problem solving in textbooks has also received attention from a range of international researchers (Nibbelink, Stockdale, Hoover & Mangru, 1987; Mayer, Sims & Tajika, 1995; Hensey, 1996; Li, 1999; Ng, 2002; Zhu, 2003; Zhu & Fan, 2006; Fan & Zhu, 2007a).

Rationale for analysing heuristic approaches

Inspired by Schoenfeld's (1985) decades of effort to understand and teach mathematical problem solving, his two major questions – what does it mean to "think mathematically"? and how can we help pupils to do it? – have constituted the foundation for my motivation to analyse heuristic approaches in textbooks. His framework for the analysis of problem solving behaviour consists of four qualitatively different aspects, cognitive resources, heuristics, control, and belief systems. His rationale for the study of heuristics and for teaching problem solving via heuristics is based on the following chain of thought. Throughout the years in school every pupil solves many mathematical problems. The solving of these is sometimes done by using a new approach and sometimes by an approach that was successful earlier. If an approach succeeds several times, the pupil may use it again when faced with a similar problem. Over time one can speak of an approach becoming a part of a strategy for solving problems. Over the years each pupil comes to rely, possibly quite unconsciously, upon those approaches that have proven useful. Each pupil will thereby develop a personal and idiosyncratic collection of problem solving approaches. But despite being idiosyncratic the approaches are also somewhat uniform, meaning that there is a substantial degree of homogeneity in ways that expert problem solvers approach new problems. By making systematic observations of experts solving large numbers of problems, it is possible to identify and describe important approaches like the ones Polya proposed (1945) in his "short dictionary of heuristic". Finally when the most important approaches have been discovered and elaborated, instruction about these approaches should be done in order to save the pupils the trouble of having to discover them on their own. In this paper I present findings of how mathematics textbooks treat approaches of this kind.

Such approaches also constitute an important part in Lester's (1996) programme for how to teach problem solving. Lester splits the teaching and learning of each of 10 approaches into two phases. The first phase includes teaching of what the approach really is about and how to use it, followed by a sequence where the pupils practise the approach themselves. The second phase is about when to use the approach. The pupils are then presented problems to be solved, but they have to decide themselves which approach is suitable. Lester (1996) states that casual attention to problem solving or occasional elements of problem solving is not enough to get pupils to become problem solvers, and that is in line with Hembree's (1992) statement that of all instructional methods, heuristics training appears to provide the largest gains in pupils' problem solving performance. Polya (1945, p. 133) states that "heuristic aims at generality, at the study of procedures which are independent of the subject-matter and apply to all sorts of problems". By learning such a set of heuristic approaches it seems reasonable to expect a more effective problem solving.

Another inspiration for my motivation to analyse heuristic approaches in Norwegian textbooks has been the role of heuristics in the leading country in the TIMSS rankings. Since 1990 the development of pupils' ability in mathematical problem solving has been the primary aim and problem solving has kept its place as the core in the Singaporean curriculum's framework (Fan & Zhu, 2007b).

Problem solving is placed at the core in the curriculum's framework with skills, attitudes, metacognition, processes and concepts connected to it (see figure 1). Heuristics constitute a part of the processes involved in mathematical problem solving. The role of heuristics has been substantial in Singapore with explicit lists of heuristics together with samples to illustrate their use in the syllabi, and textbooks devoting whole chapters to the instruction of problem solving with emphasis on specific heuristics

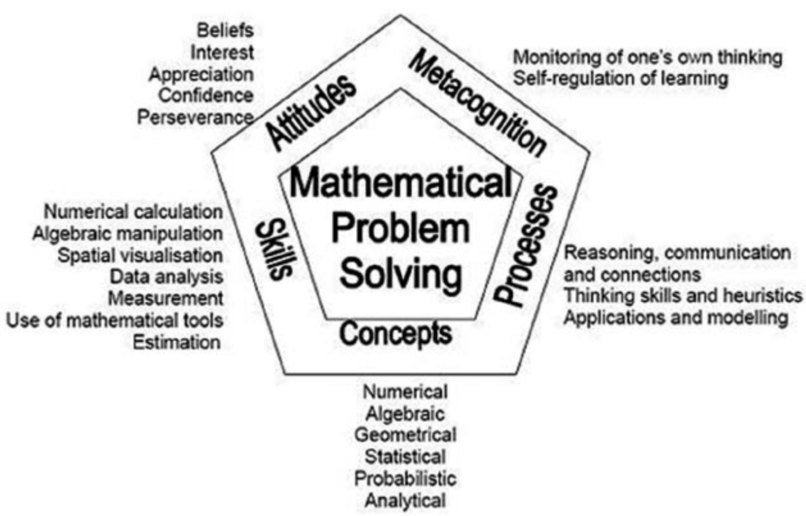


Figure 1. *The framework in the Singaporean curriculum (MOE, 2007)*

(Zhu, 2003; Fan & Zhu, 2007b). Among these heuristics ”use a model”, often called ”bar modelling”, has become a label of Singapore school mathematics (figure 2). The solution explicitly labels the approach, ”use a model”, which includes visualisations and algebraic notation together with an explanation to the solution process. Researchers within problem solving in Singapore have studied the advantages and disadvantages of how textbooks present problem solving (Ng, 2002; Zhu, 2003), and their findings have influenced the development of new textbooks (Fan & Zhu, 2007b). Internationally there has not been much research on how textbooks represent heuristic approaches (Fan & Zhu, 2007a).

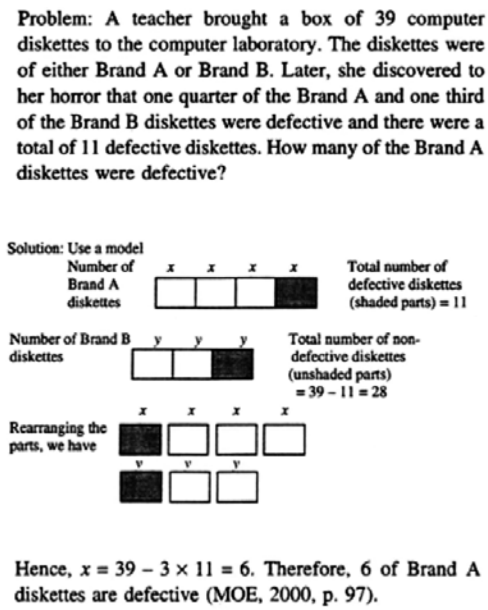


Figure 2. *Use a model (Fan & Zhu, 2007b, p. 496)*

By considering the teaching and learning of mathematics in school from both a theoretical and a pragmatic point of view, it seems reasonable to seek development and strengthening of effective approaches to solve problems such as the ”bar modelling”. Educators at different levels and textbook authors in mathematics have a responsibility to treat such approaches in various ways in order to create learning resources so that the pupils can become better problem solvers.

Based on the explanation in the two sections about rationales for the analysis my aim is to give an objective characterisation of how mathematics textbooks used in lower secondary school in Norway treat heuristic approaches, reveal some of their similarities and differences, and add some knowledge of how textbooks can contribute to the teaching and learning of heuristic approaches.

Definitions and discussion of key concepts

Problem

Both ”problem” and ”problem solving” have had different, and sometimes contradictory meanings through the history, and different understandings of what constitute these concepts still exist today (Lester, 1994; Stanic & Kilpatrick, 1989; Schoenfeld, 1992; Pehkonen, 1995; Fan & Zhu, 2000). In general there are two different definitions of problem found in the literature. The general problem solving view of what constitutes a problem is usually as a situation in which a goal is to be attained but no readily accessible approach of solution is available. Some researchers include that the problem solver should make an attempt to achieve the goal, otherwise the situation could not be considered a problem (Charles & Lester, 1984; Mason & Davis, 1991). In both variants whether or not a situation is classified as a problem is mainly determined by the individual's reactions. What is a problem for one individual might not be a problem for someone else. What is a problem for one individual at one time might not be a problem at a later time. Therefore, the property of being a problem is not inherent in a textbook. This definition is therefore problematic for textbook analysis, although researchers such as Boesen (2006) has handled this by looking at what type of reasoning is needed to solve the actual problem.

Another way of defining a problem is as a situation that requires a decision and/or an answer, no matter if the approach of solution is readily available or not to the problem solver. Whether there exists a blockage when the problem solver is attempting to find a solution is not the concern. I have like many other researchers who have conducted textbook analyses used this definition in my study (Kantowski, 1981; Nibbelink et al., 1987; Stiff, 1988; Stockdale, 1991; Li, 1999; Mayer, Sim & Tajika, 1995; Zhu, 2003; Fan & Zhu, 2007a). This definition is more operational for textbook analysis but has the result that all situations that require a decision will be defined as a problem. This is of course in contrast to the general problem solving view of what constitutes a problem. However, elementary mathematical problems can also present all the desirable variety of kinds of problems, and the study of the approaches used to solve them is particularly accessible.

Heuristic approaches

Polya (1945, p. 112–113) states that ”the aim of heuristic is to study the methods and rules of discovery and invention. [...] Heuristic, as an adjective, means ’serving to discover.’ ” Inspired by Polya (1945) and Björkqvist (2003) I use the term *heuristic approaches* and try to adjust it to the level of mathematics in lower secondary school. In the definition I have tried to incorporate Schoenfeld's (1985, p. 75) claims that ”heuristics are subtle, complex and highly abstract” and ”anyone who thinks that fourth-graders, for example, can use these mathematical strategies in the way Polya described them either fails to understand the complexity of the strategies or fails to understand the lessons from Piaget's work”. I define heuristic approaches as rules of thumb for successfully solving problems, general approaches that help an individual to understand a problem better and/or to make progress toward its solution. It has distinct connections to the notion of heuristics, which Schoenfeld (1985, p. 44) defines as ”rules of thumb for successful problem solving, general suggestions that help an individual to understand a problem better or to make progress toward its solution”. My definition includes the common textbook analysis definition of a problem unlike Schoenfeld's (1985) definition which includes the common problem solving definition and is directly related to heuristics à la Polya. I think that pupils in lower secondary school cannot use such heuristics in the way Polya described them (Polya, 1945). The popularised version of Polya's ideas of problem solving that is often used in school is much less complex than Polya's original ideas. When Schoenfeld (1985, p. 74) speaks about problem solvers and heuristics in the spirit of Polya he presupposes a degree of mathematical maturity and states that ”learning to use heuristics calls for a (reasonably) firm foundation of mathematical resources and for a fair amount of sophistication as well” and sets a lower age limit to college students. By that he suggests that pupils should not first be exposed to heuristics in upper secondary school. The foundations for using such heuristics can and should be established during the whole of a pupil's mathematical education. Younger pupils can recognize, appreciate, and mimic the use of such heuristics in a less strict sense than what is generally treated in mathematical problem solving. I call heuristics in that sense heuristic approaches. An example of such a heuristic approach is ”make a systematic table” and described as ”constructing a systematic list or table containing the possibilities for a given situation”. An example of how one textbook uses this approach to solve a problem is presented in figure 3.

The systematic table consisting of six numbers at the right hand side of the example is the heuristic approach that is used to solve the problem. In

EKSEMPEL

Hvor mange tresifrede tall kan vi lage med sifrene 5, 7 og 9? Du kan bruke hvert siffer en gang i hvert tall.	579 597	759 795	957 975

EXAMPLE

How many three-digit numbers can we make with the digits 5, 7 and 9? You can use each digit once in each number.	579 597	759 795	957 975

Figure 3. *Heuristic approach (Torkildsen & Maugesten, 2007b, p. 79, author's translation)*

the study I analyse nine heuristic approaches labelled "look for a pattern", "make a systematic table" "make a visualisation", "guess and check", "solve part of the problem", "work backwards", "think of a related problem", "simplify the problem" and "change your point of view". These approaches are gathered from a literature review (Polya, 1945; Lester, 1996; Björkqvist, 2003; Fan & Zhu, 2007a) and selected after a small-scale tryout. More details regarding the selection of the approaches are presented in the methodology section later in the paper.

According to Schoenfeld (1992) the scientific status of heuristic strategies à la Polya (1945) has been problematic, especially in the 1970s, when referring to studies by Wilson (1967) and Smith (1973), which concerned the classical transfer-problem of learning. Both studies indicated that the heuristics that students were taught did not, despite their seemingly generality, transfer well into new domains. Studies by Kantowski (1977), Kilpatrick (1967) and Lucas (1974) indicated that the students' use of heuristics was relatively small but positively correlated with performance on ability tests and on specially constructed problem solving tests. Later studies have however provided further empirical evidence to back up the sense that heuristics can be used as a means to enhance performance in problem solving,

> [...] many classroom-based studies have indicated that appropriate instruction on problem-solving procedures, especially problem-solving heuristics, benefits the development of students' ability in problem-solving (e.g., Charles & Lester 1984; Hembree 1992; Higgins 1997; Lee 1982; Oladunni 1998; Schoenfeld 1979)
>
> (Fan & Zhu, 2007a, p. 62)

and thereby support Schoenfeld's (1992, p. 352) statement that "the evidence appears to have turned in Polya's favour".

Problem solving

Problems have occupied a central place in mathematics curriculum since antiquity (Stanic & Kilpatrick, 1989). In contrast, the importance of problem solving just started to be recognized in the late 1970s (Schoenfeld, 1992), and in terms of research it has been a focus for three decades (Zhu, 2003). Since the late 1970s the importance of developing pupils' competence in problem solving has been widely recognized. *Problembehandlingskompetence* (problem solving competence) is one of the eight competencies identified in the Danish Competence in Mathematics-project (Niss & Jensen, 2002, p. 200). According to Blomhøj and Jensen (2007) Niss' (2002) set of mathematical competencies has the potential of replacing the syllabus as the focus of attention due to its alternative vocabulary for what it means to master mathematics. A competence based description of mathematics is to some extent also found in the Norwegian curriculum and can be exemplified by the description of the objectives of the subject, "problem solving is part of mathematical competence" (UFD, 2005b, p. 1). In my study problem solving is interpreted as a competence similar to the one exposed in the curriculum (UFD, 2005a) which is informed, in part, by Niss' report (2002).

Whether it is used to solve mathematical problems in school or to solve problems during ones spare time, problem solving is an essential competence that every person should acquire. Although there are some gifted people who have achieved such a competence in a natural way, the vast majority of people require training to develop a competence in problem solving. Providing this training is an important responsibility resting with educators, including teachers of mathematics and textbook authors.

In *How to solve it* (Polya, 1945) Polya presented for the first time his now famous four-stage model of the problem solving process. Under those four stages, a variety of specific problem solving heuristics is available for problem solvers to use in order to understand or/and solve problems. The four-stage model is often referred to as a general strategy and the heuristics as more specific strategies, both are rules of thumb for making progress in problem solving (Borgersen, 1994).

Scientific studies of mathematical problem solving are usually dependent on how one defines the relationship between the problem and the problem solver. My own study is consistent with the majority of researchers who differentiate between the problem and the problem solver (Björkqvist, 2003). This separation is usually done in order to make generalisations possible regarding mathematical problems or problem solvers.

A common understanding of "problem solving" is even more diverse than the understanding of "problem". When trying to find a definition of problem solving fitting the culture of school mathematics, the literature itself reveals what Schoenfeld (1992, p. 334) indicates as an area ”somewhat ill-defined and poorly grounded”. A major reason for this is that problem solving has contained multiple meanings from ”working rote exercises” to ”doing mathematics as a professional mathematician”. Regardless of Polya's (1945) famous book from 1945, it took almost 40 years before problem solving established roots in school mathematics, exemplified by its shift in status from ICME IV in 1980 to ICME V in 1984 when problem solving became a main theme (Schoenfeld, 1992). (ICME stands for International Congress on Mathematical Education). Polya's (1945) ”short dictionary of heuristics” has been criticized and to some extent been used as an explanation for the late establishment in school mathematics, mainly because of its descriptive rather than prescriptive nature. The latter means that the characterisation of the heuristics makes it possible to recognise the strategies when they are being used, but do not provide the necessary details to enable pupils who are not already familiar with the strategies to implement them. This issue is of special interest for textbook authors and teachers when dealing with heuristic approaches. According to Branca (1980) problem solving can mean different things to different people at the same time and different things to the same person at different times. Many have presented interpretations of ”problem solving” by using slightly different perspectives, for example Hatfield (1978), Branca (1980), Stanic and Kilpatrick (1989), Schroeder and Lester (1989), Ernest (1998), Lester and Lambdin (2004) and Stacey (2005).

Problem solving in the curriculum

Stanic and Kilpatrick (1989) have labelled three themes regarding the role and use of problem solving in school mathematics curricula. These are problem solving as context, as skill and as art. In problem solving as context, problem solving is usually not seen as a goal in itself, but the problems and the solving of these are used in the service of other curriculum goals. The interpretation of problem solving is minimal just meaning working with the problems that have been presented. This theme is divided into five sub-themes; problem solving as justification, as motivation, as recreation, as vehicle and as practice. The first and the last two of these are of special interest for textbooks in schools, because historically problem solving has provided justification for teaching mathematics in the first place, where some of the problems are related to real-world experiences and thereby occupy a convincing role. Textbooks consist of many problems and the solving of these can be interpreted as a vehicle for learning new concepts and skills, and as necessary practice to reinforce skills and concepts that have been taught. Within problem solving as skill solving problems is valuable in its own right, where different heuristics are typically taught as subject matter with practical problems assigned so that the heuristics can be mastered. Schoenfeld (1992) characterised the vast majority of curriculum development and implementation that in the 1980s went on under the name of problem solving as skill. In Norway this was the case in the M87 curriculum (KUF, 1987). Problem solving within this theme is seen as a valuable curriculum goal in itself and leads to certain consequences for the role of problem solving in mathematics textbooks with regard to hierarchy. This can be exemplified by the fact that solving a non-routine problem is considered to be a higher level skill than solving a routine problem. Problem solving as art contains a deeper and more comprehensive view of problem solving, and arises in the work of Polya. He viewed problem solving as a practical art, like playing the piano, and possible to learn by imitation and practice. Polya used the notion of plausible reasoning, interpreted as different ideas about mathematical discovery. The complexity in mathematical problem solving, which Schoenfeld (1985) elucidates, and I have tried to consider in my definition of heuristic approaches, is also found in Stanic and Kilpatrick's (1989, p. 16) discussion of plausible reasoning. They claim on one hand that "if students are to use plausible reasoning, they need to be taught how", but on the other hand they warn against the danger of reducing problem solving as art to problem solving as skill, when attempts are made to implement Polya's ideas and putting them into textbooks. Stanic and Kilpatrick's statement is of interest for textbook authors and teachers dealing with problem solving, and touches the issue of Polya's (1945) descriptive rather than prescriptive nature of heuristics.

The latest TIMSS report for Norway (Grønmo & Ostad, 2009) makes a general call for more discussion and argumentation about problem solving and strategies, and especially states that classes that do so perform far better than classes that do not. The importance of strategies is also exemplified by Alseth's (1995) notion of the process of mathematical thinking, where an individual's cognition is divided into basic knowledge, strategies, meta-cognition and attitudes.

In the current Norwegian curriculum, LK06 (UFD, 2005a), problem solving is stated as a competence: "Problem solving is part of mathematical competence. This means analysing and transforming a problem into mathematical form, solving it and assessing the validity." (UFD, 2005b, p. 1). The content of this quotation seems to indicate an exclusion of problems which already are mathematical. Is this intentional? A closer investigation of the Norwegian curriculum concerning "the five basic skills" indicates that this is probably not intentional: "Numeracy in the mathematics subject is, needless to say, the foundation of the mathematics subject. This involves problem solving and exploration, starting with practical day-to-day situations and mathematical problems." (UFD, 2005b, p. 3). According to LK06 (UFD, 2005b, p. 3) the "basic skills are integrated in the competence aims where they contribute to development of the competence in the subject, while also being part of this competence". These basic skills are common for all subjects in school and known as "being able to express oneself orally, being able to express oneself in writing, being able to read, numeracy and being able to use digital tools".

Out of a total of four times, problem solving is mentioned in the curriculum twice under the basic skills. The third time is: "Being able to use digital tools in the mathematics subject involves [...] learning how to use and assess digital aids for problem solving, simulation and modelling." (UFD, 2005b, p. 4). The quotation can be interpreted as using digital aids as an approach to solve mathematical problems. The fourth time problem solving is mentioned explicitly is as a competence goal within the topic of "numbers and algebra" after the tenth school year: "The aims for the education are that the pupil shall be able to use, with and without digital aids, numbers and variables in exploration, experimentation, practical and theoretical problem solving and technology and design projects." (UFD, 2005b, p. 9). What exactly is meant by practical and theoretical problem solving is not explained. An interpretation from a textbook perspective is that pupils use numbers and variables, for instance in an equation, to solve practical and theoretical problems.

In the LK06 (UFD, 2005a) heuristic approaches are not mentioned but strategies are mentioned twice under the basic skills. The first time in general terms without any explicit connection to problem solving: "Being able to express oneself orally [...] means talking about, communicating ideas and discussing and elaborating on problems and solution strategies with others." (UFD, 2005b, p. 3). The importance of discussion and argumentation about problem solving and strategies is underlined in the latest TIMSS report (Grønmo & Ostad, 2009) and found closely related to the level of performance in mathematics. The second time strategies are mentioned a connection to problem solving is noticeable: "Numeracy in the mathematics subject is, needless to say, the foundation of the mathematics subject. This involves problem solving and exploration [...]. To manage this, pupils must [...] have the ability to use varied strategies, [...]." (UFD, 2005b, p. 3). Even though the exact wording is not "problem solving strategies" or "heuristic approaches" in either of the two quotations above, it is reasonable to interpret them as implicitly dealing with well-known approaches such as "guess and check" and "look for a pattern" to solve problems. The only time specific approaches are mentioned is under the basic skills: "Being able to express oneself in writing in the mathematics subject means solving problems by means of mathematics, describing a process of thinking and explaining discoveries and ideas; one makes drawings, sketches, figures, tables and graphs." (UFD, 2005, p. 3). The quotation is about solving problems, not problem solving, but well-known heuristic approaches such as "make a visualisation" and "make a table" are quite noticeable. The quotation also includes important problem solving components like "describing a process of thinking and explaining discoveries and ideas" (UFD, 2005, p. 3), which Grønmo and Ostad (2009) call for in the latest TIMSS report.

Nordic school systems, when comparing themselves internationally, find it especially interesting to investigate the situation in Singapore and Finland. In Singapore important components in Schoenfeld's (1985) chain of thought are quite recognizable. The role of heuristics has been substantial with an explicit list of heuristics together with samples to illustrate their use in the syllabi (Zhu, 2003; Fan & Zhu, 2007b). In the famous "bar modelling" example from Singapore the description of the solution process is also given a substantial role. In Finland problem solving has been one of the overall goals in the curricula for more than twenty years (Pehkonen, 2007). Today the use of problem solving tasks is quite popular in the mathematics lessons and the textbooks are influenced by a desire to especially develop the pupils' thinking skills and problem solving skills.

Methodology

Design and method

I have used a cross-sectional design and a research method known as content analysis. A cross-sectional design involves the collection of data on more than one case at a single point in time in order to collect a body of quantitative or quantifiable data in connection with two or more variables which are examined to detect patterns of association. According to Bryman (2008, p. 274) the two best-known definitions of content analysis are the following: "Content analysis is a research technique for the objective, systematic and quantitative description of the manifest content of communication" and "Content analysis is any technique for making inferences by objectively and systematically identifying specified characteristics of messages". The qualities of "objectivity" and "being systematic" are decisive for any content analysis. Objectivity means that the rules are clearly specified in advance for the assignment of the raw data into categories. Objectivity is therefore linked to transparency in the procedures for assigning the material to categories in a way that minimize personal bias. The ideal in content analysis is simply to apply the rules in question. As the reader will know, the quality of being systematic refers to the consistent manner in which rules are applied so that bias is minimized. Considering the qualities of objectivity and being systematic at the same time has formed the ideal of my content analysis, namely that anyone who employs the same rules to the same data will come up with the same results. In order to secure these qualities in the best way the design of the coding scheme is of great importance. My coding scheme consists of a coding schedule and a coding manual. A coding schedule is a form onto which all the data relating to an item being coded will be entered. The coding schedule that I have developed is presented in figure 4.

Textbook	Example		Main subject area					Heuristic approach								
	total	approaches	numbers and algebra	geometry	measuring	statistics, probability and combinatorics	functions	look for a pattern	make a systematic table	make a visualisation	guess and check	solve part of the problem	work backwards	think of a related problem	simplify the problem	change your point of view

Figure 4. *Coding schedule*

My coding schedule consists of four dimensions with different categories within each dimension. The dimensions of "textbook" is not coded with anything other than the name of the analysed textbook. The dimension of "example" is divided into two sub dimensions consisting of the total number of examples in the textbook and the total number of heuristic approaches. The dimension of "main subject area" is divided into five sub-dimensions consisting of the topics found in the curriculum (UFD, 2005a). I have used "+" if the topic is present in the textbook and "–" if it is not. The dimension of "heuristic approach" is divided into nine sub-dimensions consisting of the above presented heuristic approaches within problem solving. When designing a coding schedule the different dimensions should be discrete, meaning that there is no conceptual or empirical overlap between them. This is unproblematic in my schedule with completely separate dimensions. It is also important that the categories within each dimension are mutually exclusive, meaning that there is no overlap between the categories. This has been a challenge within the last dimension where my initial inspiration was Fan & Zhu's (2007a) international comparative study of how mathematics textbooks in China, Singapore and USA presented 17 problem-solving categories. These categories were based on the different heuristics found in the national syllabuses and standards of the three countries. Several of these heuristics were neither found in the Norwegian curriculum nor the textbooks, some of which called for a great deal of mathematical knowledge and sophistication as well. An example of such an approach is "make suppositions". This

Heuristic approaches	**Descriptions**
1. Look for a pattern	Identifying patterns in the given problem based on observation of common characteristics, variations, or differences in the problem.
2. Make a systematic table	Constructing a systematic list or table containing the possibilities for a given situation.
3. Make a visualisation	Creating a visualisation on the available information to visually represent the problem.
4. Guess and check	Making a reasonable guess of the answer and then checking the result to see if it works. If necessary, repeating the procedure to find the answer, or at least a close approximation.
5. Solve part of the problem	Dividing a problem into sub-problems, then solving them one by one in order to solve the original problem.
6. Work backwards	Approaching a problem from its outcomes or solutions backwards to find what conditions they eventually need to meet.
7. Think of a related problem	Using methods or results of a related problem, or recalling a related problem, or considering a similar problem solved before in order to solve the problem.
8. Simplify the problem	Changing the complex numbers or situations in the problem into simpler ones without altering the problem mathematically.
9. Change your point of view	Approaching a problem from another angle.

