Høgskulen på Vestlandet

BACHELOROPPGAVE

Argumentasjon i matematikk med fokus på geometri hos elever i 7. klasse

Argumentation in mathematics regarding geometry with students in 7. grade

Jakob Graave Nakling

GUPEL412 Bacheloroppgave, vitenskapsteori og forskningsmetode

Institutt for språk, litteratur, matematikk og tolkning

Veileder: Nils Henry Williams Rasmussen

Innleveringsdato: 02.juni.2019

Antall ord: 8849

Abstract

This bachelor´s thesis concerns the identification of 7. grade pupils proving- and argumentation stages according to Bell (1976). Furthermore, this text also investigates the correlation between a pupil´s stage in proving and argumentation and their general understanding in the topic of geometry. To do so a geometry test was developed, to identify both understanding in geometry, and the pupils' recent stage in proving and argumentation. Some of the discoveries in this thesis indicates that it is high correlation between a pupil´s stage in proving and argumentation and their understanding. This is most clearly regarding the students with higher stages in proving and argumentation. The correlation is not as clear regarding the other pupils.

Forord

Å skrive en bacheloroppgave om argumentasjon i matematikk med fokus på geometri har vært både en lærerik og utfordrende. Det har vært perioder der alt har gått etter planen, og andre perioder der jeg har vært utfordret. Jeg er takknemlig for at jeg ikke har stått alene i perioden der undersøkelsen ble gjennomført og oppgaven ble skrevet. Jeg vil derfor benytte anledningen til å takke medstudenter som har vært gode samtalepartnere i utviklingen av denne oppgaven. Jeg vil også rette en stor takk til min veileder, Nils Henry Williams Rasmussen som har vært en stor hjelp i tider jeg selv ikke alltid så veien videre. Takk for gode råd og all hjelp i både tykt og tynt. Jeg vil også rette en takk til samarbeidsskolen som ga meg rom for å gjennomføre undersøkelsen min.

Gjennom alt arbeidet for denne bacheloroppgaven retter jeg en stor takk til familien min som har vært en god støtte gjennom alt. Spesielt vil jeg takke min kone for den tålmodigheten hun har vist med meg når jeg har måtte arbeide som mest.

Innholdsfortegnelse

Abstract 3

Forord 3

Oversikt over tabeller 5

1. Innledning 7

1.1 Bakgrunn og aktualisering 7

1.2 Forskningsspørsmål 8

1.3 Avgrensning og disposisjon 8

1.3.1 Avgrensing av forskningsspørsmål 8

1.3.2 Disposisjon 8

2. Teori 10

2.1 Prosjektets rammeverk 10

2.1.1 Hva er et bevis? 10

2.1.2 Bevis i skolen 11

2.1.3 Van Hiele-modellen 12

2.2 Resultater i Bell (1976), Balacheff (1988) og Sen og Guler (2015) 14

3. Metode 16

3.1 Kvalitativ og kvantitativ forskning 16

3.2 Forskningsdesign 17

3.2.1 Bevisforståelse 17

3.2.2 Geometriforståelse 17

3.2.3 Sammenheng mellom bevisforståelse og geometriforståelse 18

3.2.4 Del 1 av geometritesten 18

3.2.5 Del 2 av geometritesten 20

3.3 Utvalg 21

3.4 Innsamling av data 22

3.5 Kvalitet i studiet 22

3.6 Etikk 23

4. Resultat ... 24
5. Analyse ... 33
5.1 Analysemetode ... 33
5.2 Analyse ... 35
5.2.1 Hypotese 1 ... 36
5.2.2 Hypotese 2 ... 39
5.3 Mulig metode for beregning av signifikans ... 41
6. Mulige svakheter med undersøkelsen ... 42
7. Konklusjon og didaktiske refleksjoner ... 43
8. Litteraturliste ... 44
9. Vedlegg ... 46
i. Informasjon til foreldre ... 47
ii. Informasjon til samarbeidsskole ... 48
iii. Geometritesten ... 50

Oversikt over tabeller

Tabell 1 – Fordeling av kategoriene 1, 2 og 3
Tabell 2 – Oppgave 1
Tabell 3 – Oppgave 2
Tabell 4 – Oppgave 3a
Tabell 5 – Oppgave 3b
Tabell 6 – Oppgave 4a
Tabell 7 – Oppgave 4b
Tabell 8 – Oppgave 5
Tabell 9 – Oppgave 6
Tabell 10 – Oppgave 7
Tabell 11 – Oppgave 8
Tabell 12 – Oppgave 9
Tabell 13 – Oppgave 10

1. Innledning

1.1 Bakgrunn og aktualisering

Studentens inspirasjon for skriving av denne bacheloroppgaven startet med en økende interesse for bevis og argumentasjon i matematikkfaget i arbeid med et tidligere arbeidskrav der det var fokus på å utforske et eget valgt matematisk emne. Dette satte i gang en tankeprosess med tanke på hvilken plass bevis og argumentasjon har i skolematematikken. Fra egen skolegang og gjennom samtale med andre, oppfatter studenten at en del forstår matematikkfaget i skolen som et rent puggefag, og et fag der målet med faget, er å lære seg en rekke formler og regler slik at en kan svare riktig på de oppgavene en får. I lys av min utdanning så langt, opplever jeg matematikkfaget som mye mer innholdsrikt og variert enn dette, og derfor ønsker jeg å undersøke hvordan beviskompetansen er per dags dato.

Stylianides (2007) påstår at tradisjonelt sett har ikke elever arbeidet noe særlig med bevis før de går på videregående, men at i senere tid anbefaler både en rekke forskere samt læreplaner at bevis blir et sentralt tema for elever i alle aldre, og innenfor hele skolematematikken. En av de viktigeste grunnene til dette, er i følge Stylianides (2007a, s. 289) at bevis er fundamentalt for å gjøre og forstå matematikk, det vil si å utvikle, etablere og kommunisere matematikk.

Under grunnleggende ferdigheter i *Læreplan i matematikk fellesfag* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 4) er argumentasjon omtalt som en sentral del både for de muntlige og skriftlige ferdighetene. Under muntlige ferdigheter står det blant annet: «Det innebær å gjere seg opp ei meining, stille spørsmål og *argumentere* ved hjelp av både eit uformelt språk, presis fagterminologi og omgrepsbruk» (Ibid., s. 4, utheving tillagt). Og under skriftlige ferdigheter står det: «(...) Innebær å beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear. (...) Vidarer går utviklinga frå å beskrive og systematisere enkle situasjonar med matematikkfagleg innhald til å byggje opp ein heilskapleg *argumentasjon* omkring komplekse samenhengar» (Ibid., s. 4, utheving tillagt).

Likevel er det en del som tyder på at realiteten er et stykke unna idealet. I en analyse av TIMSS-prøvene i en videregående skole i 2008 (Grønmo, Onstad og Pedersen, 2010, s. 231) kommer det fram at et gjennomgående trekk på alle trinn, er at man legger for stor vekt på individuelle arbeidsmetoder som oppgaveløsning. I lys av resultatene fra TIMSS 2008 mener de at det er denne ensidige bruken av individuelle arbeidsmetoder som er et problem i norsk skole. Det er også vist at i klasser der en bruker mer tid på diskusjon og argumentasjon, presterer de bedre på TIMSS enn klasser der en ikke gjør det. Det er også uttrykk eksplisitt at

Norge ser ut til å skille seg fra andre land ved at metoder som går på diskusjon og argumentasjon relatert til faglig innhold er langt mindre brukt.

1.2 Forskningsspørsmål

Hvilke stadier befinner mine elever på 7. trinn i en skole i Bergen seg på i følge Bells skala for utvikling av bevisforståelse i emnet geometri?

og

Hvordan korresponderer elevenes forståelse i geometri med deres stadie på Bells skala?

1.3 Avgrensning og disposisjon

1.3.1 Avgrensing av forskningsspørsmål

Når jeg ønsker å kartlegge beviskompetansen er det en rekke valg som må gjøres med tanke på avgrensing. For det første er den en avgrensing i form av hvilket teoretisk rammeverk jeg legger til grunn. Dette er implisert i forskningsspørsmålet når jeg bruker Bells (1976) skala. Denne utdypes i teoridelen. For det andre er det begrensninger i måten denne informasjonen samles inn, dette redegjøres for i denne oppgavens metodedel.

Når det gjelder geometriforståelse, er det et faktum at det er vanskelig å kartlegge alle aspekter ved dette, spesielt innen rammen av denne bacheloroppgaven. Derfor er det gjort et utvalg både på teorisiden og metodedelen. Som teoretisk rammeverk brukes Van-Hieles modell for utvikling av geometriforståelse. For å måle forståelsen i geometri er det i sammenheng med denne oppgaven utviklet en geometritest. I denne er det gjort et utvalg av oppgaver som i sin tur måler kun deler av geometriforståelsen til elevene. Leser henvises til metodedelen av oppgaven for mer informasjon om dette.

1.3.2 Disposisjon

Oppgaven starter med kapittel 2 der det presenteres relevant teori for å belyse forskningsspørsmålene. Her presenteres oppgavens konseptuelle rammeverk. Formålet med dette er å plassere denne oppgaven i en større sammenheng, samtidig gir dette bakgrunn for både utforming av metoden, samt analysen av datamaterialet. I kapittel 3 presenteres metoden som er designet for å svare på forskningsspørsmålene, og spesielt begrunnes valgene av de oppgavene som er tatt med i en geometritest som er testet ut på elever på 7. trinn.

Resultatet fra denne testen presenteres i kapittel 4, og i kapittel 5 drøftes og analyseres disse resultatene. Kapittel 6 tar for seg mulige svakheter med studiet, før det avslutningsvis i kapittel 7 konkluderes de funnene som er gjort i analysedelen i kapittel 5.

2. Teori

Denne delen av oppgaven presenterer rammeverket for oppgaven. Først defineres og avklares begrepet konseptuelt rammeverk. Videre redegjøres det for de ulike teoriene som ligger til grunn for bevis og geometriforståelse, henholdsvis Bells utviklingsstadier for evne til bevis og Van-Hieles modell for utvikling av geometriforståelse. Avslutningsvis presenteres og sammenlignes tidligere forskningsresultater på undersøkelser som ligner min. Formålet med denne delen er å plassere min forskning i en større sammenheng. I tillegg gir sammenligningen av tidligere resultat visse indikasjoner på hva som er å forvente av resultat i min forskning.

2.1 Prosjektets rammeverk

Lester (2005, s. 458) definerer et prosjekts rammeverk som de grunnleggende strukturene av ideer som skal være med å beskrive fenomenet som skal undersøkes. Videre argumenterer Lester (2005) for at det finnes minst fire fordeler med å legge et rammeverk til grunn for forskningsprosjekter: skape grunnlag for konseptualisering og design i forskningsprosjektet; gi mening til innsamlet data; bidra til dypere forståelse enn det kun sunn fornuft kan gi; og dypere forståelse av hvorfor ting er slik de er. Det finnes ulike former for rammeverk, der Lester (2005) nevner tre ulike. De er teoretisk, praktisk og konseptuelle rammeverk. Dette prosjektet legger til grunn et konseptuelt rammeverk, som innebærer at jeg, i tråd med Lester (2005) har valgt ut tilgjengelig teori og tidligere forskning som er relevant for eventuelle funn i dette prosjektet. En viktig fordel med et konseptuelt rammeverk, er at det legger større vekt på å rettferdiggjøre ulike forklaringer på fenomener, fremfor å kun finne disse forklaringene (Lester, 2005, s. 460).

Mitt rammeverk er bygget på Bells (1976) stadier for utvikling av bevisforståelse og Van Hieles (1957) modell for utvikling av forståelse i geometri. Innledningsvis presenteres en definisjon av bevis, slik den er sammenfattet av Stylianides (2007a). Ellers presenteres forskningsresultater fra Bells studie fra 1976, Balacheff sin studie fra 1988, samt en nyere studie utført av Sen & Guler (2015).

2.1.1 Hva er et bevis?

Hana (1998) skriver at bevis har en helt sentral plass i skolematematikken, både når det gjelder å gi elevene kompetanse med å bruke bevis, samt lære elevene viktigheten av bevis.

Selv om det er enighet om at bevis har en sentral plass, både i skolematematikken og matematikk generelt, finnes det ikke i dag noen allmenn akseptert teori eller praksis om teori (Hana, 1998, s. 4). Bevis har mange funksjoner, og for matematikere er den viktigeste funksjonen, muligheten til å validere og rettferdiggjøre et matematisk utsagn (Hana, 1998, s. 9). Stylianides (2007) definerer bevis som en matematisk argumentasjon; en sammenhengende rekke av påstander for eller mot en matematisk påstand. Noe som var viktig for Stylianides var at denne definisjonen kunne anvendes i skolematematikken, også på de lavere årstrinn. På grunn av dette legger han vekt på at påstandene som brukes i beviset må være godt kjent og allment akseptert blant elevene. Videre må også argumentasjonen og måten den presenteres på være passende og kjent for elevgruppen.

