WISEflow
Europe/Oslo(CEST)
15 May 2017

Høgskulen på Vestlandet

Masteroppgave

M120UND509

Predefinert informasjon

Startdato:	06-05-2017 09:00	**Termin:**	2017 VÅR
Sluttdato:	15-05-2017 14:00	**Vurderingsform:**	Norsk 6-trinnsskala (A-F)
Eksamensform:	Masteroppgave	**Studiepoeng:**	45
SIS-kode:	M120UND509 1 MG		
Intern sensor:	(Anonymisert)		

Deltaker

Kandidatnr.: 713

Informasjon fra deltaker

Tro- og loverklæring *:	Ja	**Jeg godkjenner avtalen om tilgjengeliggjøring av masteroppgaven min *:**	Ja

Høgskulen på Vestlandet

MASTEROPPGAVE

Sammenligning av læreverk i matematikk med henblikk på læringsmuligheter for algebraisk tenkning

Comparison of textbooks in mathematics with a view to learning opportunities for Algebraic Thinking

Kandidatnr.: 713

Master i undervisningsvitenskap med fordypning i matematikk

Avdeling for lærerutdanning

Veiledere: Suela Kacerja og Silke Lekaus

Innleveringsdato 15.05.2017

Forord

Interessen for å gi elevene de beste forutsetninger for å lære, har alltid vært sterkt til stede i min lærergjerning. Det å se at elever sliter med å nå langt i mitt favorittfag (matematikk), har vært en gnagende frustrasjon i mange år. Så da anledningen bød seg til å få jobbe målrettet med akkurat denne problemstillingen, var det ikke vanskelig å la seg motivere.

Det var særlig i algebra jeg så at elevene slet mer enn ellers, så under arbeidet med å velge emne for masteroppgaven, var det naturlig å se nærmere på akkurat dette. Da jeg fant en skole i Sandnes kommune som hadde svært gode resultater å vise til etter omleggingen av undervisningen til en russisk modell, ønsket jeg å forstå noe av denne sammenhengen. Etter å ha sett på læreverket de brukte, ble det tidlig klart at mulighetene til algebraisk tenkning i det russiskbaserte læreverket utmerket seg i positiv retning.

Det er i spenningsfeltet mellom algebra, muligheter for læring og ønsket om bedre å kunne hjelpe elevene i matematikk, at denne masteroppgaven har blitt til.

Jeg skylder en særlig stor takk til mine to veiledere, Suela Kacerja og Silke Lekaus, som har kommet med klargjørende og kritiske innspill, og motivasjon til å forbedre oppgavens form og innhold. Det har ikke vært fritt for frustrasjoner, men ut av frustrasjonen har viktige endringer vokst fram. Det er også på sin plass å takke de av mine medstudenter som har tatt seg tid til å komme med sine vurderinger av blant annet hvordan ulike oppgavetyper skal kategoriseres, og råd og vink i forhold til valg av litteratur og utforming. Jeg har også hatt kollegaer fra læreryrket som har bidratt med refleksjoner med sterk forankring i konkrete undervisningssituasjoner, rundt flere av utfordringene som er løftet frem i denne masteroppgaven. Sist men ikke minst, vil jeg takke en tålmodig og støttende kone, som på tross av en ny tilværelse som småbarnsmor, har vist raushet og forståelse for tiden arbeidet med masteroppgaven har lagt beslag på.

Kandidatnr.: 713

Bergen, mai 2017

Sammendrag

I denne masteroppgaven ville jeg se på hvordan tre læreverk som er brukt i den norske småskolen, er tilrettelagt for arbeid med *algebraisk tenkning*. Jeg valgte å se på læreverk laget for elever på 2. årstrinn. Læreverket *Matematikk* har blitt fremholdt som hovedårsak til svært gode resultater på nasjonale tester i matematikk, mens læreverket *Multi* er et av de mest brukte i norsk matematikkundervisning. Det tredje læreverket *Grunntall* var jeg selv med på å velge ut til en barneskole hvor jeg har arbeidet.

Jeg har valgt å ta utgangspunkt i hvilke læringsmuligheter som er i matematikkoppgavene elevene møter i læreverkene. Med læringsmuligheter forstås det her muligheten til å studere et bestemt emne. For å kunne gi svar på dette, laget jeg et rammeverk bestående av ulike kategorier av områder hvor algebraisk tenkning kan jobbes med. Disse kategoriene omhandlet generalisering og generelle egenskaper, likt og ulikt, mønster og algebra. Ettersom forståelsen av likhetstegnet som et relasjonstegn, er sentral i algebraisk tenkning, valgte jeg i tillegg å se på hvordan dette tegnet er brukt i læreverkene.

Etter å ha kategorisert og systematisert 2 436 oppgaver, fant jeg at det er signifikante forskjeller i hvilke læringsmuligheter som er i oppgavene til de ulike læreverkene. Det er læringsmuligheter for algebraisk tenkning i 50 % av oppgavene til læreverket Matematikk 2ab, mens det i Grunntall 2ab og Multi 2ab kun er henholdsvis 6 % og 14 % av oppgavene med denne læringsmuligheten.

Matematikk 2ab er det eneste av læreverkene som har en vesentlig og forholdsvis jevn fordeling av oppgaver med algebraisk tenkning (fra 33 % til 56 %) innad de fire kompetanseemnene: tall, geometri, måling og statistikk, og også det eneste læreverket som har oppgaver fra kompetanseemnet algebra. I Grunntall 2ab og Multi 2ab er over halvparten av oppgavene med muligheter for algebraisk tenkning knyttet til kategorien for mønster.

Det er også vesentlige forskjeller læreverkene imellom i forhold til hvordan likhetstegnet er brukt i oppgavene. Mens læreverkene Grunntall 2ab og Multi 2ab har en relasjonell bruk av likhetstegnet i henholdsvis 19 % og 17 % av oppgavene, har læreverket Matematikk 2ab en relasjonell bruk i 49 % av oppgavene.

Abstract

My aim when writing this thesis was to analyse how three different school books designed for Norwegian primary schools handle *algebraic thinking*. I chose to look at school books for 2nd graders. I chose the book Matematikk due to its connection to excellent results in national mathematic tests. The book Multi is one of the most widely used books in Norwegian mathematic lessons. The book Grunntall I chose because I was involved in selecting this book for a primary school I previously worked at.

I chose to look at the opportunities to learn (OTL) the mathematic exercises in the books offer to pupils. With OTL I mean the possibility to learn about a specific topic. To answer this question, I developed a framework consisting of different categories that describe the areas for algebraic thinking.

These categories involve generalization and general characteristics, equality and inequality, patterns and algebra. Since it is a central issue in algebraic thinking that the equal sign is understood as a sign for relations, I also chose to look at how this sign is used in the different school books.

After having categorized and systematized 2436 exercises, I discovered that there is a significant difference in what kind of learning opportunities the exercises in the different school books offer. In Matematikk 2ab, about 50 % of the exercises offer learning opportunities in algebraic thinking. In Multi 2ab only 14 % of the exercises offered this learning opportunity, and in Grunntall 2ab it was even less with 6 %.

Matematikk 2ab is the only school book with a considerable amount, and even distribution of, exercises with algebraic thinking within the four key competencies (between 33 % and 56 %): numbers, geometry, measurement and statistics. In addition, Matematikk 2ab is the only school book with exercises in algebra. In Grunntall 2ab and Multi 2ab, over 50 % of the exercises with options for algebraic thinking were connected to patterns. In addition, I discovered that there are major differences in how the school books use the equal sign in their exercises. Grunntall 2ab uses the equal sign in a relational way in 19 % of its exercises and Multi 2ab uses it in 17 % of its exercises. The book Matematikk, however, uses it in a relation way in 49 % of its exercises.

Innholdsfortegnelse

1 INNLEDNING 7
1.1 BAKGRUNN 7
1.2 PROBLEMSTILLING OG FORSKNINGSSPØRSMÅL 10

2 TEORI OG TIDLIGERE FORSKNING 10
2.1 MULIGHET FOR LÆRING 10
2.2 FORSKNING PÅ LÆREVERK 11
2.3 ALGEBRAISK TENKNING 12
2.3.1 Pre-algebra 14
2.3.2 Tidlig algebra 15
2.4 LIKHETSTEGNET 17
2.5 RAMMEVERK 18
2.5.1 Områder av algebraisk tenkning 18
2.5.1.1 Generalisering og generelle egenskaper 19
2.5.1.2 Begrepsparet likt og ulikt 20
2.5.1.3 Mønster i figurer, tallrekker, uttrykk og likheter 20
2.5.1.4 Algebra med variabler 22
2.5.2 Bruk av likhetstegnet 23

3 METODE 24
3.1 METODEVALG 24
3.2 UTVALG 25
3.2.1 Valg av læreverk 25
3.2.1.1 Læreverket Matematikk 25
3.2.1.2 Læreverket Multi 26
3.2.1.3 Læreverket Grunntall 27
3.2.2 Valg av årstrinn 28
3.2.3 Valg av lærebøker 28
3.3 GJENNOMFØRINGEN AV ANALYSEN 28
3.3.1 Systematisering i regneark 28
3.3.2 Kategorisering 29
3.3.2.1 Algebraisk tenkning 30
3.3.2.2 Bruk av likhetstegnet 36
3.3.2.3 Temainndeling av oppgavene 39
3.4 RELIABILITET OG VALIDITET 42
3.4.1 Reliabilitet 43
3.4.2 Validitet 44
3.5 FORSKNINGSETISKE BETRAKTNING 44