Figure 5. *Coding manual*

approach was described as ”making a hypothesis, and then based on the givens and hypothesis, finding out the relationship between the known and unknown, and finally solving the problem” (Fan & Zhu, 2007a, p. 66). I also found difficulties regarding the mutual exclusiveness of some of Fan & Zhu's (ibid.) approaches. This was the case with ”restate the problem” and ”simplify the problem”. One of Fan & Zhu's (ibid.) approaches, ”use an equation”, was excluded because of its major tradition as a more general approach than as a typical heuristic approach in problem solving. Based on the revision of Fan & Zhu's (ibid.) list and additional reviews of approaches in Polya (1945), Lester (1996) and Björkqvist (2003), my study is based on a characterisation of the occurrence of the nine above presented heuristic approaches. Another side of the selection of approaches is, as with much content analysis, the fact that I am just as interested in the omissions of approaches as in what approaches occur. Omissions of specific approaches are in themselves potentially interesting, as they may reveal what is and is not regarded as important to textbook authors.

The coding manual must give clear descriptions of the different categories meaning that the coder should have little or no freedom or discretion in how to allocate codes to the units of analysis. Figure 5 shows my coding manual for the heuristic approaches.

Suitability of the method

There are several advantages gained by using content analysis in textbook research. First of all it is a very transparent method. The coding scheme together with a detailed description of possible sampling procedures makes both replication and follow-up studies feasible. This transparency explains why content analysis is often referred to as an objective method. Content analysis is also suitable for longitudinal studies such as Jakobsson-Åhl's (2008) study of mathematics textbooks, and it thus creates possibilities for further research. Content analysis is also known as an unobtrusive method (Cohen, Manion & Morrison, 2011), meaning that one can observe without being observed, thus making it a possible non-reactive method. The main use of content analysis is traditionally in the examination of printed texts, documents and of mass media items (Bryman, 2008).

As with every research method, content analysis also has some disadvantages. A content analysis can only be as good as the documents on which the researcher works. This means that the documents should be assessed in terms of authenticity, credibility and representativeness. Authenticity is whether the textbooks are what they purport to be and credibility concerns whether the books may be distorted in some way.

This is unproblematic because I have informed all the publishing houses about my study and received the textbooks directly from them. Representativeness is whether the documents are representative of all possible relevant documents. A lack of representativeness could be noticed if there were to exist textbooks for lower secondary school based on the curriculum which are not included. In order to minimize this have I asked publishers, lower secondary school teachers and people working with textbooks within the mathematics community which textbooks they know exist on the market. Based on this informal investigation I have identified seven series. Another disadvantage is connected to the coding manual which is almost impossible to devise without entailing some interpretation on the part of the coder(s). In order to reduce this disadvantage I have used an experienced teacher and researcher within mathematics education to code separately and independently all the 214

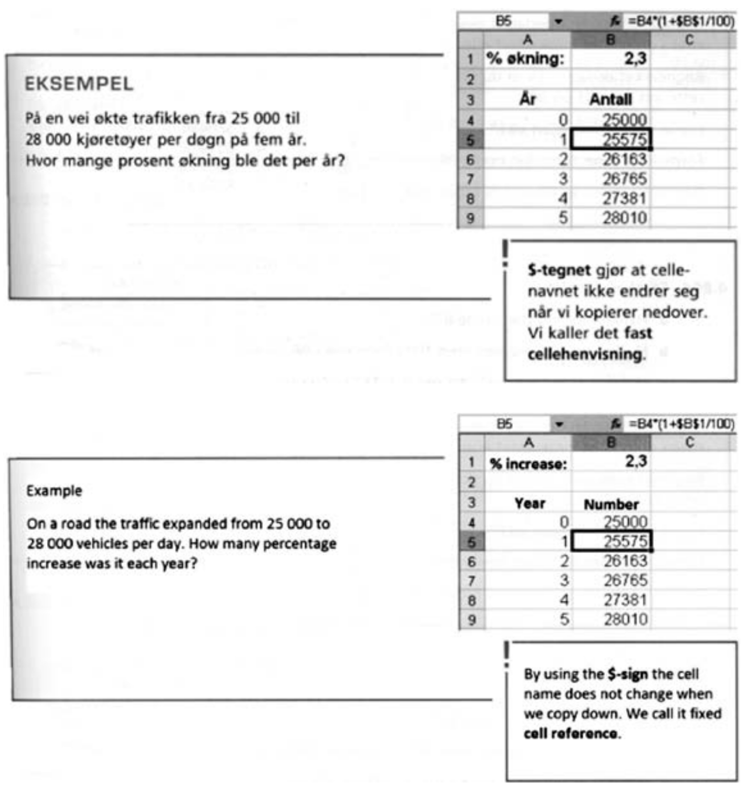


Figure 6. *Example of an inconsistency (Torkildsen & Maugesten, 2007b, p.51, author's translation)*

examples in Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b). Our coding results were to a large extent consistent. Whenever there was an inconsistency we scrutinised the example together once more and agreed upon a coding. An example of a characteristic inconsistency is presented in figure 6. In the example one coder had coded this as ”make a systematic table” whereas the other had coded it as ”make a systematic table” and ”guess and check”. There was no problem agreeing about the coding and we decided that the example should be coded as dealing with both approaches.

Selection of textbooks

As mentioned earlier, the Norwegian requirement for the national approval of textbooks was removed in 2000, and on the open market today there are at least seven different mathematics textbook series being used in lower secondary school. Because the publishers of several series had not published books for grade ten when I started my research, I have analysed textbooks from the highest available grade at that time, ninth grade. I wanted to analyse textbooks from the highest available grade based on the assumption that these were more suitable for treating heuristic approaches. I have analysed the textbook series which have the classical structure of one textbook for each school year. These six textbook series are Grunntall (Bakke & Bakke, 2007), Kode X (Christensen, 2007a, 2007b), Mega (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2007a, 2007b), Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006), Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b) and Tetra (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006). All six series are written by Norwegian authors except the latter which is a translation from Swedish.

Data collection

All problems presented in the main text part in the textbooks, usually labelled and intended as examples, have been analysed. No problems in the sets of exercises have been included, because no heuristic approaches are illustrated in these, only a single answer is given. Many examples were coded using more than one heuristic approach.

Findings and discussion

Looking at the six textbook series and the different dimensions in the coding schedule together, is generating a matrix of data (table 1). The matrix demonstrates for example that Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006) has 89 examples which include 107 heuristic approaches. Since the total number of heuristic approaches is larger than the total number of examples it is obvious that several examples include more than one approach. The matrix also demonstrates that Faktor (ibid.) has chapters covering all topics treated in the curriculum. The codes in the dimension of "heuristic approach" demonstrate that Faktor (ibid.) has one example coded as "look for a pattern", eight "make a systematic table", 31 "make a visualisation", 52 "solve part of the problem" and 15 "change your point of view" approaches. The four "0" demonstrate that "guess and check", "work backwards", "think of a related problem" and "change your point of view" have not been found in Faktor (ibid.).

The matrix and the bar diagram (figure 7) shows that "make a visualisation", "solve part of the problem" and "change your point of view" are the most common approaches, and that especially "guess and check", "work backwards", "think of a related problem" and "simplify the problem" are rarely presented in the textbooks.

It is apparent when the textbook series are seen individually that Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b) with 359 approaches distributed among 214 examples stands out in respect to both the total number of

Table 1. *Matrix of data*

Textbook	**Example**		**Main subject area**					**Heuristic approach**								
	total	approaches	numbers and algebra	geometry	measuring	statistics, probability and combinatorics	functions	look for a pattern	make a systematic table	make a visualisation	guess and check	solve part of the problem	work backwards	think of a related problem	simplify the problem	change your point of view
Mega	97	137	+	+	-	+	+	0	6	32	0	72	0	0	0	27
Grunntall	105	162	+	+	-	+	+	3	7	39	1	76	0	0	2	34
Tetra	126	235	+	+	-	+	+	7	10	64	2	104	0	1	10	37
Kode X	109	175	+	+	+	-	-	2	6	51	0	106	0	0	0	10
Sirkel	214	359	+	+	+	+	-	10	28	103	5	146	1	0	3	63
Faktor	89	107	+	+	+	+	+	1	8	31	0	52	0	0	0	15

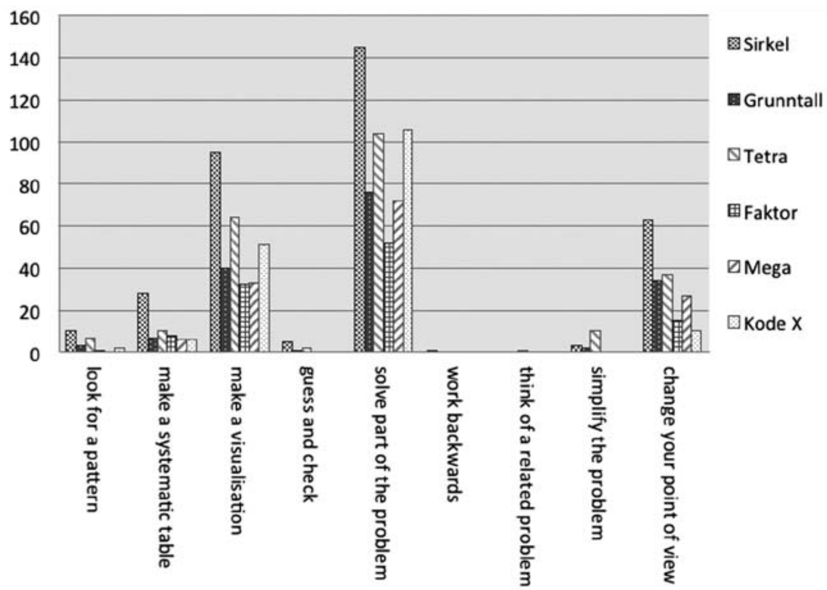


Figure 7. *Bar diagram of heuristic approaches*

approaches and examples. In addition Sirkel (ibid.) together with Tetra (Hagen et al., 2006) cover most approaches with eight out of nine. These two series also stand out with the only examples of, respectively, "work backwards" and "think of a related problem". Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006) has the lowest number of approaches and examples. Despite being the only textbook covering all topics in the curriculum, Faktor (ibid.) only covers five approaches, and of these "look for a pattern" is exemplified once. Mega (Gulbrandsen et al., 2007a, 2007b) is covering the fewest approaches by exemplifying the four most common approaches.

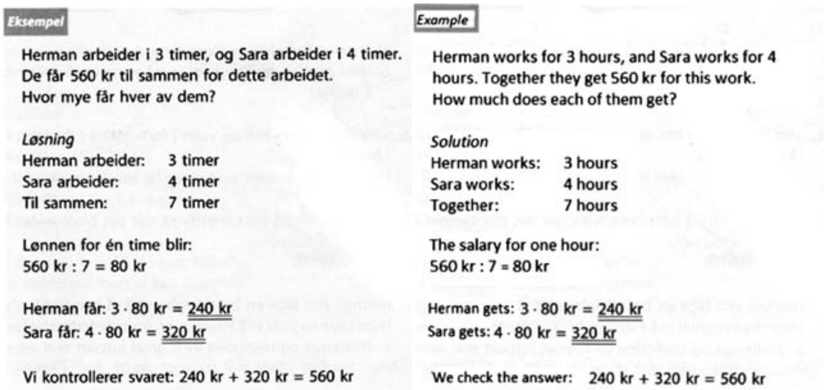
Examining the approaches individually and observing their distribution among the textbooks, reveal some interesting features (table 2). All analysed textbooks include the topics of "numbers and algebra" and "geometry" which one might expect to include several "look for a pattern" and "guess and check" approaches. But "look for a pattern" is exemplified only 23 times, of which 17 are found in Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b) and Tetra (Hagen et al., 2006). "Guess and check" with its general applicability and the curriculum's (UFD, 2005b, p. 3) requirement for pupils to have "the ability to use varied strategies", is only exemplified eight times, of which seven are found in Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b) and Tetra (Hagen et al., 2006). However, even though the total number of examples and approaches vary a lot between the

Table 2. *Relative distribution in percentage*

Textbook	Heuristic approach									Total
	look for a pattern	make a systematic table	make a visualisation	guess and check	solve part of the problem	work backwards	think of a related problem	simplify the problem	change your point of view	
Mega	0	4	23	0	53	0	0	0	20	100
Grunntall	2	4	24	1	47	0	0	1	21	100
Tetra	3	5	27	1	44	0	0	4	16	100
Kode X	1	3	29	0	61	0	0	0	6	100
Sirkel	3	8	29	1	41	0	0	1	17	100
Faktor	1	7	29	0	49	0	0	0	14	100

series, the relative distribution is to some extent consistent. For instance the relative distribution of ”make a visualisation” varies from 23 % in Mega (Gulbrandsen et al., 2007a, 2007b) to 29 % in Kode X (Christensen, 2007, 2007b), Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006) and Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b).

Despite the fact that a few approaches in some textbooks stand out, for instance ”change your point of view” in Kode X (Christensen, 2007a, 2007b), the overall impression of the relative distribution in each textbook is similar. ”Solve part of the problem” varies most but is also the approach used most often. An example of this approach is shown in figure 8. In the example the original problem is divided into sub-problems, which are solved one by one, before the original problem is solved. By checking the answer in the end a part of Polya’s last stage in his four-stage model is also visible. This stage is usually labelled as ”looking back” and only occasionally found in the textbooks, always in connection with specific examples and hardly ever connected to problem solving in general or to Polya’s model in particular. In fact Grunntall (Bakke & Bakke, 2007) is the only textbook with a reference to a list of explicitly named heuristic approaches. A three page sub-chapter, called ”Hvis vi står fast” (”If we get stuck”, author’s translation) (ibid., p. 142), gives two



Eksempel

Herman arbeider i 3 timer, og Sara arbeider i 4 timer.
De får 560 kr til sammen for dette arbeidet.
Hvor mye får hver av dem?

Løsning

Herman arbeider:	3 timer
Sara arbeider:	4 timer
Til sammen:	7 timer

Lønnen for én time blir:
560 kr : 7 = 80 kr

Herman får: $3 \cdot 80$ kr = $\underline{240 \text{ kr}}$
Sara får: $4 \cdot 80$ kr = $\underline{320 \text{ kr}}$

Vi kontrollerer svaret: 240 kr + 320 kr = 560 kr

Example

Herman works for 3 hours, and Sara works for 4 hours. Together they get 560 kr for this work.
How much does each of them get?

Solution

Herman works:	3 hours
Sara works:	4 hours
Together:	7 hours

The salary for one hour:
560 kr : 7 = 80 kr

Herman gets: $3 \cdot 80$ kr = $\underline{240 \text{ kr}}$
Sara gets: $4 \cdot 80$ kr = $\underline{320 \text{ kr}}$

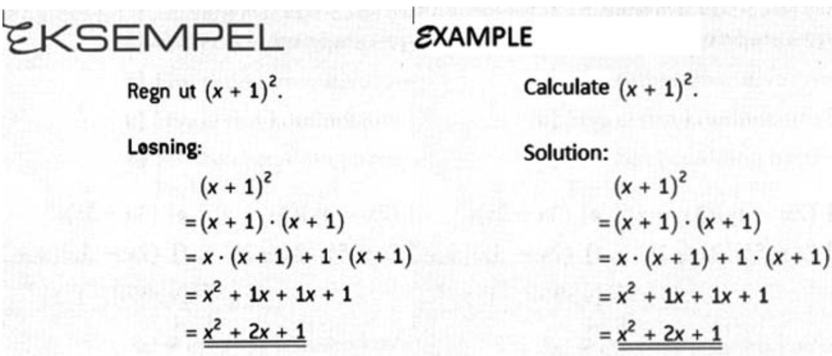
We check the answer: 240 kr + 320 kr = 560 kr

Figure 8. *Solve part of the problem (Hjardar & Pedersen, 2006, p. 25, author's translation)*

explicit examples of using equations to solve problems, together with a reference to five approaches presented in the textbook for grade eight (Bakke & Bakke, 2006, p. 163-180). These five approaches are called "uvanlige metoder" ("unusual methods", author's translation) and put under the heading of "kreativitet og fantasi" ("creativity and imagination", author's translation) (Bakke & Bakke, 2006, p. 164). They are not explicitly related to problem solving but given explicit names and would have been covered by the approaches known as "solve part of the problem", "work backwards", "make a visualisation", "guess and check" and "make a systematic table" in my study. The presentation of the approaches is in line with Lester's (1996) programme for how to teach problem solving by following both phases. The three page sub-chapter in the analysed ninth-grade textbook (Bakke & Bakke, 2007) presents "use an equation" as the sixth approach. The presentation of the approach does not fit the second phase in Lester's (1996) programme because all the problems afterwards all can be solved using only this approach. The presentation of these six approaches in Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, 2007) for grades eight and nine is nevertheless a contribution to the treatment of heuristic approaches in textbooks.

"Solve part of the problem" is by far the most exemplified approach in all six textbook series. This can be a result of its usefulness and a shared understanding of its importance among textbook authors. However, it can also be that by grade nine textbooks include several multi-steps problems. As with every description, a description of an approach will result in examples being coded that might not fit the typically wanted example.

In "solve part of the problem" this has been the case with examples which include one or more intermediate steps in the solving process (figure 9).


EKSEMPEL

Regn ut $(x+1)^2$.

Løsning:

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^2\\
&=(x+1)\cdot(x+1)\\
&=x\cdot(x+1)+1\cdot(x+1)\\
&=x^2+1x+1x+1\\
&=\underline{\underline{x^2+2x+1}}
\end{aligned}
$$

EXAMPLE

Calculate $(x+1)^2$.

Solution:

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^2\\
&=(x+1)\cdot(x+1)\\
&=x\cdot(x+1)+1\cdot(x+1)\\
&=x^2+1x+1x+1\\
&=\underline{\underline{x^2+2x+1}}
\end{aligned}
$$

Figure 9. *Example with intermediate steps (Christensen, 2007a, p. 60, author's translation)*

The intermediate steps between $(x+1)^2$ and x^2+2x+1 in the solution process can be interpreted as dividing the problem into sub-problems which are solved one by one. Examples including intermediate steps like this can be seen as a sub-category of "solve part of the problem" and to a large extent explain the high number of "solve part of the problem" approaches. According to Schoenfeld (1985) many heuristic approaches subsume half a dozen sub-categories or more. This means that the typical description of a heuristic approach is more like a label for a category of closely related approaches. Examples that display intermediate steps are beside their role as a sub-category also occupying an important role regarding how one can explain a solution process by using mathematical symbols.

"Make a visualisation" is one of two specific approaches found in the curriculum (UFD, 2005a) and the second most occurring approach (figure 10). The first solution starts by making a drawing to visually describe, and in this case practically also solve, the problem. The second solution uses simple calculation to solve the problem. Since the example presents these two different approaches to solve the problem it is coded as "make a visualisation" and "change your point of view". In the example it is quite clear that the visualisation in the first solution is part of the solution process. This has however not been the case for all examples of this type. In order to get a more balanced impression of the representativeness of examples like this, I have coded all the 320 "make a visualisation" approaches into three sub-categories (table 3). The first category deals with visualisations

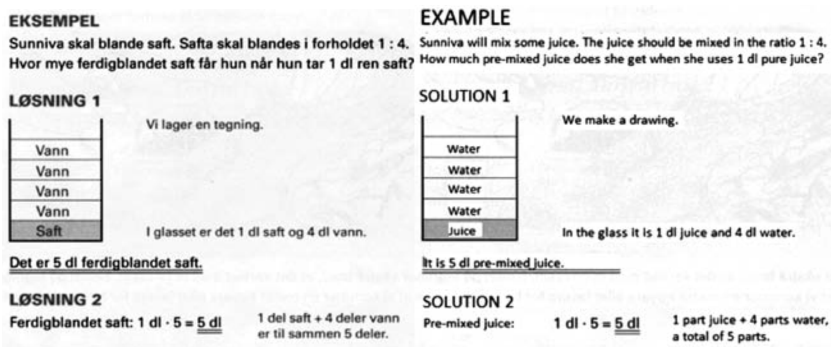


Figure 10. *Make a visualisation (Bakke & Bakke, 2007, p. 46, author's translation)*

that are a part of the problem statement. The second deals with visualisations that are part of the solution process. The third deals with cases where the wording of the problem directly asks for a visualisation. The first category is further divided into an informative visualisation and a decorative visualisation. The informative visualisation concerns mathematical information, which is necessary in order to state the problem, whereas the decorative visualisation only serves as a decoration without any informative purpose.

From a problem solving perspective "part of the solution process" is of most interest. Out of the 320 approaches there are 128 (40 %) which have the visualisation as part of the solution process. 117 have visualisations as part of the problem statement, where 90 of these are informative- and 27 are decorative visualisations. 75 approaches deal with cases

Table 3. *Sub-categories of "make a visualisation" approaches*

	Part of the problem statement		Part of the solution process	Directly asking	Total
	Informative	Decorative			
Sirkel	28	16	43	16	103
Grunntall	8	0	13	18	39
Tetra	7	5	36	16	64
Faktor	17	3	5	6	31
Mega	12	0	14	6	32
Kode X	18	3	17	13	51
Total	90	27	128	75	320

where the problem directly asks for a visualisation. Between the textbook series there is great deal of variation, where Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b) has 43 "part of the solution process" approaches whereas Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006) has five. Grunntall (Bakke & Bakke, 2007) stands out with 18 out of 39 (46 %) visualisation approaches where the problem directly asks for a visualisation, and Faktor (Hjardar &

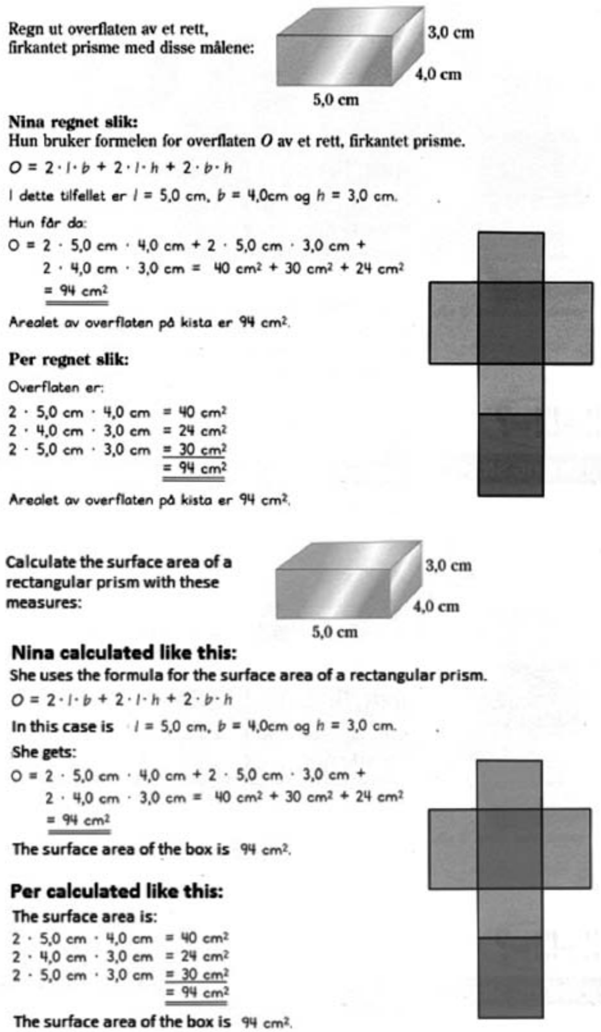
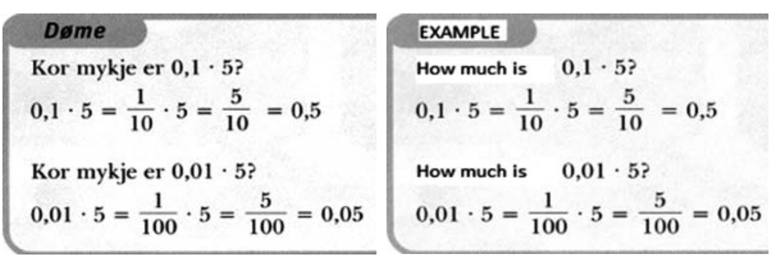


Figure 11. *Change your point of view (Gulbrandsen et al., 2007, p. 38, author's translation)*

Pedersen, 2006) stands out with 20 out of 32 (63 %) visualisation approaches where the visualisation is part of the problem statement. Out of the total 1175 approaches found in the textbooks 128 of these have visualisation as part of the solution process, thus making it almost 11 %. The corresponding approach in Fan & Zhu's (2007a) international comparative study showed that "draw a diagram" was the most common approach in China, Singapore and USA.

The third most common approach in my study is "change your point of view" (see figure 11). In the first approach Nina uses the formula for the surface area of a rectangular prism to solve the problem, whereas Per uses the visualisation of the net of the prism in the second approach. In this example the distinction between the different approaches is very clear, but this is not the case for all examples. One such case includes what I have called "change of form of representation" (figure 12). The original problem of multiplying the decimal number with the whole number, $0{,}1 \cdot 5$, is approached from another angle by transforming the decimal number into a fraction. The same change of form of representation is done when trying to calculate $0{,}01 \cdot 5$. When comparing this example with the previous "change your point of view" example, it is noticeable that whereas the calculation of the surface area is done by presenting two different approaches that solve the problem, the calculation of the decimal number and the whole number is solved by only one approach. The latter is, although more concealed, closer to the common description of the heuristic, meaning that it usually takes effect when a previous approach is no longer effective. This heuristic is in its nature problematic for textbooks due to their written form and impracticality of first presenting an unworkable approach before a suitable approach. Within the context of mathematics textbooks in school both examples, Gulbrandsen et al., (2007, p. 38) and Hage et al. (2006, p. 28), are possible for teacher and pupils to recognize, appreciate and mimic, but the former is probably


Døme

Kor mykje er $0{,}1 \cdot 5$?