2.1.2 Bevis i skolen

Det finnes en rekke ulik forskning på bevis i skolen som legger til grunn noe ulik teoretisk rammeverk (f. eks, Balacheff, 1988; Ball og Bass, 2003; Harel og Sowder, 1998; Heinze, 2004; Lithner, 2007; Yackel og Hanna, 2003). Balacheff (1988) inndeler elevenes argumentasjon i fire kategorier: Naiv empirisme; det avgjørende eksperiment; det generiske eksemplet; tankeeksperimentet. Balacheff beskriver disse som hierarkiske, og hvilket nivå en legger seg på avhenger av grad av generalitet, og å kunne konseptualisere kunnskapen sin. Det handler også om grad av abstraksjon og evnen til å frigjøre seg fra en rekke enkelttilfeller. Balacheff tilbyr en tydelig teoretiske ramme for å teste elevenes bevisforståelse. Et annet alternativ er Bells (1976) stadier i utvikling av bevisforståelse.

I likhet med Balacheffs kategorier viser også Bells stadier en hierarkisk inndeling, der utviklingen går fra å se enkelttilfeller til å kunne løsrive seg fra disse slik at bevisene har større grad av generalitet. I denne oppgaven velger jeg Bells stadier fremfor Balacheff og andre lignende inndelinger, og det er blant annet fordi at Bells stadier legger vekt på elevenes evne til å se mønster og sammenhenger i matematiske påstander. Dermed ser jeg det mer hensiktsmessig å bruke Bells stadier i denne oppgaven der jeg tester elevers bevisforståelse i overgangen barne- og ungdomsskole.

Bell skiller 5 stadier, der i blant et stadie 0, som han brukte for å kategorisere mislykkede elevsvar.

Bells utviklingsstadier for elevers evne til bevis, 11-17 år

Stadie 0: INGEN. Eleven ser intet mønster, sammenhenger eller regularitet. Han forventer det ikke. Han er ikke i stand til å arbeide tilstrekkelig nøye eller konsistent til å få fram data som viser en regularitet

Stadie 1: ABSTRAKSJON. Eleven kjenner igjen mønster eller sammenhenger i gitt data, og kan i forlengelsen av dette uttrykke dette muntlig eller skriftlig. Elevene søker ikke å forklare mønsteret. Om de bes om forklaring blir det besvart med repetisjon av data, uten forklarende elementer.

Stadie 2: SJEKK AV ENKELTTILFELLER. Eleven ser at en påstand refererer seg til en klasse av tilfeller, slik at et variert utvalg av tilfeller må sjekkes. Eller at et generelt argument basert på innsikt om en hel klasse må anvendes. På dette nivået kan elevene være mer eller mindre systematiske i utvelgelse av tilfeller. Deduktive argumenter er mer eller mindre fragmentariske og danner ingen kjede.

Stadie 3: BEVIS, ALLE TILFELLER. På dette stadiet er eleven fullt klar over at alle tilfeller må behandles. Om elevene bruker empirisk metode, anerkjenner de at disse tilfellene er utilstrekkelige som bevis. Deduktive kjeder er fullstendige og refererer seg til hele den klassen av tilfeller som eleven uttaler seg om.

Stadie 4: DEDUKTIVT SYSTEM. Eleven er klar over at det er nødvendig med en eksplisitt formulering av argumentenes startpunkt og premisser – og av definisjoner som er brukt. Feil kan likevel oppstå på dette stadiet som følge av «sirkelargumentasjon».

I en studie utført på 80 elever i alderen mellom 11 og 15 (Bell, 1976), viser at ingen av elevene befant seg på stadie 4. Samme studie viser også at de fleste elevene i denne alderen ligger på stadie 2, men at en relativt stor andel elever også ligger på stadie 1.

2.1.3 Van Hiele-modellen

Siden en del av prosjektet omhandler elevenes forståelse i geometri, er det relevant å trekke inn Dina van Hiele-Geldorf og Pierre van Hieles (1957) fem stadier for elevenes forståelse i geometri. Denne er i senere sammenheng gjennomgått av flere forskere og i det følgende bruker jeg Fuys, Geddes og Tischler (1988) sin forskningsrapport.

I skolesammenheng er det først og fremst de tre første som er aktuelle, og for noen elever nivå 4. Jeg går derfor ikke i detalj på nivå 5.

Nivå 1: Visualisering
Nivå 2: Analyse
Nivå 3: Abstraksjon og uformell deduksjon
Nivå 4: Deduksjon
Nivå 5: Aksiomer (Euklidsk og ikke-euklidsk)

Nivå 1: Visualisering

Er også kalt for gjenkjennelse, og eleven bruker kun det visuelle for å gjenkjenne geometriske figurer. Elevene bruker altså ikke egenskapene ved de geometriske figurene for å kategorisere dem, men bruker heller en form for «prototype» som er et indre bilde eleven har av figuren (Fuys, et.al., 1988, s. 58).

Nivå 2: Analyse

Eleven analyserer figurene ut fra oppbygning og egenskaper, samt at han blir bevisst at det finnes klasser av geometriske figurer. Eleven kan nå for eksempel kjenne igjen en trekant, fordi han kan telle opp antall kanter. På dette nivået oppstår det også en kobling mellom det språklige og det visuelle, slik at en elev skal kunne tegne opp en figur med utgangspunkt i en beskrivelse. Det er likevel en del som mangler med tanke på abstraksjon og analyse av figurene. Det er også mye som tyder på at elever på dette stadiet ikke godkjenner overlapp innad i klasser av geometriske figurer. De vil for eksempel ikke anerkjenne at et kvadrat også er et rektangel (Fuys, et.al., 1988, s. 60).

Nivå 3: Abstraksjon og uformell deduksjon

Eleven trekker logiske sammenhenger mellom ulike tilfeller av geometriske figurer i en klasse. Dette gjør at de forstår hvordan noen egenskaper kan medføre andre egenskaper, for eksempel at et kvadrat også er et rektangel. Eleven klassifiserer geometriske figurer med å bruke ord som «alle», «noen» og «ingen». De fleste elever i skolen når ikke høyere enn dette nivået (Fuys, et.al., 1988, s. 64).

Nivå 4: Deduksjon

Eleven vil kunne anvende og forstå sammenhengen mellom aksiomer, postulater, definisjoner og setninger i euklidsk geometri.

På dette nivået kan elevene følge deduktive bevis, samt hvorfor det er nødvendig å bevise (Fuys, et.al., 1988, s. 69).

2.2 Resultater i Bell (1976), Balacheff (1988) og Sen og Guler (2015)

Ved å studere tidligere forskningsresultater i studier som ligner mitt prosjekt får jeg en viss pekepinn på hva jeg kan forvente å finne i egen studie. Balacheff (1988) brukte oppgaven: *lag en regel for beregning av antall diagonaler i en mangekant når du vet hvor mange kanter den har.* Bell (1976) lagde en tilsvarende oppgave, men la begrensninger på at diagonalene ikke kunne krysse hverandre. Sen og Guler (2015) konstruerte et oppgavesett bestående av 6 spørsmål der noen handlet om geometri, mens andre handler om tallære.

Balacheff (1988) fant i sin forskning at det var vanskelig å skille ut hvilket nivå elevene befant seg på. Det er også gjort funn på at elevens oppfattelse av hva som er bevis er avgjørende for hvilken bevisstrategi de velger å bruke. Det er også lagt merke til sammenhengen mellom naiv empirisme og det avgjørende eksempel, og mellom det generiske eksemplet og tankeeksperimentet. Med bakgrunn i dette er elevene delt i to hovedkategorier, de som bruker det empiriske og de som bruker deduktive metoder. Dette svarer også til det Bell (1976) fant i sin studie når han observerte hvordan 15-åringer gav forklaringer. Bell (1976) skilte også mellom de som stolte fullstendig på et resultat eller en empirisk sjekk av enkelttilfeller og de som forsøkte deduktive metoder. Bell (1976) ser en tydelig utvikling fra de lavere stadiene til de høyrene som korrelerer med alder. Spesielt ser han et stort utviklingssprang fra 11 til 13 år.

Sen og Guler (2015) benytter Harel og Sowder (1998) sine kategorier for å ordne sitt datamateriale. Harel og Sowder (1998) beskriver ulike bevisstrategier, der det er presisert at bevis i denne sammenhengen handler om individets prosess til å overbevise seg selv, ikke slik bevis brukes tradisjonelt i matematikken. Harel og Sowder (1998) deler dette inn i tre kategorier: ekstern overbevisning; empirisk bevis; analytisk bevis. Ekstern overbevisning er at elevene baserer sin overbevisning på utsagn slik som «læreren sa det var slik...» eller «i læreboken står det at...». Empirisk bevis samsvarer i stor grad med stadie 1 og 2 i Bells (1976) skala. Analytisk bevis bygger på logisk deduksjon. Sen og Guler (2015) sin forskning hadde som formål å kartlegge nivå innen bevis og argumentasjon i en syvende klasse. De fant at de aller fleste elever på dette årstrinnet lå på enten ekstern overbevisning eller empirisk bevis.

Resultatene fra disse ulike studiene viser at elever som er omlag 13 år gamle ikke har tilstrekkelige evner til å føre analytiske og deduktive beviser, men holder seg i stor grad til empiriske metoder.

Det er interessant å se at en fant dette resultatet både i 1976 med Bells studie, samt med Sen og Guler sin studie i 2015. Det har gått nesten 40 år mellom disse studiene, og resultatene angående 13-åringer er noenlunde det samme.

3. Metode

Christoffersen og Johannessen (2012, s. 16) forklarer ordet *metode* etymologisk ved å vise til det greske ordet *methodos,* som betyr å følge en bestemt vei mot et mål. Videre beskriver de følgende kjennetegn ved forskningsmetode: åpenhet, systematikk, grundighet og dokumentasjon.

I de følgende avsnittene beskriver jeg hvordan jeg utformet metoden, hvilke valg jeg gjorde med tanke på utvalg, hvordan jeg tenkte å gjennomføre innsamlingen av data, samt hvordan jeg analyserte dataen. Avslutningsvis analyserer jeg metoden ut fra begrepene validitet og reliabilitet, og gjør rede for etiske hensyn som er tatt underveis i utformingen av metode.

3.1 Kvalitativ og kvantitativ forskning

I samfunnsforskningen, som denne forskningen er en del av, dukker det i følge Christoffersen og Johannessen (2012, s. 17) et skille mellom kvalitative og kvantitative metoder. Videre poengterer de at det ikke betyr at forskningen enten er kvalitativ eller kvantitativ, men at det er snakk om ulike grader av hvor kvalitativ eller hvor kvantitativ forskningen er.

Når en skiller mellom kvalitative og kvantitative metoder er det viktig å merke seg forskjellen i grad av fleksibilitet og grad av generalisering (Christoffersen og Johannessen, 2012, s. 17). Kvantitative metoder gir mindre grad av fleksibilitet enn kvalitative metoder. Dette ser en for eksempel i et spørreskjema eller en survey, som er kvantitative metoder, der alle spørsmålene er laget på forhånd. Fordelen med mindre fleksibilitet, er at det gir mer mening å sammenligne svarene. Fordelen med kvalitative metoder er at de er mer fleksible, og spørsmålene som stilles kan både være mer åpne enn i en kvantitativ undersøkelse, samt at en kan tilpasse spørsmålene ut fra hvilken deltaker en har. Ulempen med kvalitative metoder er at svarene ikke nødvendigvis kan sammenlignes (Christoffersen og Johannesen s. 17-18).

Metoden i denne oppgaven, er i stor grad kvantitativ med tanke på at alle spørsmålene er laget på forhånd, og at alle respondentene svarte på de samme spørsmålene. Jeg valgte en kvantitativ metode for å kunne svare på forskningsspørsmålene mine for et helt trinn, og for å få en indikasjon på om den korrelasjonen jeg ønsket å finne ut av, gjaldt alle elever på trinnet.

Når det gjelder å kartlegge hvilket stadie på Bells skala elevene ligger på, tror jeg det ville vært ideelt å gjennomføre en metode som var mer kvalitativ gjennom for eksempel intervju. Den viktigste grunnen til at jeg ikke gjennomførte intervju var at jeg ikke hadde hatt kapasitet til å gjennomføre intervju på det antall respondenter jeg hadde. Dermed var det viktigere for mitt forskningsspørsmål å kartlegge flere, fremfor å kartlegge grundigere.