4 FUNN 45
4.1 GENERELT OM OPPBYGNINGEN AV LÆREVERKENE 45
4.1.1 Matematikk 2ab 45
4.1.2 Multi 2ab 46
4.1.3 Grunntall 2ab 47
4.1.4 Emnefordeling i læreverkene 47
4.2 ALGEBRAISK TENKNING 48

4.3 BRUK AV LIKHETSTEGNET 50
4.4 RESULTATER SETT I SAMMENHENG MED KOMPETANSEEMNER 51
4.4.1.1 Algebraisk tenkning fordelt på kompetanseemner 51
4.4.1.2 Bruk av likhetstegnet 52
4.5 SAMMENHENGER MELLOM RESULTATENE 52

5 DISKUSJON 54

5.1 GENERELT OM OPPBYGNING AV LÆREVERKENE 54
5.1.1 Fordeling av matematiske emner 56
5.2 LÆREVERKENES MØTE MED RAMMEVERKET 57
5.2.1 Algebraisk tenkning 57
5.2.2 Likhetstegnets bruk 58
5.2.3 Resultater sett i sammenheng med kompetanseemner 59
5.2.4 Sammenhenger mellom resultatene 59

6 KONKLUSJON 60

6.1 VEIEN VIDERE, NYE FORSKNINGSSPØRSMÅL 61

7 BIBLIOGRAFI 62

8 VEDLEGG 66

8.1 VEDLEGG 1: EXCEL-ARK 66
8.2 VEDLEGG 2: VEILEDNING TIL KATEGORISERINGEN 67
8.2.1 Algebraisk tenkning 67
8.2.1.1 GEN 67
8.2.1.2 LOU 67
8.2.1.3 MØN 68
8.2.1.4 ALG 68
8.2.1.5 GRU 68
8.2.1.6 n/a – algebraisk tenkning 70
8.2.2 Bruk av likhetstegnet 70
8.2.2.1 OL 70
8.2.2.2 RL 70
8.2.2.3 n/a - likhetstegnet 71

Liste over figurer

Figur 1 - Pre-algebra som bindeledd mellom aritmetikk og algebra 15

Figur 2 - Aritmetikken er å forstå som en del av algebra 16

Figur 3 - Relasjonen mellom objektet og tegnet 22

Figur 4 - Prosentvis fordeling av algebraisk tenkning innad kompetanseemner 51

Figur 5 - Prosentvis fordeling av likhetstegnet innad kompetanseemner....................52

Liste over tabeller

Tabell 1 - Kapittelinndeling i Matematikk 2ab 46

Tabell 2 - Kapittelinndeling i Multi 2ab 47

Tabell 3 - Kapittelinndeling i Grunntall 2ab....................47

Tabell 4- Tall- og prosentvis fordeling av kompetanseemner 48

Tabell 5 - Tall- og prosentvis fordeling av oppgaver med og uten særlig algebraisk tenkning 49

Tabell 6 - Tall- og prosentvis fordeling av oppgaver med algebraisk tenkning 49

Tabell 7 - Tall- og prosentvis bruk av likhetstegnet....................50

Tabell 8 - Tall- og prosentvis eksplisitt bruk av likhetstegnet....................50

Tabell 9 - Prosentvis fordeling av likhetstegnet innad med og uten særlig algebraisk tenkning 53

Liste over eksempler

Eksempel 1 - Oppgaver kategorisert som GRU fra Grunntall 2a 35

Eksempel 2 - Oppgave kategorisert som OL fra Grunntall 2b 37

Eksempel 3 - Oppgave kategorisert som RL fra Matematikk 2b 37

Eksempel 4 - Oppgave kategorisert som n/a fra Multi 2a....................39

Eksempel 5 - Oppgave kategorisert som MØN og OL fra Grunntall 2b....................53

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

Gjennom min yrkeskarriere har jeg undervist i matematikk på alle grunnskolens og den videregående skolens trinn, og jeg har sett endringer i måloppnåelsen hos elevene. Mitt klare inntrykk er at måloppnåelsen er vesentlig høyere hos de yngste elevene, og at den gradvis avtar gjennom utdanningsløpet. Måloppnåelsen er her vurdert i forhold til tester og prøver som jeg har vært med på å avholde for elevene. I det følgende legger jeg til grunn at det faktisk er en dårligere læringsutvikling hos elevene i forhold til hva som kan forventes i forhold til alder og utviklingsnivå, og ikke at det er vanskelighetsgraden på prøver og tester som er lagt for høyt. Jeg lar det være myndighetene (ved Kunnskapsdepartementet og kommunenes fagavdelinger for skole) og utdanningsinstitusjonene gjennom deres tester være det som definerer hva det er å forvente av elevene på de ulike alderstrinnene. Det er selvsagt ikke gitt at tester og lignende treffer riktig i forhold til hva som faktisk er mulig å forvente, men det er utenfor denne oppgavens rekkevidde å gå nærmere inn på problematikken rundt hvor listen skal ligge, og hvilke begrensninger som ligger i resultatene fra skriftlige tester.

Mitt inntrykk bekreftes av forskning som viser dalende interesse for realfag gjennom skoleløpet, og at norske elevers interesse ligger under gjennomsnittet i PISA og TIMMS (Bergem et al., 2015). Jeg mener også å ha sett at algebra fremstår som et særlig vanskelig emne for eleven. Dette inntrykket underbygges av resultatene i TIMSS-undersøkelsen 2011 (Grønmo et al., 2012). Min primære motivasjon for å ta en mastergrad var å finne mer ut av hvorfor det er slik, og hva som kan gjøres annerledes fra skolens og lærerens side for å motvirke dette.

På nasjonale tester har resultatene vist at norske elevene skårer dårligere i algebra enn hva de gjør i de andre områdene av matematikken (Grønmo et al., 2012). En rådende forklaring på dette har vært lagt til elevenes kognitive utviklingsnivå, som er støttet av forskningen til blant andre Herscovics og Linchevski (1994). Piaget fremholder i sin stadieteori at flertallet av elevene på småskolen befinner seg på et konkret kognitivt stadium, og at de i småskolealder ikke vil nå det abstrakte stadiet, hvor de vil kunne være kognitivt sett i stand til å lære algebra (Sjøberg, 1998). Denne forståelsen av hva elevene kognitivt sett er i stand til å lære, er nå blitt problematisert av eksempelvis amerikanske forskere og utdanningsinstitusjoner (Carraher & Schliemann, 2007) og læreverket Matematikk (Blank, Melhus, Tveit, & Moe, 2014).

I tråd med Piagets teori om elevers kognitive utvikling, har undervisning i algebra vært lagt til de høyere årstrinn i det norske utdanningsløpet. Under hovedområdet *Tall* etter 4. trinn ligger det første kompetansemålet som kan knyttets direkte til algebra. Der står det at *eleven skal kunne bruke matematiske symboler og uttrykksmåter for å uttrykke matematiske sammenhenger i oppgaveløsing*. Algebra kommer først inn som et kombinert hovedområde (Tall og algebra) blant kompetansemålene etter 7. trinn. (Kunnskapsdepartementet, 2014). Et resultat av å legge opp undervisningen med fokus på aritmetikk først og deretter algebra, kan ha vært at mange elever har fått en mangelfull forståelse av likhetstegnet som et relasjonstegn (Kieran, 1981). Forståelsen av likhetstegnet har vært preget av en operasjonell bruk. Det vil si at likhetstegnet i stor grad er forstått som en kommando til å utføre en regneoperasjon. Regnestykket 3 + 5 = 8 forstås ikke primært som at 3 + 5 er det samme som 8, men at 3 + 5 *blir* 8. For å kunne lære algebra er det avgjørende å ha en forståelse av likhetstegnets relasjonelle egenskaper. (Brekke, 2002; Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 1981)

Det har vært prøvd ut ulike måter å angripe problemet med svake resultater i algebra på. En måte har vært å jobbe med *pre-algebra*. Der har man primært forsøkt å bygge bro mellom aritmetikken og algebraen. Dette har vært gjort ved å øke og redefinere bruken av de matematiske symbolene som innledning til at elevene skal begynne å jobbe med algebra. En annen innfallsvinkel har vært å arbeide med *tidlig algebra* parallelt med og integrert i aritmetikken allerede fra elevenes første skoleår. (Carraher & Schliemann, 2007)

Blanton et al. (2015) har forsket på effekten av å undervise de yngste elevene i *algebraisk tenkning*, og har resultater som indikerer at, ved varig og omfattende undervisning i tidlig algebra på 3. trinn i USA (tilsvarer aldersmessig 2. trinn i den norske skolen), elever i denne aldersgruppen er i stand til å involvere seg i forholdsvis sofistikert algebraisk tenkning som tradisjonelt sett har vært utsatt til 6. – 8. trinn (tilsvarer aldersmessig 7. – 9. trinn i den norske skolen) eller senere.