$0{,}1 \cdot 5 = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{5}{10} = 0{,}5$

Kor mykje er $0{,}01 \cdot 5$?

$0{,}01 \cdot 5 = \frac{1}{100} \cdot 5 = \frac{5}{100} = 0{,}05$

EXAMPLE

How much is $0{,}1 \cdot 5$?

$0{,}1 \cdot 5 = \frac{1}{10} \cdot 5 = \frac{5}{10} = 0{,}5$

How much is $0{,}01 \cdot 5$?

$0{,}01 \cdot 5 = \frac{1}{100} \cdot 5 = \frac{5}{100} = 0{,}05$

Figure 12. *Change of form of representation (Hage et al., 2006, p. 28, author's translation)*

easier to recognize as an actual change of view, although different from the common problem solving view of the heuristic.

Many examples in the textbooks have been coded with more than one approach. Based on the distribution of single approaches, is it not surprising to find that ”solve part of the problem” combined with ”make a visualisation” and ”solve part of the problem” combined with ”change your point of you” are the two most common combinations of two approaches. The diagram in figure 13 motivates a few comments. In the same way as it was necessary to dig into concrete examples of single approaches to get a more informative and balanced impression, this is also the case for the combinations of two approaches. The concrete examples found in the textbooks of the most occurring combinations are to a large extent consistent with the findings for single approaches. This means that several combinations of approaches such as ”solve part of the problem” and ”make a visualisation” just include intermediate steps and visualisations that are part of the problem statement. Several combinations of ”solve part of the problem” and ”change your point of view” just include intermediate steps and a change of form of representation. The actual content in both combinations are quite unorthodox in relation to traditional mathematical problem solving. However, my findings show that such combinations occur several times in the textbooks. In figure 14 is an example representing the obvious possibilities textbook authors have to present a more traditional content of heuristic approaches. In the first approach, coded as dealing with ”make a systematic table”, the problem

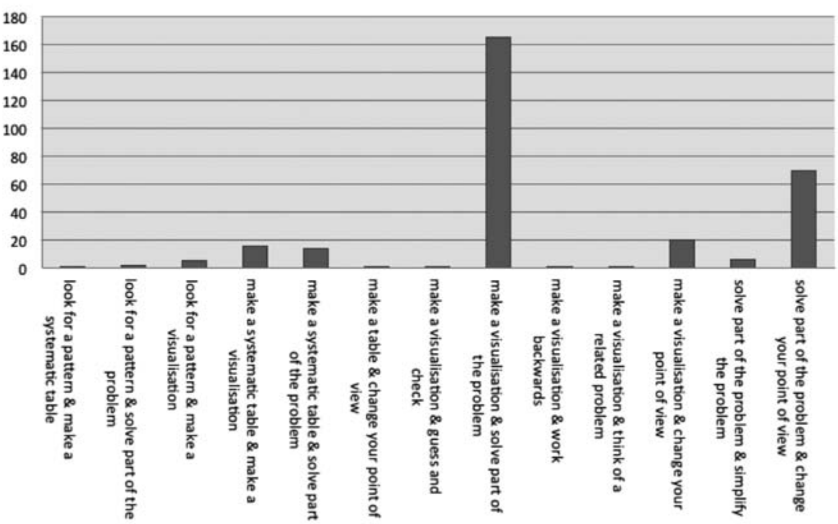
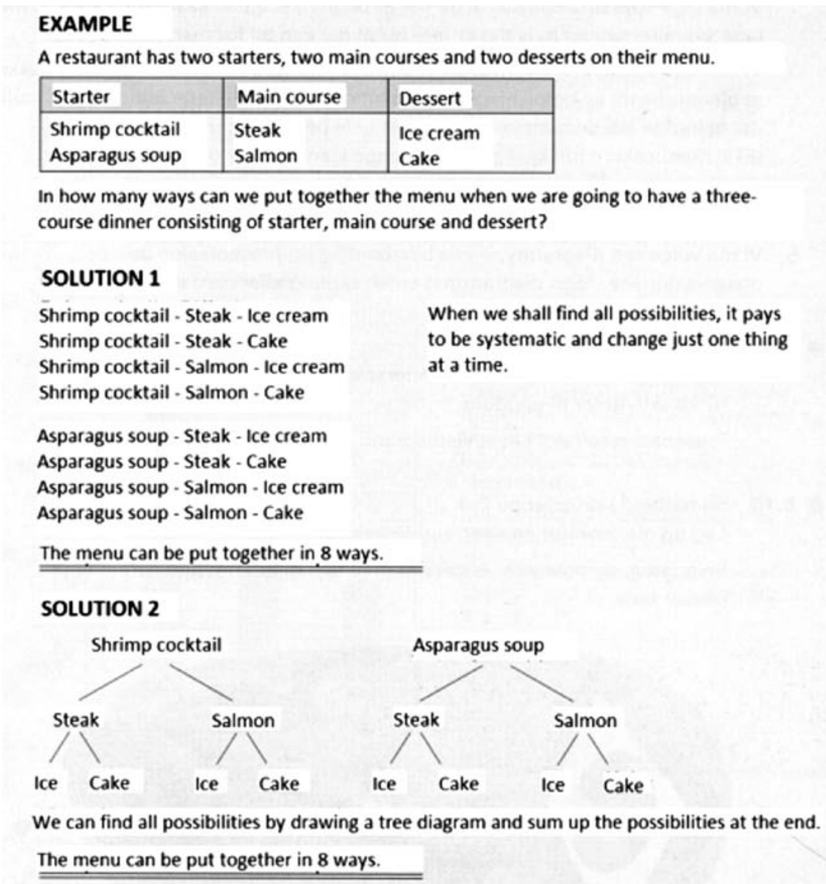


Figure 13. *Bar diagram of combinations of two approaches*

is solved by constructing an organised table containing all the possibilities for the given situation. In the second approach, coded as dealing with "make a visualisation", the creation of the tree diagram is the visualisation that helps to solve the problem. This well-presented example is distinguishing between the only two specific approaches found in the currculum (UFD, 2005a) by calling them respectively solution 1 and 2. The example also includes a description of the two approaches thus making relatively clear both the content of the approaches and the differences between them. In order to make the clarification even more visible the approaches could have been labelled with more informative names such as "make a systematic list" and "visualisation by tree diagram", and



EXAMPLE

A restaurant has two starters, two main courses and two desserts on their menu.

Starter	Main course	Dessert
Shrimp cocktail Asparagus soup	Steak Salmon	Ice cream Cake

In how many ways can we put together the menu when we are going to have a three-course dinner consisting of starter, main course and dessert?

SOLUTION 1

Shrimp cocktail - Steak - Ice cream
Shrimp cocktail - Steak - Cake
Shrimp cocktail - Salmon - Ice cream
Shrimp cocktail - Salmon - Cake

Asparagus soup - Steak - Ice cream
Asparagus soup - Steak - Cake
Asparagus soup - Salmon - Ice cream
Asparagus soup - Salmon - Cake

When we shall find all possibilities, it pays to be systematic and change just one thing at a time.

The menu can be put together in 8 ways.

SOLUTION 2

We can find all possibilities by drawing a tree diagram and sum up the possibilities at the end.

The menu can be put together in 8 ways.

Figure 14. *Combination of approaches (Bakke & Bakke, 2007, p. 270, author's translation)*

thus more in line with the "bar modelling" example presented from the Singaporean textbook (Fan & Zhu, 2007b, p. 496).

Examples in textbooks are to a large extent designed for the teachers' instructional purposes (Love & Pimm, 1996), and by explicitly labelling the approaches teachers and pupils would have greater opportunities to create a common professional language for use in the mathematics classroom (Grevholm, 2004). Being well aware of the danger of reducing problem solving as art to problem solving as skill (Stanic & Kilpatrick, 1989, p. 16) the example from Grunntall (Bakke & Bakke, 2007, p. 270) reveals the potential textbooks have to deal with heuristic approaches explicitly, thus creating better possibilities for teachers to teach and pupils to learn heuristic approaches by imitation and practice in the spirit of Polya. By increasing the numbers of examples like this it would probably be easier for teachers to fulfil Grønmo and Ostad's (2009) call for more discussion and argumentation about problem solving and strategies.

During the analysis of the textbooks an approach which was not listed among the nine emerged. This approach is natural to call "use of ICT" and is exemplified in total 20 times. A typical example of this approach uses a spreadsheet on the computer to solve the problem. In the curriculum the content of such an approach is found in the description of the basic skills concerning the ability to "use and assess digital aids for problem solving". (UFD, 2005b, p. 4).

Summary of findings and reflections

The three most common heuristic approaches in all the textbooks analysed are "solve part of the problem", "make a visualisation" and "change your point of view". Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2007a, 2007b) with its 354 approaches distributed among 214 examples stands out in respect to both the total number of approaches and examples. In addition Sirkel (ibid.) together with Tetra (Hagen et al., 2006) cover eight out of the nine approaches recognised in the study. Especially well-known approaches such as "look for a pattern" and "guess and check" are surprisingly rarely exemplified in all textbooks analysed. When analysing the heuristic approaches in more detail different sub-categories emerged which to a large degree could explain the number of displayed approaches. In order to get more detailed information about the variants within the nine analysed approaches, each of them could be further investigated in relation to possible sub-categories. But even though the total numbers of examples and approaches vary a lot between the textbooks the overall impression of their relative distribution are highly alike. Many examples displayed two approaches, and the most common combinations of two heuristic approaches were not surprisingly a result of the most often occurring individual approaches. Grunntall (Bakke & Bakke, 2007) is the only textbook with a reference to a list of explicitly labelled heuristic approaches. The obvious possibilities for presenting different heuristic approaches in a single problem are exemplified by the above exposed combinatorics problem about putting together menus from Grunntall (ibid., p. 270).

My overall impression of the role of heuristic approaches is that the majority of approaches seems not to be consciously presented but rather as a consequence of an unconscious cultural practice. Zhu (2003) found that that there is a substantial degree of homogeneity among approaches presented by textbook authors. Fan and Zhu's (2007a) international comparative study showed that "draw a diagram", "use an equation", "restate the problem" and "make a table" were the most common approaches in the textbooks from China, Singapore and USA.

By using Wyndhamn and Säljö's (1997, p. 363) interactionist perspective – "What people do and what they learn reflect as much contextual premises and constraints, such as those represented by formal schooling as an environment for communication, as characteristics of individuals" – as a backdrop it is possible to argue that the characteristics of the examples and the attention to the approaches, or rather the lack of attention to the approaches, found in the textbooks constrain the activities that pupils and teachers take part in, and thus influence the process of defining mathematics, problem solving and heuristic approaches. The interactionist perspective includes attempts to account for pupils and teachers taking part in certain activities and not in others. Thus contextual constraints such as limited treatment by textbook authors of what the heuristic approaches are about and how to use them, the possibility of pupils and teachers taking part in discussion and argumentation regarding such approaches decreases significantly. This means that if the textbooks do not treat heuristic approaches in an explicit and systematic manner one cannot expect teachers to teach and pupils to learn it either, thus exacerbating Schoenfeld's (1985) issue of heuristic approaches becoming part of a strategy for solving problems over time. Lester (1996) states that for the pupils who are struggling to become better problem solvers the complexity of problem solving itself is reinforced by the fact that most of them do not get the proper teaching in respect to either quality or quantity. In Lester's (ibid.) literature review of problem solving four significant and general principles are found. The first principle is that pupils have to solve a lot of problems. The second is that problem solving ability develops slowly over time. In consequence textbook authors should consider this when designing a textbook and choosing how to present problem solving ingredients like heuristic approaches. The third, and according to Lester (ibid.) the most important, is that in order to get pupils to respond to the teaching they have to believe that their teacher thinks problem solving is important. This principle together with my findings indicates potentially consequences for teacher educators, curriculum developers, authors of textbooks and teachers. The fourth is that most pupils benefit by systematic teaching in problem solving, which also provides guidelines for textbook authors and teachers of mathematics. Lester's principles (ibid.) and the textbook practice in Norway (Schmidt et al., 1996; Alseth et al., 2003, Utdanningsdirektoratet, 2005) together with my findings suggest a rather problematic picture of heuristic approaches in particular and problem solving in general in lower secondary school in Norway. By taking into account Schoenfeld's (1985) chain of thought, the criticism of Polya's (1945) descriptive heuristics, Grønmo and Ostad's (2009) call for more discussion and argumentation and Lester's (1996) programme for how to teach problem solving, this highlights the importance of an explicit, prescriptive, systematic presentation of heuristic approaches in textbooks over time.

Conclusion

Despite the large number of examples being solved by one or more heuristic approaches, the characteristics of the examples and the textbooks' lack of attention to the approaches themselves make it challenging to teach and learn these within the Norwegian culture of school mathematics. The heuristic approaches seem to be used rather incidentally. Typically the textbook does not label the heuristic approaches and does not present any guidance of how and when to use them. The fact that none of the textbooks explicitly treat or mention problem solving to a large extent shows the invisibility of mathematical problem solving in the traditional sense.

The study has added new knowledge about what characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary school in Norway. It has also demonstrated how textbooks actually could contribute to the teaching and learning of heuristic approaches by offering carefully designed examples in the textbook, such as the combinatorics problem in grunntall (Bakke & Bakke, 2007, p. 270). Niss (2003) claims that if we really want pupils to learn something this has to be taught explicitly to them. Here we find that it depends on the teachers if a variety of heuristic approaches will be taught, because the textbooks do not care to be explicit.

Many well-known approaches are almost totally absent. Approaches such as "look for a pattern", "guess and check", "work backwards", "thinking of a related problem" and "simplify the problem" seem to be something every pupil has the right to know something about and to have experienced in mathematics class. It is doubtful if the authors of the investigated textbooks share the view that pupils have the need to explicitly and systematically learn about heuristic approaches. There is a lot of potential for improving mathematics textbooks in lower secondary school in Norway concerning heuristics approaches.

References

Alseth, B. (1995). Undervisning i problemløsningsstrategier (Teaching problem solving strategies). *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3 (3), 7–26.

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus.* (Changes and development for R97 as background for further planning and adjustment – the mathematics subject as case). Notodden: Telemarksforsking.

Apple, M. (1992). The text and cultural politics, *Educational Researcher,* 21 (7), 4–11.

Bierhoff, H. (1996). Making the foundations of numeracy: a comparison of primary school textbooks in Britain, Germany and Switzerland. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15 (4), 141–160.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. (Mathematical problem solving). In B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (pp. 51–70). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Eds.), *Applications and modelling in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 45–56). New York, USA: Springer.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact* (PhD thesis). Umeå University.

Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 2 (2), 6-35.

Branca, N. (1980). Problem solving as a goal, process and basic skill. In S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics 1980 Yearbook,* (pp. 3–8). Reston: NCTM.

Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty* (Licentiate Thesis). Luleå University of Technology.

Bryman, A. (2008). *Social research methods* (Third edition). Oxford University Press.
Chávez, O. (2003). *From the textbook to the enacted curriculum: textbook use in the middle school mathematics classroom* (Unpublished doctoral theses). University of Missouri, Colombia.
Charles, R. & Lester, F. K. (1984). An evaluation of a process-oriented mathematical problem-solving instructional program in grades five and seven. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 15–34.
Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research methods in educati*on (Seventh Edition). London: Routledge.
Danielsen, I. J., Skaar, K. & Skaalvik, E. M. (2007). *De viktige få: analyse av elevundersøkelsen 2007.* (The important few: analysis of the pupil survey 2007). Kristiansand: Oxford Research.
Doyle, W. (1988) Work in mathematics classes: the content of student thinking during instruction, *Educational Psychologist*, 23 (2), 167–180.
Ernest, P. (1998). Mathematical knowledge and context. In A. Watson (Ed.), *Situated cognition and the learning of mathematics* (pp. 13–31). Oxford: Centre for Mathematics Education Research.
Fan, L. & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbook on teaching strategies: an empirical study. *Mid-Western Educational Researcher*, 13 (4), 2–9.
Fan, L. & Zhu, Y. (2000). Problem solving in Singaporean secondary mathematics textbooks. *The Mathematics Educator*, 5 (1–2), 117–141.
Fan, L. & Zhu, Y. (2007a). Representation of problem-solving procedures: a comparative look at China, Singapore and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 61–75.
Fan, L. & Zhu, Y. (2007b). From convergence to divergence: the development of mathematical problem solving in research, curriculum, and classroom practice in Singapore. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39 (5–6), 491–501.
Freeman, D. J. & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26 (3), 403–421.
Garner, R. (1992). Learning from school texts. *Educational Psychologist*, 27, 53–63.
Grevholm, B. (2004). Mathematics worth knowing for a prospective teacher. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, et al. (Eds.). *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 519–536). Gothenburg: National Centre for Mathematics Education.
Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli M., Lie S. & Turmo A. (2003). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003.* (What on earth is going on in science? Norwegian pupils' performance in mathematics and science in TIMSS). Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitet i Oslo.

Grønmo, L. S. & Ostad, T. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007* (Signs of improvement. Norwegian pupils' performance in mathematics and science). Oslo: Unipub.

Hatfield, L. L. (1978). Heuristic emphases in the instruction of mathematical problem solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop*, (pp. 21–42). Columbus: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Hensey, L. K. (1996). *An examination of elementary mathematics textbooks problem-solving items during the nineties, and possible influence on the NCTM standards on such items* (Doctoral dissertation). University of Iowa.

Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: a meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23 (3), 242–273.

Johansson, M. (2005). The mathematics textbook. From artefact to instrument. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 10 (3–4), 43–64.

Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments. Three teachers' way to organize their mathematics lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 11 (3), 5–30.

Jakobsson-Åhl, T. (2008). Word problems in upper secondary algebra in Sweden over the years 1960–2000. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13 (1), 7–28.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 163–180.

Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. In E. Fennema (Ed.), *Mathematics education research: implications for the 80's* (pp. 111–126). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: an exploratory study* (Unpublished doctoral dissertation, Stanford University). Dissertation Abstracts International, 28, 4308A. (Eric, ED027182)

KUF. (1987). *Mønsterplanen for grunnskolen*. Oslo: Aschehoug.

KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research 1970–1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 660–675.

Lester, F. K. (1996). Problemlösningens natur (The nature of problem solving). In G. Emanuelsson, K. Wallby, B. Johansson & R. Ryding (Eds.), *Nämnaren Tema Matematik – ett kommunikationsämne* (pp. 85–91). Göteborg: Kompendiet

Lester, F. K. & Lambdin, D. V. (2004). Teaching mathematics through problem solving. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 189–203). NCM, Göteborg University.

Li, Y. (1999). *An analysis of algebra content, content organization and presentation, and to-be-solved problems in eight-grade mathematics textbooks from Hong Kong, Mainland China, Singapore, and the United States* (Doctoral Dissertation). University of Pittsburgh.

Love, E. & Pimm, D. (1996). "This is so": a text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 371–409). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lucas, J. (1974). The teaching of heuristics problem-solving strategies in elementary calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 36–46.

Mason, J & Davis, J. (1991). *Fostering and sustaining mathematics thinking through problem solving*. Geelong: Deakin University.

Mayer, R. E., Sims, V. & Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal*, 32 (20), 443–460.

MOE. (2007). *Secondary mathematics syllabus*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division. Retrieved January 10, 2011 from http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-secondary.pdf

Ng, L. E. (2002). *Representation of problem solving in Singaporean primary mathematics textbooks with respect to types, Polya's model and heuristics* (Unpublished master's thesis). Singapore: National Institute of Education.

Nibbelink, W. H., Stockdale, S. R., Hoover, H. D. & Mangru, M. (1987). Problem solving in the elementary grades: textbook practice and achievement trends over the past thirty years. *Arithmetic Teacher*, 35 (1), 34–37.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriets forlag. Retrieved January 10, 2010 from http://pub.uvm.dk/2002/kom/

Niss, M. (2003). Den matematikkdidaktiske forskningens karakter og natur. (Aspects of the nature and the state of research in mathematics education). In B. Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (pp. 335–364). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Pehkonen, E. (1995). On pupils' reactions to the use of open-ended problems in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3 (4), 43–57.

Pehkonen, E. (2007). *Problem solving in mathematics education in Finland*. Retrieved May 15, 2009 from http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG2/Papers/PEHKON.pdf

Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33 (5), 158–175.

Pepin, B. & Haggarty, L. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28 (4), 567–590.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Reys, B. J., Reys, R. R. & Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61 (5), 61–66.

Robitaille, D. F. & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics education* (pp. 687–709). New York: Macmillan.

Röj-Lindberg, A-S. (1999). *Läromedel och undervisning i matematik på högstadiet. En kartläggning av läget i Svenskfinland*. (Textbooks and mathematics teaching at junior secondary level. A survey of the situation in Swedish Finland).Vasa: Svenskfinlands läromedelscenter.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145–166.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Schmidt, W. H., McKnight C. C., Valverde G. A., Houang R. I. & Wiley D. E (1996). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. London: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E. et al. (2001). *Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey–Bass.

Schroeder, T. & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Trafton & A. Schulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31–42). Reston: NCTM.

Skolverket. (2003). *Nationella kvalitetsgranskningar 2001–2002. Lusten att lära – med fokus på matematik*, 221. (National quality study 2001–2002. The desire to learn – with focus on mathematics). Stockholm: Skolverket.

Smith, J. P. (1973). *The effect of general versus specific heuristics in mathematical problem solving tasks* (PhD Dissertation, Columbia University). Dissertation abstracts international, 34, 2400A.

Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behaviour*, 24, 341–350.

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). Reston: NCTM.

Stiff, L. V. (1988). Problem solving by example. *School Science and Mathematics*, 88 (8), 666–675.

Stockdale, S. R. (1991). A study of the frequency of selected cue words in elementary textbook word problems. *School Science and Mathematics*, 91 (1), 15–21.

Törnroos, J. (2001). Mathematics textbooks and students' achievement in the 7th grade: What is the effect of using different textbooks? In J. Novotna (Ed.), *European Research in Mathematics Education II* (pp. 516–525). Prague: Faculty of Education, Charles University.

UFD. (2005a). *Kunnskapsløftet* [Knowledge Promotion]. Retrieved August 1, 2010 from http://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/Grunnskole_og_gjennomgaende/matematikk_010810.rtf

UFD. (2005b). *Kunnskapsløftet* [Knowledge Promotion]. Retrieved August 1, 2010 from http://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/english/Mathematics_subject_curriculum.doc

Utdanningsdirektoratet (2005). *Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis.* Retrieved January 7, 2007 from http://www.skolenettet.no/moduler/templates/Module_Article.aspx?id=37694&epslanguage=NO

Wilson, J. (1967). *Generality of heuristics as an instructional variable* (Doctoral Dissertation, Stanford University). Dissertation abstracts international, 28, 2575A.

Wyndhamn, J. & Säljö, R. (1997). Word problems and mathematical reasoning – a study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, 7 (4), 361–382.

Zhu, Y. (2003). *Problem solving in China, Singapore and US mathematics textbooks: A comparative study* (Unpublished doctoral dissertation). Singapore: National Institute of Education.

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4 (4), 609–626.

Appendix

Textbooks

Bakke, B. & Bakke, I. H. (2006). *Grunntall 8. Matematikk for ungdomstrinnet.* Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.
Bakke, B. & Bakke, I. H. (2007). *Grunntall 9. Matematikk for ungdomstrinnet*. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.
Christensen, A. S. (2007a). *Kode X 9A. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Forlaget fag og kultur.
Christensen, A. S. (2007b). *Kode X 9B. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Forlaget fag og kultur.
Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2007a). *Nye Mega 9A. Matematikk for ungdomsstrinnet.* Oslo: N. W. Damm & Søn.
Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2007b). *Nye Mega 9B. Matematikk for ungdomsstrinnet.* Oslo: N. W. Damm & Søn.
Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K.B. & Öberg, B. (2006). *Tetra 9. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: Det norske samlaget.
Hjardar, E. & Pedersen, J-E. (2006). *Faktor 2. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Cappelen.
Torkildsen, S. H. & Maugesten. M. (2007a). Sirkel 9A. *Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: H. Aschehoug & Co.
Torkildsen, S. H. & Maugesten. M. (2007b). Sirkel 9B. *Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet.* Oslo: H. Aschehoug & Co.

Tom Rune Kongelf

Tom Rune Kongelf is a Ph. D. student in the doctoral program at University of Agder in Kristiansand and works as lecturer at Sogn og Fjordane University College in Sogndal. His main research interests concerns textbooks in mathematics in lower secondary school, with an emphasis on heuristic approaches, algebra and tasks.

tom.rune.kongelf@hisf.no

Artikkel 2

Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge

TOM RUNE KONGELF

I denne artikkelen presenterer vi funnene fra en analyse av introduksjonskapitlet i algebra i seks ulike lærebøker. Introduksjonen til bokstaver som symbol for variable størrelser varierer med hensyn til klassetrinn, mengde og kontekst. Gjennom en induktiv kvalitativ innholdsanalyse karakteriserer vi mangelfulle sider ved kapitlene. Hovedfunnene er at variabelaspektet ikke kommer tydelig frem, og at en i liten grad benytter mulighetene til å bygge videre på tallære. I tillegg inneholder lærebøkene feilaktige formuleringer, illustrasjoner og matematiske resonnement, som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger.

Med lærebok mener vi den tradisjonelle fysiske klassetrinns-spesifikke boken som brukes til undervisning og læring av matematikk i skolen. Internasjonalt har lærebøker fått økt oppmerksomhet de siste tiårene, og i matematikk kan det eksemplifiseres ved TIMSS' analyse av 318 lærebøker fra nesten 50 land i 1995. Lærebøker i matematikk spiller en viktig rolle over alt i verden, men i følge Schmidt m. fl. (1996) spiller den en ekstra viktig rolle i Norge. Alseth, Breiteig og Brekkes (2003) gjennomgang av L97 (KUF, 1996) og en rapport fra Utdanningsdirektoratet (2005) om læremidler i Norge støtter i stor grad Schmidt m. fl. (1996). Lærebokens rolle er alene verdt en analyse, men hvis vi legger til muligheten for selv den minste forbedring og multipliserer det med antall elever, lærere og foreldre som bruker dem, indikerer det et stort forbedringspotensial totalt.