3.2 Forskningsdesign

Jeg gjentar forskningsspørsmålene for denne bacheloroppgaven her:
Hvilke stadier befinner mine elever på 7. trinn i en skole i Bergen seg på i følge Bells skala for utvikling av bevisforståelse i emnet geometri?

og

Hvordan korresponderer elevenes forståelse i geometri med deres stadie på Bells skala?

3.2.1 Bevisforståelse

Det teoretiske utgangspunktet for å utvikle metoden for denne oppgaven var Bells (1976) skala for utvikling av bevisforståelse. Bells doktorgradsavhandling (1976) ga inspirasjon til å utvikle oppgaver der elevene skulle se etter mønster og sammenhenger i matematikken, samt at de skulle argumentere for hvorfor det var slik.

For å svare på disse to forskningsspørsmålene utformet jeg en geometritest bestående av ti oppgaver fordelt på to deler. Del 2, som består av tre oppgaver er laget for å besvare det første forskningsspørsmålet. Bevisforståelse er selvfølgelig relevant innen alle tema i matematikken, men jeg har avgrenset meg til bevis innen geometri i denne bacheloroppgaven.

3.2.2 Geometriforståelse

I det andre forskningsspørsmålet ønsket jeg å sammenligne elevenes beviskompetanse og deres forståelse i geometri. Naturligvis ble det da nødvendig å kartlegge elevenes forståelse i geometri først.

For å gjøre dette tok jeg utgangspunkt i Utdanningsdirektorates (2012) *Læringsstøttende prøver* for å kartlegge hvilken grad av forståelse elevene har i geometri. Denne prøven er en del av et prosjekt som heter Kvalitet I Matematikkundervisningen, som er et samarbeid Utdanningsdirektorates og Telemarksforsning-Notodden. I en rapport fra matematikksenteret (2008, s.17) legger Johnsbråten vekt på at de fleste av oppgavene i *Læringsstøttende prøver* er såkalte diagnostiske oppgaver, der hensikten er å få fram hvordan elevene tenker og i hvilken grad de har mangelfulle utviklede begreper eller misoppfatninger. Dette dannet grunnlaget for del 1: de syv første oppgavene av geometritesten.

3.2.3 Sammenheng mellom bevisforståelse og geometriforståelse

For å svare på det andre forskningsspørsmålet, lagde jeg først kategorier der jeg plasserte elevene ut fra hvor de lå på Bells skala, basert på hvordan de besvarte oppgave 8-10. Videre sammenlignet jeg hvordan elevene som lå høyt på Bells skala gjorde det på oppgave 1-7, med de som lå lavere på Bells skala.

I disse sammenligningene er det naturlig å trekke inn Van-Hieles modell for utviklingen av geometriforståelse. Denne modellen har vært relevant både i utviklingen av oppgave 1-7 i geometritesten, og vil naturlig bli relevant i analysen av resultatet. På grunn av rammeverket som er lagt til grunn blir det med bakgrunn i forskningsspørsmål nummer 2 naturlig å sammenligne stadie på Bells skala og nivå på Van-Hiele-modellen.

Under beskrives utformingen av oppgavene til geometritesten. I utformingen av del 1 vektlegges sammenhengen oppgaven har til nivåene på Van-Hiele-modellen. I utforming av del 2 vektlegges hvordan de ulike oppgavene er med på å kartlegge elevenes bevisforståelse. Leser henvises til vedlegg 3 (geometritesten).

3.2.4 Del 1 av geometritesten

Oppgave 1-7 som utgjør den første delen av testen, er i stor grad hentet eller inspirert av oppgaver fra Utdanningsdirektorates *Læringsstøttene prøver* fra 2012 i ressursheftet for geometri. I del 1 av dette heftet ligger gjennomgang av oppgavene som er gitt elever i 6. og 9. klasse, samt analyse av de misoppfatningene som kommer til syne gjennom elevsvar. Oppgavene fra disse prøvene er med på å kartlegge i hvilken grad elevene har forståelse for begreper i geometri. Dette valgte jeg som utgangspunkt for å teste hvilken forståelse mine respondenter hadde i geometri. Det er lagt vekt på å velge oppgaver som tester ulike begreper innen geometrien. Under begrunner jeg de oppgavene jeg har valgt å ta med.

Oppgave 1 tester om elevene kan identifisere hva som er trekanter. Sett i lys av Van-Hiele-modellen gir denne oppgaven en indikator på om eleven ligger på nivå 1 der de kun visualiserer, eller om de ligger på nivå 2 der de bruker egenskaper ved figurene for å kjenne dem igjen.

Oppgave 2 er tatt med for å avdekke en misoppfatning angående høyden i trekanter. Det er en vanlig misoppfatning at høyden i en trekant må være innenfor trekantens sider (Utdanningsdirektoratet, 2012, s. 12), men i denne oppgaven er riktig høyde utenfor disse tre sidene. I likhet med oppgave 1, kan en her også ane om elevene ligger på nivå 1 eller 2 i Van-Hiele-modellen. Hvis elevene tegner en «høyde» som er inne i trekanten, er det sannsynlig at de gjør dette fordi det er slik de har sett det i tidligere oppgaver eller eksempler.

Mens om de tegner riktig høyde kjenner de til egenskapen til høyden i en trekant.

Oppgave 3 er delt i oppgave a) og b) og begge disse ber elevene regne ut areal av figurer. Den første figuren er et kvadrat og den andre figuren er en sammensatt figur. Denne oppgaven er tatt med for å undersøke om elevene forveksler areal og omkrets. Resultat fra lignende oppgave fra *Læringsstøttene prøver* viser at en stor andel elever regner ut omkrets i stedet for areal (Utdanningsdirektoratet, 2012, s. 24-25). I lys av Van-Hiele-modellen er det også lagt inn en forskjell mellom den oppgitte størrelsen på figurene og den faktiske størrelsen om du måler med linjal. Elevene som måler kan tenkes ligger på nivå 1, ettersom de er mer avhengig av det visuelle, enn de som bruker målene som er oppgitt. Elevene som bruker målene som er oppgitt kan tenkes å ligge på nivå 2.

Oppgave 4 er med for å kartlegge om elevene kjenner til innholdet i rette, spisse og stumpe vinkler. En lignende oppgave fra *Læringsstøttene prøver* viser at de fleste elevene klarer å kjenne igjen en rett vinkel (Utdanningsdirektoratet, 2012, s. 33). Det er forventet at de fleste elevene vil klare å gjenkjenne rette vinkler, og hvis de ikke gjør det, er det antageligvis fordi de ikke kjenner innholdet i begrepet rett vinkel. I tillegg er det relevant å knytte denne oppgaven til Van-Hiele-modellen. De som ligger på nivå 1, gjenkjenner en rett vinkel fordi de har sett den før. Enkelte elever mener muligens at det kun er en rett vinkel hvis vinkelåpningen peker mot høgre. Slike svar vil tyde på at eleven ligger på nivå 1.

Oppgave 5 er med på å kartlegge oppfatningen elevene har mellom areal og omkrets, der en del elever mener at arealet bestemmer omkretsen. Dette stemmer i en del tilfeller, men en del elever har overgeneralisert og mener dette gjelder alle tilfeller (Utdanningsdirektoratet, 2012, s. 41). I tillegg er det også en språklig forvirring der en del elever blander begrepene omkrets og areal slik som også ble kartlagt i oppgave 3. Videre er dette en oppgave som kan gi indikasjoner på om elevene ligger på nivå 3 i Van-Hiele-modellen. På dette nivået kan de blant annet forstå hvordan noen egenskaper medfører andre egenskaper, og de ser sammenhengen mellom ulike aspekter ved geometrien.

Oppgave 6 og 7 er begge tatt med for å kartlegge elevenes forståelse av volum. Oppgave 6 har en hjelpetegning av et prisme, som de skal regne volumet til. I oppgave 7 derimot skal de regne ut volum av en sylinder, men de får kun oppgitt de relevante målene i tekstform, altså uten hjelpefigur. Oppgave 6 og 7 kan sees i sammenheng knyttet til Van-Hiele-modellen. Det er interessant å se om det utgjør noen forskjell på elevsvarene når de har hjelpemodell eller ikke.

Disse spørsmålene er som nevnt utformet med tanke på å kartlegge deres forståelse i geometri. Det er en økende vanskelighetsgrad i oppgavene, og i lys av Van-Hiele-modellen antar jeg at oppgave 1-4 er mest relevant for å skille om elevene ligger på nivå 1 eller 2, mens oppgave 5-7 er med på å skille om elevene ligger på nivå 2 eller 3.

I kvantitativ forskning gjennom spørreskjema er begrepsparet variabler og verdier sentrale (Christoffersen og Johannessen, 2012, s. 125). Variabler er spesifikke egenskaper eller kjennetegn ved en enhet, og disse egenskapene kan ha forskjellige verdier. Et annet begrep som også brukes for verdier, er kategorier. I det følgende bruker jeg kategorier for å beskrive oppbygningen av geometritesten. I geometritestens oppgave 1-7 er det gjennomgående at variablene i oppgavene, er ulike tema innen geometri og begrepsforståelsen elevene har. Det er gjort et selektivt utvalg av oppgaver og tema for denne testen, noen der det er forventet at de fleste vil ha adekvat forståelse, og andre der det er større spredning i forståelse. Tema som er valgt er: Trekantens form, høyde i trekant, areal og omkrets, rette vinkler og kategorier av vinkler, volum av rektangulært prisme og volum av sylinder. Det som skiller geometritesten fra et standard spørreskjema er at kategoriene ikke er like forhåndsbestemt. Siden oppgavene som er valgt, er hentet fra og inspirert av oppgavene i *læringsstøttene prøver,* finnes det i stor grad en oversikt over mulige elevsvar. Men det er ingen garanti for at det også kommer svar som ikke passer inn i noen av disse kategoriene. Dermed blir enkelte av verdiene lagt til etter gjennomgang av resultatet på prøvene.

3.2.5 Del 2 av geometritesten

Oppgave 8-10 som utgjør del 2 av testen er som sagt utformet med tanke på å teste elevenes evne til å argumentere for matematiske påstander. Oppgave 8 er hentet direkte fra Bells doktorgradsavhandling, mens oppgave 9 og 10 er utformet på egenhånd.

Oppgave 8 er tatt med for å teste i hvilken grad elevene bruker det empiriske oppgitte materialet for å begrunne påstanden, eller om de undersøker med egen empiri. Videre var formålet med denne oppgaven å undersøke om noen av elevene på 7. trinn brukte deduktive metoder for å argumentere.

Oppgave 9 og 10 har begge som hensikt å kartlegge om elevene finner matematiske sammenhenger innen geometrien. Oppgave 9 viser to par med formlike trekanter, der sidelengdene er halvert på den minste trekanten. Arealet til alle trekantene er oppgitt. Elevene blir spurt om å beskrive hva som skjer med arealet når sidelengdene halveres. Videre skal de ta stilling til om dette gjelder alle formlike trekanter, og hvorfor. Oppgave 10 handler om rektangeltall, og kartlegger hvorvidt elevene bruker det geometriske eller tallfølgen for å begrunne sammenhengen mellom rektangelnummer og rektangeltall.

Som nevnt tidligere ville det mest sannsynlig gitt grundigere og dypere innblikk i elevenes argumentasjon ved gjennom for eksempel intervju, men dette lot seg ikke gjøre på grunn av forskers kapasitet og tidsbegrensning. Likevel gir elevsvarene fra oppgave 8-10 en viss mulighet til å analysere kvalitativt, og det gjør seg ikke uten videre å kategorisere elevsvarene etter Bells stadier. Dermed er analysen av elevsvarene på oppgave 8-10 kvalitativ i den forstand at dette ikke direkte er variabler og verdier som måles, slik som i oppgave 1-7, men tekstsvar som må analyseres. Christoffersen og Johannessen (2012, s. 105) viser til Bruce L. Berg (2001) sin oversikt over hvordan an analyserer et kvalitativt datamateriale. Det sentrale for mitt datamateriale var følgende punkter fra Berg sin oversikt: Det lages et sett av dekkende kategorier (etter forskerens mening); Datamaterialet sorteres etter disse kategoriene for at forskeren skal kunne avdekke lignende utsagn, mønstre, sammenhenger og forskjeller. Kategoriene er laget etter at resultatet er gjennomgått og analysert, derfor presenteres inndelingen av kategoriene i starten av denne oppgavens analyse-del, etter at resultatet er presentert for leseren.