Jeg har gjort søk på nettet for å finne skoler i Norge som har gode resultater å vise til i matematikk, og funnet noe interessant. Smeaheia skole, en barneskole i Sandnes kommune, gikk i 2009 over til en russisk undervisningsmodell i matematikk som baserer seg på prinsipper om *utviklende læring*[1], hvor sentrale elementer som resonnering, relasjonsforståelse og problemløsning, kan kobles til algebraisk

[1] Læringsteorien om *utviklende læring* er blant Lev Vygotskijs bidrag til skolesektoren. Hans tidligere elev og senere kollega Leonid Vladimirovitsj Zankov ledet et omfattende, mangeårig forskningsprosjekt hvor utviklende læring ble prøvd ut i praksis. Han ville se på hvilke sammenhenger det var mellom undervisning og utvikling hos elever. Forskningen resulterte i et omfattende didaktisk system som baserte seg på flere undervisningsprinsipper. Her kan nevnes (a) undervisning på et høyt nivå hvor elevene arbeider med utfordringer i den proksimale utviklingssonen, (b) en forståelse av at hvert barn er unikt og lærer i sitt eget tempo gjennom systematisk og målrettet undervisning, (c) viktigheten av å bevisstgjøre hvert enkelt barn i sin læringsprosess og (d) en rask gjennomgang av stoffet de skal lære. (Zankov, 1977)

tenkning (Melhus, 2015d). Noen år senere fikk de svært gode resultater på den nasjonale prøven i matematikk.

To førsteklasser på Smeaheia skole var de første ut til å få matematikkundervisning etter den russiske modellen. Undervisningen i matematikk fikk nå et særlig fokus på dialog som middel til oppgaveløsning, rask progresjon med varierte oppgaver og høyt nivå med grundig planlagt undervisning og tett oppfølging av hver enkelt elev (Blank et al., 2014). ”Minstekravet” for elever i 1. klasse innbefatter blant annet at elevene (inkludert de svakeste) skal kunne matematiske begreper, faguttrykk og symboler, grunnleggende algebra og enkle ligninger (Moe & Moe, 2016). Etter hvert har flere klasser gått over til den russiske modellen, ikke kun på Smeaheia skole, men også på andre barneskoler i Sandnes kommune. Etter å ha vunnet Kommunesektorens innovasjonspris for sin satsning på matematikkundervisning etter russisk metode i grunnskolen, ble suksessen omtalt slik: ”Elevene som har blitt undervist med russisk matematikk skårer nå blant de beste på nasjonale prøver. Hele 65 % av elevene ved 5. klassetrinn på skolen er på det høyeste mestringsnivået, ingen på det laveste.” (Matematikklandet, 2017)

Resultatene fra Blanton et al. (2015) og erfaringene fra Smeaheia skole og deres fokus på algebraiske elementer som ligninger med en ukjent (Melhus, 2015c), gjør det interessant å se nærmere på hvilke muligheter norske elever på småskolen har til å arbeide med algebraisk tenkning gjennom noen av de læreverkene som er tilgjengelige. Hiebert og Grouws (2007) fremholder at det å få mulighet til å studere et bestemt emne, gir læringsmuligheter innen emnet som studeres. Jeg legger her til grunn at å jobbe med bestemte typer oppgaver i matematikk (eksempelvis oppgaver i algebraisk tenkning), gir læringsmuligheter innen det aktuelle emnet.

Ettersom en relasjonell forståelse av likhetstegnet fremholdes som en sentral del av algebraen, er det også interessant å se på hvordan likhetstegnet fremstilles (relasjonelt eller operasjonelt) i matematikkoppgavene.

Det har ikke lyktes meg å finne at det er gjort en kartlegging av hvilke læringsmuligheter norske elever har for algebraisk tenkning gjennom de læreverkene som er tilgjengelige. Denne masteroppgaven blir i så måte et forsøk på å gi noe kunnskap om hvilke muligheter som er i et utvalg av de norske læreverkene.

1.2 Problemstilling og forskningsspørsmål

Problemstillingen jeg ønsker å belyse i denne oppgaven er:

> *Hvilke forskjeller i læringsmuligheter for algebraisk tenkning er det i oppgavene i læreverk bruk av norske småskoleelever?*

For å belyse problemstillingen har jeg definert følgende forskningsspørsmål:

- *Hvilke muligheter for å jobbe med algebraisk tenkning gir oppgavene i læreverkene?*
- *Hvilke bruk av likhetstegnet (operasjonelt eller relasjonelt) er det i oppgavene?*

Forskningsspørsmålet som omhandler bruken av likhetstegnet søker å belyse hvordan likhetstegnet er presentert for elevene gjennom de oppgavene som er i læreverkene. Dette sees i sammenheng med etableringen av misoppfatninger rundt forståelsen av likhetstegnet, og senere vanskeligheter med å lære algebra.

2 Teori og tidligere forskning

2.1 Mulighet for læring

Ifølge McDonnell (1995, s. 306) er Opportunity to learn (OTL) er et begrep som ble introdusert på 1960-tallet av *The International Association for the Evaluation of Educational Achievement* som skulle være et mål på om elevene har hatt muligheter eller ikke, til å lære bestemte emner og å lære å løse bestemte problemer. OTL skulle være et hjelpemiddel for å sikre gyldigheten i sammenligninger mellom elevprestasjoner i matematikk ulike land imellom. Dette fordi det ble satt som en forutsetning for å kunne gjøre en gyldig sammenligning, at elevene hadde hatt mulighetene til å studere de samme emnene, og lære å løse de samme problemene. Det ble altså gjort en kobling mellom elevenes prestasjoner og deres læringsmuligheter.

Floden (2002) viser til at den mest siterte definisjonen av læringsmuligheter kommer fra *Husen's report of the First International Mathematics Study* (FIMS) og er todelt. Læringsmuligheter gis enten ved at elevene har mulighet til (a) å studere et bestemt emne eller (b) å lære hvordan bestemte typer problemer kan løses. Det er utenfor denne oppgavens rekkevidde å kunne si noe om hva de faktisk har lært, men jeg vil kunne si noe om hvilke muligheter til læring som ligger i læreverkenes oppgaver. Hiebert og Grouws (2007, s. 378) fremhever at elever lærer best det de får størst mulighet til å lære (gjennom å arbeide med bestemte emner og måter å løse ulike problemer på).

Ifølge Floden (2002) er det over en periode på mer enn tre årtier gjort internasjonale komparative studier hvor OTL har vært en stor del av datamaterialet som er samlet inn, analysert og rapporter, og da særlig gjeldende for blant annet matematikk. I disse studiene har det vært sett på læringsmuligheter og det elevene faktisk presterer, og funnet at det er en positiv sammenheng mellom hva elevene har muligheter for å lære og hva de presterer. Jeg legger til grunn det er en positiv sammenheng mellom de oppgavetypene elevene arbeider med, og hva de lærer.

2.2 Forskning på læreverk

Tidligere måtte læreverk brukt i den norske skolen godkjennes av sentrale myndigheter, men dette ble endret i juni 2000. Da ble godkjenningsordningen for lærebøker fra 1889 opphevet av Stortinget, etter enstemmig forslag fra *Kirke-, utdannings og forskningskomiteen* (Bratholm, 2001), og ansvaret for å kvalitetssikre læreverk opp mot læreplanen gikk over til den enkelte kommune og skole. En mulig konsekvens av at mange ulike personer (heller enn et fåtall i departementet) skal vurdere hvilke læreverk som skal brukes i undervisningen som gis til norske elever, kan være at mangfoldet blant læreverk er blitt større. Når vi samtidig har forskning som sier at læreverkene i stor grad styrer hva som blir undervist, blir det å gi en vurdering av ulike læreverk enda mer aktuelt (Johansen, 1999). Li, Chen og An (2009) sammenligner verdien av å analysere læreverkene i forhold til å gjøre en analyse av læreplanene, og kommer til følgende konklusjon:

”An analysis of textbooks would provide a clearer picture of what is to be taught and learned in classrooms than the intended curriculum. Similarly, an analysis of textbooks, rather than the implemented curriculum, would serve as a more accessible way of documenting how teaching and learning are likely to proceed for a large population and over a long period of time.” (Li et al., 2009, s. 809)

Denne konklusjonen fremholder læreboken som en viktigere indikator for hva som blir undervist, enn læreplanen, og sier samtidig noe om hva man kan forvente at store deler av elevene lærer i lang tid fremover. Fremtidsperspektivet forstår jeg her å være knyttet til det faktum at læreverk er ment å brukes om igjen år for år, og at læreverk er en relativt dyr investering for skolene som igjen begrenser mulighetene til å fornye læreverkene med korte intervaller.

Zahoric referert i Johnsen (1999, s. 17) har sett på forholdet mellom lærernes undervisningsstil og lærebøkene. Han fant at læreboken i hovedsak hadde tre bruksområder: Læreboken brukes (1) som kilden til det meste av all innlæring, (2) som utgangspunkt for øvelser og oppgaver og (3) som referanse- og fortolkningsgrunnlag. Det poengteres at det er den første måten å bruke lærebøkene på som dominerer, mens det bruksområdet som forutsettes i planer og lærebokkonsept, er læreboken brukt som referanse- og fortolkningsgrunnlag. Videre presiseres det at lærebøkene ikke dirigerer læreren ettersom det er lærerstilen som bestemmer hvordan lærebøkene blir brukt.

Det er også gjort forskning på norske læreres forhold til læreverkene. Bachmann (2004) gjennomførte en spørreundersøkelse blant norske lærere som underviste i ungdomsskolen. I den studien fant man at de fleste lærerne oppgir at de ofte benytter lærebøkene i sin undervisning. Det kan også være verdt å merke seg at den samme undersøkelsen viste at de fleste lærerne svarte at de kun brukte ett læreverk, og at læreverket i stor grad ble brukt som verktøy i planleggingen av undervisningen.