Læreboken er ofte primærkilden til matematikklæreren, i tillegg til legitimerende og styrende for innholdet og progresjonen i undervisningen (Freeman & Porter, 1989; Robitaille & Travers, 1992; Bierhoff, 1996; Röj-Lindberg, 1999; Fan & Kaeley, 2000; Schmidt m. fl., 2001; Pepin &

Tom Rune Kongelf
Universitetet i Agder og Høgskulen i Sogn og Fjordane

Kongelf , T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3-4), 83–109.

Haggerty, 2001, 2002; Johansson, 2006). Reys, Reys og Chávez (2004, s. 1, vår oversetting) beskriver det som at "valget av lærebok bestemmer ofte hva lærerne vil undervise i, hvordan de vil undervise, og hvordan elevene deres vil lære". Schoenfeld (1988) hevder at selv om god undervisning kan kompensere for eventuelle svakheter i lærebøkene, er det mye som tyder på at dette ikke er tilfelle. Chávez-López (2003) hevder at antall sider innenfor hvert emne er bestemmende for hvor mye tid læreren bruker på stoffet og for elevenes prestasjoner. Læreboken har også en funksjon som oversetter av matematikk for elevene, lærerne og foreldrene. I tillegg spiller den en viktig rolle i implementeringen av læreplanen, som i enkelte tilfeller kan avvike betraktelig fra den intenderte planen (Goodlad m. fl., 1979; Schmidt m. fl., 2001).

Sammenlignet med det internasjonale gjennomsnittet utgjør undervisningen hvor læreren forklarer til hele klassen en forholdsvis liten del i Norge. Norske elever arbeider derimot mye alene med oppgaver i lærebøkene og forklarer svarene sine lite (Grønmo, Bergem, Kjærnsli, Lie & Turnmo 2003; Danielsen, Skaar & Skaalevik, 2007; Grønmo & Onstad, 2009). Utdanningsdirektoratet (2005, s. 23) understreker lærebøkenes viktige rolle når den påstår at "[...] hvis det generelt ønskes forandringer i norsk skole, må også lærebøkene forandres". Pehkonen (1995) hevder at undervisningen kan bli påvirket av nye lærebøker, noe som var tilfelle i Finland på 1980-tallet.

Frem til og med år 2000 hadde Norge et eget senter for læremiddel, Nasjonalt læremiddelsenter, med autorisasjon til å godkjenne lærebøker. I dag har Norge et nasjonalt senter for matematikk, Matematikksenteret, uten en slik autorisasjon. I teorien betyr det at hvem som helst kan skrive og publisere en lærebok for skolen. Siden nedleggelsen av Nasjonalt læremiddelsenter har det vært lite forskning på grunnskolebøker i matematikk i Norge, bortsett fra Alseth m. fl. (2003) og Kongelf (2011). Ved å sammenligne formuleringene i læreplanene M87 (KUF, 1987) og L97 (KUF, 1996) identifiserte Alseth m. fl. (2003) fem gjennomgripende punkt. Studien bestod av en innholdsanalyse og en oppgaveanalyse, hvor begge tydet på det samme. Endringene i forhold til punktene ble funnet i geometri, men ikke i algebra, og med det tydet på at lærebokforfatterne bare delvis hadde klart å implementere det nye. I forlengelsen av studien til Alseth m. fl. (ibid.) er forskningsspørsmålet vårt

> hva er karakteristisk for introduksjonskapitlene i algebra i seks lærebøker for ungdomstrinnet i Norge?

I studien er introduksjonskapitlene i algebra definert til å være kapitlene i de seks respektive læreverkene som introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser for første gang.

Hva er algebra?

På grunn av ulike tolkinger og vektinger av algebraens historie er det ikke mulig å enes om en felles definisjon av algebra. Hva som kan sies å være essensen, kan vi allikevel få et inntrykk av om vi ser på historiske beskrivelser av algebra (Lins, 1990; Kieran, 1996, 2004; Jakobsson-Åhl, 2006). En mulighet er å firedele algebraen i operasjonell symbolisme, tenkemåte, generalisert tallære og strukturer. Algebra som operasjonell symbolisme handler blant annet om at vi har brukt symbol på ulike måter opp gjennom tiden, hvor vi finner den klassiske tredelingen av representasjonsformen som retorisk, synkopert og symbolsk. Kieran (1990) er en av dem som mener at en del kognitive prosesser som er involvert i læringen av algebra har paralleller til den historiske utviklingen av algebra som et symbolsystem. Denne formen for det genetiske prinsippet (Mosvold, 2001) finner vi tydeligere i L97 (KUF, 1997) og LK06 (UFD, 2005) enn i M87 (KUF, 1987).

Det er ikke noen uttalt enighet hva algebraisk tenkemåte er, men forskere som Charbonneau (1996), Kieran (1996, 2007) og Lee (2001) drøfter dette. En av de viktigste sidene ved algebraisk tenking er betydningen av generalisering. Mason (1996) mener at dersom elevene blir vant med å generalisere fra starten av, vil algebra opphøre å være et problem. Generalisering er blant annet det å oppdage likheter, å repetere, å klassifisere og å kategorisere. Slike aktiviteter kan sees på som en måte å minimere oppmerksomheten på, og som Mason (1996) mener er selve røttene til algebra.

Algebra som generalisert tallære er trolig det synet som dominerer i læring og undervisning av elementær algebra i dag (Lee, 2001). Wu (2001) uttrykker at generalisert tallære handler om to ting, abstraksjon og generalisering. I følge Sfard og Linchevski (1994) kan den elementære algebraen bli beskrevet som generalisert tallære i henhold til en operasjonell og strukturell dualitet. De skiller mellom en operasjonell og strukturell oppfatning og mener at algebraen utvikler seg gjennom en rekke mer og mer avanserte overganger fra operasjonell til strukturell oppfatning. Det vil si at uttrykk som i tallæren blir oppfattet som en prosedyre, kan bli oppfattet som et objekt i algebraen, som igjen kan bli del av en større prosedyre og dermed bli oppfattet som et nytt og større objekt (Bjørnestad, Kongelf & Myklebust, 2013). Sitatet fra læreplanen om at "algebra i skolen generaliserer talrekning ved at bokstavar og andre symbol representerer tal" (UFD, 2005, s. 3) gjør at vi forventer algebra som generalisert tallære i lærebøkene.

Det fjerde synet på algebra er som strukturer. Her tar vi utgangspunkt i strukturelle likheter, ikke bare generaliseringer fra de kjente tallstrukturene, men også avbildninger knytt til funksjonsbegrepet. En algebraisk struktur er en mengde med tilhørende binære operasjoner.

Denne formen for algebra blir ofte kalt abstrakt algebra, og er ikke vanlig å møte før på universitetsnivå.

Hva er algebra i læreplanen?

På samme måte som det er problematisk å enes om en definisjon på algebra, er det heller ingen enighet om hva algebra er i skolen. Kendal og Stacey (2004) uttrykker at det ikke eksisterer kun en måte å undervise og nærme seg algebraen på, og at det ikke er mulig å lage en liste over innhold som beskriver skolealgebraen. De konkluderer med at algebra er for stort til å passe i læreplanen, slik at det er helt nødvendig for hvert land å velge ut hvilket innhold emnet skal ha. Oppfattelsen av algebra i skolen har variert både over tid og i læreplaner (Sutherland, 2002; Kendal og Stacey, 2004), som kan eksemplifiseres ved Jakobsson-Åhls (2006) beskrivelse av skolealgebraen i Sverige fra 1960 til 2000. Skolealgebraen har blitt beskrevet som et eget emne, som en del av den moderne matematikken, som et verktøy i problemløsning og som en kompetanse. Algebra ble behandlet som et eget emne i skolen fra første halvdel av 1900-tallet, hvor innholdet stort sett var det samme og preget av formell manipulasjon (Donoghue, 2003). Etter andre verdenskrig ble matematikken modernisert og sett på som vitenskapen om formelle strukturer, hvor mengdelæren sammen med funksjoner og algebraiske strukturer stod sentralt. På 1960- og 1970-tallet var tiden inne for å fokusere mer på anvendt matematikk. Algebraen fikk da plass som verktøy i problemløsning. I dag finner vi eksempel på algebra uttrykt som en kompetanse (Crawford, 2001; Niss & Jensen, 2002; MacGregor, 2004; Kieran, 2004). Slike kompetansebeskrivelser finner vi også i den norske læreplanen ved at "Problemløysing høyrer med til den matematiske kompetansen" (UFD, 2005, s. 2), hvor vi kjenner igjen én av Niss & Jensens (2002) åtte delkompetanser.

De fire synene på skolealgebraen bør ikke betraktes som motsetningsfylte, men heller som komplementære. I LK06 (UFD, 2005) finner vi synene igjen i algebraens ulike roller. De fem hovedområdene på ungdomstrinnet er alle klassiske matematiske emner som spiller roller som egne emner, hvor algebra er satt i sammenheng med tall. At algebra også kan sees på som et verktøy i problemløsning finner vi eksemplifisert i kompetansemålet "[...] bruke [...] tal og variablar i [...] praktisk og teoretisk problemløysing [...]" (UFD, 2005, s. 8). Algebra som en kompetanse finner vi ikke direkte belegg for i læreplanen, men siden problemløsning er en del av den matematiske kompetansen, og problemløsning er et kompetansemål i algebra, er det mulig å se spor av algebra som kompetanse også. Det vil si at vi finner spor av tre av de fire synene i læreplanen.

Algebraens store virkeområde og ulike roller (Costello, 1991; Bell, 1995) får naturligvis konsekvenser for forfatternes prioriteringer, elevenes læring og lærernes undervisning. Wheeler (1996) uttrykker det slik:

> [...] we want students of algebra to come to know how to use it to solve problems, to model situations, to handle functions, and to make generalizations. Choosing one of these as a starting point affects how the others can be reached. (Wheeler, 1996, s. 325)

Sitatet setter en ramme for studien vår når vi skal karakterisere introduksjonskapitlene i algebra. Læreplanen har satt algebra sammen med tall, og uttrykker at "Algebra i skulen generaliserer talrekning ved at bokstavar eller andre symbol representerer tal. Det gjev høve til å beskrive og analysere mønster og samanhengar. Algebra blir og nytta i samband me hovudområda geometri og funksjonar" (UFD, 2005, s. 3). Dette tolker vi som at en skal ta utgangspunkt i tallære og introdusere algebra gjennom å studere mønster og tallmessige sammenhenger. Algebramanipulasjon kommer da etter at en har arbeidet med å skape mening til bokstavene, gjennom for eksempel mønsteroppgaver. Det er denne tolkingen vi har av læreplanen.

En annen tolking er at en skal introdusere algebra som regning med bokstaver på lik linje som regning med tall. Arbeidet med algebramanipulasjon kan da komme før en har arbeidet med mønster. Disse to tolkningsmulighetene er radikalt ulike i den betydningen av at førstnevnte legger forholdene til rette for en induktiv tilnærming hvor behovet for bokstaver kommer som en naturlig konsekvens av ønsket om å uttrykke seg generelt. Bokstavene blir da først og fremst introdusert som symbol for noe som varierer. Vi kan si at det er selve variabelaspektet i variabelbegrepet som er i fokus. Velger en å introdusere variabelbegrepet gjennom algebramanipulasjon, er det ikke like naturlig å fokusere på variabelaspektet fordi en er mest opptatt av å manipulere uttrykk. Den siste setningen i sitatet gjør at vi ikke forventer at lærebøkene bruker funksjoner som inngangsport til algebra, til tross for at det ble gjort i Norge med M87 (KUF, 1987), og fortsatt gjøres i en rekke land i dag (Kieran, 2007). Det at bokstavenes roller er kontekstavhengig, som uavhengige og avhengige variable i funksjonssammenheng, $y = 2x + 6$, som ukjente i likninger, $2x + 6 = 0$, og som generaliserte tall i generaliseringer, $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$, gjør det nødvendig med en tydelig introduksjon til bokstaver som symbol for variable størrelser. Algebra ble i L97 (KUF, 1996, s. 156) beskrevet som et tema som "[...] krever spesiell oppmerksomhet fordi det i noen grad bryter med tidligere tenkemåter". Sitatet omhandler diskontinuiteter mellom tallære og algebra (Bjørnestad, Kongelf & Myklebust, 2013), og inneholder blant annet Küchemanns (1981) kategorier for elevers oppfatning av bokstaver, inklusiv misoppfatningen om bokstav som objekt. Elever som har denne misoppfatningen, kan tenke at *a* står for objektet appelsin, og med det kunne argumentere for at $2a + 3a = 5a$ fordi 2 appelsiner og 3 appelsiner er det samme som 5 appelsiner. Innholdet i sitatet fra L97 (KUF, 1996) er like aktuelt for dagens læreplan (UFD, 2005).

Metodologi

Metode

Studien er basert på en induktiv kvalitativ innholdsanalyse, "[...] a research method for the subjective interpretation of the content of text data through the systematic classification process of coding and identifying themes or patterns" (Hsieh & Shannon, 2005, s. 1278). Gjennom meningssøkende og tolkende undersøkelser har den kvalitative innholdsanalysen gitt oss muligheten til å karakterisere introduksjonskapitlene i algebra på en subjektiv, men vitenskapelig måte. Funnene er et produkt av våre ferdigheter, kunnskaper og analytiske evner. Vi har brukt en induktiv analyse fordi vi ikke kjente til tilsvarende studier. I analysen har de ulike kategoriene oppstått fra selve datamaterialet gjennom en rekke undersøkelser og sammenligninger. De fire hovedkategoriene er av generell karakter og basert på sammenfallende enkelttilfeller i de ulike lærebøkene.

Innholdsanalysen startet med at vi valgte ut de respektive kapitlene, som introduserte bokstaver som symbol for variable størrelser for første gang, som analyseenhet. Det var i algebrakapitlet i fire 8. klassebøker og i en 9. klassebok, og i funksjonskapitlet i en 8. klassebok. Det neste var å forstå datamaterialet. Etter flere og flere gjennomlesninger ble vi mer og mer fortrolige med materialet, og vi kunne starte med å organisere de kvalitative dataene. Gjennom en åpen koding hvor vi skrev ned egne kommentarer i margen for hver nye gjennomlesning, dannet vi et grunnlag for å kunne opprette mer generelle beskrivelser systematisert i kategorier. Vi overførte kommentarene, som stod i margen på lærebøkene, til Word-dokument. Disse dannet grunnlaget for den første genereringen av kategorier, som bestod av kommentarer med tilnærmet likt innhold. Vi leste deretter igjennom lærebøkene på ny med disse kategoriene som referanse for å kunne gruppere delkategorier som utgjorde en større felles kategori. Ved å gruppere datamaterialet på denne måten reduserte vi antall kategorier ved å samle observasjoner som var tilnærmet like, men like viktig var det at denne klassifiseringen innebar en kontinuerlig sammenligning mellom ulike deler av materialet som ikke hørte til samme kategori (Bryman, 2008). De endelige kategoriene som gjør oss i stand til å gi en karakteristikk av introduksjonskapitlene i algebra er:

1. Lager ikke forbindelser til tallære
   a) i utregninger
   b) om notasjoner
2. Tilrettelegger for utvikling av misoppfatninger gjennom
   a) regler
   b) kontekster og forklaringer
3. Variabelaspektet kommer ikke tydelig frem i
   a) kontekster
   b) forklaringer
4. Feil bruk av multiplikator og multiplikand i oversettinger mellom situasjoner beskrevet med tekst og matematiske symbol.

Når det gjelder den kvalitative innholdsanalysens gyldighet og pålitelighet, er førstnevnte gitt siden det vi skal analysere er deler av innholdet i de fysiske lærebøkene. For å vise påliteligheten vil vi presentere en rekke autentiske tekstutsnitt og beskrive analysen som ligger til grunn for kategoriseringen. Når det gjelder gyldighet knytt til innhold har vi brukt en erfaren matematikklærer og matematikkdidaktikker til å undersøke funnene i en tilfeldig valgt lærebok. Resultatet var i høy grad sammenfallende.

En utfordring ved kvalitative innholdsanalyser er at de er mer komplekse, og i langt mindre grad standardiserte og formulerte, enn tradisjonelle kvantitative innholdsanalyser (Elo & Kingsa, 2008). I tillegg har funnene ofte et format som ikke er like forenelig med plass og ordbegrensninger i vitenskapelige artikler. For å imøtekomme dette har vi vært selektive i presentasjonen av funnene. Vi har valgt å presentere de typiske funnene, kategoriene, i tabellform sammen med utvalgte autentiske eksempler. For å vise rikholdigheten i datamaterialet, har vi valgt å eksemplifisere enkelte ikke-typiske funn også.

Studien vår kan plasseres innenfor segmentet lærebok – matematikk i Rezat og Sträßers (2013, s. 471) didaktiske tetraeder, som beskriver metodologiske tilnærminger i matematikkdidaktikken. Studien kan videre plasseres innenfor et algebradidaktisk perspektiv.

Utvalg av lærebøker

Vi har tidligere gitt en karakteristikk av heuristiske tilnærmingsmåter i seks læreverk brukt på ungdomstrinnet i Norge (Kongelf, 2011). For å få et mer sammensatt bilde av disse, er de samme læreverkene valgt når vi nå skal gi en karakteristikk av introduksjonskapitlene i algebra. I læreverket Kode X (Christensen, 2007) er introduksjonen i 9. klasse, mens i de andre, Faktor (Hjardar & Pedersen, 2006), Nye Mega (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2006), Tetra (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006), Sirkel (Torkildsen & Maugesten, 2006) og Grunntall (Bakke & Bakke, 2006), er det i 8. klasse. Alle lærebøkene er skrevne av norske forfattere, bortsett fra Tetra som er en oversetting fra svensk.

Datainnsamling

Alle sidene i introduksjonskapitlene er analysert bortsett fra øvingsoppgavene. Det er kun én lærebok som benytter samme navn på kapitlet, *tall og algebra*, som læreplanen bruker på hovedområdet. Fire av seks introduserer bokstaver som variable størrelser gjennom et algebrakapittel, mens én gjør det gjennom et funksjonslærekapittel kalt sammenhenger. Antall sider i Kode X (Christensen, 2007) skiller seg ut, som i stor grad kan forklares ved at dette læreverket ikke har algebra i 8. klasseboken (se tabell 1).

Tabell 1. *Datamaterialet*

Lærebok	Kapittelnavn	Antall sider
Faktor 1	Tall og algebra	26
Kode X 9A	Algebra	114
Nye Mega 8B	Algebra	36
Tetra 8	Algebra	41
Sirkel 8B	Sammenhenger	54
Grunntall 8	Algebra	24

Funn og diskusjon

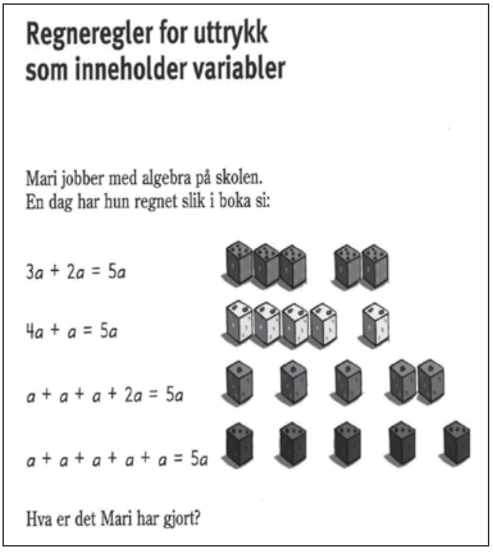
Ser vi på lærebøkene sammen med kategoriene, genererer det en informativ matrise av data (tabell 2). Matrisen viser blant annet at Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006) inneholder eksempler på alle kategoriene bortsett fra 1 a), som handler om at en ikke lager forbindelser til tallære i utregninger. Vi legger ellers merke til at 1 b), lager ikke forbindelser til tallære om notasjoner, og 3b), variabelaspektet kommer ikke tydelig frem i forklaringer, finnes i alle bøkene. For å få et mer innholdsrikt bilde av matrisen, ser vi på eksempler på de ulike kategoriene. Vi starter med et tekstutsnitt som først og fremst eksemplifiserer 1 a), men som også viser hvordan 2 b) og 2 a) kommer til uttrykk (se figur 1).

Tabell 2. *Matrise bestående av lærebøker og kategorier*

Kategori	Lærebok					
	Faktor 1	Kode X 9A	Nye Mega 8B	Tetra 8	Sirkel 8B	Grunntall 8
1 a)		+	+	+	+	+
1 b)	+	+	+	+	+	+
2 a)	+	+	+			+
2 b)	+	+	+			+
3 a)	+	+		+	+	+
3 b)	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+		+	+

Lager ikke forbindelser til tallære i utregninger

Vi deler teksten opp i to deler, hvor figur 1 viser 1a) og 2b), og figur 2 viser 2a). Teksten utgjør det første møtet med å forenkle algebraiske uttrykk. Variabeluttrykkene er alle illustrerte med terninger, hvor eksempelvis $3a + 2a$ er illustrert med henholdsvis tre og to terninger. Det blir ikke gitt noen videre forklaring på hvorfor $3a + 2a = 5a$, bortsett fra at dette er en såkalt tenk og snakk-oppgave, som er definert som noe elevene skal diskutere seg i mellom. Muligheten med å lage en forbindelse til tallære, og det elevene kan om multiplikasjon som gjentatt addisjon,



Figur 1. *Eksempel fra Nye Mega 8B (Guldbrandsen m.fl., 2006, s.37)*

benyttes ikke av læreboken. Illustrasjonen med terninger er en form for konkretisering av det riktige svaret, $5a$, som en finner om en adderer tallfaktorene og beholder variabelen. Til tross for at illustrasjonen isolert sett kan hjelpe til med selve utregningen, bryter den radikalt med ideen om bokstaver som symbol for variable størrelser. Fremstillingen kan gi næring til den klassiske misoppfatningen bokstav brukt som objekt (Küchemann, 1981). Den misoppfatningen kan elevene ha med seg fra arbeidet i tallære, hvor de kan ha sett skrivemåten 1 m = 100 cm, mens andre kan få den gjennom det vi kaller for fruktsalatalgebra. Fruktsalat-algebra har ofte sitt utspring i at en i undervisningssammenheng opplever et behov for å konkretisere hvordan en trekker sammen algebraiske uttrykk. Å antyde at a kan stå for et objekt, som appelsin, kan gjøre at det virker logisk at $3a + 2a$ er det samme som $5a$ fordi ”3 appelsiner og 2 appelsiner er det samme som 5 appelsiner”. Selv om læreboken ikke direkte uttrykker at a står for objektet terning, kan illustrasjonen føre til at det virker fornuftig å argumentere med at siden ”3 terninger pluss 2 terninger er det samme som 5 terninger”, da må $3a + 2a = 5a$. På neste side i læreboken blir regneregelen presentert gjennom et utsagn som kan være med på å forsterke misoppfatningen hvor en ser på bokstav som objekt (figur 2).

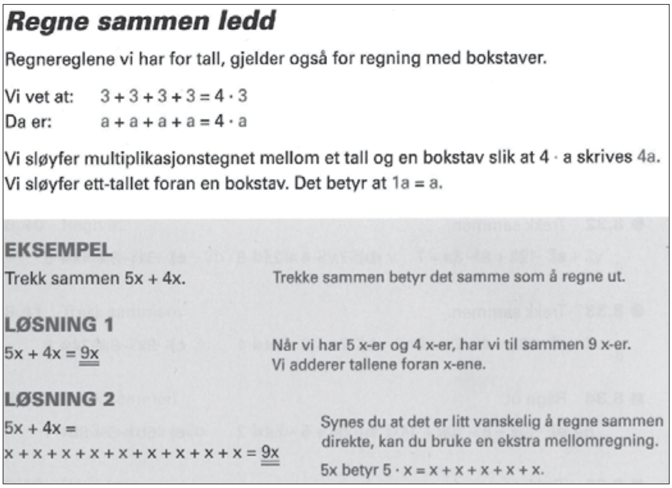
> Med variabler har vi samme regneregler
> med pluss og minus som med tall:
> $5a + 2a = 7a$
> $5a - 2a = 3a$

Figur 2. *Regneregel fra Nye Mega 8B (Gulbrandsen m.fl., 2006, s.38)*

Læreboken forsøker å knytte regneregler for variabler til kunnskaper om regneregler for tall, men tilknytningen blir bare i form av ord og ikke en matematisk forklaring. Den matematiske forklaringen på hvorfor vi kan addere tallene og la den felles variabelen stå er den distributive loven, $3a + 2a = (3+2)a = 5a$, eller alternativt multiplikasjon som gjentatt addisjon, $3a + 2a = 3 \cdot a + 2 \cdot a = a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$. Læreboken bruker ingen av disse og det er mulig å tolke at regneregler for konstanter og variabler ikke er like når vi tilsynelatende lar variabelen stå og bare adderer tallene. Utsagnets upresise formulering, og manglende matematiske forklaring og tilknytning til tallære, legger forholdene til rette for misoppfatningen bokstav brukt som objekt.

Lager ikke forbindelser til tallære om notasjoner

Neste eksempel (figur 3) viser en lærebok som starter med å lage tydeligere forbindelse til tallære, men som i praksis forlater den umiddelbart gjennom å presentere en annen løsningsmetode som løsning 1. Tekstutsnittet er kategorisert som både 1a) og 1 b), men skal her først og fremst eksemplifisere 1b).



Regne sammen ledd

Regnereglene vi har for tall, gjelder også for regning med bokstaver.

Vi vet at: $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$
Da er: $a + a + a + a = 4 \cdot a$

Vi sløyfer multiplikasjonstegnet mellom et tall og en bokstav slik at $4 \cdot a$ skrives $4a$.
Vi sløyfer ett-tallet foran en bokstav. Det betyr at $1a = a$.

EKSEMPEL
Trekk sammen $5x + 4x$.
Trekke sammen betyr det samme som å regne ut.

LØSNING 1
$5x + 4x = \underline{\underline{9x}}$
Når vi har 5 x-er og 4 x-er, har vi til sammen 9 x-er.
Vi adderer tallene foran x-ene.

LØSNING 2
$5x + 4x =$
$x + x + x + x + x + x + x + x + x = \underline{\underline{9x}}$
Synes du at det er litt vanskelig å regne sammen direkte, kan du bruke en ekstra mellomregning.
$5x$ betyr $5 \cdot x = x + x + x + x + x$.