3.3 Utvalg

I mine forskningsspørsmål er det spesifisert hvilket utvalg jeg ønsker å undersøke: et 7. trinn i en skole i Bergen. Dette trinnet bestod av 54 elever. Det er klart at dette utvalget ikke er fullstendig representativt for alle 7. klassinger på landsbasis. Forhåpentligvis gir det likevel en viss pekepinn på hvordan sammenhengen mellom generell forståelse og beviskompetanse korresponderer for et større antall elever enn de som har vært respondenter i denne forskningen. Utvalget er likevel valgt med tanke på representativitet, med en forutforståelse av at nivået og grad av forståelse vil være heterogent på et trinn, og dermed vil utvalget være representativt opp mot de kategorier som skal undersøkes opp mot forskningsspørsmålene.

Videre er utvalget basert på et stratifisert utvalg. Dette går ut på at det først konstrueres kategorier basert på sentrale kjennetegn, og deretter rekrutteres informanter som passer de ulike kategoriene. I denne forskningen er det Bells stadier som er utgangspunkt for kategorisering, og ut fra en antakelse om at det er ulikt nivå på et trinn er hele trinnet tatt med som utvalg, slik at en ville kunne plassere alle elevene i en av kategoriene.

Rekrutteringen av informantene ble gjort ved at det ble sendt ut påmeldingsskjema og informasjonsskriv til foresatte av elevene om geometritesten. Denne informasjonen ble utsendt av kontaktlærer, og alle fikk mulighet til å velge å ikke delta. Samtlige elever deltok.

3.4 Innsamling av data

Innsamling av data til prosjektet var samlet inn i praksisperioden våren 2019 ved studentens praksisskole. Trinnet som gjennomførte geometritesten bestod som sagt av 54 elever, og var delt i fire grupper som hadde en skoletime (45 minutter) hver til å gjennomføre testen. Studenten var tilgjengelig for å svare på uklarheter med oppgavene, men det var det var planen å ikke gi noe hjelp som kunne gi elevene forståelse de utgangspunktet ikke hadde. I etterkant ser studenten at han gav mer hjelp enn det som var planen på oppgave 2, og dermed gir ikke resultatene fra denne oppgaven fullstendig oversikt over hva elevene egentlig hadde forståelse for. Leser gjøres bevisst på dette når den likevel brukes i analysedel under.

3.5 Kvalitet i studiet

Data som samles inn i et forskningsprosjekt er ikke selve virkeligheten, men representasjoner av den. Et sentralt spørsmål i all forskning er hvor godt dataen representerer det fenomenet en vil undersøke. Svaret på dette spørsmålet viser hvor stor grad av validitet studiet har. Videre skilles det mellom ulike former for validitet, der i blant begrepsvaliditet, intern validitet og ytre validitet. I denne oppgaven diskuteres kun begrepsvaliditet. Begrepsvaliditet handler om hvor god relasjonen mellom det fenomenet som skal undersøkes og de konkrete dataene er (Christoffersen og Johannessen, 2012, s. 24).

Denne oppgaven ønsker å undersøke disse tre fenomenene: Elevers forståelse i geometri i 7. klasse; elevers beviskompetanse i geometri i 7. klasse; og sammenhengen mellom disse. Datainnsamlingen som er gjort og resultatet som foreligger gir til en viss grad svar på alle disse fenomenene, men det kan diskuteres i hvor stor grad det gir et fullstendig innblikk. For å kartlegge forståelsen i geometri er det brukt oppgaver som har vært brukt tidligere for å kartlegge misoppfatninger hos elever, og dermed er det sannsynlig at den dataen som foreligger, i stor grad er valid. På en annen side må det vektlegges at det er gjort et selektivt utvalg av oppgaver, og at en ikke får kartlagt fullstendig forståelsen i geometri. Her er det gjort et valg der kvantitet gikk foran kvalitet. Noe av det samme kan sies for validiteten knyttet opp mot fenomenet bevisforståelsen til 7. klassinger. En kan anta at en ville fått mer valid data om en hadde gjennomført for eksempel intervju. For begge disse nevnte fenomenene har kvantitet gått foran kvalitet, men dette er gjort for å få mer valid data for det tredje fenomenet, nemlig sammenhengen mellom forståelse i geometri og beviskompetanse i geometri hos 7. klassinger. For å kunne si noe valid om denne sammenhengen, var det nødvendig å undersøke et stort antall elever, i dette tilfellet hele trinnet.

På tross av valgene der kvantitet går foran kvalitet gir det store antallet informanter ganske god validitet for sammenhengen mellom geometriforståelse og beviskompetanse i geometri.

Reliabilitet handler om hvor pålitelig data som er samlet inn i forskningen er (Christoffersen og Johannessen, 2012, s. 23). En måte å teste reliabilitet på er ved at flere forskere undersøker det samme fenomenet. Med tanke på de to førstnevnte fenomenene finnes det en menge forskjellige forskere som har undersøkt det samme. Disse er vist til tidligere i oppgaven, og det som går igjen er at elever som er omtrent 13 år gamle ligger et sted mellom stadie 0 og 2 på Bells skala, eller at de ligger på tilsvarende nivå på andre lignende skalaer. Dette er tilsvarende det jeg har funnet ut av i min undersøkelse, og dermed er det sannsynlig at dataen i denne undersøkelsen er reliable.

3.6 Etikk

Det er tatt en rekke etiske hensyn i utformingen av metoden og data innsamlingen. For det første er det sendt ut både informasjonsskriv og samtykkeskjema til både foresatte til elevene, samt til skolen der datainnsamlingen ble gjennomført. Hver enkelt elev hadde altså frivillig samtykke, samt at de på er hvert tidspunkt har hatt muligheten til å trekke seg uten begrunnelse. Det har vært lite hensyn å ta med tanke på informantenes privatliv, for utenom en signatur fra foresatte. Denne har vært oppbevart av kontaktlærer, og studenten har aldri hatt tilgang til dette. Det var i utgangspunktet søkt til NSD om å oppbevare de signerte samtykkeskjemaene, men etter samtale med NSD, samt med kontaktlærer, kom vi fram til at kontaktlærer beholdt de signerte samtykkeskjemaene. Dermed er ikke prosjektet meldepliktig.

Videre er selve geometritesten anonym og elevene er bedt om å ikke føre på navn. Ingen av den informasjonen som er samlet inn, er noen form for personopplysninger. I tillegg er all data lagret og behandlet manuelt. Data og resultat som presenteres i denne oppgaven gjelder større grupper av elever, der interessen har vært å se på både hvordan resultatet er for hele trinnet, samt hvordan resultatet til elevene i de ulike kategoriene er sammenlignet med hele klassen.

4. Resultat

I denne delen av oppgaven presenteres resultatet av geometritesten for hele trinnet, samt krysstabeller som viser resultatet for hver av kategoriene 1, 2 og 2 i hver kolonne. For forklaring av inndeling av kategori 1, 2 og 3 henvises leser til kapittel 5.1 *analysemetode.* Totalt antall elever som tok testen er 54, og tabell 1 underviser hvordan disse fordeler seg i kategoriene 1, 2 og 3.

Først presenteres en tabell for inndelingen av kategoriene 1, 2 og 3, deretter følger resultat fra oppgave 1-10 i rekkefølge. Resultatet fra oppgave 1-10 presenteres følgende i krysstabellene under.

Fordeling av kategoriene 1, 2 og 3

Kategori	Frekvens (prosent)
1	16,7 (9 elever)
2	53,7 (29 elever)
3	29,6 (16 elever)

Tabell 1

Oppgave 1

Oppgave 1 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
A og B markert (riktig)	83,3	100	86,2	68,8
A markert	3,7		3,4	6,3
A, B og C markert	11,1		10,3	18,8
A, B, C og D markert	1,9			6,3
Sum % Totalt antall	100 54	100 9	99,9 29	100,2 16

Tabell 2

Oppgave 2

Oppgave 2 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	33,3	33,3	37,9	25,0
Riktig høyde tegnet inn (riktig)	35,2	33,3	34,5	37,5
Høyde tegnet inn, men på feil måte	22,2	33,3	24,1	12,5
Andre gale svar	9,3		3,4	25,0
Sum % Totalt antall	100 54	99,9 9	99,9 29	100 16

Tabell 3

Oppgave 3a

Oppgave 3a Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	9,3		6,9	18,8
9 cm^2 (med riktig enhet) (riktig)	9,3	22,2	6,9	6,3
9 (feil eller manglende enhet) (riktig)	20,4	44,4	13,8	25,0
12 cm (har regnet omkrets)	55,6	33,3	69,0	37,5
81 (har multiplisert alle sidene)	1,9			6,3
18 cm (har målt, og regnet omkrets)	1,9		3,4	
22 (har målt, og regnet omkrets)	1,9			6,3
Sum % Totalt antall	100,3 54	99,9 9	100 29	100,2 16

Tabell 4

Oppgave 3b

Oppgave 3b Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	14,8		13,8	25,0
9 cm^2 (med riktig enhet) (riktig)	7,4	33,3	3,4	
9 (feil eller manglende enhet) (riktig)	11,1	33,3	6,9	6,3
20 (har regnet omkrets)	9,3		17,2	
Har forsøkt å regne omkrets, men regnet feil	57,4	33,3	58,6	68,8
Sum % Totalt antall	100 54	99,9 9	99,9 29	100,1 16

Tabell 5

Oppgave 4a

Oppgave 4a Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	3,7			12,5
B og D markert (riktig)	87,0	88,9	86,2	87,5
D markert	1,9	11,1		
B markert	3,7		6,9	
A markert	1,9		3,4	
B, C og D markert	1,9		3,4	
Sum % Totalt antall	100,1 54	100 9	99,9 29	100 16

Tabell 6

Oppgave 4b

Oppgave 4b Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	5,6		3,4	12,5
1.: A,C og D 2.: B (riktig)	53,7	77,8	55,2	37,5
1.:A, C og D 2.:B og E	16,7	11,1	13,8	25,0
1.: A, C, D og E 2.: B	3,7		6,9	
1.: A og C 2.: B, D og E	5,6		6,9	6,3
1.: A, C og E 2.: B, D og E	1,9			6,3
1.: B og D 2.: A og C	1,9		3,4	
1.: E, 2.: B	3,7	11,1	3,4	
1.: A, 2.: B	1,9		3,4	
1.: C og D 2.: A, B og E	1,9			6,3
1.: C, D og E 2.: A, B og E	1,9			6,3
Har misforstått oppgaven	1,9		3,4	
Sum % Totalt antall	100,4 54	100 9	99,8 29	100,2 16

Tabell 7

Oppgave 5

Oppgave 5 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	13,0		10,3	25,0
2. med begrunnelse (riktig)	11,1	11,1	13,8	6,3
2. har målt	7,4	33,3	3,4	
2. uten begrunnelse	5,6		6,9	6,3
3. med begrunnelse	46,3	44,4	48,3	43,8
3. uten begrunnelse	13,0		17,2	12,5
1. med begrunnelse	3,7	11,1		6,3
Sum % Totalt antall	100,1 54	99,9 9	99,9 29	100,2 16

Tabell 8

Oppgave 6

Oppgave 6 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	13,0		3,4	37,5
160 cm^3 (med riktig enhet) (riktig)	24,1	44,4	24,1	12,5
160 (feil eller manglende enhet) (riktig)	44,4	33,3	48,3	43,8
Har brukt formel for volum, men regnet feil	9,3	22,2	10,3	
Feil svar (ingen utregning)	9,3		13,8	6,3
Sum % Totalt antall	100,1 54	99,9 9	99,9 29	100,1 16

Tabell 9

Oppgave 7

Oppgave 7 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	44,4	22,2	37,9	68,8
94,2 cm3 (med riktig enhet) (riktig)	3,7	11,1	3,4	
94,2 (uten enhet) (riktig)	9,3	22,2	3,4	12,5
Har prøvd å bruke formel for volum, men fått galt svar.	38,9	44,4	48,3	18,8
Andre svar:				
11,5	3,7		6,9	
Sum % **Totalt antall**	100 54	99,9 9	99,9 29	100,1 16

Tabell 10

Oppgave 8

Oppgave 8 – Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
Ubesvart	53,7	22,2	38,0	100
Vet ikke hvordan en undersøker det, og bestemmer seg ikke for om påstanden er rett eller feil Stadie 0	20,4	22,2	31,0	
Har undersøkt empirisk, men ikke bestemt om påstanden er sann eller ikke Stadie 1	1,9		3,4	
Mener påstanden er rett – ingen begrunnelse eller undersøkelse Stadie 1	14,8	22,2	20,7	
Mener påstanden er rett – bruker empiri for å begrunne Stadie 1	7,4	22,2	6,9	
Mener påstanden er feil – med begrunnelse Stadie 2	1,9	11,1		
Sum % Totalt antall	100,1 54	99,9 9	100 29	100 16