For å kunne si noe om læringsmulighetene i algebraisk tenkning, er oppgavene i læreverkene her forstått som en god kilde for å kunne si noe om (1) hva elevene møter av matematikkoppgaver (Bachmann, 2004; Johnsen, 1999; Li et al., 2009), og (2) hva de får muligheter til å lære (Hiebert & Grouws, 2007).

2.3 Algebraisk tenkning

Sentrale begreper i denne oppgaven er *algebra* og *algebraisk tenkning*. Dette er begreper som må forstås i sammenheng med hverandre, og som det kan være vanskelig å sette klare skillelinjer mellom. På den ene siden kan man si at all algebra krever algebraisk tenkning, mens all algebraisk tenkning ikke nødvendigvis er algebra. Algebraisk tenkning forstås i denne masteroppgaven som all tenkning som gir muligheter for prosesser knyttet til generalisering, resonnering om det generelle, struktur, mønster, sammenhenger, og formalisering av disse (Valenta, Nosrati, Åsenhus, & Wæge, 2016). Denne forståelsen av *algebraisk tenkning* er vesentlig bredere enn og derfor mer innholdsrik enn hvordan begrepet *algebra* brukes. I denne masteroppgaven vil *algebra* ha en snever definisjon og forstås som læren om ligninger og regning med tall og variabler (Algebra, u.d.). Dette for å tydeligere kunne skille de tett beslektede begrepene *algebraisk tenkning* og *algebra* fra hverandre for å bedre kunne få frem forskjellene i læreverkene.

Skillet mellom hvilke oppgavetyper som primært fordrer regneferdigheter (aritmetikk) og algebraisk tenkning, er ikke å forstå som vanntette skott, men mer som glidende overganger. Når blir for eksempel et økende mønster avansert nok til å gi muligheter for algebraisk tenkning? Carraher og Schliemann (2007) gir en oversikt over forskning på algebraisk tenkning for elever i alderen seks til tolv år. Algebraisk tenkning er her å forstå som de psykologiske prosessene som er involvert i de typer problemløsing som matematikere lett kan uttrykke ved hjelp av algebraiske notasjoner. Det poengteres at aritmetikk og elementær algebra ikke kan skilles klart fra hverandre. Aritmetikk forstås her som vitenskapen om tall, mengder og størrelse.

Bass (1998) definerer skolealgebra eller roten til all algebra til å omhandle (a) *tallsystemet* med heltall og reelle tall til de avledede rasjonelle og komplekse tallene, (b) *aritmetiske operasjoner* med addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, (c) *lineær rekkefølge* og *geometrisk struktur* som forstås som begreper om størrelser og avstander mellom tallene og (d) *algebraiske ligninger* som naturlig vokser fram i disse systemene. Heltall er å forstå som alle naturlige tall (1,2,3, …), samt tallet 0, og deres negative verdier (-1, -2, -3, …). De reelle tallene forstås som alle tall som kan representere punkter på en tallinje av uendelig utstrekning i begge retninger. Dette innbefatter både de rasjonale tallene, som er tall som kan skrives som en brøk med heltall i teller og nevner (som for eksempel 2/3), og de irrasjonale tallene, som er tall som ikke kan skrives som en brøk med heltall i teller og nevner (som for eksempel: π og e) Aritmetiske operasjoner handler her om å gjøre utregninger med utgangspunkt i de fire grunnleggende regneartene: addisjon (å legge et antall til et annet antall), subtraksjon (å trekke et antall fra et annet antall), multiplikasjon (som kan forstås som gjentatt addisjon) og divisjon (å dele et antall på et annet antall). Ekskludert fra denne definisjonen er mer avanserte aritmetiske operasjoner som prosentregning og kvadratrot. Det tredje punktet, som omhandler lineære rekkefølger og geometriske strukturer, handler om forståelsen av størrelser mellom tall, men også om avstanden mellom ulike tall. En forståelse av posisjonssystemets grunnprinsipp om sifferets verdi står sentralt her. Denne forståelsen er særlig viktig å være bevisst når det er snakk om desimaltall hvor antall desimaler er ulikt. En mangelfull forståelse av dette kan avdekkes når tall som 1,14 og 1,4 skal vurderes etter størrelse. Med algebraiske ligninger forstås det her ligninger som inkluderer algebraiske notasjoner. Eksempler på dette kan være bokstavene x og y som representerer variabler eller bestemte ukjente verdier. Det kan kanskje fremstå som søkt å skulle skille mellom ligninger og algebraiske ligninger, men dette gjøres for å ikke underminere verdien av at også 2 + 3 = 3 +2 er en ligning. Slike eksempler er av særlig relevans når elevene skal arbeide med de ulike lovene (som for eksempel den kommutative lov) for regneartene.

Både Bass (1998) og Carraher og Schliemann (2007) viser på hver sin måte hvor tett knyttet algebra og aritmetikk er ved å gjøre den ene til del av den andre om enn på ulik måte.

I Carraher og Schliemann (2007) vises det til tidligere forskning som konkluderer med at elever på *middle* og *hight school* (a) tror at likhetstegnet kun representerer en en-veisoperasjon for å produsere et svar på høyre side, (b) har fokus på å komme frem til et bestemt svar, (c) ikke gjenkjenner de kommutative og distributive lovene, (d) ikke bruker matematiske symboler for å uttrykke relasjoner mellom mengder, (e) ikke forstår bruken av bokstaver, (f) har store utfordringer med å håndtere ukjente og (g) mangler forståelse av at like endringer på hver side av likhetstegnet i en ligning ikke endrer verdiene. Årsaken til at elevene har de nevnte vanskelighetene har blitt koblet til elevenes utilstrekkelige kognitive utviklingsnivå av blant andre Herscovics og Linchevski (1994). Det har dog de siste tiårene blitt presentert idéer om å introdusere algebra mye tidligere enn på *high school,* hvor det tradisjonelt sett har vært vanlig å starte med undervisning i algebra. Det er blitt argumentert for at (a) å flette inn algebra i aritmetikken vil være en styrke for elevene når de senere skal lære algebra, (b) elementær matematikk ikke kan klart skilles fra algebraen, (c) en dypere forståelse av aritmetikk krever matematisk generalisering som er algebraisk i sin natur og (d) at bruk av algebra ved hjelp av ligninger er mer effektivt og naturlig som metode i møte med matematiske problem enn aritmetikk. (Carraher & Schliemann, 2007, s. 671)

For USA sin del er det to hendelser som trekkes fram av Carraher og Schliemann (2007, s. 671) som avgjørende for endringene som har vært gjort i retning av implementering av algebraisk tenkning i læreverk og undervisning. Den første hendelsen var da den toneangivende organisasjonen *The National Council of Teachers of Mathematics* i år 2000, anbefalte at algebra skulle implementeres i preK-12 pensumet. Den andre hendelsen var i år 2003 da RAND Mathematics Study Panel (2003) i sin rapport fremholdt at hovedfokus for koordinert forskning og utvikling burde være algebra, da den spiller en fundamental rolle i utforskningen av de fleste områdene innen matematikk, vitenskap og engineering.

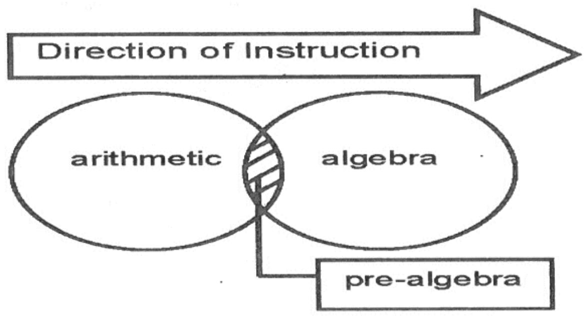
Det er også i Norge et fokus på algebra og algebraisk tenkning blant annet gjennom UngeAbel matematikkonkurranse (Lamis, 2017) som i år har en utfordring til ungdomsskoleelever hvor en av oppgavene er å utforske antall veier mellom to bestemte punkter i et rutenett. Dette er et eksempel på oppgaver med et visuelt uttrykk som gir rom for utforskning og generalisering. Gjennom å lete etter sammenhenger mellom antall veier, vannrette og loddrette linjer, kan elevene oppdage mønster som i neste steg kan formuleres i en regel bestående av variabler. I den nevnte oppgaven handler en av deloppgavene om å lage en regel for hvor mange mulige veier det er mellom to punkter i et uendelig stort rutenett. Å kunne uttrykke seg med variabler for antall vannrette og loddrette linjer, er av en vesentlig fordel i en slik oppgave. Ettersom sammenhengene mellom antall mulige veier og antall vannrette og loddrette ruter står i en relasjon til hverandre, og kan uttrykkes ved hjelp av algebraiske notasjoner.

2.3.1 Pre-algebra

Man kan skille mellom to skoler når det gjelder hvordan man skal undervise elever for å best mulig forberede dem på algebra. Ifølge Carraher og Schliemann (2007) tar *pre-algebra* sikte på å lette overgangen fra aritmetikk til algebra blant annet gjennom å øke og redefinere bruken av de matematiske symbolene (for addisjon, subtraksjon, divisjon, multiplikasjon og likhetstegnet) som man finner i algebraiske uttrykk og ligninger. Pre-algebraen blir et bindeledd mellom aritmetikken og algebraen, altså noe som kommer etter at aritmetikken skal være innlært. Man problematiserer i så måte ikke i særlig grad hvordan aritmetikken undervises for de elevene som ikke har algebra i sin læreplan.