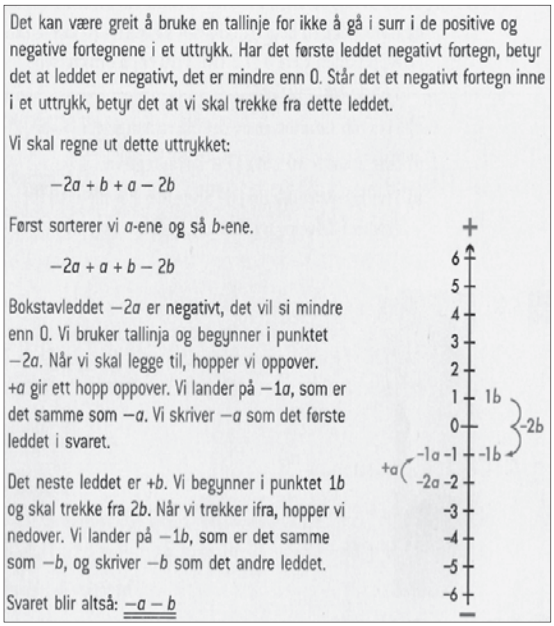
Figur 3. *Eksempel fra Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 219)*

Tekstutsnittet er første gang læreboken viser hvordan en regner sammen variabeluttrykk. Introduksjonsteksten starter med å lage en forbindelse til tallære og multiplikasjon som gjentatt addisjon, $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$, for variabeluttrykket $4 \cdot a$. Dette er en kjent didaktikk som er i tråd med læreplanen, men ser vi videre på eksemplet og hva som presenteres som løsning 1 og 2, blir forbindelsen kraftig svekket. Grunnen til det er at det er løsning 2, og ikke 1, som benytter seg av forbindelsen til tallære. At denne løsningen blir presentert som løsning 2, gjør at den ikke får samme status, noe som forsterkes gjennom utsagnet "Synes du at det er litt vanskelig å regne sammen direkte, kan du bruke en ekstra mellomregning." Løsning 1 fremstår som den smarte og effektive metoden som forklares ved at "Vi adderer tallene foran x-ene". Denne effektive, men semantisk fattige metoden, er en metode som elevene før eller siden vil lære seg. Det didaktiske spørsmålet er ikke om de skal lære denne, men når i undervisningsforløpet det bør skje? I denne læreboken er svaret med en gang. Det vil si at etter kun ett eksempel forventes det at en er klar for en ikke-triviell regning med variable størrelser.

Det konkrete eksemplet på delkategori 1 b) befinner seg i den siste setningen før eksemplet i form av ”Vi sløyfer ett-tallet foran en bokstav. Det betyr at ”1*a* = *a*.” ” Læreboken velger her ikke å forklare hvorfor 1*a* er *a* ved for eksempel å knytte det til talleksempel: $1 \cdot 2 = 2$, $1 \cdot 3 = 3$, ..., $1 \cdot 50 = 50$, ..., $1 \cdot n = n$.

Tilrettelegger for utvikling av misoppfatninger

Det neste tekstutsnittet (figur 4) er først og fremst et eksempel på delkategori 2 b), men inneholder også element fra 3 a) og 3 b).


Det kan være greit å bruke en tallinje for ikke å gå i surr i de positive og negative fortegnene i et uttrykk. Har det første leddet negativt fortegn, betyr det at leddet er negativt, det er mindre enn 0. Står det et negativt fortegn inne i et uttrykk, betyr det at vi skal trekke fra dette leddet.

Vi skal regne ut dette uttrykket:

$$-2a + b + a - 2b$$

Først sorterer vi *a*-ene og så *b*-ene.

$$-2a + a + b - 2b$$

Bokstavleddet $-2a$ er negativt, det vil si mindre enn 0. Vi bruker tallinja og begynner i punktet $-2a$. Når vi skal legge til, hopper vi oppover. $+a$ gir ett hopp oppover. Vi lander på $-1a$, som er det samme som $-a$. Vi skriver $-a$ som det første leddet i svaret.

Det neste leddet er $+b$. Vi begynner i punktet $1b$ og skal trekke fra $2b$. Når vi trekker ifra, hopper vi nedover. Vi lander på $-1b$, som er det samme som $-b$, og skriver $-b$ som det andre leddet.

Svaret blir altså: $\underline{\underline{-a - b}}$

Figur 4. *Eksempel fra Kode X(Christensen, A. S., 2007, s.18)*

Teksten handler om å forenkle uttrykk i delkapitlet ”Uttrykk med negative fortegn”, hvor læreboken prøver å besvare spørsmålet ”[...] hva skjer når du har bokstavuttrykk med negative fortegn?”. Læreboken bruker en tallinje som konkretisering, der tallinjen blir presentert både med tall og bokstaver, hvor -1*a* er plassert på samme plass som -1 og -1*b*. Det vil si at dersom illustrasjonen skal gi en matematisk mening, må vi ikke bare forutsette at $a = b$, men også at $a = b = 1$.

Teksten skiller ikke tydelig mellom regnetegn og fortegn. Den bruker ordet fortegn uavhengig om det er som binært eller singulært minus.

Det finner vi eksemplifisert i setning nummer to og tre. Siden dette er i introduksjonsfasen, forventer vi at læreboken presenterer addisjon og subtraksjon av positive algebraiske uttrykk før negative uttrykk. Vi forstår derfor eksemplet som at det egentlig tar for seg subtraksjon av positive algebraiske uttrykk.

Den første setningen forteller at konkretiseringen skal hjelpe oss til å forenkle regnearbeidet med algebraiske uttrykk. Den andre setningen starter med et utsagn som kun er riktig om vi forutsetter at leddet er konstant, og det er det ikke. Leddet -2*a* kan uttrykkes som negativt, men det betyr ikke nødvendigvis at verdien er mindre enn 0. Læreboken uttrykker seg trolig slik fordi det skal passe inn i konkretiseringen med tallinjen. Dette sees på som et tilfelle hvor det er konteksten som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger knytt til variabelbegrepet. At det algebraiske uttrykket -2*a* er positivt så lenge a ≤ 0 og negativt så lenge a > 0, er en viktig del av variabelbegrepet som læreboken ikke tar hensyn til. Den tredje og siste setningen i det første avsnittet er heller ikke med på å klargjøre forskjellen mellom binært og singulært minus, som igjen gjør det unødig problematisk senere å forklare subtraksjon av negative bokstavuttrykk, som 2*a* – (-*a*) = 2*a* + *a*. -2*a* blir enda en gang definert til å være mindre enn 0, og nå forsøkt konkretisert i form av et punkt på tallinjen. Skal vi ta tallinjen på alvor ser vi at punktet for -2*a* er sammenfallende med punktet -2 og med det må konkludere med at *a* ikke varierer, men er lik 1. Dette er en uheldig konsekvens av ønsket om å prøve å konkretisere enkel algebraregning gjennom en utradisjonell konkretisering med tallinjen. I forklaringen av utregningen av -2*a* + *a* uttrykker en seg inkonsekvent i forhold til tidligere, hvor + *a* får rollen som en operasjon og ikke som et fortegn lengre. Dette forsterkes i neste setning gjennom ”+*a* gir ett hopp oppover.” Bevegelsen med hopp gir inntrykk av at det skjer noe, en opererer, mens tolkingen av +*a* som fortegn er mer som noe statisk på tallinjen. Videre velger boken ikke å gi noen forklaring på hvorfor -1*a* er det samme som -*a*, til tross for at dette er første gangen notasjonen brukes. Videre blir +*b* presentert som et ledd, når det egentlig er kun *b* som er leddet. +*b* blir heller ikke presentert som ”ett hopp oppover” på lik linje med +*a*. Boken gir med det et inntrykk av at det er forskjell på +*a* og +*b* i form av om de representerer hopp eller ikke. +*b* blir omgjort uten noe form for kommentar til 1*b* og konkretisert med det sammenfallende punktet 1 på tallinjen. Til slutt får uttrykket 2*b* rollen som subtrahend når det uttrykkes at en ”[...] skal trekke fra 2*b*”. Denne subtraksjonen blir konkretisert på tallinjen gjennom å hoppe to nedover. Svaret, -*a* - *b*, blir til slutt paradoksalt ikke konkretisert på tallinjen til tross for at hele forklaringen er bygd opp rundt den.

Feil bruk av multiplikator og multiplikand

Eksemplet i figur 5 er det første etter at læreboken har presentert formelen for omkretsen til et kvadrat som O = $s + s + s + s$. Det blir presentert to løsninger i form av hvordan Marie og Daniel tenker. Maries tenkemåte er bruk av formelen, som akkurat er presentert, mens Daniels tenkemåte er det som utgjør det nye. I Daniels oversetting fra problemsituasjonen til det matematiske symbolspråket er multiplikator og multiplikand ikke bare bytt om i forhold til tolkingen av multiplikasjon som gjentatt addisjon, men også i forhold til multiplikasjon med måleenheter og normal rekkefølge på faktorene i formler, her O = 4s.

EKSEMPEL

Hvor stor omkrets har et kvadrat med side lik 6 cm?

Marie tenker slik:	*Daniel* tenker slik:
Hvis s = 6 cm, blir omkretsen:	Hvis s = 6 cm, finner jeg omkretsen slik:
6 cm + 6 cm + 6 cm + 6 cm	6 cm · 4

Figur 5. *Eksempel fra Sirkel 8B (Maugesten & Torkildsen, 2006, s.124)*

Variabelaspektet kommer ikke tydelig frem

Bokstaven x blir introdusert gjennom et tilsynelatende praktisk eksempel om alder, men analysen vår avdekker spesielt to ting (se figur 6). Det første er mangelen på logisk progresjon. Ved å ta utgangspunkt i problemet som skal løses, hvor gammel Hanna er om Bent er 10 år, trenger vi ikke et generelt uttrykk for Hanna sin alder i form av $x + 3$. Slik som eksemplet er lagt opp, vil de aller fleste kunne løse problemet umiddelbart uten noe behov for noe nytt. Det andre er at premissen i spørsmålet vedrørende Hanna sin alder, "Hvis Bent er 10 år, [...]", står i konflikt med at en rett etter på uttrykker at en kan tenke seg at x står for alderen til Bent og at x kan variere. Sammen med at det gir lite mening å hevde at alderen til Bent i dette konkrete eksemplet varierer, gjør dette at variabelaspektet ikke kommer tydelig fram. Konteksten gjør at bokstaven opptrer mer som en ukjent enn som en variabel. Vi forstår at alderen til en person vi ikke kjenner kan være hva som helst, men det er ikke tydelig hva en egentlig mener når en uttrykker at alderen til en konkret person her og nå kan variere. Det er måten forfatterne presenterer konteksten på her, som gjør dette utfordrende. Ser en på dette sammen med progresjonen kan en påstå at eksemplet er lite egnet som inngangsport

Uttrykk med variabler

Hvis Bent er 10 år, hvor gammel er Hanna da?

Hanna er tre år eldre enn Bent.

Hvis vi tenker oss at x er et tall som står for alderen til Bent, så er alderen til Hanna

$x + 3$

Bokstaven x er her et symbol for et tall som kan *variere*. Det betyr at det kan ha forskjellige verdier. Vi sier at bokstaven er en *variabel*.

Hvis Bent er 10 år, så er $x = 10$. Da er alderen til Hanna

$10 + 3 = 13$

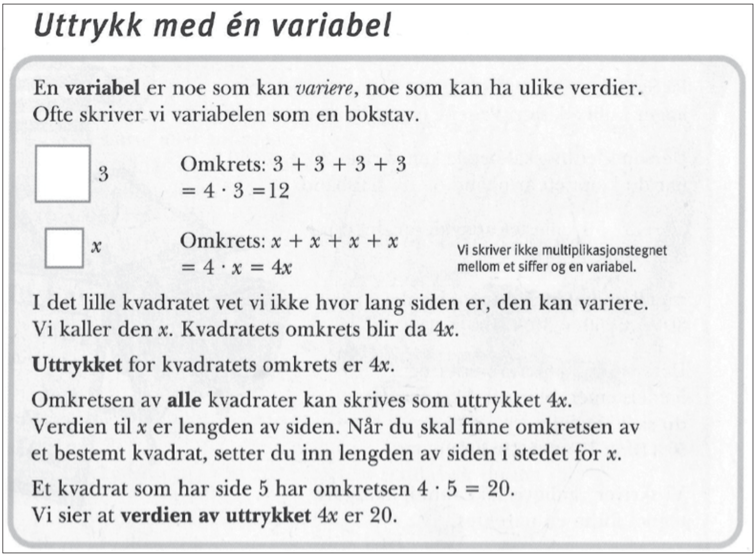
Hvis Bent er 11 år, så er $x = 11$. Da er alderen til Hanna

$11 + 3 = 14$

Figur 6. *Eksempel fra* Faktor *(Hjardar & Pedersen, 2006, s. 185)*

til hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Det inntrykket forsterkes gjennom avslutningen hvor en presenterer to spesialtilfeller av Hanna sin alder ut i fra to ulike premiss, hvor Bent er henholdsvis 10 og 11 år. Progresjonen i dette eksemplet kan karakteriseres som at en beskriver en situasjon, stiller et spørsmål som en umiddelbart kan svare på, presenterer det nye fagstoffet gjennom et generelt uttrykk som brukes til å svare på spørsmålet en allerede vet svaret på. Det vil si at det nye, bokstaver som symbol for variable størrelser, ikke trengs for å kunne løse det egentlige problemet.

Figur 7 viser et nytt eksempel på manglende tydelighet av variabelaspektet. Læreboken starter med å definere en variabel, før den presenterer to kvadrat med sidelengder på henholdsvis 3 og x. Omkretsen blir regnet ut ved hjelp av multiplikasjon som gjentatt addisjon i både tall- og bokstavuttrykket. Notasjonen $4x$ presenteres umiddelbart uten forklaring, "Vi skriver ikke multiplikasjonstegn mellom et siffer og en variabel". Vi forstår dette som mellom tall og variabel, siden sifrene i tallsystemet vårt er de ti innbyrdes forskjellige symbolene vi bruker for å uttrykke



Uttrykk med én variabel

En **variabel** er noe som kan *variere*, noe som kan ha ulike verdier.
Ofte skriver vi variabelen som en bokstav.

3 Omkrets: $3 + 3 + 3 + 3$
$= 4 \cdot 3 = 12$

x Omkrets: $x + x + x + x$
$= 4 \cdot x = 4x$

Vi skriver ikke multiplikasjonstegnet mellom et siffer og en variabel.

I det lille kvadratet vet vi ikke hvor lang siden er, den kan variere.
Vi kaller den x. Kvadratets omkrets blir da $4x$.

Uttrykket for kvadratets omkrets er $4x$.

Omkretsen av **alle** kvadrater kan skrives som uttrykket $4x$.
Verdien til x er lengden av siden. Når du skal finne omkretsen av et bestemt kvadrat, setter du inn lengden av siden i stedet for x.

Et kvadrat som har side 5 har omkretsen $4 \cdot 5 = 20$.
Vi sier at **verdien av uttrykket** $4x$ er 20.

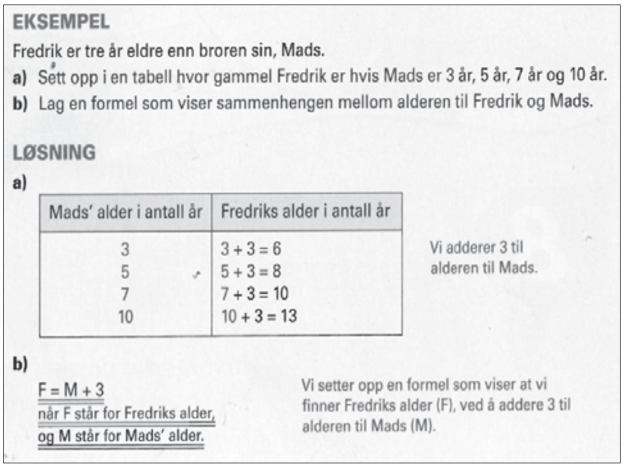
Figur 7. *Eksempel fra Tetra (Hagen m.fl., 2006, s.90)*

ethvert tall med. Illustrasjonene viser videre at det minste kvadratet er det med sidelengde x og det uttrykkes at "I det lille kvadratet vet vi ikke hvor lang siden er, den kan variere". Siden dette er det første møtet med bokstaver som variable tallstørrelser, er det på sin plass å kommentere teksten. Vi som allerede kjenner variabelbegrepet, vil være i stand til å forstå hva som er det egentlige matematiske innholdet her. Men for dem som ikke har det, kan det være vanskelig å se for seg at sidelengden kan være hvilket som helst tall, når en skriver at sidelengden i det lille kvadratet kan variere. Slik som setningen er bygd opp, ved at vi ikke vet hvor lang siden er, og med kun ett illustrert spesialtilfelle, gjør at sidelengden opptrer mer som en ukjent enn som en variabel. Vi må også ta i betraktning at vi ser ett konkret lite kvadrat hvor størrelsen blir sammenlignet med ett annet konkret kvadrat med sidelengde 3. Vi er ofte opptatt av figurer og det vi lett kan se, og det vi først og fremst ser her er ett lite kvadrat som vi ikke kjenner lengden til. Det er ikke trivielt å kunne klare å se på det lille kvadratet som en illustrasjon for ethvert kvadrat, altså et generelt kvadrat, etter bare å ha sett ett kvadrat rett før. Riktignok uttrykkes det lengre ned at "Omkretsen av alle kvadrater kan skrives som uttrykket $4x$", men linken mellom dette og illustrasjonen er ikke tydelig. I tillegg er formuleringen om det lille kvadratet med på å henvise til ett konkret kvadrat og ikke et generelt kvadrat.

Hittil har vi presentert funn som er typiske for lærebøkene, men vi ønsker også å vise enkelte ikke-typiske funn som kan være med på å gi et mer utfyllende bilde. Vi starter med inkonsekvent skrivemåte for den variable.

Ulike skrivemåter for den variable

Læreboken starter med å skrive den variable med stor bokstav uten kursiv, deretter liten bokstav med kursiv og til slutt liten bokstav uten kursiv (figur 8, 9, 10).



EKSEMPEL

Fredrik er tre år eldre enn broren sin, Mads.

a) Sett opp i en tabell hvor gammel Fredrik er hvis Mads er 3 år, 5 år, 7 år og 10 år.

b) Lag en formel som viser sammenhengen mellom alderen til Fredrik og Mads.

LØSNING

a)

Mads' alder i antall år	Fredriks alder i antall år
3	3 + 3 = 6
5	5 + 3 = 8
7	7 + 3 = 10
10	10 + 3 = 13

Vi adderer 3 til alderen til Mads.

b)

F = M + 3
når F står for Fredriks alder,
og M står for Mads' alder.

Vi setter opp en formel som viser at vi finner Fredriks alder (F), ved å addere 3 til alderen til Mads (M).

Figur 8. *Eksempel fra* Grunntall *(Bakke & Bakke, 2006, s. 214)*

Eksemplet i figur 8 er lærebokens introduksjon til variabelbegrepet, hvor variablene er skrevet med ukursiverte store bokstaver, F og M. At læreboken bruker stor bokstav for Fredriks alder kan delvis forklares ved at vi ofte bruker stor bokstav for den avhengige variabelen i matematiske formler. Hvorfor den bruker stor bokstav for alderen til Mads, lar seg ikke forklare på samme måte. Personnavn blir som kjent skrevet med stor forbokstav, og det at læreboken bruker store bokstaver for alderen til Fredrik og Mads kan gjøre at en heller tenker på personene Fredrik og Mads, enn alderen til dem. En legger da forholdene til rette for misoppfatningen bokstav brukt som objekt. Læreboken følger heller ikke vanlig praksis siden den utelater kursiv skrift på den variable, og med det bidrar til at forskjellen mellom bokstav brukt som forkorting av personnavn og bokstav brukt som variabel ikke blir tydelig. I resten av delkapitlet brukes det konsekvent stor bokstav uten kursiv for den variable, mens i det påfølgende delkapitlet er det små kursiverte bokstaver (figur 9).

Verdien av et uttrykk

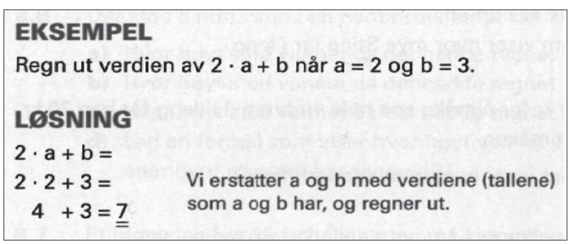
Når vi har et uttrykk eller en formel, kan vi sette inn tall og regne ut verdien. Fra tidligere kjenner du sikkert formelen for arealet og omkretsen av et kvadrat der siden er *s*.

Dersom vi vet hvor lang siden *s* er, kan vi finne arealet og omkretsen ved å bytte ut *s* med sidens lengde og regne ut.

Figur 9. *Eksempel fra Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 215)*

Den variable sidelengden blir her korrekt skrevet i kursiv og har nå fått den ordinære notasjonen i form av liten bokstav. Formelen for omkretsen er også forklart gjennom den korrekte gjentatte addisjonen, $s + s + s + s = 4 \cdot s$. Variabeluttrykket $4 \cdot s$ er ikke skrevet forkortet som $4s$, som kan være med på å fremheve det matematiske innholdet i uttrykket. Vi merker oss at en om den variable skriver at "[...] siden er *s*". Ved å skrive at *s* er siden og ikke sidelengden, er en med på å tilrettelegge for misoppfatningen bokstav brukt som objekt. Når en skriver at siden er *s*, er det lett å tolke *s* som et navn på linjen, på lik linje med navnet på en person. Uttrykksmåten "Dersom vi vet hvor lang siden *s* er [...]" forsterker dette.

På den neste siden i læreboken er den variable fortsatt skrevet med liten bokstav, men nå ikke med kursiv skrift lenger (figur 10).



EKSEMPEL

Regn ut verdien av 2 · a + b når a = 2 og b = 3.

LØSNING

2 · a + b =
2 · 2 + 3 =
4 + 3 = 7

Vi erstatter a og b med verdiene (tallene) som a og b har, og regner ut.

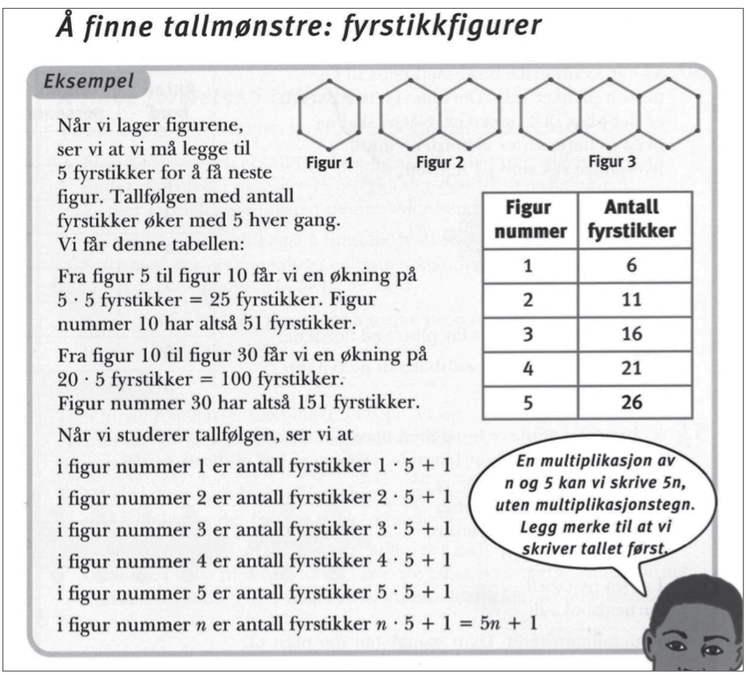
Figur 10. *Eksempel fra Grunntall (Bakke & Bakke, 2006, s. 215)*

Notasjonen med å skrive de variable uten kursiv blir gjort i resten av kapitlet, bortsett fra på to figurer og ett tilfelle hvor den variable er spesifisert i antall cm. I disse tre tilfellene står den variable i kursiv. Selv om det er mulig å se en form for mønster i når læreboken velger kursiv og ikke-kursiv, og stor og liten bokstav, blir dette ikke kommentert. I trykt skrift er det vanlig å skrive den variable i kursiv, og vi ser på den manglende konsekvente notasjonen som et illustrerende eksempel på lærebøkenes lite tydelige fremstilling av den variable spesielt, og algebraen generelt.

Det siste eksemplet er et sjeldent tilfelle av hvordan leting etter mønster kan føre frem til et variabeluttrykk.

Mønster som utgangspunkt for et variabeluttrykk

Eksemplet (figur 11) tar utgangspunkt i et mønster, beskrevet geometrisk og med tall, som grunnlag for det generelle algebraiske uttrykket. Eksemplet er med på å synliggjøre forbindelser mellom tall og algebra gjennom leting etter mønster, og med det ligger forholdene til rette for læreplanens ønske om at algebra skal "generaliserer talrekning" (UFD, 2005, s. 3). Algebraen kommer her som en naturlig konsekvens av et ønske om å uttrykke seg generelt. Konteksten og progresjonen fra det spesielle til det generelle legger forholdene til rette for at elevene selv er med på å gi mening til, og forstå, hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Dette didaktiske aspektet svekkes kraftig gjennom valget med å plassere eksemplet til slutt i kapitlet, og med det blir en avslutning og ikke en introduksjon til algebra.



Å finne tallmønstre: fyrstikkfigurer

Eksempel

Figur 1 Figur 2 Figur 3

Når vi lager figurene, ser vi at vi må legge til 5 fyrstikker for å få neste figur. Tallfølgen med antall fyrstikker øker med 5 hver gang. Vi får denne tabellen:

Figur nummer	Antall fyrstikker
1	6
2	11
3	16
4	21
5	26

Fra figur 5 til figur 10 får vi en økning på $5 \cdot 5$ fyrstikker = 25 fyrstikker. Figur nummer 10 har altså 51 fyrstikker.

Fra figur 10 til figur 30 får vi en økning på $20 \cdot 5$ fyrstikker = 100 fyrstikker. Figur nummer 30 har altså 151 fyrstikker.