Tabell 11

Oppgave 9

Oppgave 9 – Test i geometri	Frekvens (prosent)	Frekvens A (prosent)	Frekvens B (prosent)	Frekvens C (prosent)
Ubesvart	53,7	22,2	38,0	100
Vet ikke hvordan en undersøker det Stadie 0	25,9	33,3	38,0	
Ser feil sammenheng – ingen begrunnelse Stadie 1	9,3		17,2	
Ser riktig sammenheng – ingen eller manglende begrunnelse Stadie 1	11,1	44,4	6,9	
Sum % Totalt antall	100 54	99,9 9	100,1 29	100 16

Tabell 12

Oppgave 10

Oppgave 10 – Test i geometri	Frekvens (prosent)	Frekvens A (prosent)	Frekvens B (prosent)	Frekvens C (prosent)
Ubesvart	33,3	11,1	3,4	100
Ser ingen eller feil sammenheng – gir feil besvarelser **Stadie 0**	31,5		58,6	
Ser sammenheng i tallfølgen – ikke ut fra geometri **Stadie 1**	24,1	55,6	27,6	
Ser sammenheng mellom tallene og geometrien – ingen eller manglende begrunnelse **Stadie 1**	7,4	11,1	10,3	
Ser sammenhengen mellom tallene og geometrien – med begrunnelse **Stadie 2**	3,7	22,2		
Sum % **Totalt antall**	100 54	100 9	99,9 29	100 16

Tabell 13

5. Analyse

I denne delen av oppgaven analyseres resultatet fra datamaterialet slik det er presentert i kapittel 4. resultat. Først redegjøres det for hvordan dette gjøres, og en del valg som er tatt med tanke på analyse. Deretter følge en analyse av resultatet, med bakgrunn i følgende hypotese: Elever i kategori 1 har høyere prosent riktige svar sammenlignet med kategori 2 og 3. Det undersøkes også hvordan kategori 2 plasserer seg mellom kategori 1 og 3.

5.1 Analysemetode

Christoffersen og Johannessen (2012, s. 141) beskriver et kjennetegn med kvantitative metoder som er at dataene foreligger som tall som kan telles. For denne undersøkelsens vedkommende telles opp antall elever som har svart riktig på oppgavene, og de som ikke har svart riktig. Videre deles feile elevsvar opp i ulike kategorier. Dermed er dataen gjort kvantifiserbar, altså tellbar. Når slik data skal analyseres, gjøres det statistisk.

Kategoriene som er valgt for å klassifisere elevsvarene vil jeg argumentere for at ligger et sted mellom nominalnivå og ordinalnivå. På nominalnivå er kategoriene gjensidig utelukkende, samtidig som at svarene ikke kan rangeres på en logisk måte, for eksempel med at noen er jenter og noen er gutter. Ordinalnivå kjennetegnes av at det finnes en logisk rangering av svarene. Dette ser vi for eksempel om en måler høyeste endt utdanning, da vil de som har fullført videregående opplæring ligge på et høyere nivå enn de som har fullført grunnskole (Christoffersen og Johannessen, 2012, s. 127).

I resultatet fra geometritesten i denne undersøkelsen vil det være en rangering i form av at elevene enten har svar riktig eller feil, og en vil kunne si at de som har svart riktig rangerer høyere enn de som har svart feil. Når det er tatt med ulike feilsvar blir det derimot krevende og rangere disse etter ordinalnivå. Oppsummert er det gjort en inndeling etter ordinalnivå med tanke på om de har besvart rett eller galt, mens inndelingen av feilsvar er på nominalnivå. Christoffersen og Johannessen (2012, s. 141) sier at hvordan statiske analyser skal gjennomføres er avhengig av variablenes målenivå. Når det gjelder data på nominalnivå og data på ordinalnivå med få verdier presenteres dette best i frekvenstabeller eller ved grafiske figurer. Når en fremstiller data på denne måten betegnes det som en univariant analyse. Det innebærer, i denne undersøkelsen, at en teller opp hvor mange enheter som har svart riktig eller feil, samt hvilke feile svar.

I behandlingen av datamaterialet gjorde jeg først analysen av oppgave 8-10 for å lage en frekvenstabell over hvilke stadier elevene ligger på i følge Bells (1976) skala. Dette ga grunnlag for å plassere elevene i de tidligere nevnte kategoriene 1, 2 og 3, og deretter lage en frekvenstabell over hvor mange elever som lå i de ulike kategoriene. Videre analyserte jeg resultatet fra oppgave 1-7, registrert elevsvarene i frekvenstabeller. Dette er både gjort for elevsvarene på hele trinnet, samt jeg har laget en frekvenstabell for hver av de tre kategoriene 1, 2 og 3. Dette gir meg muligheten til å sammenligne hvordan elever i kategoriene 1, 2 og 3 har gjort det opp mot hverandre, samt hvordan hver enkelt kategori har gjort det opp mot resultatet fra hele klassen.

Kategoriene som skulle brukes for å sortere elevene var i stor grad ferdig utformet gjennom Bells (1976) stadier for utvikling av bevisforståelse. På bakgrunn av tidligere forskningsresultater (Bell, 1976; Balacheff, 1988; og Sen og Guler, 2015) valgte jeg kun å bruke stadie 0-2, ettersom det ikke er funnet elever som ligger på høyere nivå enn dette i nevnte undersøkelser. I utgangspunktet var planen å kategorisere elevene etter stadie 0, 1 og 2, men etter å sett resultatet valgte jeg å endre på dette. Flere elever svarte blankt på oppgave 8-10, og disse har jeg kalt kategori 3. Videre var den en mengde elever som ligger på stadie 1, men det er varierende i hvilken grad elevene har gitt begrunnelser for påstandene sine. Elever som mener at påstandene er rett eller galt, men ikke gir noen begrunnelse, samt elever som svarer at de ikke ser noe mønster (stadie 0) har jeg kalt kategori 2. De elevene som gir begrunnelser bestående av enten repetisjon av det empiriske materialet (stadie 1) eller utforsker med et variert empiriske materiale (stadie 2) har jeg kalt kategori 1. Videre har det ikke vært fokus i dette prosjektet å kartlegge hvordan elevene argumenterer innad i de ulike kategoriene, men å kartlegge hvor mange elever som ligger på de ulike nivåene.
Når jeg så sammenligner både hvilken av kategoriene 1, 2 og 3 elevene er i, sammen med hvordan de svarer på oppgave 1-7, gjør jeg det som i statistikken kalles en bivariant analyse. Hvordan en framstiller dette, er i likhet med univariant analyse, avhengig av variablenes målenivå. I denne oppgaven presenteres dette med en krysstabell som kombinerer verdiene fra oppgave 1-7, samt kategoriene 1, 2 og 3. På grunn av ulikt antall elever i kategori 1, 2 og 3, er det beregnet prosentandelen elever innenfor de ulike kategoriene. På grunn av avrunding av desimaler vil summen av prosentandelene for de ulike kategoriene ligge mellom 99,9 og 100,4.

Denne oppgavens forskning, i likhet med annen forskning dreier seg om å undersøke sammenhenger, og ofte er det en retning på sammenhengene. Altså snakker en ofte om en «årsak» og en «effekt» (Christoffersen og Johannessen, 2012, s. 153). Hvis det er mulig å identifisere en retning på sammenhengen, skilles det mellom avhengig og uavhengig variabel, og det er gjerne vanlig at den uavhengige variabelen kommer først i tid. I denne oppgaven opplever studenten det vanskelig å skille hva som kommer først av evne til bevis, og forståelse i geometri. Jeg har ut fra forskningsspørsmålene likevel valgt å ta utgangspunkt i kategoriene 1, 2 og 3 som uavhengig variabel, og rette og gale svar som avhengig variabel. Virkeligheten er mer kompleks og det er sannsynlig å anta at beviskompetanse og forståelse i geometri påvirker hverandre gjensidig, og det dermed ikke er så relevant å snakke om hva som er avhengig eller uavhengig variabel.

5.2 Analyse

Denne bacheloroppgaven hadde to forskningsspørsmål som utgangspunkt for undersøkelsen. Jeg opplever å ha fått rimelig godt svar på det første forskningsspørsmålet angående hvilke stadier elevene ligger på i følge Bells skala for utvikling av bevisforståelse. Svaret på dette forskningsspørsmålet kan kort oppsummeres i tabell 1 under:

Fordeling av kategoriene 1, 2 og 3

Kategori	Frekvens (prosent)
1	16,7 (9 elever)
2	53,7 (29 elever)
3	29,6 (16 elever)

Tabell 1

Som nevnt innledningsvis i dette kapittelet vil resultatet fra denne undersøkelsen analyseres i lys av følgende to hypoteser:

1. Elever i kategori 1 har høyere prosent riktige svar sammenlignet med kategori 2 og 3
2. Elever i kategori 2 plasserer seg mellom kategori 1 og 3.

Ved å analysere på denne måten håper jeg å få svar på den andre forskningsspørsmålet mitt, angående sammenhengen mellom elevenes forståelse i geometri og deres stadie på Bells skala. Det hadde vært interessant å sammenligne misoppfatninger mellom de tre kategoriene, men det er det ikke plass til i denne oppgaven. Derfor analyseres kun prosent av riktige svar i de tre kategoriene for å besvare hypotesene.

5.2.1 Hypotese 1

Med et raskt overblikk over resultatet kan det virke som at kategori 1 svarer bedre enn kategori 2 og 3, og i følgende oppgaver er dette svært tydelig:

Oppgave 1

Oppgave 1 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
A og B markert (riktig)	83,3	100	86,2	68,8

Tabell 2

Oppgave 3a

Oppgave 3a Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
9 cm^2 (med riktig enhet) (riktig)	9,3	22,2	6,9	6,3
9 (feil eller manglende enhet) (riktig)	20,4	44,4	13,8	25,0

Tabell 4

Oppgave 3b

Oppgave 3b Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
9 cm^2 (med riktig enhet) (riktig)	7,4	33,3	3,4	
9 (feil eller manglende enhet) (riktig)	11,1	33,3	6,9	6,3

Tabell 5

Oppgave 4b

Oppgave 4b Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
1.: A,C og D 2.: B (riktig)	53,7	77,8	55,2	37,5

Tabell 7

Oppgave 7

Oppgave 7 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
94,2 cm3 (med riktig enhet) (riktig)	3,7	11,1	3,4	
94,2 (uten enhet) (riktig)	9,3	22,2	3,4	12,5

Tabell 10

I tabellene ovenfor ser en altså en tydelig bekreftelse av hypotese 1. Det var også oppgaver som ikke var like tydelige med tanke på å bekrefte denne hypotesen. Her kommenteres hver oppgave med tanke på mulige grunner til at resultatet ble slikt på disse.

Oppgave 4a

Oppgave 4a Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
B og D markert (riktig)	87,0	88,9	86,2	87,5

Tabell 6

Det virker som at denne oppgaven var lett og forståelig for de fleste elevene uavhengig av hvilke stadie de lå på i følge Bells skala.

Oppgave 5

Oppgave 5 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
2. med begrunnelse (riktig)	11,1	11,1	13,8	6,3
2. har målt, bruker ren empiri for å begrunne.	7,4	33,3	3,4	

Tabell 8

Her ser vi at kategori 2 har høyest riktig-svar-prosent der de greier å begrunne at påstand 2 er den riktige. Oppgaven ber elevene begrunne hvorfor denne påstanden er riktig, og om vi tar i betraktning at det å måle figuren er god nok begrunnelse vil en kunne argumentere for at kategori 1 også her har høyeste riktig-svar-prosent.

Oppgave 6

Oppgave 6 Test i geometri	Hele trinnet (prosent)	Kategori 1 (prosent)	Kategori 2 (prosent)	Kategori 3 (prosent)
160 cm^3 (med riktig enhet) (riktig)	24,1	44,4	24,1	12,5
160 (feil eller manglende enhet) (riktig)	44,4	33,3	48,3	43,8

Tabell 9

Denne oppgaven gikk ut på å beregne volum av et prisme, og det ser det ut til at mange av elevene klarte. Totalt i klassen klarte 68,5 % denne oppgaven, men rundt en tredjedel av disse hadde ikke med riktig enhet. Her ser vi enda et eksempel på en oppgave de fleste klarte, og dermed er det ikke så stor forskjell mellom de tre kategoriene med tanke på det å beregne arealet. Men om vi tar i betraktning å ha med riktig målenhet, ser vi en tydelig tendens til at elevene i kategori 1 gjør dette i større grad enn kategori 2 og 3.