Illustrasjon som viser pre-algebra som bindeledd mellom aritmetikk og algebra. (Schliemann et al., 2007, s. 177)

Figur 1 - Pre-algebra som bindeledd mellom aritmetikk og algebra

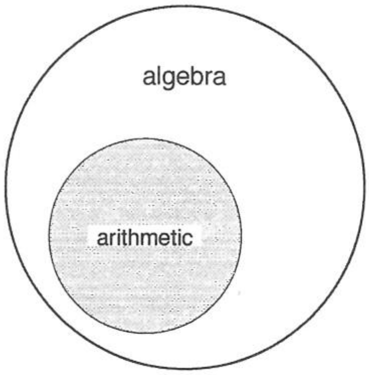


2.3.2 Tidlig algebra

Tidlig algebra er en annen innfallsvinkel til hvordan elevene sine muligheter til å lære algebra skal økes. Mens pre-algebra har fokus på overgangen, er tidlig algebra mer å forstå som et parallelløp til aritmetikken hvor fokuset på struktur og relasjon står sentralt, heller enn det å utføre regneoperasjoner (Carraher & Schliemann, 2007). Et viktig anliggende i tidlig algebra er å underveis i undervisningen av aritmetikk motvirke det at mange elever møter undervisningen i algebra med en forforståelse av likhetstegnet som en kommando om å regne ut, og ikke som et relasjonstegn (Kieran, 1981). Jeg har i denne masteroppgaven valgt å definere det at elevene lærer en operasjonell bruk av likhetstegnet, som et hinder for å senere forstå algebra. Det medfører dog ikke at enhver bruk av likhetstegnet i en relasjonell sammenheng alene, gir muligheter for algebraisk tenkning. På samme måte som det å ha dysleksi, vanskeliggjør å lære å lese og skrive uten at det vil si at elever uten dysleksi dermed er gode i lesing og skriving, så vanskeliggjør en operasjonell forståelse av likhetstegnet det å kunne lære algebra senere.

Illustrasjonen viser hvordan aritmetikken er å forstå som en del av algebra. (Schliemann et al., 2007, s. 178)

Figur 2 - Aritmetikken er å forstå som en del av algebra



Lins og Kaput (2004) viser til at det eksisterer ulike måter å forstå utviklingen av algebraisk tenkemåte. Det vises til at tidlig algebra har vært forstått som elevenes første møte med algebra, og da tidligst i 12- til 13-årsalderen. Denne forståelsen har i mange år vært den rådende, og er fortsatt mye brukt. I nyere tid har en annen forståelse av tidlig algebra vokst fram i det matematikkdidaktiske miljøet. Denne forståelsen tar utgangspunkt i en introduksjon av algebraiske tenkemåter for langt yngre elever tilhørende de laveste trinnene på småskolen. Utviklingen som har vært forut for denne måten å forstå begrepet *tidlig algebra,* forklares i en tretrinns utviklingsmodell hvor det først var (a) tradisjonen som fikk styre i fred, og var ledende i kraft av å være tradisjon uten å basere seg på erfaring, for så å gå over i en periode hvor (b) forskningen ser nærmere på de underliggende prosessene for tilnærmingene hentet fra tradisjonene. Den siste perioden er preget av at (c) forståelsen av at aritmetikk skal gå forut for algebra, blir satt på prøve.

I sin studie av varig og omfattende intervensjon med tidlig algebra i 3. klasse (tilsvarer 2. trinn i Norge) valgte Blanton et al. (2015) et rammeverk bestående av fem områder med signifikante muligheter for å drive med grunnleggende algebraisk tenkning. Områdene, som var (a) ekvivalens, uttrykk, ligninger og ulikheter, (b) generalisert aritmetikk, (c) funksjonstenkning, (d) variabler og (e) proporsjonale resonnementer, gav hovedfokus til nitten 60-minutters undervisningstimer. Undervisningen ble gitt gjennom et skoleår i to klasser med til sammen 39 elever. For å kunne gi en vurdering av effekten av denne intervensjonen, ble det gitt pre- og posttester til elevene i intervensjonsklassene og til 67 elever som i samme periode hadde hatt undervisning etter gjeldende undervisningsplan for distriktet. De fant at elevene som hadde gått i intervensjonsklassene presterte vesentlig bedre enn kontrollgruppen, og at de var bedre rustet til å bruke algebraiske strategier i problemløsningsoppgaver.

2.4 Likhetstegnet

Likhetstegnet er et matematisk symbol som ble innført på 1500-tallet av R. Recorde, og er et symbol som angir at det som står på hver side av likhetstegnet har samme verdi (Likhetstegnet, u.d.). Van de Walle (2013) hevder at likhetstegnet er et av de viktigste symbolene i grunnleggende aritmetikk og algebra. Samtidig vises det til forskning fra 1975 og fremover av *RAND Mathematics Study Panel* at det er klare indikasjoner på at likhetstegnet er veldig dårlig forstått. For å kunne gi svar på hvorfor det er viktig å se på bruken av likhetstegnet i oppgavene til de ulike læreverkene, kan det være nyttig å se på noen eksempler fra forskningen på hvordan en misoppfatning eller mangelfull forståelse av likhetstegnet vanskeliggjør algebraisk tenkning.

Falkner, Levi, og Carpenter (2012) tar for seg barns forståelse av ekvivalens som et grunnlag for å kunne forstå og lære algebra. De viser til misoppfatninger i forståelsen av likhetstegnet. Som eksempel tar de med en oppgave som ble gitt til elevene i en sjetteklasse. Oppgaven var at elevene skulle sette inn ett tall for firkanten i følgende ligning:

$$8 + 4 = \square + 5$$

Til lærerens store overraskelse mente alle de 24 elevene hennes at tallet som skulle stå i firkanten var 12. Dette viser helt klart en begrenset og feilaktig forståelse av likhetstegnet, og vanskeliggjør læring av algebra. Videre vises det til studier i Falkner et al. (2012) hvor barn på barnetrinnet vanligvis tror at likhetstegnet betyr at de skal regne ut det som står foran likhetstegnet og at tallet etter likhetstegnet er svaret på utregningen, og ikke at likhetstegnet er en måte å uttrykke forholdet ”det samme som”. Som del av forklaringen på hvorfor elever har denne misoppfatningen, vises det til at det ikke er stor variasjon i hvordan likhetstegnet blir brukt for elever på barneskolen. Det fremholdes at med tall-setninger av typen 4 + 6 = 10 eller 67 – 10 – 3 = 54, så gjør elevene rett i å oppfatte likhetstegnet som en kommando om å foreta en utregning. Det konkluderes med at forståelsen av hva som er likt, er avgjørende for at elevene ikke skal få problemer med å gå fra aritmetikk og over i til algebra.

Prediger (2010) tar for seg en annen side ved at elever primært møter likhetsbegrepet, gjennom å bruke likhetstegnet, i en aritmetisk kontekst hvor det første tallet etter likhetstegnet indikerer en stopper for sammenhengen tegnet står i. Som eksempel vises det til en elev som skulle vurdere en annen elev sin måte å regne seg frem til verdien av 24 * 7. Elevens fremgangsmåte var som følger:

$$24 * 7 = 20 * 7 + 4 * 7 = 140 + 28 = 168$$

Den 10 år gamle jenten som skulle vurdere fremgangsmåten, var skeptisk og sa at eleven som har regnet her, har regnet feil. Hun forklarte dette ved å si at 24 ganger 7 ikke er 20, og videre spørre om hva det som står etter 20 er. Eksempelet her kan indikere at elevens primære møte med likhetstegnet har vært preget av regn ut-oppgaver hvor sammenhengen stopper etter det første tallet etter likhetstegnet.

Kieran (1981) fremholder at matematikken ikke differensiere mellom høyre og venstre side av et likhetstegn, og omtaler elevers forståelse av ekvivalens slik:

> That the equal sign is a 'do something signal' is a thread which seems to run through the interpretation of equality sentences throughout elementary school, high school, and even college. Early elementary school children ... view the equal sign as a symbol which separates a problem and its answer. (Kieran, 1981, s. 324)

En mulig årsak til mangelfull forståelse av likhetstegnet hos elever kan ha sitt opphav i hvordan likhetstegnet blir omtalt i språklige sammenhenger (Brekke, 2002). Det vises her til at likhetstegnet erstattes med ”blir lik” hvor man ikke er språklig bevisst nok. Spørsmål som: ”Hva blir 5 + 5?” kan være et annet eksempel på hvordan den muntlige språkbruk kan være med på å etablere misoppfatninger og en operasjonell forståelse av likhetstegnet. Videre kan man si at leseretningen i vårt muntlige språk går fra venstre til høyre. En elev vil kunne lese 3 + 5 = 8 som tre pluss fem blir åtte. Likhetstegnet blir da det som gir svar på plusstykket og produserer et entydig svar på høyresiden. (Kieran, 1981)

Eksemplene her viser at det er viktig å jobbe for at elevene skal unngå å få etablert misoppfatninger av likhetstegnet. En måte å møte den utfordringen på kan være å involvere algebraisk tenkning som en naturlig del av matematikkundervisningen allerede fra de første skoleårene, og samtidig ha et særlig fokus på de relasjonelle egenskapene når likhetstegnet brukes og omtales.

2.5 Rammeverk

Grunnlaget for analysen i denne oppgaven er et konseptuelt rammeverk bestående *områder av algebraisk tenkning* og *bruk av likhetstegnet*.