Når vi studerer tallfølgen, ser vi at

i figur nummer 1 er antall fyrstikker $1 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 2 er antall fyrstikker $2 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 3 er antall fyrstikker $3 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 4 er antall fyrstikker $4 \cdot 5 + 1$

i figur nummer 5 er antall fyrstikker $5 \cdot 5 + 1$

i figur nummer n er antall fyrstikker $n \cdot 5 + 1 = 5n + 1$

Figur 11. *Eksempel fra Tetra (Hagen m.fl., 2006, s. 99)*

Oppsummering av funn og refleksjon

Funnene våre tyder på at det er til dels manglende samsvar mellom læreplanens fortolkede intensjon og lærebøkenes fremstilling når det gjelder hvordan bokstaver brukt som symbol for variable størrelser blir introdusert. De manglende samsvarene arter seg på flere måter, men felles for lærebøkene er at algebraen i liten grad generaliserer tallæren, som i følge Mason (1996) er den viktigste siden ved algebraisk tenking, og nøkkelen til at algebra ikke forblir et problememne. Den manglende sammenhengen til tall blir forsterket gjennom eksempel hvor progresjonen, konteksten og forklaringen gjør at variabelaspektet ikke kommer tydelig frem. Mangelfulle sammenhenger kan relativt enkelt unngås ved at lærebøkene benytter seg av en rekke spesialtilfeller med tall som grunnlag for det generelle uttrykket med bokstaver. Vi ønsker å eksemplifisere dette gjennom å endre eksemplet om alderen til Hanna og Bent i figur 6 (Hjardar & Pedersen, 2006, s. 185).

> Tenk deg en jente som heter Hanna, og en gutt som heter Bent, som vi ikke kjenner alderen til. Det eneste vi vet er at Hanna er 3 år eldre enn Bent. Ved å bruke denne informasjonen ønsker vi å finne et uttrykk for alderen til Hanna. Vi tenker oss at dersom Bent er 10, da må Hanna være 10 + 3. Dersom Bent er 11, da må Hanna være 11 + 3. Dersom Bent er 15, da må Hanna være 15 + 3. Vi setter det opp i en oversiktlig tabell.

Bent	Hanna
10	10 + 3
11	11 + 3
:	:
15	15 + 3

> Antall år som Bent er, vet vi ikke, men vi vet at det er ett tall. Siden vi ikke vet hvilket tall det er, kan vi kalle det for x. Dersom Bent er x år, hva kan vi da si om alderen til Hanna? Bruk tabellen og se etter et mønster som kan hjelpe. Vi ser da at alderen til Hanna er Bent sin alder pluss 3.

Bent	Hanna
10	10 + 3
11	11 + 3
:	:
15	15 + 3
:	:
x	$x + 3$

> Vi har nå laget oss et uttrykk, $x + 3$, som viser alderen til Hanna, til tross for at vi ikke vet alderen til Bent.

Dette er nytt for elevene, og som de ikke kan svare umiddelbart på, noe som gjør at det er lettere å gi mening til og overbevise elevene om hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Bokstaven kommer her som en konsekvens av et ønske om å uttrykke seg generelt. I vår alternative fremstilling tar vi på alvor Masons (1996) tanker om å gå fra en rekke tallmessige spesialuttrykk til et generelt algebraisk uttrykk, og med det vektlegger bokstav brukt som generalisert tall.

For fem av de seks analyserte lærebøkene kan den manglende sammenhengen mellom tall og algebra forklares gjennom de to tolkningsmulighetene hvor mønster og tallmessige sammenhenger kommer enten før eller etter algebramanipulasjon. For læreboken som introduserer den variable gjennom funksjoner, og med det er mer i tråd med M87 (KUF, 1987) enn LK06 (UFD, 2005), kan det sees på som en materialisering av Kendal & Staceys (2004) påstand om at det ikke eksisterer kun en måte å nærme seg algebraen på. Det manglende samsvaret mellom lærebøkene og dagens læreplan korrelerer med Alseth m. fl. (2003) sitt algebrafunn i lærebøkene fra L97-perioden (KUF, 1996), og er et nytt eksempel på at den implementerte læreplanen avviker fra den intenderte planen. Det inntrykket forsterkes ved at eksempler som inneholder mønster, som Hagen m. fl. (2006, s. 99), plasseres til slutt i kapitlet. En mulig forklaring på det er at algebra tradisjonelt sett har hatt et sterkt manipulasjonsfokus, men det kan også forklares ved at mønster kun blir nevnt i kompetansemålene etter 7. trinn og at algebra vanligvis ikke er et eget emne før i 8-. eller 9. klassebøkene. I tillegg er lærebøkene for ungdomstrinnet ofte skrevet av andre forfatteren enn på mellomtrinnet. I praksis kan det bety at mønster, som er beskrevet etter 7. trinn, ikke tas hensyn til når en skal skrive lærebøker for 8.–10. trinn. Forfatterne skriver først og fremst ut fra kompetansemålene etter 10. trinn, og der står det ingenting om mønster. Funnene våre gir økt næring til forslagen 9–12 i rapporten om matematikk i norsk skole anno 2014 (Utdanningsdirektoratet, 2014, s. 96), hvor det foreslås kompetansemål etter 8. og 9. trinn, mer detaljerte kompetansemål og styrking av algebra i læreplanen.

Når det gjelder de fire historiske beskrivelsene av skolealgebraen, opptrer den først og fremst som et eget emne i de seks lærebøkene. Emnet består primært av formell manipulasjon med bokstavuttrykk, hvor det vies lite oppmerksomhet til hvorfor en kan manipulere. Lærebøkene benytter i begrenset grad mulighetene til å bygge videre på elevenes kunnskaper i tallære, som igjen fører til at algebraen fremstår som langt mer isolert enn den trenger å være. Det inntrykket forsterkes ved at lærebøkene introduserer forkortede skrive- og utregningsmåter med en gang, samt at det er kun én lærebok som bruker samme navn på introduksjonskapitlet, tall og algebra, som læreplanen bruker på hovedområdet.

Wheelers (1996, s. 325) påstand om at den valgte introduksjon får konsekvenser for hvordan de andre sidene av algebraen kan nås, gjelder selvfølgelig for de analyserte lærebøkene også. Lærebøkenes fokus på manipulasjon, og manglende generaliseringer fra tallæren, legger ikke forholdene til rette for verken variabelaspektet, bokstavenes kontekstavhengighet eller hvorfor vi trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Hovedområdet tall og algebra innbyr til en induktiv tilnærming hvor bokstavene kommer som en naturlig konsekvens av ønsket om å uttrykke seg generelt. En slik tilnærming vil også være med på å dempe misoppfatningen bokstav brukt som objekt, fordi bokstavenes rolle blir først og fremst som symbol for noe som varierer.

Konklusjon

Introduksjonen til bokstaver som symbol for variable størrelser varierer med hensyn til klassetrinn, mengde og kontekst. Samtidig har lærebøkene det til felles at de i liten grad benytter mulighetene til å bygge videre på og dra sammenligninger til tallære. Algebra fremstår som et isolert emne til tross for at det er satt sammen med tall i læreplanen. Innholdet er i hovedsak algebramanipulasjon, hvor en i liten grad legger opp til begrunnelser for notasjon og hvorfor en kan bedrive manipulasjon. Konteksten og progresjonen i eksemplene gjør at variabelaspektet blir lite tydelig. I tillegg finner vi feilaktige formuleringer, illustrasjoner og matematiske resonnement, som legger forholdene til rette for utvikling av misoppfatninger. Algebrakapitlene fremstår i sin helhet som lite påvirket av intensjonen med hovedområdet tall og algebra, og av algebradidaktisk forskning og utvikling.

Studien har gitt ny kunnskap om hvordan norske ungdomsskolebøker introduserer algebra. Den har vist hvordan mangelfulle sammenhenger til tallære relativt enkelt kan unngås ved å benytte mer induktive fremstillinger hvor en eksemplifiserer en rekke spesialtilfeller med tall som grunnlag for det generelle med bokstaver, som i eksemplet om alderen til Hanna og Bent (Hjardar & Pedersen, 2006).

Studien kan brukes som delforklaring på svake norske algebraresultater på nasjonale og internasjonale tester, og setter spørsmålstegn ved lærebokforfatternes tolking av hovedområdet tall og algebra i læreplanen.

Acknowledgement

I am grateful to NordForsk for funding the Network for research on mathematics textbooks in the Nordic countries, project number 45321, which created opportunities for me to present from my doctoral study and have it discussed with engaged colleagues.

Referanser

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus*. Notodden: Telemarksforsking.

Bakke, B. & Bakke, I. H. (2006). *Grunntall 8. Matematikk for ungdomstrinnet*. Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, 14 (1), 41–73.

Bierhoff, H. (1996). Making the foundations of numeracy: a comparison of primary school textbooks in Britain, Germany and Switzerland. *Teaching Mathematics and its Applications*, 15 (4), 141–160.

Bjørnestad, Ø., Kongelf, T. R. & Myklebust, T. (2013). *Alfa – matematikk for grunnskolelærerutdanningene 1–7 og 5–10* (2. utgave). Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke.

Bryman, A. (2008). *Social research methods* (third edition). Oxford University Press.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: algebra and its relation to geometry. I N. Bednarz, C. Kieran & Lee, L. (red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s. 15–37). Dordrecht: Kluwer Academic.

Chávez-López, O. (2003). *From the textbook to the enacted curriculum: textbook use in the middle school mathematics classroom*. University of Missouri. Hentet fra http://zeta.math.utsa.edu/~hvz231/dissertation/dissertation.pdf

Costello, J. (1991). *Teaching and learning mathematics 11–16*. London: Routledge.

Crawford, A. R. (2001). Developing algebraic thinking: past, present and future. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 1, s. 192–198). University of Melbourne.

Christensen, A. S. (2007). *Kode X 9A. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Forlaget fag og kultur.

Danielsen, I. J., Skaar, K. & Skaalvik, E. M. (2007). *De viktige få: analyse av elevundersøkelsen 2007*. Kristiansand: Oxford Research.

Donoghue, E. F. (2003). Algebra and geometry textbooks in twentieth-century America. I G. Stanic & J. Kilpatrick (red.), *A history of school mathematics* (Vol. 1, s. 329–398). Reston: NCTM.

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, 62 (1), 107–115.

Fan, L. & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbook on teaching strategies: an empirical study. *Mid-Western Educational Researcher*, 13 (4), 2–9.

Freeman, D. J. & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26 (3), 403–421.

Goodlad, J.I. et al. (1979). *Curriculum inquiry: the study of curriculum practice*. New York: McGraw-Hill Book Company.

Grønmo, L. S., Bergem, O. K., Kjærnsli M., Lie S. & Turmo A. (2003). *Hva i all verden har skjedd i realfagene? Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2003*. Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling, Universitet i Oslo.

Grønmo, L. S. & Onstad, T. (2009). *Tegn til bedring. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub.

Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2006). *Nye Mega 8B. Matematikk for ungdomsstrinnet*. Oslo: N. W. Damm & Søn.

Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K. B. & Öberg, B. (2006). *Tetra 8. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Det norske samlaget.

Hjardar, E. & Pedersen, J.-E. (2006). *Faktor 1. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Cappelen Damm.

Hsieh, H. F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, 15 (9), 1277–1288.

Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments. Three teachers' way to organize their mathematics lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 11 (3), 5–30.

Jakobsson-Åhl, T. (2006). *Algebra in upper secondary mathematics: a study of a selection of textbooks used in the years 1960–2000 in Sweden*. Luleå tekniska universitet.

Jakobsson-Åhl, T. (2008). Word problems in upper secondary algebra in Sweden over the years 1960–2000. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 13 (1), 7–28.

Kendal, M. & Stacey, K. (2004). Algebra: a world of difference. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study* (s. 329–346). Dordrecht: Kluwer Academic.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I P. Nesher & J. Kilpatrick (red.), *Mathematics and cognition: a research synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 97–112). Cambridge University Press.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. I C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (red.), *Eighth international congress on mathematical education: selected lectures* (s. 271–290). Seville: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: reflections on its main activities. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study* (s. 21–34). Dordrecht: Kluwer Academic.
Kieran, C. (2007). Learning and teaching of algebra at the middel school through college levels: building meaning for symbols and their manipulations. I F. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 707–762). Charlotte: Information Age.
Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education*, 16 (4), 5–44.
KUF. (1987). *Mønsterplanen for grunnskolen*. Oslo: Aschehoug.
KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen*. Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.
Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. Hart (red.), *Children's understanding of mathematics* (s. 11–16). London: John Murray.
Lins, R. (1990). A framework for understanding what algebraic thinking is. I G. Booker, P. Cobb & T. N. Mendicuti (red.), *Proceedings of the fourteenth PME conference for the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 93–100). Oaxtepec: Program committee.
Lee, L. (2001). Early algebra – but which algebra? I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (red.), *The future of teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol. 2, s. 392–399). University of Melbourne.
MacGregor, M. (2004). Goals and content of an algebra curriculum for the compulsory years of schooling. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (s. 313–328). Boston: Kluwer Academic.
Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (s. 65–86). Dordrecht: Kluwer Academic.
Mosvold, R. (2001). *Det genetiske prinsipp i matematikkdidaktikk* (Hovedfagsoppgave). Kristiansand: Høgskolen i Agder.
Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Uddannelseministeriet. Hentet fra http://pub.uvm.dk/2002/kom/
Pehkonen, E. (1995). On pupils' reactions to the use of open-ended problems in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3 (4), 43–57.
Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33 (5), 158–175.
Pepin, B. & Haggarty, L. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, 28 (4), 567–590.

Reys, B. J., Reys, R. R. & Chávez, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership*, 61 (5), 61–66.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2013). Methodologies in Nordic research on mathematics textbooks. I B. Grevholm, P. S. Hundeland, K. Juter, K. Kislenko & P.-E. Persson (red.), *Nordic research in didactics of mathematics: past, present and future* (s. 469–482). Oslo: Cappelen Damm.

Robitaille, D. F. & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. I D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics education* (s. 687–709). New York: Macmillan.

Röj-Lindberg, A.-S. (1999). *Läromedel och undervisning i matematik på högstadiet. En kartläggning av läget i Svenskfinland*. Vasa: Svenskfinlands läromedelscenter.

Schoenfeld, A.H. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of ”well-taught” mathematics courses. *Educational Psychologist*, 23 (2), 145–66.

Schmidt, W. H., McKnight C. C., Valverde G. A., Houang R. I. & Wiley D. E. (1996). *Many visions, many aims: a cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. London: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E. et al. (2001). *Why schools matter: a cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228.

Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula*. London: Qualifications and curriculum authority.

Torkildsen, S. H. & Maugesten. M. (2006). *Sirkel 8B. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: H. Aschehoug & Co.

UFD. (2005). *Kunnskapsløftet*. Hentet fra http://www.udir.no/upload/larerplaner/Fastsatte_lareplaner_for_Kunnskapsloeftet/Grunnskole_og_gjennomgaende/matematikk_010810.rtf

Utdanningsdirektoratet. (2005). *Kartlegging av læremidler og læremiddelpraksis*. Hentet fra http://www.skolenettet.no/moduler/templates/Module_Article.aspx?id=37694&epslanguage=NO

Utdanningsdirektoratet. (2014). *Matematikk i norsk skole anno 2014. Faggjennomgang av matematikkfagene – rapport fra ekstern arbeidsgruppe oppnenvt av Utdanningsdirektoratet*. Hentet fra http://www.udir.no/PageFiles/89051/Matematikk_norsk_skole_2014_rapport_ekstern_arbeidsgruppe.pdf?epslanguage=no

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflections on different approaches to algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (s. 317–325). Dordrecht: Kluwer Publishers.

Wu, H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, 25 (2), 10–17.

Tom Rune Kongelf

Tom Rune Kongelf er en Ph.D.-student tilknyttet doktorgradsprogrammet ved Universitetet i Agder, og arbeider som foreleser ved Høgskulen i Sogn og Fjordane. Han forsker på lærebøker i matematikk som blir brukt på ungdomstrinnet, med vekt på problemløsning, algebra og oppgaver.

tom.rune.kongelf@hisf.no

Abstract

In this paper we present findings from an analysis of the chapters introducing algebra in six mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway. The introduction of letters as symbols for variables varies with respect to grade, quantity and context. Through an inductive qualitative content analysis we characterise insufficient aspects of the different chapters. The main findings are that the variable aspect is not clear, and that the textbooks hardly use the opportunities to build on arithmetic. In addition we find erroneous formulations, illustrations and mathematical reasoning, which facilitates the development of misconceptions.

Artikkel 3

Tittel: Hvordan introduseres algebra på ungdomstrinnet i Norge? En kategorisering av oppgavetyper og deres fordeling i fem matematikklærebøker.

Sammendrag: Målet for studien er å analysere og beskrive det matematiske innholdet i oppgavene tilhørende introduksjonskapitlet i algebra i fem matematikklærebøker for ungdomstrinnet i Norge. En induktiv kvalitativ innholdsanalyse av 2392 oppgaver har gjort det mulig å etablere fem hovedkategorier med 37 forgreininger av underkategorier. Lærebøkenes fordeling av oppgavetyper varierer relativt mye blant underkategoriene, men lite blant hovedkategoriene. Oppgavene handler primært om algebramanipulasjon i form av regning med algebraiske uttrykk og innsetting av verdi(er) for de(n) variable. Sekundært lager en algebraiske uttrykk med utgangspunkt i figur eller tekst, men hvor den konkrete konteksten og den deduktive progresjonen i oppgavene gjør at variabelaspektet blir lite tydelig og bokstavene opptrer mer som ukjente. Det er få oppgaver om mønster som grunnlag for generaliseringer, og de blir ikke brukt som introduksjon til variabelbegrepet. Oppgavene er i begrenset grad påvirket av intensjonen med hovedområdet tall og algebra i læreplanen.

Title: How is algebra introduced in lower secondary school in Norway? A categorization of task types and their distribution in five textbooks in mathematics.

Abstract: The aim of the study is to analyze and describe what types of tasks are represented in the chapters introducing algebra in five mathematics textbooks for lower secondary school in Norway and to show how the tasks are distributed over the types. Through an inductive qualitative content analysis of 2392 tasks five main categories were created of the tasks with 37 sub-categories. The distribution of the types of tasks varies relatively much among the sub-categories, but not much in relation to the main categories. The tasks deal primarily with algebraic manipulation in the form of calculations with algebraic expressions and giving values for the variable. Secondly, the tasks ask for creation of algebraic expressions starting in figure or text, but where the concrete context and the deductive progression in the tasks make the aspect of variable vague and the letters seem to act as unknowns. There are few tasks about patterns as basis for generalizations, and they are not used as introduction to the concept of variable. The tasks are to a limited degree influenced by the intention of the main area numbers and algebra in the curriculum.

Nøkkelord: oppgaver, algebra, lærebøker

Key words: tasks, algebra, textbooks

Hvordan introduseres algebra på ungdomstrinnet i Norge? En kategorisering av oppgavetyper og deres fordeling i fem matematikklærebøker.

Sammendrag

Målet for studien er å analysere og beskrive det matematiske innholdet i oppgavene tilhørende introduksjonskapitlet i algebra i fem matematikklærebøker for ungdomstrinnet i Norge. Gjennom en induktiv kvalitativ innholdsanalyse av 2392 oppgaver har det oppstått fem hovedkategorier av oppgaver med 37 forgreininger av underkategorier. Det matematiske innholdet i oppgavene varierer relativt mye blant underkategoriene, men relativt lite blant hovedkategoriene. Oppgavene handler primært om algebramanipulasjon i form av regning med algebraiske uttrykk og innsetting av verdi(er) for de(n) variable. Sekundært lager en algebraiske uttrykk med utgangspunkt i figur eller tekst, men hvor den konkrete konteksten og den deduktive progresjonen i oppgavene gjør at variabelaspektet blir lite tydelig og bokstavene opptrer mer som ukjente. Det er få oppgaver om mønster som grunnlag for generaliseringer, og de blir ikke brukt som introduksjon til variabelbegrepet. Oppgavene er i begrenset grad påvirket av intensjonen med hovedområdet tall og algebra i læreplanen.

Innledning

Norge har hatt et sterkt skolepolitisk realfagsfokus helt siden «PISA-sjokket», 4. desember 2001, og etter dette har alle ministre snakket om en realfagskrise. Først dro Kristin Clement i gang satsingen 'Realfag, naturligvis' i 2002, deretter satte Øystein Djupedal i gang 'Et felles løft for realfag' i 2006, så presenterte Kristin Halvorsen 'Realfag for framtida' i 2010, og i 2015 la Torbjørn Røe Isaksen frem 'Tett på realfag' (Kunnskapsdepartementet, 2015). I den pågående realfagsstrategien har Kunnskapsdepartementet satt fokus på læremidlene i skolen. Blant annet har Utdanningsdirektoratet utviklet et sett med kvalitetskriterier for læremidler i matematikk. Bakgrunnen for oppdraget er Meld. St. 28 (2015–2016) som formulerer tiltak for å gjøre skoleledere og lærere mer bevisste i sin vurdering av læremiddelets kvaliteter frem mot ny læreplan i 2020.

Norge er et land hvor matematikkfaget i skolen fortsatt er preget av papirbaserte læremidler, hvor læreren bedriver helklasseundervisning og elevene arbeider individuelt med oppgaver (Gilje m.fl., 2016). Forskere som Stigler, Fuson, Ham og Kim (1986), Fan (1999), Michael (2002) og Zhu & Fan (2006) hevder at både det totale antallet av oppgaver og hvor ofte de ulike oppgavetypene forekommer påvirker elevprestasjonene, men uttrykker samtidig at de ulike typene av oppgaver er viktigere for prestasjonen enn totalantallet.

Fordelingen av oppgavetyper setter premisser for undervisning og læring av matematikk (Hiebert m. fl., 2003; Shimizu, Kaur, Huang & Clark, 2010). Norske elever arbeider mye alene med oppgaver (Grønmo & Onstad, 2009), og ifølge Lepik, Grevholm og Viholainen (2015, s. 144) benytter 69 % av norske lærere læreboken som eneste kilde i hver eller annenhver undervisningsøkt, og uttrykker at «In most lessons the textbook serves as the only source for exercises». Matematikkbokens sentrale rolle er et verdensomspennende fenomen (Li, Chen & An, 2009), men den er ifølge Schmidt m.fl. (1996) særlig fremtredende i Norge. Lærebokens sterke posisjon understrekes også av Gilje m.fl. (2016, s. 27) som skriver at «lærere anser at læreboka «sikrer» at de dekker kompetansemålene i faget». Pepin, Gueudet og Trouche (2013) uttrykker at læreboken er det mest sentrale bindeleddet mellom kompetansemålene i læreplanen og de pedagogiske praksisene i skolen, mens andre (Jablonka & Johansson, 2010) forteller at læreboken mer eller mindre erstatter læreplanen og får rollen som den implementerte læreplanen (Goodlad m.fl., 1979; Schmidt m.fl., 2001).

Helt siden M87 (KUF, 1986), der algebra og funksjonslære utgjorde ett felles hovedområde i læreplanen, har algebra vært koblet sammen med tall. I L97 (KUF, 1996) utgjorde tall og algebra ett målområde og i LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2005) utgjør de ett felles hovedområde. Algebra utgjør 30 % av oppgavene på TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), en internasjonal læreplanbasert undersøkelse, hvor algebra er det matematiske området som norske elever relativt sett har skåret svakest på siden starten i 1995. Grønmo og Hole (2017) karakteriserer de norske algebraprestasjonene som alarmerende svake og uttrykker at tidligere forklaringer knytt til elevenes alder ikke holder lengre. På den siste TIMSS-undersøkelsen, i 2015, hadde norske elever på 8. og 9. trinn det største negative avviket i verden mellom algebraskåren og den generelle skåren.

Til tross for snart to tiår med realfagssatsinger, lærebokens sterke posisjon i matematikkfaget og iøynefallende svake norske algebraprestasjoner over tid, er det utført lite forskning på lærebøker i matematikk generelt og på algebraoppgaver i matematikklærebøker spesielt.

Målet for studien er å analysere og beskrive det matematiske innholdet i oppgavene tilhørende introduksjonskapitlet i algebra i fem matematikklærebøker for ungdomstrinnet i Norge. Funnene kan være av interesse for forfattere som skal utarbeide nye algebraoppgaver frem mot ny læreplan i 2020 og lærere som skal velge ut oppgaver i introduksjonen til algebra, samt skolepolitikere og andre som ønsker å vurdere ulike faktorer som kan tenkes å påvirke norske elevers prestasjoner i algebra.

Litteraturoversikt

Lærebøker

Lærebokforskning i matematikk utgjør kun en liten del av matematikkdidaktikken, og er ifølge Fan (2013) fortsatt ikke fullt utviklet som forskningsfelt. Den internasjonale forskningen på feltet er sammenfattet av Fan (2013), og for Norden og Baltikum av Grevholm (2011, 2017). En oversikt over metoder som er brukt i forskning om lærebøker i de nordiske landene gis av Rezat og Strässer (2017). De tredeler forskningen i studier som omhandler innflytelsen til læreboken, studier om læreboken i seg selv og studier om bruken av læreboken og dens innvirkning. Blant sistnevnte har Törnroos (2005) analysert sammenhenger mellom ulike typer av data knytt til ulike sider ved elevers muligheter for å lære og deres prestasjoner på TIMSS. Læreboken er en slik side. Törnroos (2005, s. 315) viser at det spiller en rolle hvordan en måler elevers muligheter for å lære og konkluderer med at «even a quite simple analysis of textbooks can produce valuable information when looking for explanations for student achievement in mathematics». Senk, Thompson og Wernet (2014) har også undersøkt slike sammenhenger og konkluderer med at læreboken er den sterkeste indikatoren på elevprestasjoner.

Forskningsstudien min kan plasseres innenfor det Rezat og Strässer (2017) kaller for læreboken i seg selv, da det er det matematiske innholdet i algebraoppgavene i lærebøkene som er gjenstand for analyse. Studien er et bidrag til den senere tids matematikkdidaktiske lærebokforskning i Norden og Baltikum, hvor for Lepik, Grevholm og Viholainen (2015) har studert lærernes bruk av lærebøker og Viholainen, Partanen, Piiroinen, Asikainen og Hirvonen (2017) har sett på elevenes bruk. Ahl, Koljonen, Gunnarsdóttír og Pálsdóttír (2015) har sammenlignet lærerveiledninger fra Island og Sverige, og Halldórsdóttír (2015) har sett på samsvaret mellom læreplaner og lærebøker på Island. Rensaa og Grevholm (2015) studerte elevenes syn på læreboken, og Veilande (2017) gav en karakteristikk av forandringene i bidrag omhandlende lærebøker fra kongressene ICME-10 til ICME-12.