Altså ser vi fremdeles en ganske klar tendens til at elevene i kategori 1 har høyere andel riktige svar enn kategori 2 og 3. Den eneste oppgaven der dette ikke var tilfellet var i oppgave 2 som vist i tabell 3 under:

Oppgave 2

Oppgave 2 **Test i geometri**	**Hele trinnet (prosent)**	**Kategori 1 (prosent)**	**Kategori 2 (prosent)**	**Kategori 3 (prosent)**
Riktig høyde tegnet inn (riktig)	35,2	33,3	34,5	37,5

Tabell 3

Her ser vi også ganske likt resultat mellom de tre kategoriene, men vi ser at kategori 2 og 3 har høyere prosent riktig svar på denne oppgaven. Likevel er det en svakhet med denne oppgaven, ettersom studenten gav mer hjelp på akkurat denne oppgaven enn det som var tenkt i utgangspunktet, og som i sin tur kan ha gitt elevene forståelser de ikke hadde. Derfor er det naturlig å ikke legge for stor vekt på denne ene oppgaven som går imot hypotese 1.

På bakgrunn av denne analyse er det dermed 5 av 9 oppgaver der vi ser klart og tydelig at hypotese 1 stemmer. Om vi i tillegg inkluderer de oppgavene der det ikke var like tydelig, stemmer hypotesen likevel for 8 av 9 oppgaver. Om vi ytterligere antar at resultatet fra oppgave 2 ikke kan anses som gyldig, stemmer hypotesen 100 % basert på den dataen som er samlet inn.

5.2.2 Hypotese 2

Når hypotese 1 stemmer, betyr det at elevene i kategori 2 alltid svarte dårligere enn elevene i kategori 1. For å teste i hvilken grad hypotese 2 stemmer, er det derfor kun relevant å trekke fram de eksemplene der kategori 3 svarte bedre enn kategori 2. I de oppgavene som ikke trekkes fra svarte kategori 2 bedre enn kategori 3.

Oppgave 3a

Oppgave 3a **Test i geometri**	**Hele trinnet (prosent)**	**Kategori 1 (prosent)**	**Kategori 2 (prosent)**	**Kategori 3 (prosent)**
9 cm^2 (med riktig enhet) (riktig)	9,3	22,2	6,9	6,3
9 (feil eller manglende enhet) (riktig)	20,4	44,4	13,8	25,0

Tabell 4

Her ser vi at kategori 3 har større andel riktige svar enn kategori 2 om vi tar i betraktning at enhet ikke spiller noen rolle.

Oppgave 4a

Oppgave 4a **Test i geometri**	**Hele trinnet (prosent)**	**Kategori 1 (prosent)**	**Kategori 2 (prosent)**	**Kategori 3 (prosent)**
B og D markert (riktig)	87,0	88,9	86,2	87,5

Tabell 6

Her ser vi en liten forskjell mellom kategori 2 og 3, der det 3 svarer noe bedre.

Oppgave 7

Oppgave 7 **Test i geometri**	**Hele trinnet (prosent)**	**Kategori 1 (prosent)**	**Kategori 2 (prosent)**	**Kategori 3 (prosent)**
94,2 cm3 (med riktig enhet) (riktig)	3,7	11,1	3,4	
94,2 (uten enhet) (riktig)	9,3	22,2	3,4	12,5

Tabell 10

Dette er den oppgaven som avviker mest fra hypotese 2, der vi ser at kategori 3 har 12,5 % riktig svar, mens kategori 2 kun har 6,8 %.

Ut fra disse tabellene ser vi at hypotese 2 stemmer til en viss grad, men er ikke like sikker som hypotese 1. På grunn av den tydelige tendensen til at hypotese 1 stemmer, hadde det vært interessant å undersøke om disse funnene er signifikante.

5.3 Mulig metode for beregning av signifikans

Siden hypotese 1 i så stor grad stemte er det relevant å undersøke om disse funnene er signifikante. For å sjekke dette tar jeg utgangspunkt i et konfidensnivå på 95 %. Det innebærer at om jeg hadde gjentatt forsøket mitt, ville det vært en 95 % sjanse for at jeg fikk samme eller bedre resultat. Når studenten ikke har gjort dette i analysen sin i utgangspunktet er det fordi det ikke er et stort nok utvalg elever for å gjøre en slik analyse.

Likevel vil det kunne gi visse implikasjoner på om funnene i analysen er signifikante eller ikke. Om vi ser på resultatet fra oppgave 3b er det ganske stor forskjell mellom kategori 1, og kategori 2 og 3. Om vi ønsker å regne ut signifikans med 5 % kan en benytte en binomisk sannsynlighetsfordeling. Ved å regne ut vektet gjennomsnitt av de riktige svarene til kategori 2 og 3, er det 8,7 % sjanse for at de vil svare riktig på den oppgaven. Kategori 1 består av 9 elever, og vi finner den binomiske sannsynligheten om vi trekker 9 tilfeldig valgte elever fra kategori 2 og 3, der sannsynligheten for at de svarer riktig er 8,7 %. I kategori 1 var det 6 personer som svarte riktig. Dette gir oss følgende regnestykke for signifikans for denne oppgaven:

$$\binom{9}{6} \times 0.087^6 \times 0.913^3 + \binom{9}{7} \times 0.087^7 \times 0.913^2 + 9 \times 0.087^8 \times 0.913 + 0.087^9$$

Som blir omtrent 0,003 % sjanse for at 9 tilfeldig utvalgte elever fra kategori 2 og 3 ville svart like godt eller bedre enn kategori 1. Dermed ser vi stor grad av signifikans på oppgave 3b. Men det er ikke like tydelige forskjeller i de andre oppgavene. Når det i tillegg i utgangspunktet ikke er grunnlag for å regne signifikans på et for lite utvalg velger studenten å ikke legge for mye vekt på dette.

6. Mulige svakheter med undersøkelsen

I all datainnsamling og forskning er det gjort en rekke valg, og det innebærer at den dataen og resultatet en arbeider med er både en representasjon og en reduksjon av en kompleks virkelighet. De valgene som er tatt i denne oppgaven er gjort med beste intensjoner for å samle inn data for å svare på forskningsspørsmålene som er stilt. Likevel er det alltid rom for forbedringer, samt at det å velge noe, innebærer å velge bort noe annet. For det første har jeg valgt å gjennomføre en kvantitativ undersøkelse, der jeg kartlegger hele 7. trinnet. Dette innebærer at jeg ikke får kartlagt bevisforståelsen like godt i dybden som jeg for eksempel ville gjort med et intervju. Med tidsrammen for oppgaven har det ikke vært kapasitet til å gjennomføre alle disse intervjuene. Et alternativ ville vært å gjennomføre et intervju på et lite utvalg.

En annen svakhet med utformingen av geometritesten er at det er gjort et utvalg av oppgaver, slik at en ikke får testet elevenes forståelse i geometri fullt ut. Skulle en fått testet dette grundigere måtte det blitt tatt med flere ulike oppgaver, som dekket flere tema innen geometrien. Igjen er det tidsrammen, samt studentens kapasitet, som setter begrensninger.

Når det er sagt at både kartleggingen av elevenes forståelse i geometri og deres beviskompetanse kunne vært gjort grundigere, blir det en logisk konsekvens at sammenligningen av disse også kunne blitt bedre.

En annen mulig svakhet finnes med selve datainnsamlingen. Det kan være at ikke alle elevene fikk tilstrekkelig tid til å svare på alle oppgavene. Geometritesten ble gjennomført innen en skoletime på 45 minutter, og det er rimelig å anta at dette kan ha vært for kort tid for enkelte av elevene.

Ut fra svarprosenten på enkelte av oppgavene, blant annet oppgave 8 og 9 kan det virke som at disse oppgavene var for krevende for elevene. Om de muligens hadde vært utformet på en annen måte, ville det kanskje gitt en høyere svarprosent.

Når det gjelder antall enheter i hver kategori 1, 2 og 3, er det en svakhet med antallet i hver kategori. Resultatet fra geometritesten er prosentuert for å kunne sammenligne resultatet i de ulike kategoriene, men både i kategori 1 og 3 er det relativt få enheter, henholdsvis 9 og 16. Hadde det totalt vært flere elever som hadde besvart testen ville dette problemet vært løst. På bakgrunn av dette blir sammenligningen mellom kategoriene ikke optimal. Skulle en generalisert hadde en trengt flere elever.

7. Konklusjon og didaktiske refleksjoner

Denne oppgaven har hatt fokus på argumentasjon og beviskompetanse innen geometri hos elever på 7. trinn. På bakgrunn av dette er det utformet to forskningsspørsmål. Det første hadde som fokus å kartlegge elevens stadie i følge Bells skala for utvikling av bevisforståelse. Det andre satte funnene fra forskningsspørsmål 1 i en større sammenheng, da elevenes stadier ble sammenlignet med deres forståelse ellers i geometri.

På bakgrunn av de funnene som er gjort, er det mye som tyder på at de elevene som ligger på høyere stadie på Bells skala også svarer bedre på andre oppgaver innen geometri. Sett på bakgrunn av det, er det relevant å si at undersøkelsen og analysen har gitt gode svar på forskningsspørsmålene. Likevel bør det vektlegges at elevenes *forståelse* er et svært komplekst område innen matematikkdidaktikken, og at gjennom en skriftlig geometritest vil man kun få et lite innblikk i elevenes forståelse. Dermed blir det ikke helt riktig å påstå at høyere stadie på Bells skala, automatisk medfører større grad av forståelse. Det ville vært interessant å se videre forskning på dette området, der en muligens hadde gjennomført en kvalitativ metode for å få dypere innblikk i både elevenes argumentasjon, samt deres forståelse.

Selv om det finnes en del svakheter med undersøkelsen (se kap. 6) som er gjennomført i denne bacheloroppgaven, er det indikasjoner på at funnene som er gjort angående sammenhengen mellom beviskompetanse og forståelse er relevant. Om det stemmer at de som har bedre beviskompetanse får bedre forståelse, blir det enda mer aktuelt for matematikklærere å fokusere på bevis og argumentasjon i matematikkundervisningen. Det er studentens inntrykk at dette er en utbredt oppfatning blant matematikklærere allerede. Samtidig opplever studenten at mange elever ikke opplever matematikk som et argumentasjonsfag, men snarere ett puggefag. Derfor tyder det på at vi fremdeles har en vei å gå, med tanke på å arbeide med argumentasjon og bevis i matematikkundervisningen.

8. Litteraturliste

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Ball, D., og Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Red.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, s. 23–40.

Christoffersen L., og Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene.* Oslo: Abstrakt forlag.

Fuys, D., Geddes, D. og Tischler, R. (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents* (Journal for Research in Mathematics Education. Monograf 3). Reston: National Councel of Teachers of Mathematics. Hentet fra: www.jstor.org/stable/749957

Hana, G. (1998). *Proof as Explanation in Geometry.* Ontario.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). *Students' proof schemes: Results from exploratory studies*. I E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J. Kaput (Red.), Research on Collegiate Mathematics Education, III (s. 234-283). AMS.

Heinze, A. (2004). T*HE PROVING PROCESS IN MATHEMATICS CLASSROOM. METHOD AND RESULTS OF A VIDEO STUDY*. (Vol. 3, s. 41-48). Tyskland: PME.

Lester, F. K. (2005). *On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education*. (Vol. 37, s. 457-467). Indiana: ZDM.

Lithner, J. (2007). *A research framework for creative and imitative reasoning.* (Vol. 67 (3), s. 255-266). Luxembrug: Springer Science + Business Media B.V.

Matematikksenteret (2008). *Tall og tallforståelse - fra tallremser til algebra.* (Konferanserapport no. 5). Trondheim: Matematikksenteret.

Stylianides, A. J. (2007). *Proof and Proving in School Mathematics*. Oxford: Journal for Research in Mathematics Education.

Yackel, E., og Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. I J. Kilpatrick, W. G. Martin og D. Schftier (Red.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (s. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers in Mathematics.