2.5.1 Områder av algebraisk tenkning

For å kunne si noe om hvilke muligheter for algebraisk tenkning som er i matematikkoppgavene, trengte jeg et rammeverk som kunne si noe om ulike typer av algebraisk tenkning som er å finne i de tre læreverkene.

Jeg har prøvd ut ulike oppgavekategorier basert på rammeverk som for eksempel de 5 store idéene til Blanton et al. (2015): (a) ekvivalens, uttrykk, ligninger og ulikheter, (b) generalisert aritmetikk, (c) funksjonstenkning, (d) variabler og (e) proporsjonale resonnementer. Felles for alle rammeverkene jeg prøvde å kategorisere oppgavene i de tre læreverkene etter, var at ingen av dem er tilpasset oppgavene i de valgte læreverkene slik at kategoriseringen falt naturlig og at forskjellene læreverkene imellom kommer tydelig nok frem. Jeg gikk derfor vekk fra å prøve å finne et ferdig rammeverk, og heller ta utgangspunkt i ulike sett med rammeverk og tilpasse disse til oppgavene. Denne tilnærmingen er i tråd med Cohen (2007) sine tanker rundt hvordan kategoriene (som har sitt opphav fra teorien) modifiseres i møtet med teksten som skal analyseres. Kategoriene er altså tilpasset de aktuelle læreverkene og ikke ment å være et universelt kategoriseringsverktøy for oppgaver i matematikk generelt.

Jeg endte opp med fire kategorier, som på en tilstrekkelig måte, får frem vesentlige forskjeller i læreverkene med henblikk på læringsmuligheter for algebraisk tenkning.

2.5.1.1 Generalisering og generelle egenskaper

Et sentralt område i Valenta et al. (2016) sin forståelse av hva algebraisk tenkning er, handler om generalisering og generelle egenskaper. Ettersom dette er beslektede begreper har jeg valgt å plassere oppgaver som har et særlig fokus på generalisering og generelle egenskaper i en felles kategori kalt GEN.

Det som kanskje oftest forbindes med algebra, kan være at algebra har med bokstaver i matematikken å gjøre, og at bokstavene representere bestemte ukjente tall (A = 23 cm * 12 cm) eller variabler som for eksempel i Ohms lov (U = R * I). Dette er et eksempel på hvordan generalisering av konkrete relasjoner bidrar til å gi forståelse av matematiske sammenhenger. Bokstavene er gjerne satt sammen med tall i for eksempel en formel. Bokstavene sier da noe om komponentene og de generelle sammenhengene mellom dem. I formelen I = U / R, som uttrykker det generelle forholdet mellom elektrisk spenning, strømstyrke og elektrisk motstand, ser man at om R (motstanden) dobles, så halveres I (strømstyrken). I oppgavesammenheng i skolen er det som oftest en ukjent som elevene skal finne når de møter formler som dette. For yngre elever, kan generalisering i matematikken være av en enklere art. Et eksempel kan være å oppdage og lære at et gitt tall delt på seg selv alltid har verdien 1 (23 / 23 = 1 og 1028 /1028 = 1), eller at alle tall delt på 1 har verdi lik som det opprinnelige tallet (7 / 7 = 1 og 112 / 112 = 1). Særlig i geometri benyttes bokstaver for variabler. Et eksempel på dette kan være formelen for areal av et rektangel hvor bokstaven A representerer arealet og bokstavene l og b representerer henholdsvis lengden og bredden til rektangelet. I det første møtet med variabler som dette handler det primært om å finne tallene som skal byttes ut med bokstavene, og i liten eller ingen grad å regne med dem eller å finne dem gjennom generaliseringsaktiviteter.

Lee referert i Radford (1996) gir en sentral posisjon til generalisering ved å hevde at den viktigste aktiviteten relatert til algebra, er de aktivitetene som er knyttet til generalisering. Hun viser også til at det lett kan demonstreres at funksjoner, modellering og problemløsing er generaliseringsaktiviteter, og videre at all matematikk handler om å generalisere mønster. Mason (1996) omtaler generaliseringens verdi og plass i matematikken på følgende måte: «Generalization is the lifeblood, the heart of mathematics" (s. 108). Han avslutter med å uttrykke at for at en undervisningsøkt skal kunne kalles matematisk, må den være gjennomsyret av generaliseringer. I sin kommentar til Lee sin forståelse av generaliseringens plass i algebra, fremholder Radford (1996) at om man tar et overfladisk blikk på matematikkens historie, så kan man ledes til det inntrykket at all matematikk handler om generalisering. Går man i dybden av matematikkens historie blir bildet mer nyansert og komplekst, og behovet for dypere studier melder seg, men dette sier likevel noe om generaliseringens sentrale plass i matematikken.

2.5.1.2 Begrepsparet likt og ulikt

En sentral del av algebraisk tenkning er begrepene *likt* og *ulikt*. En grunnleggende forståelse av dette begrepsparet er avgjørende for å kunne tenke relasjonelt om likhetstegnet, og å kunne tenke algebraisk. Viktigheten av begrepene kommer særlig fram i forskningen til Falkner et. al. (2012), Kieran (1981) og Prediger (2010) hvor likhetstegnet omtales.

Å forstå hva som er likt fordrer samtidig å ha en forståelse av hva som er ulikt. Ulikhetstegnet med dets to retninger (< og >) angir to egenskaper der de brukes. Det ene er at verdiene på hver side av tegnet er ulike hverandre, og det andre tegnet angir, er hvilken verdi som er størst og hvilken som er minst av de to. Tegnene kan også brukes i rekker av tall som eksempelvis denne: 3 < 7 < 11 – 1.

Van de Walle (2013) viser til at balanse på en vektstang kan brukes til å fremme forståelsen av hva som er likt ved å plassere gjenstander på hver side av et balansepunkt, og be elevene om å reflektere rundt vektrelasjonene gjenstandene imellom.

2.5.1.3 Mønster i figurer, tallrekker, uttrykk og likheter

Kategorien som omhandler mønster forteller noe om hvilke muligheter elevene får til å arbeide med generaliseringer gjennom å oppdage og videreføre mønster i ulike sammenhenger. Van de Walle (2013) kobler det å lete etter mønster med algebraisk tenkning slik: "Learning to search for patterns and how to describe, translate, and extend them is part of doing mathematics and thinking algebraically" (s. 272). Det vises til flere eksempler hvor ulike mønstre er presentert. I det ene eksempelet er det mønster i uttrykkspar som utforskes.

35 * 52 =　　　52 * 35 =　　　23 * 46 =　　　46 * 23 =

I stedet for å gi en rekke med multiplikasjonsoppgaver med tilfeldig valgte faktorer, er annenhver oppgave laget med de samme faktorene som den foregående oppgaven, men med motsatt rekkefølge. Ved å arbeide med oppgaver på denne måten, kan elevene eksempelvis få oppdage at den kommutative lov også gjelder for tall med to sifre. Videre vises det til ulike typer av mønster i tallrekker. Tallrekker av typen 3, 5, 3, 5, 3, … defineres som et gjentagende mønster. Dette fordi tallene 3 og 5 gjentas og gjentas. En annen form for mønster i tallrekker av typen 3, 5, 7, 9, … og 1, 2, 4, 7, … som defineres som voksende mønster. Den første tallrekken øker med 2 per tall i rekken, mens i den andre rekken øker økningstallet (differansen mellom tallene i rekken) med én per gang (+1, +2, +3, ...). Begge disse to typene er egnet til å utvides og generaliseres.

Mønster kan også utforskes gjennom geometriske figurer. Dette kan gjøres i enkleste forstand som i et gjentagende mønster som her:

□　□□　□　□□　□　□□　□

Et eksempel på en mer komplisert sammensetning av geometriske figurer i et mønster kan være trekanttall (1, 3, 6, 10, 15, …) uttrykt med klosser:

□

□□

□□□

□□□□

□□□□□

Van de Walle (2013) vurderer geometriske mønster til å være gode eksempler ettersom mønstrene er lette å oppdage og fordi elevene kan manipulere og utforske figurene. En tallrekke som denne: 2, 6, 12, 20, 30, … kan være vanskelig å finne et mønster i, mens det samme mønsteret kan være langt letter å oppdage hvis elevene får det presentert slik:

□□	□□□	□□□□	□□□□□
	□□□	□□□□	□□□□□
		□□□□	□□□□□
			□□□□□

Mønster i likheter er en annen måte elevene kan får møte mønster på. Et eksempel på dette kan være likheter i multiplikasjonstabellen. I fire-gangen kan elevene oppdage at det er et mønster ved å utføre en dobbel dobling, for å finne alle likhetene. 4 * 5 er det dobbelte av det dobbelte av 5. Det dobbelte av 5 er 10, og det dobbelte av 10 er 20. Det samme gjelder for ni-gangen.

1 * 9 = 9

2 * 9 = 18

3 * 9 = 27

4 * 9 = 36

5 * 9 = 45

Ved å studere mønsteret her, kan elevene oppdage sammenhenger som at tverrsummen til alle svarene er 9, og at alle svarene starter med en tier som er én mindre enn tallet som er multiplisert med 9.

2.5.1.4 Algebra med variabler

Den mest åpenbare måten å jobbe med algebraisk tenkning på, er kanskje å jobbe med oppgaver med algebraiske notasjoner. Steinbring (2006, s. 134) skriver om den semiotiske funksjonen til matematiske tegn. Med dette menes det at det matematiske tegnet er noe som står for noe annet. Dette illustreres ved følgende figur:

Figur 3 - Relasjonen mellom objektet og tegnet

Objekt / referansekontekst < - > tegn / symbol

Det som gjør algebraiske notasjoner særlig utfordrende å forstå for elevene, er at et tegn ikke nødvendigvis representerer et bestemt antall av noe, men at det representerer et udefinert antall.