Algebra

Kieran (2007) viser til TIMSS og PISA når hun peker på at problemer med læring i algebra er et internasjonalt fenomen. Men samtidig viser det seg at land som Singapore, rangert som nr.

1 flest ganger på TIMSS- og PISA-testene, har en betydelig vektlegging av generaliteter og mønster i forbindelse med algebra (Kendel & Stacey, 2004; Sutherland, 2002, 2004). Mason (1996) uttrykker at dersom elevene blir vant med å generalisere fra starten av, vil algebra opphøre å være et problem. I Küchemann (1981) sin beskrivelse av ulike elevtolkninger av bokstaver relateres flere av disse til potensielle misoppfatninger, eksemplifisert med der bokstaver blir byttet ut med henholdsvis numeriske verdier, ignorert, eller betraktet som forkortninger på navnet til objektet eller som objektet selv. Küchemann sine funn er like aktuelle i dag (Hodgen, Oldenburg & Strømskag, 2018), der graden av elevvanskeligheter er relatert til hvor meningsfull algebraen er for elevene. Den gjeldende norske læreplanen setter algebra sammen med tall og er beskrevet slik:

> Algebra i skolen generaliserer tallregning ved at bokstaver eller andre symboler representerer tall. Det gir anledning til å beskrive og analysere mønster og sammenhenger. Algebra benyttes også i forbindelse med hovedområdene geometri og funksjoner (Utdanningsdirektoratet, 2005, s. 2).

Sitatet kan tolkes på to måter (Kongelf, 2015), men jeg leser det som at en skal ta utgangspunkt i mønster og sammenhenger fra tallæren som en så ønsker å beskrive på en generell måte ved å innføre algebraiske symbol. En konsekvens av dette er at klassisk algebramanipulasjon kommer etter at en har arbeidet med å skape mening til bokstavene. Den norske læreplanen kan således påstås å harmonere med Singapore sin vektlegging av generaliteter og mønster i algebra.

I sin doktorgradsstudie analyserte Naalsund (2012) norske 8. og 10. klassingers forståelse av algebra. Hun fant at elevene på begge årstrinnene hadde begrensede prosedurale kunnskaper, som ble forklart ved en korresponderende begrenset begrepsforståelse, og hvor elevene i liten grad kunne forklare egen tankegang eller fremgangsmåte. Espeland (2017) har studert algebra på begynnelsen av videregående skole og fant at matematikken som ble presentert, både av læreren og i læreboken, var regel- og algoritmefokusert med få eller ingen koblinger til begrepene de bygger på. Oppgavene i lærebøkene var kognitivt lite krevende og viktige begreper og prinsipper var ikke eksplisitt nevnt. Kongelf (2015) har tidligere analysert det matematiske innholdet i teksten og eksemplene i introduksjonskapitlet i algebra i lærebøker på ungdomstrinnet. Funnene viser at lærebøkene praktiserer ulikt når det gjelder hvilket årstrinn, og i hvilken mengde og kontekst de velger å innføre bokstaver som symbol for variable størrelser på. Det pekes på at lærebøkene har et manipulasjonsfokus og at algebraen i liten grad generaliserer tallæren. I Hodgen, Oldenburg og Strømskag (2018) sin 'state-of-the-art'-beskrivelse av matematikkdidaktisk forskning i algebra de siste 20 årene etterspør de oppgavestudier.

Oppgaver

Matematikkoppgaver retter elevenes oppmerksomhet mot et bestemt matematisk innhold, hvor de opptrer som kontekst for læring både i og etter undervisning (Stein, Grover & Henningsen, 1996). Ifølge Hiebert m. fl. (1997) og Pepin (2009) påvirker oppgavene hvordan elevene oppfatter matematikk generelt og bestemte matematiske emner spesielt. Bjuland (2012, s. 665) argumenterer for at selve oppgavetypen er «an important entry point into pupils' early algebraic reasoning». Stein og Smith (1998) definerer en oppgave som en klasseromsaktivitet som har til hensikt å fokusere elevenes oppmerksomhet mot et spesifikt innhold, ide eller ferdighet, hvor enhver oppgave inneholder tre faser. Fase en er hvordan oppgaven fremstår i selve læreboken slik forfatteren har skrevet den. Fase to handler om hvordan læreren bruker oppgaven, mens fase tre er elevens implementasjon av den, hvor alle fasene antas å påvirke læringsprosessen. Oppgavene i studien min er materialisert i læreboken, avgrenset til det jeg tolker at lærebokforfatterne har planlagt at elevene skal gjøre frem mot mestring av et matematisk innhold. For læreren er det mer snakk om å velge ut, justere eller presisere enkelte oppgaver, noe som på ingen måter må undervurderes:

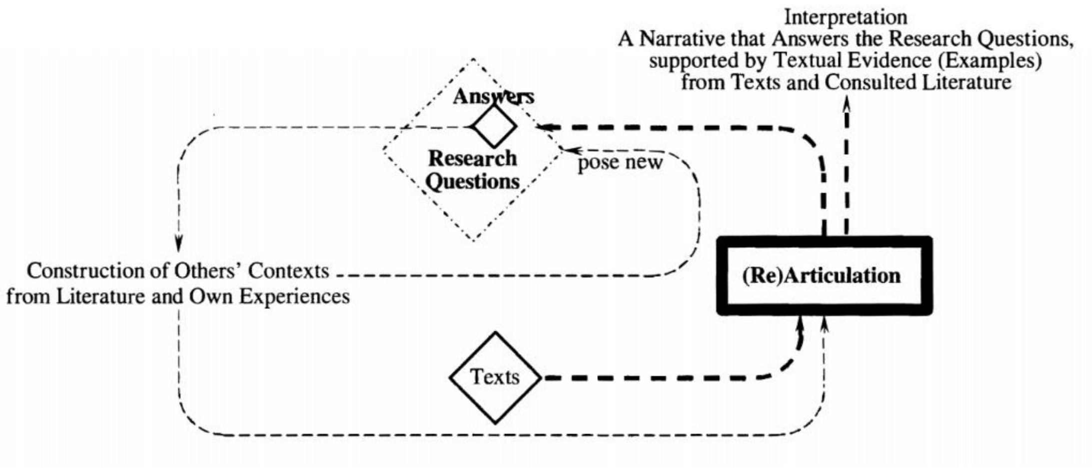
> There is no decision that teachers make that has a greater impact on students' opportunities to learn and on their perceptions about what mathematics is than the selection or creation of the tasks with which the teacher engages students in studying mathematics. (Lappan & Briars, 1995, s. 138).

I studien min definerer jeg oppgaver som de tiltenkte gjøremålene for elevene som er beskrevet i forbindelse med algebrakapitlene i de analyserte lærebøkene. Oppgavene er vanligvis plassert til slutt i kapitlene eller suksessivt etter hvert delkapittel, hvor de ofte er nummerert eller markert som oppgaver gjennom en overskrift. Jeg skiller ikke på om oppgaven er en drilloppgave, tekstoppgave, diskusjonsoppgave eller flervalgsoppgaver. Det er det matematiske innholdet i oppgavene som analyseres og som ligger til grunn for genereringen av ulike typer oppgaver og deres fordeling.

Metode

Studien er basert på en induktiv kvalitativ innholdsanalyse, beskrevet som «a research method for the subjective interpretation of the content of text data through the systematic classification process of coding and identifying themes or patterns» av Hsieh og Shannon (2005, s. 1278). Den kvalitative innholdsanalysen er underrepresentert i forhold til den kvantitative i både litteraturen og forskningen (Cho & Lee, 2014), og de manglende standardiseringene og formuleringene gjør at den kvalitative ofte er mer kompleks enn den kvantitative (Elo & Kyngäs, 2008). Krippendorff (2004) uttrykker at den kvantitative/kvalitative forskjellen er en misforstått dikotomi og understreker at alle tekster i utgangspunktet er kvalitative og at innholdsanalyser kan resultere i både tall og verbale kategorier. Mayring (2014, s. 31) kritiserer også den metodiske dikotomiseringen og definerer den kvalitative innholdsanalysen som en blandet metodetilnærming. Han vurderer tildelingen av kategorier til teksten som et kvalitativt trinn og analysen av frekvensen til kategoriene som et kvantitativt trinn, og definerer innholdsanalyse til å være «a systematic procedure of assignment of categories to portions of text». Det er kategorisystemet som er det sentrale analyseverktøyet i innholdsanalyser. Kategoriene bidrar også til intersubjektivitet ved at kategoriene muliggjør rekonstruksjoner og gjentakelser av analysen for andre. Kategoriene gjør det i tillegg mulig å sammenligne funn og vurdere graden av pålitelighet i studien.

Kvalitative innholdsanalytikere befinner seg gjerne innenfor såkalte hermeneutiske sirkler (Krippendorff, 2004) der en bruker kjent litteratur til å kontekstualisere lesingen av teksten og til å reartikulere innholdet i teksten med tanke på dens tiltenkte kontekst. Prosessen bestående av rekontekstualisering, retolking, og redefinering av forskningsspørsmålet gjentas flere ganger og foregår inntil en tilfredsstillende tolking er fremkommet. Tolkingen som fremkommer underbygges ofte ved å veve inn autentiske tekstutdrag og litteratur som berører konteksten som teksten blir brukt i:



Figur 1: Illustrasjon av den kvalitative innholdsanalysen (Krippendorff, 2004, s. 89).

Fremstillinger av forskningsresultater som vever inn deler av teksten og litteratur på denne måten får ofte utfordringer knytt til publisering på grunn av tidsskriftenes ordbegrensninger, men den appellerer til personer som har interesser av både det faglige innholdet og konteksten som tekstene blir brukt i, som lærere, forfattere og skolepolitikere.

Innenfor lærebokforskningen i matematikk er innholdsanalysestudier utbredt (Fan, Zhu & Miao, 2013), der det typisk fokuseres på et matematisk emne som innrettes mot en sammenligning av andre lærebøker. I motsetning til den deduktive tilnærmingen velger en ikke koder på forhånd (lukket koding) i en induktiv innholdsanalyse, de dukker gradvis opp gjennom analysen hvor en starter med å kode alt (åpen koding), som etter hvert samles i større felles grupperinger. Forskning som baserer seg på innholdsanalyser mener Rezat og Strässer (2017) egner seg til å svare på spørsmål vedrørende innholdet i lærebøker og sammenhenger mellom innholdet og konteksten som bøkene brukes i. Det vil si at innholdet ikke er begrenset til kun det matematiske innholdet, men at det også omfatter didaktiske aspekter.

Jeg startet innholdsanalysen med å velge ut oppgavene i de respektive algebrakapitlene, som introduserte bokstaver som symbol for variable størrelser for første gang, som analyseenheter. Det var i fire 8. klassebøker, Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006), Nye Mega 8B (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2006), Tetra 8 (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006) og Grunntall 8 (Bakke & Bakke, 2006) og én 9. klassebok, Kode X9A (Christensen, 2007). Alle oppgavene, inklusive deloppgavene, vanligvis merket med a), b), c), …, tilhørende hvert lærebokkapittel er blitt analysert. Det vil si at oppgaver som ikke har deloppgaver er talt på samme måte som én deloppgave i oppgaver som har deloppgaver. Til sammen utgjør disse 2392 (del)oppgaver.

Lærebok	**Kapittelnavn**	**Antall sider**	**Antall (del)oppgaver**
Faktor 1 (F1)	Tall og algebra	26	198
Nye Mega 8B (NM8B)	Algebra	36	317
Grunntall 8 (G8)	Algebra	24	330
Tetra 8 (T8)	Algebra	41	311
Kode X9A (KX9A)	Algebra	114	1236

Tabell 1: Datamaterialet.

Kode X9A (Christensen, 2007) skiller seg ut med 1236 oppgaver, som delvis kan forklares med at læreverket ikke introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser før 9. klasse. Forskjellen i antall oppgaver per lærebok er det tatt hensyn til i presentasjonen av funnene, hvor fordelingen av oppgavetypene innenfor hver lærebok er oppgitt i prosent. Når analyseenhetene var bestemt, startet arbeidet med å forstå datamaterialet. Etter en rekke gjennomlesninger av oppgavene ble jeg gradvis mer fortrolig med materialet, og jeg kunne starte med å organisere de kvalitative dataene. Gjennom en åpen koding som innebar at jeg kommenterte i margen for hver ny gjennomlesning, dannet jeg et grunnlag for å kunne opprette mer generelle beskrivelser systematisert i kategorier. Deretter ble kommentarene overført til Word- og Excel-dokument. Disse utgjorde grunnlaget for den første genereringen av kategorier, som bestod av kommentarer med tilnærmet likt innhold. Jeg gikk deretter igjennom alle oppgavene på ny med disse kategoriene som referanse for å kunne gruppere kategorier som utgjorde en større felles kategori. Ved stadig å gruppere om datamaterialet på denne måten ble antall kategorier redusert, men like viktig var det at denne klassifiseringen innebar en kontinuerlig sammenligning mellom ulike deler av materialet som ikke tilhørte samme kategori (Bryman, 2008). Etter gjentatte runder med gjennomlesninger og stadige justeringer gav det meg en dyp forståelse av det matematiske innholdet i oppgavene som til slutt genererte et sett med hovedkategorier med tilhørende underkategorier på ulike nivå (se vedlegg 1).

Funn og diskusjon

De genererte kategoriene viser at introduksjonen av bokstaver som symbol for variable størrelser skjer gjennom fem hovedtyper av oppgaver som forgreiner seg ut i 36 underkategorier (se vedlegg 1). Etter at jeg har presentert hovedkategoriene av oppgavetyper og oppgavenes fordeling blant lærebøkene vil jeg eksemplifisere og diskutere kategoriene med utgangspunkt i autentiske oppgaver fra de analyserte lærebøkene. Oppgaver fra de fire minst representerte kategoriene presenteres kort først, før en rekke eksempler fra den dominerende kategorien presenteres. De fem hovedkategoriene av oppgavetyper er:

Hovedkategorier	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	Totalt
Algebraisk uttrykk	33 %	87 %	83 %	71 %	82 %	78 %
Algebraisk formel	-	-	5 %	-	4 %	3 %
Algebraisk likning	44 %	3 %	-	-	-	4 %
Kun tall	18 %	8 %	11 %	20 %	14 %	14 %
Spill, pc, grublis	0 %	-	0 %	9 %	-	2 %

Tabell 2: Prosentvis fordeling av hovedkategorier av oppgaver innen hver lærebok og totalt.

Matrisen viser at fire av fem lærebøker har overvekt av oppgaver om algebraiske uttrykk. Faktor 1 (Hjardar & Pedersen, 2006) skiller seg ut ved at 44 % av oppgavene er av typen 'algebraisk likning', hvor 85 % av de oppgavene handler om å løse lineære likninger med en ukjent og 15 % inneholder å sette prøve på svaret:

a) Løs likningen $\frac{x}{3} = 4 + 1$.

b) Sett prøve på likningen.

Figur 2: Eksempeloppgave på hovedkategorien ‘algebraisk likning’ (Hjardar & Pedersen, 2006, s. 199).

Innenfor hovedkategorien ‘kun tall’ handler oppgavene om å lage, tolke og regne med tall. Disse oppgavene går hovedsakelig ut på å bruke prioriteringsreglene for regneoperasjoner og regne med potenser og brøk, hvor flesteparten av underkategoriene har oppstått fra læreboken som introduserer bokstaver som symbol for variable størrelser i 9. klasse:

Regn ut.

a) $4^3 \cdot 4^4$ **c)** $10^3 \cdot 10^2$ **e)** $5^2 \cdot 5^4$

b) $8^2 \cdot 8^5$ **d)** $2^4 \cdot 2^6$ **f)** $10^3 \cdot 10^6$

Figur 3: Eksempeloppgave på hovedkategorien ‘kun tall’ (Christensen, 2007, s. 35).

Oppgaver av typen ‘algebraisk formel’ finnes i varianter der en lager, setter inn verdier og manipulerer med slike:

Johan er fem år eldre enn søsteren sin, Kristin.

a) Hvor gammel er Johan hvis søsteren er 3 år?

b) Hvor gammel er Johan hvis søsteren er 7 år?

c) Hvor gammel er Johan hvis søsteren er 10 år?

d) Lag en formel som viser hvor gammel Johan (J) er, sammenlignet med Kristin (K).

Figur 4: Eksempeloppgave på hovedkategorien ‘algebraisk formel’ (Bakke & Bakke, 2006, s. 214).

Oppgaven får frem at det er noe som varierer gjennom de tre spesialtilfellene i deloppgavene a) - c), og bokstavene kommer som en naturlig konsekvens av oppgave d) hvor en skal lage en generell algebraisk formel. Oppgaven følger samme induktive prinsipp som ligger til grunn for læreplanens ønske om å bruke tallmønster som inngangsport til algebraen. Det eneste som kan sies å skille de er at oppgaver som den over tenderer mot en generalisering i et funksjonslæreperspektiv. En legger ellers merke til at oppgaven benytter store ukursiverte bokstaver på de variable, som kan relateres til den tredje elevtolkningen hos Küchemann (1981) hvor en tolker bokstaver som forkortninger på navnet til objektet eller som objektet selv. Blant hovedkategorien ‘spill, pc og grublis’ finner en oppgaver som vanskelig lar seg kode med noe annet:

Figur 5: Eksempeloppgave på hovedkategorien 'spill, pc, grublis' (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006, s 105).

Innenfor den dominerende hovedkategorien, 'algebraisk uttrykk' (78 %), eksisterer det fire underkategorier:

Algebraisk uttrykk	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	Totalt
lage	28 %	14 %	-	62 %	7 %	14 %
forklare eller diskutere	3 %	2 %	-	8 %	9 %	6 %
sette inn verdi(er) i	23 %	49 %	30 %	26 %	6 %	19 %
regne med	46 %	35 %	70 %	4 %	78 %	61 %

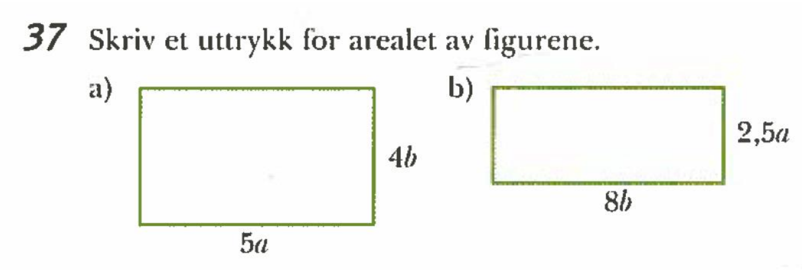
Tabell 3: Prosentvis fordeling av underkategorier av oppgavetyper innenfor hovedkategorien 'algebraisk uttrykk' i hver lærebok og totalt.

Oversikten kan tyde på enkelte store forskjeller mellom lærebøkene hvor eksempelvis 78 % (av 82 %) av oppgavene i Kode X9A (Christensen, 2007) dreier seg om å regne med algebraiske uttrykk og 62 % (av 71 %) av oppgavene i Tetra 8 (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006) handler om å lage algebraiske uttrykk. For å kunne si noe mer om potensielle forskjeller, kan en se på underkategorier av oppgaver hvor en lager algebraiske uttrykk:

lage	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	**Totalt**
fra figur	33 %	28 %	-	56 %	66 %	53 %
til figur	-	-	-	-	15 %	4 %
fra tekst	67 %	69%	-	27%	14%	32%
til tekst	-	-	-	-	5%	2%
fra mønster	-	3%	-	17%	-	9%

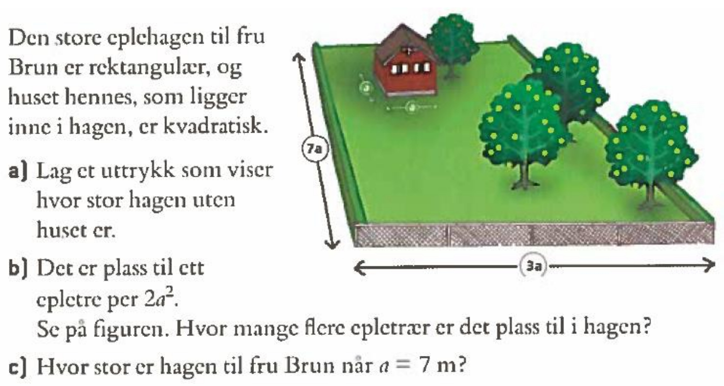
Tabell 4: Prosentvis fordeling av underkategorier av oppgavetyper innenfor underkategorien 'lage algebraisk uttrykk' i hver lærebok og totalt.

Matrisen viser at oppgavetypen primært handler om å lage bokstavuttrykk fra figur og fra tekst, og at å bruke mønster til å lage algebraiske uttrykk, slik læreplanen antyder, er mindre utbredt (9 % av 14 % av 78 % ≈ 1 %). Et eksempel fra underkategorien som opptrer hyppigst, viser at det ikke nødvendigvis er så stor forskjell på det matematiske innholdet i oppgaver hvor en lager algebraiske uttrykk (14 % av 78 %) og i oppgaver som eksplisitt ber om regning med algebraiske uttrykk (61 % av 78 %):



Figur 6: Eksempeloppgave på underkategorien der en lager algebraisk uttrykk fra figur (1.a.i.1.) (Hagen, Carlsson, Hake & Öberg, 2006, s. 97).

Begge deloppgavene er kodet som å lage algebraisk uttrykk fra figur, hvor det bes om uttrykk for arealet av figurene der sidelengdene er gitt som ulike variable uttrykk. Men selv om oppgaven har en ordlyd som rettferdiggjør kodingen, handler det matematiske innholdet i stor grad om regning med slike uttrykk, eksemplifisert i a) med $A = l \cdot b = 5a \cdot 4b = 20ab$. De variable i uttrykkene er ikke definert verken i infoteksten eller på figuren utover å opptre som et multiplum av den aktuelle variabelen plassert på sidene i rektanglet. Hvorfor lengden og bredden uttrykkes ved ulike variabler, kommenteres heller ikke. Mangelfulle presiseringer av den variable går igjen i oppgavene, og kan tenkes å bygge opp under enkelte misoppfatninger (Küchemann, 1981) ettersom hvis en ikke vet hva bokstavene står for er det naturlig å ty til mer intuitive forestillinger som at de er forkortninger på navnet til objektet eller som objektet selv. Lite tydelige presiseringer av hva den variable til enhver tid står for, kan også være en medvirkende årsak til den svake norske begrepsforståelsen som Naalsund (2012) beskriver. I neste eksempeloppgave er det mer tekst, men det matematiske innholdet i deloppgave a) er allikevel definert til å stamme fra figuren fordi deloppgaven lar seg ikke løse uten den:



Figur 7: Eksempeloppgave som inneholder underkategorier av 'lage algebraisk uttrykk' (1.a.i.1.), 'regne med algebraisk uttrykk' (1.d.i.2.b.) og 'sette inn verdi(er) i algebraisk uttrykk' (1.c.ii.2.) (Christensen, 2007, s. 52).

Oppgaven er gitt i en praktisk kontekst, men den variable er ikke definert og må tolkes ut ifra illustrasjonen. I oppgaveteksten er algebrauttrykkene skrevet med kursiv og på figuren uten kursiv. Det algebraiske uttrykket i a) kan lages slik $3a \cdot 7a - a \cdot a = 21a^2 - a^2 = 20a^2$, hvor arealkonteksten gjør at svaret lett kan assosieres med 20 arealenheter. Men a er ikke en enhet, a er et symbol for et vilkårlig antall av enheten, så $20a^2$ betyr derfor 20 ganger kvadratet av a meter. Det er langt fra trivielt i en introduksjonsfase til algebra, men som ikke må tas til inntekt for et syn om at introduksjonen til algebra nødvendigvis skal være triviell. I b), som er kodet som å regne med algebraiske uttrykk, informeres det om at det er plass til ett epletre per $2a^2$. Også her er det lett å tolke den variable som en arealenhet, eksempelvis $2\mathrm{m}^2$, men det er den ikke. Siden a står for et vilkårlig antall meter, betyr ett epletre per $2a^2$ egentlig ett epletre per 2 ganger kvadratet av et vilkårlig antall, a, av enheten meter. I deloppgave c), som er kodet til å 'sette inn verdi indirekte fra tekst', er det gitt informasjon som implisitt definerer den variable til å være et vilkårlig antall meter. Progresjonen i oppgaver som denne starter med en deloppgave der en blir bedt om å lage et generelt uttrykk, som egentlig ikke trenges for å kunne besvare sluttdeloppgaven. Som elev vil det derfor ikke være unaturlig å stille seg spørsmålet om hvorfor en trenger å innføre bokstaver i algebraen. Oppgaven kan karakteriseres som at den har et deduktivt preg hvor konteksten i liten grad får frem selve variabelaspektet og hvor den variable opptrer mer som en ukjent, i tillegg til at den lett kan tolkes som en enhet.

Innenfor underkategorien omhandlende å forklare eller diskutere algebraiske uttrykk (6 % av 78 % ≈ 5 %) er det tre typer av oppgaver:

forklare eller diskutere	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	Totalt
uttrykk	100 %	60 %	-	100 %	32 %	46 %
feilsvar	-	40 %	-	-	35 %	29 %
utregning eller regel	-	-	-	-	33 %	25 %

Tabell 5: Prosentvis fordeling av underkategorier av oppgavetyper innenfor underkategorien 'forklare eller diskutere algebraisk uttrykk' (1.b.i.-iii.) i hver lærebok og totalt.

Et eksempel på den første underkategorien er:

I sommerferien selger Linn og Cecilie jordbær og grønnsaker ved innkjørselen til gården der de bor. Poteter tar de a kr per kilo for, gulrøttene koster b kr per bunt, mens de tar c kr for en jordbær-kurv.
Hva betyr uttrykket $12a + 3b + 2c$?

Figur 8: Eksempeloppgave på underkategorien 'forklare eller diskuterer uttrykk' (1.b.i.) (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2006, s. 47).