Utdanningsdirektoratet (2012). *Læringsstøttende prøver i matematikk 5. - 10. årstrinn, ressurshefte geometri.*

Utdanningsdirektoratet (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal

9. Vedlegg

Det er tre vedlegg til denne oppgaven. De er:

1. Informasjon til foreldre: Samtykkeskjema
2. Informasjon til samarbeidsskole
3. Geometritesten

i. Informasjon til foreldre

Høgskulen på Vestlandet
Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett (FLKI)

Høgskulen på Vestlandet

Informasjon om at lærerstudenter ved Høgskulen på Vestlandet gjennomfører en undersøkelse som del av arbeidet med bacheloroppgaven

Jeg er lærerstudent ved Høgskulen på Vestlandet, og skolen til ditt barn er min praksisskole nå i mitt tredje studieår. Jeg skal nå arbeide med den obligatoriske bacheloroppgaven som er en del av grunnskolelærerutdanningen. Oppgaven skal belyse utfordringer ved arbeidet i skolen med utgangspunkt i pedagogikk eller et bestemt fag. Temaet for oppgaven min er argumentasjon og bevis i geometri, og jeg vil i oppgaven forsøke å belyse sammenhengen mellom det generelle nivået i geometri, med elevenes evne til å se mønster og sammenhenger i geometri, samt argumentere for disse. Jeg vil samle inn data til oppgaven i uke 10-13.

I denne sammenhengen planlegger jeg å be elevene i 7. klasse om å gjennomføre en anonym prøve på skolen. Spørsmålene er utformet for å teste det generelle nivået i geometri samt teste elevenes nivå til å se sammenhenger og argumentere for disse i geometri.

Det vil ikke bli innhentet opplysninger som kan knyttes til enkeltpersoner/elever. Skulle det likevel fremkomme opplysninger (ved at elev gir til kjenne egen eller andres identitet), vil disse opplysningene fjernes/slettes umiddelbart og ikke inngå i datamaterialet. Det blir ikke registrert hvilke elever som har deltatt i undersøkelsen.

Det skal ikke innhentes personopplysninger i forbindelse med elevens deltakelse. Deltakelse er selvfølgelig frivillig, både for elev og forelde, og det spørres derfor etter samtykke fra foreldre/foresatte. Signer nederst i dokumentet for å avgi ditt samtykke til at barnet ditt er med i denne undersøkelsen.

Dersom du har spørsmål, kan du ringe meg på 481 33 461, eller sende en e-post til 180178@stud.hvl.no. Du kan også kontakte min veileder Nils Henry Williams Rasmussen (HVL) Avdeling for lærerutdanning på telefonnummer +47 55 58 55 28.

Med vennlig hilsen

Jakob Graave Nakling

Student ved HVL

Samtykke fra foreldre

☐ Jeg samtykker til at mitt barn deltar (Kryss av)

Dato: Signatur

____

ii. Informasjon til samarbeidsskole

Høgskulen på Vestlandet
Fakultet for lærarutdanning, kultur og idrett (FLKI)

Informasjon om at studenter ved Høgskulen på Vestlandet planlegger å gjennomføre arbeid med bacheloroppgaver ved praksisskolen

I grunnskolelærerutdanningen inngår det krav om at studentene i tredje år skal skrive en obligatorisk større oppgave som er praksisrelatert og forskningsrettet – en bacheloroppgave. Ettersom dere er praksisskole for studenter ved Høgskulen på Vestlandet, ønsker vi å informere om det arbeidet som skal utføres med bacheloroppgaven i 3. studieår.

Oppgavene skal belyse utfordringer ved arbeidet i skolen basert på en faglig eller pedagogisk problemstilling.

Ingen av partnerskolens personale har noe pålagt ansvar i forbindelse med bacheloroppgavene. Hver student har en veileder ved HVL. Praksislærere og andre lærere ved skolen vil likevel kunne være til støtte og hjelp for studentene, og høgskolen takker på forhånd for all velvillighet.

Videre er vårpraksisen for tredjeårsstudentene ikke primært tilknyttet bacheloroppgaven. Vårpraksisen er først og fremst en vanlig praksisperiode knyttet til det fagemnet studentene har i tillegg til bacheloroppgaven, men det vil nok likevel være slik at studentene i forskjellig grad vil ha behov for å hente inn data i løpet av vårpraksisen. Data kan bli innhentet i form av spørreskjema, intervju, observasjoner eller tekster elevene har produsert. Det kan også være aktuelt å innhente data fra lærere. Vi håper også her at skolen og veilederne vil være imøtekommende overfor de behov som studentene måtte ha.

Studentene har fått informasjon fra personvernombudet for forskning for å sikre at innhenting av data ikke kommer i strid med personopplysningsloven og datatilsynet sine retningslinjer. De viktigste stikkordene i denne sammenhengen er meldeplikt og samtykke.

MELDEPLIKT (til NSD): Elektronisk behandling av personopplysninger utløser meldeplikt. Personopplysninger er informasjon som til sammen kan identifisere en person. Vi ønsker i utgangspunktet at studentene skal utforme prosjektene sine slik at det ikke innhentes og behandles personopplysninger. Unntak fra dette diskuterer studenten med sin veileder, og prosjektet meldes til Personvernombudet for forskning, NSD.

(Side 1 av 2)

SAMTYKKE: Bruk av spørreskjema, intervju, observasjoner og tekster (skrevet av elever) kan gjennomføres slik at formelt samtykke fra foreldrene ikke er nødvendig. Det forutsettes da at det ikke føres liste over elever som har deltatt, at spørreskjema er anonyme og at data fra intervju, observasjoner og tekster bearbeides slik at ingen personer kan identifiseres i dataene (ingen navn eller opplysninger som kan identifisere personer kan lagres på pc). I slike tilfeller vil studentene likevel informere foresatte om at deltakelse er frivillig og at de kan ta kontakt for å reservere seg mot undersøkelsen. Studentene vil bruke et standard informasjonsskriv til foreldrene før datainnsamling gjennomføres.

Vi ber om at studentene får anledning til å samle inn data i skoletiden dersom de har behov for det, mens elever som ikke skal delta i undersøkelsen får et alternativt tilbud. Vennligst ta kontakt med undertegnede dersom dere har spørsmål og/eller kommentarer til informasjonen ovenfor eller dersom det er behov for oppklaringer underveis. Nedenfor finner dere lenker til Personvernombudet for forskning (NSD) sin omtale av datainnsamling i skoler og vanlige spørsmål.

http://www.nsd.uib.no/personvernombud/hjelp/forskningstema/barnehage_skole.html

https://trygg.nsd.uib.no/personvern/meldeplikt/vanlige_sporsmal.html

Meldeplikttest: http://www.nsd.uib.no/personvernombud/meld_prosjekt/index.html

Vennlig hilsen

Nina Grieg Viig, ngv@hvl.no

Programansvarlig GLU 5-10

Bodil Kjesbo Risøy, bkr@hvl.no

Programansvarlig GLU 1-7

FLKI
Høgskulen på Vestlandet

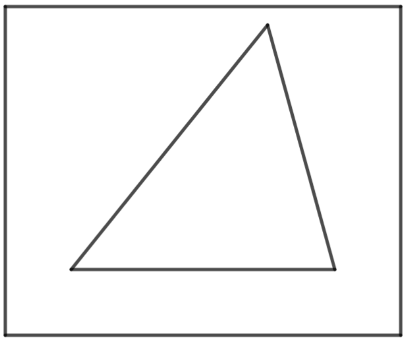
(Side 2 av 2)

iii. Geometritesten

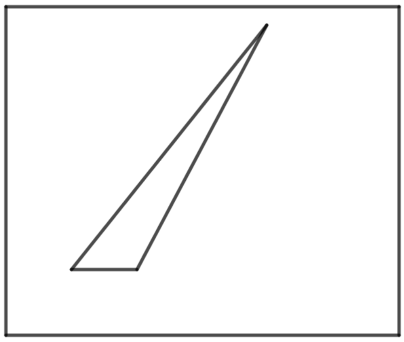
Oppgave 1

Sett ring rundt de figurene som er trekanter

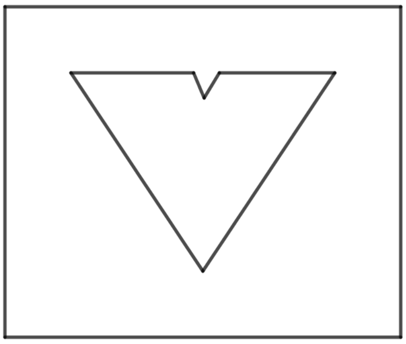
A



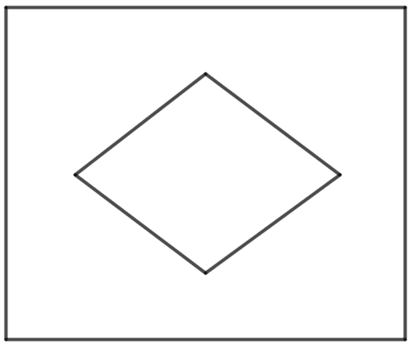
B



C

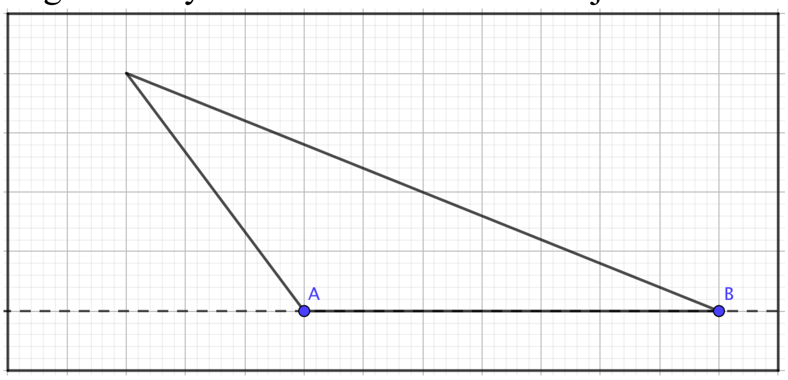


D



Oppgave 2

Tegn inn høyden i denne trekanten. Linjen mellom A og B danner grunnlinjen

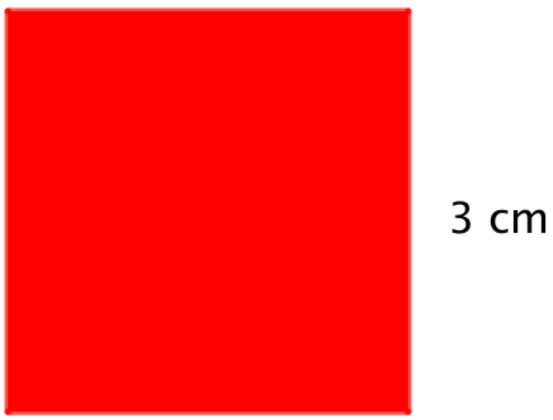


(Side 1 av 10)

Oppgave 3

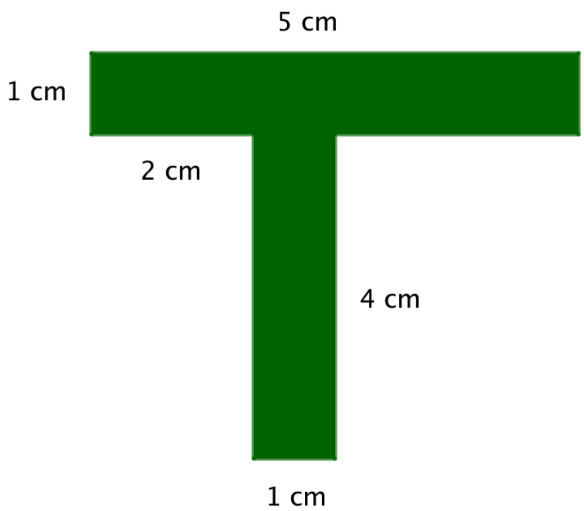
a) Hvor stort areal har kvadrat A? Vis utregning i boksen til høgre