Algebraiske notasjoner er dog ikke vanlig i finne i lærebøker for elever på 2. trinn i grunnskolen, da dette strider med tankegangen om at abstraksjonsnivået ikke bør heves unødvendig i innlæringsfasen. Ifølge Mason (1996) bør tilnærmingen ha et muntlig preg og ta for seg konkrete problem uten å benytte bokstaver for å symbolisere. Men selv om Kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet, 2014) ikke legger opp til bruk av algebraiske notasjoner for elever i småskolen, har forfatterne av det ene læreverket som er valgt ut i denne masteroppgaven, gjort nettopp dette (Moe & Moe, 2016). Av den grunn valgte jeg å lage en egen kategori for oppgaver som innbefatter algebraiske notasjoner. For å kunne uttrykke generaliseringer matematisk, er algebraiske notasjoner svært anvendelig. Et første møte med bokstaver i matematikken kan for mange elever være gjennom arbeid med geometri. For å uttrykke bestemte, men ukjente tall, lærer elvene å bruke enkeltbokstaver for å representere ulike deler av en figur. De lærer at A = l * b er formelen for å finne arealet til et rektangel. Her blir ukjente verdier erstattet med bokstaver, men bokstavene kan også representere ukjente variabler. Da velger man primært bokstaver fra slutten av alfabetet, som bokstavene x og y som brukes i funksjoner og koordinatsystem.

2.5.2 Bruk av likhetstegnet

Ettersom en relasjonell forståelse av likhetstegnet (Prediger, 2010) er så sentral for å kunne tenke algebraisk, har jeg valgt å ta dette med som et eget punkt i studien. På samme måte som et ensidig fokus på grunnleggende aritmetikk (Brekke, 2002; Kieran, 1981), kan resultere i misoppfatninger som senere kan gjøre det vanskelig å lære algebra, legger jeg her til grunn at en ensidig operasjonell bruk av likhetstegnet, også kan vanskeliggjøre senere læring av algebra.

For å kunne svare på hvordan likhetstegnet er brukt i læreverkene har jeg valgt å ta utgangspunkt i Prediger (2010) sin måte å skille bruken av likhetstegnet til to ulike oppfatninger. Den første oppfatningen Prediger (2010) viser til er (1) *operasjonell*. Med operasjonell forståelse av likhetstegnet menes det at likhetstegnet er et tegn for en operasjon som skal gi et svar, som for eksempel at 5 + 7 = 12. Den andre oppfatningen er (2) *relasjonell*. Da er det de relasjonelle egenskapene til likhetstegnet som fremheves. Denne oppfatningen består av underkategoriene (a) *symmetrisk aritmetisk identitet* som for eksempel kan være at $19 = 10^2 – 9^2$ og at 7 + 3 = 3 + 7, (b) *formell ekvivalens som beskriver likeverdige uttrykk* som for eksempel $x^2 + x - 6 = (x - 2) (x + 3)$ og $(a – b) (a + b) = a^2 – b^2$, (c) *betinget ligning som karakteriserer ukjente* kan være oppgaver som: Løs $x^2 = -x + 6$ og (d) *kontekstuelle egenskaper i formler* som for eksempel formelen for volumet av en kjegle hvor $V = 1/3\pi^2 h$. Den tredje forståelsen er (3) *spesifikasjon* som for eksempel at y = 2x + 5.

Ettersom det ikke er denne masteroppgavens siktemål å si noe om faktisk oppfatning eller forståelse hos elevene, men hvilke læringsmuligheter de kan få ved å arbeide med et utvalg læreverk, er det på sin plass å påpeke at forståelsen som omtales her er den potensielle forståelsen som elevene kan få gjennom arbeid med oppgavene i læreverkene.

3 Metode

3.1 Metodevalg

For å kunne svare på problemstillingen valgte jeg å gjøre en *innholdsanalyse* og foreta en *komparativ studie*. Thagaard (2003) poengterer viktigheten av å velge metode etter hvilken informasjon som er nødvendig for å kunne finne de svar man søker. Jeg valgte her å se på hvilke oppgavetyper som var representert i læreverkene. Ettersom det er læreverkene som er i fokus i denne oppgaven, og ikke anvendelsen av dem, var det naturlig å benytte dokumentanalyse med hovedvekt på oppgaveanalyse først, for så å gjøre en sammenlignende studie av læreverkene. Rammeverkene ble lagt til grunn under utarbeidelsen av kategoriene som oppgavene ble plassert i. Oppgavene ble kategorisert og ført inn i et regneark. Dataene ble så systematisert ved bruk av diagrammer og pivottabeller. Jeg foretok så en komparativ studie av dataene hvor hovedfokuset var sammenligning. Sammenligningen ble gjort av tre ulike analyseenhetene, men med samme systematiske modell. (Grønmo, 2004).

Ifølge Cohen (2007) er innholdsanalyse å forstå som en prosess hvor man oppsummerer og rapporterer hovedinnholdet og hovedbudskapet i skrevet data. Denne prosessen er preget av en rigid og systematisk fremgangsmåte. Weber (1990, s. 12) sier at en sentral idé i innholdsanalyse er at mange ord klassifiseres inn i mange færre kategorier, og at de delene av teksten (analyseenhetene) som er klassifisert inn i samme kategori, er antatt å ha tilnærmet samme mening. Disse kategoriene har som regel sitt opphav fra teorien, heller enn hentet fra dokumentet som skal analyseres. Det påpekes dog at kategoriene kan modifiseres i sitt møte med dokumentet kategoriene skal anvendes på. Deretter defineres det kategorier som skal brukes til å kode analyseenhetene i analysen. Koding forstås her som den prosessen som demonterer for så å sette sammen dataene igjen på en annen måte. Dataene er demontert når de er brutt fra hverandre i ulike størrelser, som for eksempel enheter av matematikkoppgaver. Fragmentene blir så satt sammen igjen for å lage en ny forståelse som kan utforske likheter og ulikheter i en rekke ulike dataenheter. Etter dette gjennomgår man teksten som skal analyseres, og koder de ulike analyseenhetene og plasserer dem i kategorier. Når alle analyseenhetene er plassert i kategorier, anvendes dataene i statistikk. Det er denne statistiske fremstillingen av den analyserte teksten som legges til grunn for tolkningen av resultatene. Cohen et al. (2007, s 476) oppsummerer prosessen til innholdsanalyse i følgende punkter:

- breaking down text into units of analysis
- undertaking statistical analysis of the units
- presenting the analysis in as economical a form as possible

Det er denne tre-trinns modellen som vil være rammen rundt det metodiske arbeide i denne studien.

3.2 Utvalg

3.2.1 Valg av læreverk

3.2.1.1 Læreverket Matematikk

Resultater på nasjonale prøver fra Smeaheia skole i Sandnes kommune hvor Matematikk har vært benyttet, har vært svært gode, og lærerne som har undervist etter dette læreverket har ment at hovedårsaken til de gode resultatene er valget av undervisningsmetode og læreverk (Blank et al., 2014). Forut for innføringen av den nye matematikkundervisningen på Smeaheia skole, var noen av de ansatte på studietur til Russland. Der fikk de innblikk i skolehverdagen og matematikkundervisningen til elever på de laveste trinnene. Det var særlig to observasjoner som imponerte lærer i matematikk, Gerd Inger Moe. Det var diskusjonene som elevene hadde i klassene og det høye faglige nivået. Hun fikk også se lærebøkene som de russiske elevene brukte i matematikk. Der la hun merke til at matematikkoppgavene var mye mer utfordrende og varierte enn tilsvarende oppgaver i norske læreverk for samme aldersgruppe. Studieturen og det hun opplevde av forskjeller der, gav inspirasjon til å prøve ut et lignende didaktisk system på egen skole. (Sivertsen, 2013)

Det første som slår en når man blar i dette læreverket er all teksten. Dette har sammenheng med vektleggingen på refleksjon og dialog. Eksempler på dette kan være: Hvorfor mener du at ordene (red. anm. morgen, formiddag, natt osv.) står i riktig rekkefølge? Hvilke av linjestykkene kan du skrive ved hjelp av desimeter? Er dette en tekstoppgave? Overvekten av tekst i læreverket gjør at lærerstyrt progresjon og plenumsbaserte undervisningen blir viktig da elevene er i starten av sin læringskurve når det gjelder lesing.