Oppgaven har en praktisk kontekst omhandlende salg av frukt og grønt, hvor de variable er implisitt definert i oppgaveteksten som kiloprisen per vare. Elevene skal forklare hva det algebraiske uttrykket $12a + 3b + 2c$ betyr. Rekkefølgen på faktorene i de tre leddene i uttrykket er naturlig med tanke på oversettingen fra den gitte konteksten til matematiske symbol eksemplifisert ved at prisen på 12 kilo med poteter til a kroner per kilo skrives som $12a$. Dersom en slik vektlegging av multiplikator og multiplikand har funnet sted tidligere i elevenes arbeide med tallære, kan en påstå at selve oversettingen bør gi god mening for elevene. Men, det som trolig ikke gir like mye mening er den praktiske konteksten med salg av frukt og grønt og at det er kiloprisen som er den variable og ikke antall kilo som selges. En kan spekulere i om det er fordi en ønsker at faktorene i de algebraiske uttrykkene skal ha den tradisjonelle rekkefølgen med tallfaktoren fremst også i introduksjonen til bokstaver som symbol for variable størrelser. Her presenteres en eksempeloppgave på å forklare eller diskutere algebraiske feilsvar:

Svarene nedenfor er fra en prøve i algebra. Bare ett av svarene i hver rad er riktig.

a) Finn det riktige svaret. Vis utregningen.

b) Hvordan har elevene som kom fram til de gale svarene, tenkt? Forklar.

I	$3a + (2a + 5)$	☐ $10a$	☐ $5a + 5$	☐ $3a + 7$
II	$5a + (2b + 2a)$	☐ $7a + 2b$	☐ $5a + 4ab$	☐ $9ab$
III	$4x + (3 - 2x)$	☐ $2x + 3$	☐ $5x$	☐ 5
IV	$8x + (3 - x) + 5$	☐ $10x + 5$	☐ $7x + 8$	☐ $15x$
V	$(5x - 2) + (5 - 2x)$	☐ $6x$	☐ $7x + 7$	☐ $3x + 3$
VI	$2a + (4 - 2a) - 4$	☐ $4a + 8$	☐ $8a$	☐ 0

Figur 9: Eksempeloppgave på underkategorien 'forklare eller diskutere feilsvar' (1.b.ii.) (Christensen, 2007, s. 23).

Det er deloppgave b) som inneholder å forklare feilsvar, hvor enkelte av feilsvarene kan relateres til Küchemann (1981) sin beskrivelse av ulike elevtolkninger. Et eksempel på det er feilsvaret 5 i deloppgave III, hvor det er nærliggende å tenke seg at en kan har ignorert bokstaven og regnet $4 + 3 - 2 = 5$. Ved at elevene blir konfrontert med ulike feilsvar som en vet går igjen i algebra, kan en legge forholdene til rette for at elevene blir mer bevisste sin egen tenkemåte og eventuelle regler de har fått presentert i forbindelse med regning med algebraisk uttrykk. 75 % av oppgavene som eksisterer i hele underkategorien 'forklare eller diskutere uttrykk' tilhører læreboken for 9. trinn, hvor antallet deloppgaver kan tilskrives oppgaver som på figur 8 hvor det er 12 feilsvar som elevene skal forklare.

Mønsteroppgaver, som en kan tolke at læreplanen ønsker skal bli brukt i introduksjonen til algebra, finner en eksempler på i to av fem lærebøker, som til sammen utgjør ca. 1% av de analyserte oppgavene. I slike oppgaver går en fra det spesielle til det generelle, hvor bokstavene kommer som en naturlig konsekvens av det å skulle uttrykke seg generelt:

Finn de neste leddene og uttrykket i tallfølgen. Skriv av tabellene i arbeidsboka di.

Tall nummer	1	2	3	4	5	6	7	*n*
Tallfølge	7	12	17	22				

Figur 10: Eksempeloppgave på underkategorien 'lage algebraisk uttrykk fra mønster' (1.a.iii.) (Hagen m.fl., 2006, s. 116).

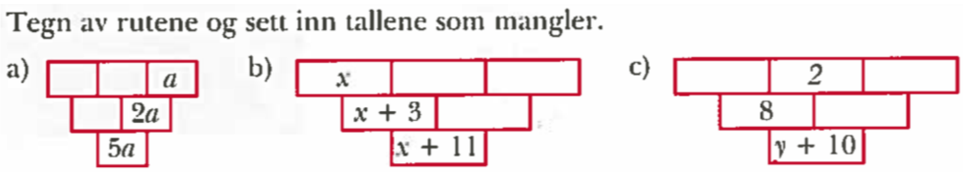
Oppgaven handler om å finne de tre neste tallene i følgen, 7, 12, 17, 22, og til slutt finne et generelt uttrykk for den. Oppgaven er med på å tydeliggjøre forbindelsene mellom tall og algebra gjennom leting etter mønster som grunnlag for å kunne uttrykke seg generelt. Nøkkelen til suksess er å finne en sammenheng mellom tallnummeret og det korresponderende tallet. Tallene i følgen følger et entydig mønster, $1 \cdot 5 + 2, 2 \cdot 5 + 2, 3 \cdot 5 + 2,$ ... og kan i det generelle tilfellet uttrykkes som $n \cdot 5 + 2$. Den induktive tilnærmingen får frem et behov for hvorfor en trenger bokstaver som symbol for variable størrelser. Selve oppgavetypen oppfyller læreplanens intensjon med området tall og algebra og Mason (1996) sine tanker om generalisering. Men dens plassering til slutt i kapitlet gjør at den egentlig ikke kan sies å være en introduksjon til bokstaver i algebra, men heller som enn avslutning. Det er i tråd med funnene fra studien til Kongelf (2015).

Den dominerende underkategorien av algebraiske uttrykk (78 %) er å regne med algebraiske uttrykk (61 % av 78 %), der alle lærebøkene inneholder manipulasjonsoppgaver bestående av addisjon og subtraksjon uten parenteser og potenser:

Trekk sammen.
a) $3a + 4b + 2a + 3b$
b) $3x + 2y + x + 4y$
c) $4m + 2n - 3m + n$
d) $8k + 5l - 7k - 3l$

Figur 11: Eksempeloppgave på underkategori av ‘regne med algebraisk uttrykk’ (1.d.i.1.b.) (Hjardar & Pedersen, 2006, s. 191).

I tillegg til klassiske manipulasjonsoppgaver som over fins det alternative varianter av enkel regning med algebraiske uttrykk:



Figur 12: Eksempeloppgave på underkategori av ‘regne med algebraisk uttrykk’ (1.d.i.1.b.) (Hagen m. fl., 2006, s. 96).

Oppgavetypen, som kalles bottentalet og ble innført av Ulin (1983) i Norden, går ut på å fylle inn såkalte tall, til tross for at de fleste innfyllingene er algebraiske uttrykk. Oppgaven er relativt utradisjonell både i utformingen og fokuset på balanseegenskapen til likhetstegnet, hvor eksempelvis å fylle inn $3a$ i naboruten til $2a$ tilsvarer å løse oppgaven $\square + 2a = 5a$. En kan litt upresist si at oppgaven går motsatt vei av hva som er vanlig i tradisjonelle manipulasjonsoppgaver, og den kan være med på å dempe eventuelle misoppfatninger knytt til likhetstegnet.

Den nest mest utbredte underkategorien av algebraiske uttrykk (78 %) handler om å sette inn verdi(er) i algebraiske uttrykk (19 % av 78 %). Flesteparten av disse er innsettingsoppgaver hvor det i en eller annen form bes direkte om innsetting:

a) Regn ut verdien av $5a + 3b$ når $a = 4$ og $b = 7$
b) Regn ut verdien av $a + 3b$ når $a = -5$ og $b = 2$
c) Regn ut verdien av $5a - 8b$ når $a = -4$ og $b = -3$
d) Regn ut verdien av $3a + b$ når $a = -8$ og $b = 3$
e) Regn ut verdien av $-5a + 3b$ når $a = -6$ og $b = 2$
f) Regn ut verdien av $2a - 3b$ når $a = 6$ og $b = -5$

Figur 13: Eksempeloppgave på underkategori av ‘sette inn verdi i algebraisk uttrykk’ (1.c.i.2.) (Guldbrandsen, Melhus & Løchsen, 2006, s. 36).

Å gjøre mange oppgaver som handler om å sette inn verdi(er) i algebraiske uttrykk i introduksjonen til algebra kan relateres til det laveste nivået i Küchemanns (1981) elevtolkninger, karakterisert som der hvor bokstavene blir byttet ut med numeriske verdier. Et alternativ til de mer klassiske innsettingsoppgavene over er:

Du vet at $x + y = 15$. Hva er

a) $x + y - 14$ b) $x + x + y + y$ c) $y + x + 1$

Figur 14: Eksempeloppgave på underkategori av 'sette inn verdi(er) i algebraisk uttrykk' (1.c.i.2.) (Hagen m. fl., 2006, s. 114).

Oppgaven åpner for flere løsningsmetoder, hvor en av de er å se på strukturelle likheter, som gjør det effektivt å løse for eksempel a) ved å sette inn 15 for $x + y$. Slike oppgaver, som en kan bruke strukturelle likheter for å løse, kan være med på å øve opp elevenes evne til å akseptere algebraiske uttrykk som objekt og ikke som en uferdig prosess (Kieran, 1990). Bruken av begrepet objekt her må ikke forveksles med bruken av ordet i forbindelse med misoppfatninger hvor en betrakter bokstaver som forkortninger på navnet til objektet eller som objektet selv.

Konklusjon

Studien viser at fordelingen av oppgavetyper varierer relativt lite blant lærebøkene om en ser på hovedkategoriene, og relativt mye om en betrakter alle 37 underkategoriene, hvor mange av disse kan tilskrives læreverket som introduserer algebra i 9. klasse. Det vil si at til tross for at lærebøkene totalt sett inneholder mange ulike typer av oppgaver, er algebramanipulasjon den dominerende aktiviteten. Manipulasjonen dreier seg i hovedsak om å regne med algebraiske uttrykk (61 % av 78 % ≈ 48 %) og sette inn verdi(er) for variable(r) i algebraiske uttrykk (19 % av 78 % ≈ 15 %). I oppgaver hvor en lager algebraiske uttrykk (14 % av 78 % ≈ 11 %) fra figur eller tekst, er det matematiske innholdet også i disse ofte regning med algebraiske uttrykk. Det er kun to lærebøker som har med mønsteroppgaver (9 % av 14 % av 78 % ≈ 1 %) som grunnlag for å lage algebraiske uttrykk, hvorav den ene læreboken bare har én slik oppgave. Læreboken som har med flest mønsteroppgaver (7 % av oppgavene i læreboken) benytter disse som avslutning på kapitlet, og ikke som introduksjon. Det, sammen med de mange manipulasjonsoppgavene og de få mønsteroppgavene, gjør at en kan konkludere med at lærebokforfatterne i begrenset grad kan ha laget oppgavene ut ifra den fortolkede intensjonen med hovedområdet tall og algebra. Den samme begrensningen kan sies om Masons (1996) syn på viktigheten av at elevene får generalisere fra starten av i algebra. Slik som oppgavene i introduksjonskapitlene fremstår, kommer klassisk algebramanipulasjon før en har gitt mening til bokstavene. Dette funnet tolkes til å stå i kontrast til det Küchemann

(1981) har hevdet lenge om viktigheten av å gi mening til bokstavene for å kunne dempe elevvanskelighetene i algebra. Selve variabelaspektet svekkes også gjennom oppgaver hvor den praktiske konteksten gjør at bokstavene opptrer mer som ukjente enn som variabler, samt i oppgaver med en deduktiv progresjon hvor det bes om å lage et algebraisk uttrykk i starten som egentlig ikke trengs for å kunne svare på de etterfølgende deloppgavene. Det kan være med på å forsterke inntrykket av at bokstaver er noe som innføres i matematikken fordi en skal manipulere med dem, og ikke fordi det har oppstått et behov for å uttrykke generaliseringer med matematiske symbol. Det kan være en mulig delforklaring på det Naalsund (2012) fant ut om norske ungdomsskoleelevers begrensede begrepsforståelse og prosedurale ferdigheter i algebra. Den begrensede begrepsforståelsen kan kobles til at det blir gitt oppgaver hvor selve variabelaspektet kommer lite frem, mens den begrensede prosedurale ferdigheten kan kobles til oppgaver som ikke får frem behov for bokstaver som symboler for variable størrelser. Oppgavestudien viser også at det den variable til enhver tid står for, er lite tydeliggjort i oppgavene. For å sette det på spissen kan en si at å regne på noe uten å se et behov for det, kan føre til et syn på algebraen som et avskåret matematisk emne med særegne regler uten tilknytning til noe annet. Funnene mine er også i tråd med Espelands (2017) karakteristikk av oppgavene i læreboken fra starten av videregående skole som lite egnet til å utvikle begrepsforståelse i algebra. Til tross for at beskrivelsen av hovedområdet tall og algebra i den norske læreplanen harmonerer med vektleggingen av generaliteter og mønster i algebra, tilsvarende det en kan finne i Singapore, viser studien at det matematiske innholdet i de analyserte oppgavene ikke vektlegger det. Det vil si at de analyserte lærebøkene i begrenset grad samsvarer med den fortolkede intensjonen av hovedområdet tall og algebra i læreplanen.

Til tross for at det matematiske innholdet i oppgavene primært handler om manipulasjon av algebraiske uttrykk, eksisterer det enkelte mer utradisjonelle regneoppgaver med algebraiske uttrykk hvor en blir bedt om å forklare feilsvar, innsettingsoppgaver som innbyr til å se på strukturelle likheter i algebraiske uttrykk og oppgaver som bottentallet. Slike oppgavetyper kan føre til at elevene blir mer bevisste sin egen tenkemåte, styrke forståelsen av likhetstegnet og evnen til å kunne se på algebraiske uttrykk som objekt og ikke prosess. Funnene viser allikevel at de analyserte lærebøkene har potensiale til forbedringer i form av oppgaver som i større grad får frem behov for å innføre bokstaver som symbol for variable størrelser gjennom generaliseringer av mønster og sammenhenger, som læreplanen legger opp til. Slike typer av generaliseringsoppgaver innbyr til en induktiv metode som vil kunne involvere elevene på en aktiv og selvoppdagende måte når de studerer en rekke spesialtilfeller, som de abstraherer egenskaper fra, for å kunne uttrykke seg generelt. Oppgavestudien kaster lys på vedvarende svake norske algebraprestasjoner og kan brukes til å inspirere forfattere og lærere til å variere oppgavene som tilbys elevene. Elevene vil da i større grad kunne få oppleve behovet for å innføre bokstaver som symbol for variable størrelser og hvorfor algebraen er så viktig i matematikk.

Referanser

Ahl, L., Gunnarsdóttir, G. H., Koljonen, T. & Pálsdóttir, G. (2015). How teachers interact and use teacher guides in mathematics – cases from Sweden and Iceland. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 179-197.

Alseth, B., Breiteig, T. & Brekke, G. (2003). *Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus.* Notodden: Telemarksforsking.

Bakke, B. & Bakke, I. H. (2006). *Grunntall 8. Matematikk for ungdomstrinnet.* Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bjuland, R. (2012). The mediating role of a teacher's use of semiotic resources in pupils' early algebraic reasoning. *ZDM – the International Journal on Mathematics Education*, *44*(5), s. 665-675.

Bryman, A. (2008). *Social research methods*. Third Edition. Oxford University Press.

Cho, J. Y. & Lee, E. (2014). Reducing confusion about Grounded Theory and Qualitative Content Analysis: Similarities and differences. *The Qualitative Report*, *19*(32), 1-20. Hentet fra http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol19/iss32/2

Christensen, A. S. (2007). *Kode X 9A. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Forlaget fag og kultur.

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing*, *62*(1), 107-115.

Espeland, H. (2017). *Algebra at the start of upper secondary school. A case study of a Norwegian mathematics classroom with emphasis on the relationship between the mathematics offered and students' responses.* PhD-avhandling i matematikkdidaktikk. Kristiansand: Universitetet i Agder. Hentet fra https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2435518/Hildegunn%2BEspeland.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Fan, L. (1999). Applications of arithmetic in US and Chinese textbooks: A comparative study. I G. Kaiser, E. Lina & I. Huntley (red.), *Studies in mathematics education series: II. International comparisons in mathematics education* (s. 151-162). London: Falmer Press.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *45*, 765-777.

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *45*(5), 633-646.

Gilje, Ø., Ingulfsen, L., Dolonen, J. A., Furberg, A., Rasmussen, I., Kluge, A., … Skarpaas, K. G. (2016). *Med ARK og APP 2016– Bruk av læremidler og ressurser for læring på tvers av arbeidsformer.* Oslo: Universitetet i Oslo. Hentet fra:

http://www.uv.uio.no/iped/forskning/prosjekter/ark-app/arkapp_syntese_endelig_til_trykk.pdf

Goodlad, J. I., & Associates. (1979). *Curriculum inquiry: The study of curriculum practice*. New York: McGraw-Hill.

Grevholm, B. (2011). Network for research on mathematics textbooks in the Nordic countries. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *16*(4), 91-102.

Grevholm, B. (2017). The network for research on mathematics textbooks, its birth, life and results. I B. Grevholm (red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries* (s. 21-38). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grevholm, B. (red.) (2017b). *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S. & Hole, A. (2017). *Prioritering og progresjon i skolematematikken. Nøkkelen til å lykkes i realfag. Analyser av data fra TIMSS Advanced og TIMSS*. Oslo: Cappelen Damm Akademisk. Hentet fra https://press.nordicopenaccess.no/index.php/noasp/catalog/book/26

Grønmo, L.S. & Onstad, T. (red.) (2009). *Tegn til bedring: norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2007*. Oslo: Unipub.

Guldbrandsen, J. E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2006). *Nye Mega 8B. Matematikk for ungdomsstrinnet* (2. utg.). Oslo: N. W. Damm & Søn.

Hagen, M. B., Carlsson, S., Hake, K.B. & Öberg, B. (2006). *Tetra 8. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Det norske samlaget.

Halldórsdóttir, R. (2015). Comparison of three textbooks published for 8th grade in Iceland. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 111-128.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., … Human, P. (1997). *Making sense – teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hiebert, J., Gallimore R., Garnier H., Givvin K. B., Hollingsworth H., Jacobs J., … Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study* (NCES 2003-013, U.S. Department of Education). Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hjardar, E. & Pedersen, J. E. (2006). *Faktor 2. Grunnbok. Matematikk for ungdomstrinnet*. Oslo: Cappelen Damm.

Hodgen, J., Oldenburg, R. & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. I T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (red.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (s. 32-45). London, New York: Routledge.

Hsieh, H. F. & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, *15*(9), 1277-1288.

Jablonka, E. & Johansson, M. (2010). Using texts and tasks: Swedish studies on mathematics textbooks. I B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Palsdottir, B. Dahl, B. D. Söndergaard & L. Haapasalo (red.), *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education: Norway, Sweden, Iceland, Denmark and contributions from Finland* (s. 363-372). Charlotte, NC: IAP-Information Age Publishing.

Kendal, M. & Stacey, K. (2004). Algebra: A world of difference. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (red.), *The future of the teaching and learning of algebra, the 12th ICMI study* (s. 329-346). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I P. Nesher & J. Kilpatrick (red.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (s. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. I F. K. Lester (red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (s. 707-762). Charlotte, NC: Information Age.

Kongelf, T. R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 83-110.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: an introduction to its methodology.* 2. utgave. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

KUF. (1987). *Mønsterplanen for grunnskolen.* Oslo: Aschehoug.

KUF. (1996). *Læreplanverket for den 10-årige grunnskolen.* Oslo: Nasjonalt læremiddelsenter.

Kunnskapsdepartementet (2015). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen (2015-2019).* Hentet fra: https://www.regjeringen.no/contentassets/869faa81d1d740d297776740e67e3e65/kd_realfagsstrategi.pdf

Küchemann, D. (1981). Algebra. I K. Hart (red.), *Children's understanding of mathematics* (s. 11-16). London: John Murray.

Lappan, G. & Briars, D. (1995). How should mathematics be taught? I I. M. Carl (red.), *Seventy-five years of progress: Prospects for school mathematics* (s. 131–156). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lepik, M., Grevholm, B. & Viholainen, A. (2015). Using textbooks in mathematics classrooms – the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 129-156.

Li, Y., Chen, X. & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, *41*(6), 809–826.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. I N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (red.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (s. 65-86). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Meld. St. 28. (2015-2016) (2016). *Fag – fordypning – forståelse – en fornyelse av Kunnskapsløftet.* Hentet fra https://www.regjeringen.no/contetasets/e8e1f41732ca4a64b003fca213ae663b/no/pdfs/stm201520160028000dddpdfs.pdf

Michael, N. (2002). *Inside the PISA: Comparing two high achieving countries from the west (Finland) and from the east (Japan).* Paper presented in the ICMI Comparative Study Conference 2002, Hong Kong, October, 2002.

Naalsund, M. (2012). *Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students' algebraic proficiency*. PhD-avhandling i matematikkdidaktikk. Oslo: Universitet i Oslo.

Pepin, B. (2009). *Mathematical tasks and learner dispositions: a comparative perspective*. Proceedings of CERME 6, Lyon, Frankrike, s. 2504-2512. Hentet fra http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/cerme6.pdf

Pepin, B., Gueudet, G. & Trouche, L. (2013). Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. *ZDM – The international Journal on Mathematics Education, 46*, 685-698.

Rensaa, R. J. & Grevholm, B. (2015). A textbook in linear algebra – the use and views of engineering students. *Nordic Studies in Mathematics Education, 20*(3-4), 223-245.

Rezat, S. & Sträßer, R. (2017). Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. I B. Grevholm (red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries* (s. 495-514). Oslo, Norge: Cappelen Damm Akademisk.

Schmidt, W. H., McKnight C. C., Valverde G. A., Houang R. I. & Wiley D. E. (1996). *Many visions, many aims: A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. London, UK: Kluwer Academic Publishers.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S. & Wolfe, R. G. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Senk, S. L., Thompson, D. R. & Wernet, J. L. W. (2014). Curriculum and achievement in algebra 2: influences of textbooks and teachers on students' learning about functions. I Y. Li & G. Lappan (red.), *Mathematics curriculum in school education* (s. 515-540). Dordrecht: Springer.

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R. & Clark, D. (2010). The role of mathematical tasks in different cultures. I Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huang & D. Clark (red.) *Mathematical tasks in classrooms around the world. The learner's perspective study* (s. 1-14). Rotterdam, Nederland: Sense Publishers.

Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical task as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268–275.

Stigler, J., Fuson, K., Ham, M., & Kim, M.S. (1986). An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction*, *3*(3), 153-171.

Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula*. London, UK: Qualifications and Curriculum Authority.

Sutherland, R. (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. I K. Stacey, Chick, H., & Kendal, M. (red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study* (Vol. 8, s. 71-96). Dordrecht, Nederland: Kluwer Academic Publishers.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*(4), 315-327.

Utdanningsdirektoratet. (2005). *Kunnskapsløftet.* Hentet fra https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/

Ulin, B. (1983). *Att finna ett spår. Motiv och metoder i matematikundervisningen – Erfarenheter ur waldorfpedagogigken.* Järna: Robygge.

Veilande. I. (2017). The characteristics of mathematics textbook research: A meta-study of papers from ICME-10, ICME-11, and ICME-12. I B. Grevholm (red.), *Mathematics textbooks, their content, use and influences. Research in Nordic and Baltic countries,* (s. 471-494). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Viholainen, A., Partanen, M., Piiroinen, J., Asikainen, M. A. & Hirvonen, P. E. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3-4), 157-178.

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*, 609-626. Taiwan: National Science Council.

Vedlegg 1

	F1	NM8B	G8	T8	KX9A	***Totalt***
1. Algebraisk uttrykk						
a. lage						
i. figur						
1. fra	6	11	0	77	49	***143***
2. til	0	0	0	0	10	***10***
ii. tekst						
1. fra	12	27	0	37	10	***86***
2. til	0	0	0	0	4	***4***
iii. fra mønster	0	1	0	23	0	***24***
b. forklare eller diskutere						
i. uttrykk	2	3	0	14	20	***39***
ii. feilsvar	0	2	0	0	22	***24***
iii. utregning eller regel	0	0	0	0	21	***21***
c. sette inn verdi(er)						
i. direkte						
1. en variabel	13	33	1	32	9	***88***
2. flere variabler	2	82	78	11	45	***218***
ii. indirekte						
1. fra figur	0	1	2	7	0	***10***
2. fra tekst	0	20	0	7	7	***34***
d. regne med						
i. uten potens						
1. addisjon og subtraksjon						
a. med parentes	0	0	61	0	90	***151***
b. uten parentes	30	97	78	12	106	***323***
2. multiplikasjon						
a. med parentes	0	0	54	0	181	***235***
b. uten parentes	0	0	0	0	18	***18***
3. brøk	0	0	0	0	144	***144***
ii. med potens						
1. addisjon og subtraksjon	0	0	0	0	30	***30***
2. multiplikasjon						
a. med parentes	0	0	0	0	63	***63***
b. uten parentes	0	0	0	0	94	***94***
3. divisjon	0	0	0	0	53	***53***
4. faktorisering	0	0	0	0	42	***42***
2. Algebraisk formel						
a. lage	0	0	16	0	12	***28***
b. sette inn verdi	0	0	0	0	33	***33***
3. Algebraisk likning						
a. lage	0	1	0	0	0	1
b. løse	75	7	0	0	0	82
c. sette prøve	13	0	0	0	0	13

4. Kun tall						
a. lage						
i. uttrykk	2	8	2	2	4	18
ii. figur	0	0	0	0	5	5
b. forklare eller beskrive						
i. symbol eller regneuttrykk	0	6	0	7	4	17
ii. figur	0	0	0	0	3	3
iii. utregning eller regel	0	0	0	0	3	3
c. regne med						
i. potens	0	0	0	0	48	48
ii. brøk	0	0	0	0	81	81
iii. prioriteringsregler	28	0	32	9	0	69
iv. annet	6	18	2	43	25	94
5. Spill, pc, grublis	9	0	4	30	0	***43***
	198	***317***	***330***	***311***	***1236***	***2392***