A



b) Hvor stort areal har figur B? Vis utregning i boksen til høgre

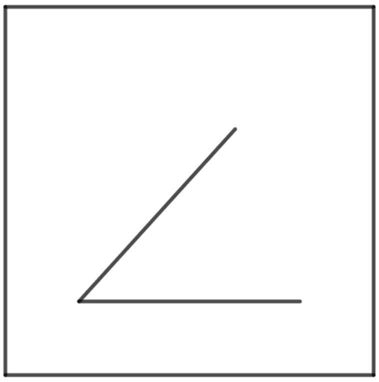
B



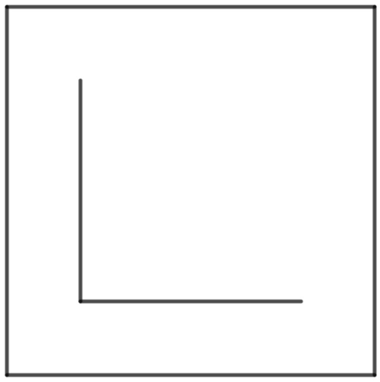
Oppgave 4

a) Sett ring rundt de vinklene som er rette

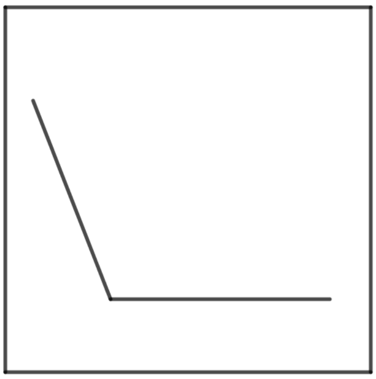
A



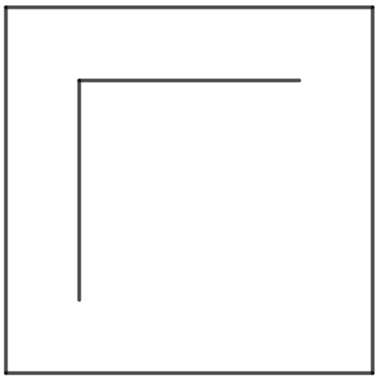
B



C



D



b) Skriv bokstavene til figurene der:

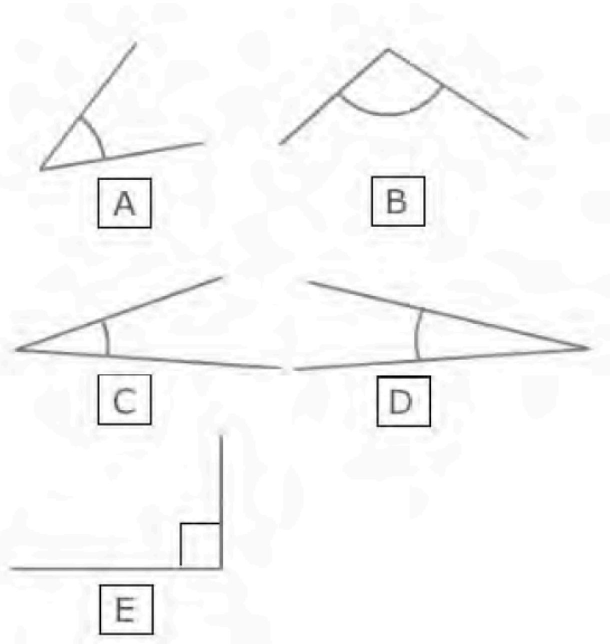
(Om du mener det er flere vinkler som er riktig, skiller du dem med å skrive A, B, C)

1. Vinkelen er under 90°

____

2. Vinkelen er over 90°

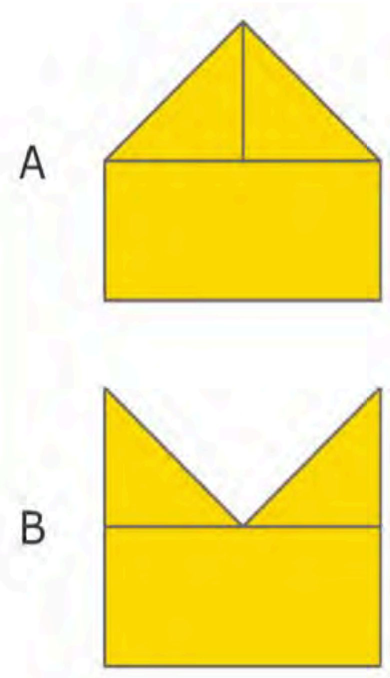
____



Oppgave 5

Se på de to figurene til høgre

Hvilken påstand er riktig?
1. Omkretsen til A er større enn omkretsen til B
2. Omkretsen til B er større enn omkretsen til A
3. Begge figurene har lik omkrets
4. Vi kan ikke avgjøre hvilken figur som har lengst omkrets.



Begrunn svaret ditt:
Svar:

____

____

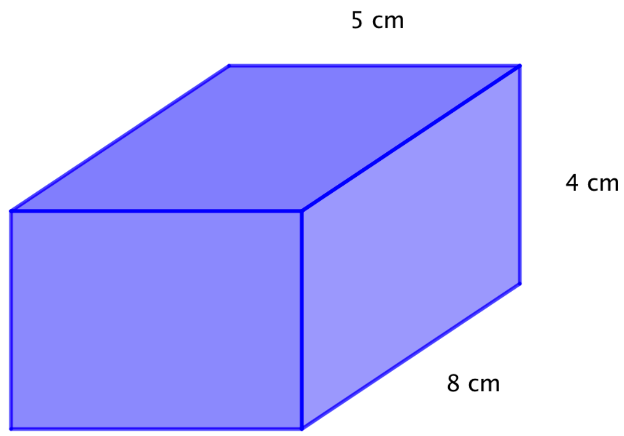
____

____

(Side 4 av 10)

Oppgave 6

Se på prismet under



Regn ut volumet til dette prismet.

Vis utregning i boksen til høgre.

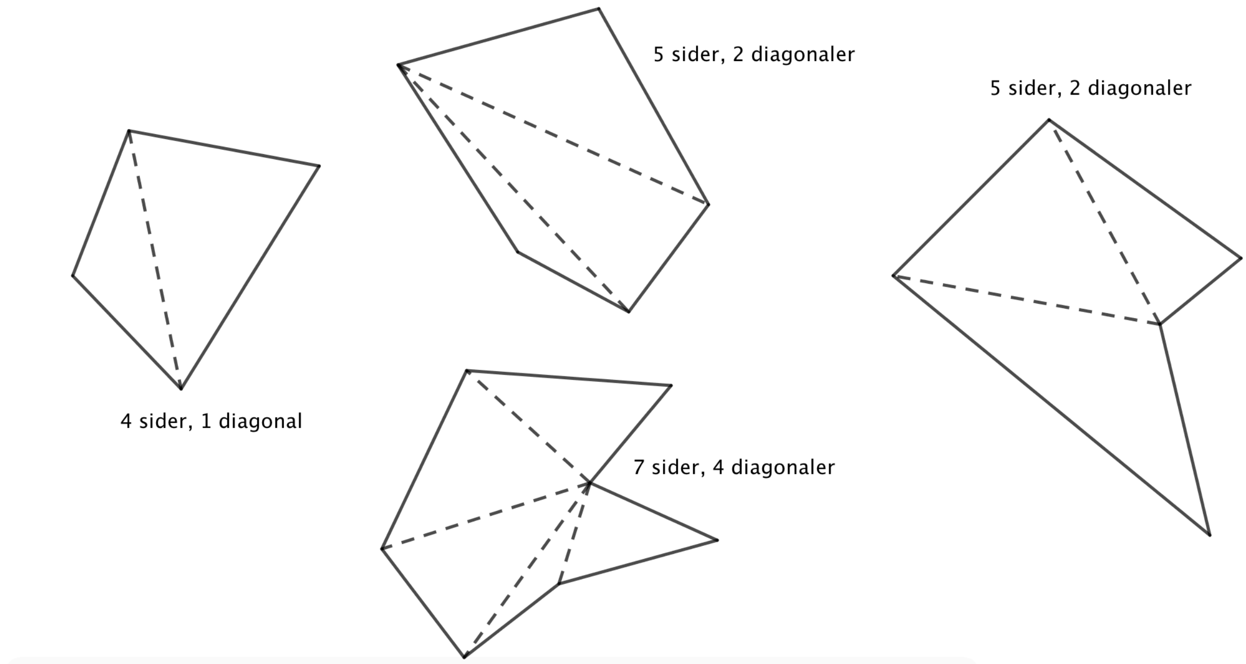
Oppgave 7

En sylinder har høyde 7,5 cm. Radiusen til grunnflaten er 2 cm. Regn ut volumet til denne sylinderen. Vis utregning i boksen under.

(Side 5 av 10)

Oppgave 8

Nedenfor ser du flere ulike mangekanter. Det ser ut som at maksimalt antall diagonaler som ikke krysser hverandre, er tre mindre enn antall sider.



Er denne påstanden sann for alle mangekanter?

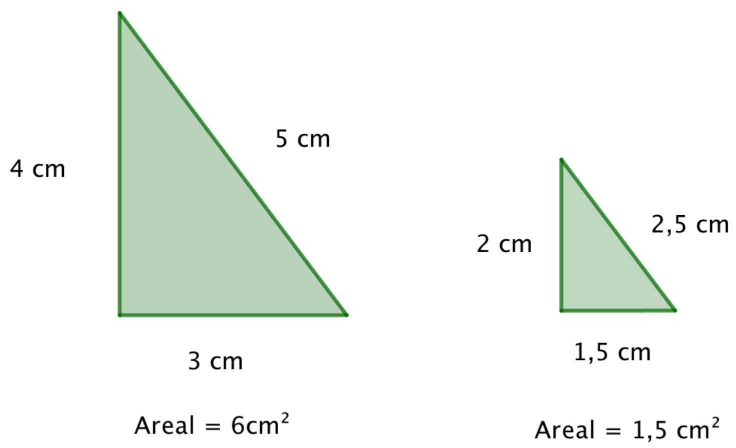
Undersøk dette fullt ut. Begrunn hvorfor du mener dette er sant eller ikke for alle mangekanter. Svar på oppgaven på neste side.

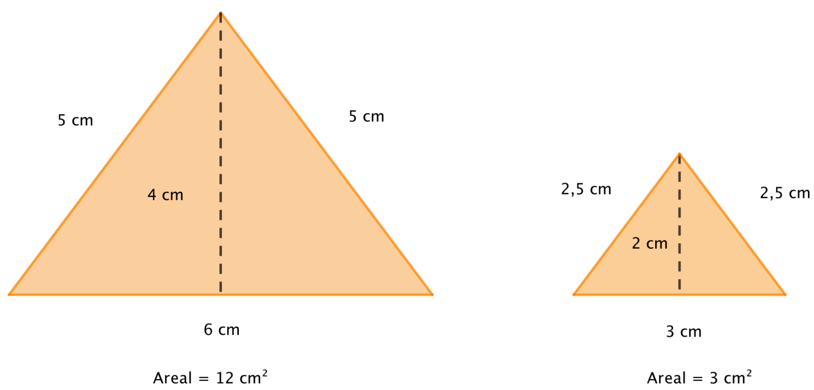
(Side 6 av 10)

(Side 7 av 10)

Oppgave 9

Her ser du to par med trekanter. Sidelengdene på de minste trekantene er halvparten av sidelengdene til de største.





Trekantene i hvert par er formlike, det vil si at de har lik form. Beskriv hva som skjer med arealet mellom de formlike trekantene når sidelengdene halveres.

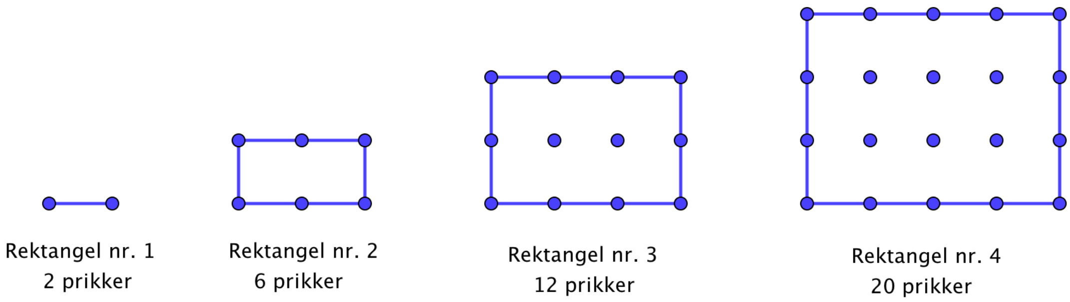
Vil det du har funnet ut, gjelde for alle formlike trekanter når sidelengdene halveres? Begrunn svaret ditt. Svar på oppgaven på neste side.

(Side 8 av10)

(Side 9 av 10)

Oppgave 10

Nedenfor ser du de fire første rektangeltallene vist som antall prikker



a) Hva tror du er grunnen til at disse tallene kalles rektangeltall?

____

____

De fire første rektangeltallene gir følgende tallfølge 2 – 6 – 12 – 20

b) Hva blir det neste tallet i denne følgen? ________

Begrunn svaret ditt: ____________________________

____

c) Se på rektanglene ovenfor igjen. Hvor mange prikker vil det være i:

1. Rektangel nr. 10? _______
2. Rektangel nr. 100? _______

d) Beskriv sammenhengen mellom rektangelnummer og antall prikker. Skriv på baksiden av arket om du trenger mer plass.

____

____

____

(Side 10 av 10)