Læreverket er en norsk oversettelse av et russisk læreverk som bygger på en utdanningsmodell utviklet av Leonid Vladimirovitsj Zankov, som var pedagog og psykolog. Et av undervisningsprinsippene er at hver undervisningsøkt bør inneholde noe tankevekkende. Det argumenteres for at elever som ikke får anledning til å arbeide med utfordrende oppgaver, vil bli hemmet i sin utvikling. Elevene bør derfor jevnlig utsettes for nye og ukjente situasjoner som kan utvikle deres evner til problemløsing. For å gi muligheter for tilpasset opplæring, er utfordringene som er med i læreverket lagt til ulike nivå. Videre legges det til grunn at elever liker utforsking og analytiske aktiviteter. Det er derfor lagt opp til at elevene fritt skal kunne komme med egne observasjoner og tanker, og at det er lærerens oppgave å vise elevene mønster og hvordan ting henger sammen. Ferdigheter knyttet til manipulering av matematiske symboler skal unngås ved at det settes et fokus på begrepsforståelse. Gjentakelser og repetisjon skal erstattes av høyt tempo og variasjon, men uten at man mister kontrollen på det som arbeides med. En måte å bevisstgjøre elevene på egne læringsprosesser, er å diskutere i fellesskap feiltyper som ofte forekommer med fokus på hvorfor feilene forekommer, og hva som kan gjøres for at de skal kunne unngås i fremtiden. Individuelle tilpasninger bør gjøres når elevene skal jobbe alene eller med lekser. Det legges til grunn at alle elevene bør være i klassen, og ikke deles inn i grupper etter nivå eller andre kriterier, da klassen er et lærende fellesskap hvor alle har unike og verdifulle bidrag å komme med. (Melhus, 2015d)

I lærerveiledningen (Melhus, 2015c, s. 5) poengteres også viktigheten av måten læreren arbeider med eksempelvis ligninger og uttrykk med parenteser. En slik presisering er at læreren ikke må snakke om flytte-bytte-regelen, men heller snakke om ”å løse opp parentesen”. Hensikten er at elevene ikke skal ha fokus på å manipulere tall og symboler, men heller få en dypere forståelse av regneoperasjonene, og de egenskapene og relasjonene som er mellom dem.

Det presiseres at tidsnød kan oppstå under gjennomføringen av timene slik veiledningen legger opp til, og at det derfor kan være viktig å lage en tidsplan slik at man kommer gjennom alt og dermed unngår å hoppe over oppgaver som er av betydning for den videre progresjonsplanen.

3.2.1.2 Læreverket Multi

Multi er det læreverket som Sandnes kommune nå i større og større grad går vekk fra til fordel for Matematikk. Det kan derfor være av særlig interesse å gjøre en sammenligning som viser forskjeller mellom disse to læreverkene.

I forordet gir Alseth, Arnås, Kirkegaard & Røsseland (2011) en beskrivelse av at matematikkundervisningen i Norge står ovenfor store utfordringer. Elevene må begeistres og bli inspirert til å arbeide med matematikkfaget. Kompetansen må synliggjøres som viktig for dem, de må gjøre rike erfaringer slik at de opplever matematikkens verdi som noe som også er gyldig utenom skolen.

For å møte disse utfordringene legger læreverket opp til varierte undervisningsmetoder og fleksibilitet slik at lærerne kan undervise på den måten som er best for dem.

Gyldendal Undervisning (2017) presenterer tre hovedområder i sin presentasjon av læreverket. De setter fokus på at innsikt og kompetanse utvikles blant annet ved å knytte matematikken til praktiske situasjoner, og at de har mange forslag til variert og tilpasset undervisning. Det siste hovedpunktet er fokus på tallforståelse og dype læringsstrukturer gjennom jevn og tydelig progresjon.

3.2.1.3 Læreverket Grunntall

Bakke & Bakke (2011) gir i resurspermen en oversikt over hva læreverket har vektlagt. For å kunne tilegne seg matematikkunnskaper og matematikkferdigheter, fremholdes det tre områder som læreverket fokuserer på. Det er begrepsforståelse, tallforståelse og regneferdigheter. Videre orienteres det om at læreverket er opptatt av at elevene lærer forskjellig, at mange innfallsvinkler og bruk av flere sanser, er en forutsetning for forståelsen. Det er laget variert konkretiseringsmateriell til aktiviteter og oppgaver som fremholdes som avgjørende for å skape god forståelse. Blant oppgavene i læreverket er det en del kinestetiske og taktile aktiviteter og oppgaver. Noen av oppgavene er merket med et samtaletegn. Til disse oppgavene er det tenkt at elevene skal samtale med med hverandre og gi forklaringer til hverandre.

Læreverket er lagt opp slik at ulike ferdighets- og mestringsnivå ikke er til hinder for at elevene skal kunne arbeide med det samme emnet. Det fremholdes som viktig at elevene får jobbe med det samme emnet, men på sitt nivå. En virkning av dette, er god læring i klassefellesskapet hvor det er lagt til rette for diskusjon og argumentasjon. For elever som trenger andre oppgaver å arbeide med fordi de allerede kan lærestoffet, eller har lært det raskt, er det ekstraoppgaver å hente i ressurspermen. Ekstraoppgavene er delt inn etter vanskelighetsgrad fra basisoppgaver til ekstra utfordrende. Til hvert kapittel er det laget et målark og en test.

Foresatte omtales som en ikke ubetydelig hjelpelærer. For å øke involveringsgraden til de foresatte, er det laget et eget skriv til dem hvor mål og nyttige tips til hvert kapittel er presentert. Det orienteres videre om at læreverket kan inneholde mer tekst enn hva man kan forvente at alle elvene er i stand til å lese, men at lesehjelp fra foreldrene muliggjør at alle elevene kan gjøre leksene hjemme.

3.2.2 Valg av årstrinn

I Kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet, 2014) er det først etter 2. årstrinn at det er definert kompetansemål, og ettersom det russiske læreverket så langt kun er oversatt til norsk for 1. og 2. trinn, var det naturlig å velge 2. årstrinn. Av hensynet til oppgavens omfang valgte jeg vekk å analysere læreverkene for 1. årstrinn. Algebra kommer først inn i kompetansemålene (under emneområdet Tall) etter fjerde årstrinn. Da er det satt som mål at elevene skal kunne *bruke matematiske symboler og uttrykksmåter for å uttrykke matematiske sammenhenger i oppgaveløsning*.

3.2.3 Valg av lærebøker

De tre valgte læreverkene har alle to grunnbøker kalt 2a og 2b for gjeldende årstrinn. I tillegg er det utarbeidet oppgavehefter og annet tilleggsmateriell. Av hensyn til oppgavens omfang valgte jeg å kun analysere læreverkenes to grunnbøker.

3.3 Gjennomføringen av analysen

Med en oppgave forstår jeg her all tekst i læreverkene som ber eleven om å utføre en handling. Det kan være å utføre en regneoperasjon eller å samtale om et bilde. Hvis oppgaveteksten ber elevene om å regne ut, med påfølgende addisjonsoppgaver av samme type, regnes dette som én oppgave. Dette fordi det er oppgavetypene som er denne masteroppgavens anliggende. Med oppgavetype forstås det her en gruppe av oppgaver som i form er like, men som i innhold kan være ulike. Et eksempel på dette kan være oppgavene 2 + 3 = og 4 + 2 = som begge er av typen addisjon med ensifret tall.

Den første siden (kalt samtalesiden) i hvert kapittel i Multi 2ab, hadde ikke instruksjon annet enn i lærerveiledningen. I de tilfellene ble lærerveiledningens instruksjon lagt til grunn. I de andre tilfellene ble instruksjonene gitt i læreverket grunnlaget for hvordan oppgavene skulle forstås.

3.3.1 Systematisering i regneark

Selve kategoriseringen valgte jeg å gjennomføre i et Excel-dokument hvor det ble satt inn kolonner for læreverk, bok og hvilke oppgavetyper jeg fant. Oppgavetypene ble fordelt i tre kolonner hvor alternativene for kompetanseområde, type algebraisk tenkning og bruk av likhetstegnet ble valgt. Excel ble så brukt i analysearbeidet til å systematisere dataene og gjøre sammenligninger. Ved hjelp av Pivot-tabeller fikk jeg frem eksempelvis hvor stor andel av algebraisk tenkning det er innad hvert kompetanseemne i hvert av læreverkene (se figur 4).

I læreverket Matematikk 2ab er oppgavene systematiserte ved oppgavenummer i tall og bokstaver (med unntak av oppgaver under tittelen *hjernetrim* og *test deg selv*), mens i Multi 2ab er oppgavene på hver side nummerert ved terningøyne. Oppgavene i Grunntall 2ab hadde derimot ikke noen form for nummerering. For å kunne benytte systematiseringsverktøyene i Excel, har jeg måtte samkjøre nummereringene og tilpasse dem Excel. I min kategorisering har oppgavene i Matematikk, Multi og Grunntall blitt kategorisert som desimaltall. Det vil si at oppgave 21 b) i Matematikk 2a er blitt til oppgavenummer 21,2, mens oppgavene i Multi 2ab er blitt systematisert ved sidetall foran komma og antall terningøyne bak komma. Oppgavene i Grunntall 2ab fikk nummer etter sidetall og desimaltall der hvor det var ulike oppgavetyper per side. Oppgavene under hjernetrim ble nummerert som en forlengelse av oppgavene foran, mens test deg selv-oppgavene fikk egen nummerering. Denne måten å nummerer på har gjort at det er raskt å finne tilbake til oppgavene i læreverkene dersom man ønsker å vurdere en oppgavetype på nytt. I de tilfellene hvor det er flere oppgaver under hver nummerering har jeg valgt, av hensynet til masteroppgavens omfang, å ikke kategorisere ytterligere, men i stedet velge kategori etter hovedfokuset i oppgaven. For å bestemme oppgavens hovedfokus så jeg alle underoppgavene i sammenheng med hverandre, og samkjørte dette (i de tilfellene det var mulig) med lærerveiledningenes kommentarer til de aktuelle oppgavene.

3.3.2 Kategorisering

Jeg fulgte Cohen (2007) sine trinn rundt prosessen til innholdsanalyse, og startet med å kategorisere ca. 15 sider i hvert av læreverkene for å lettere kunne danne meg et bilde av hvilke oppgavetyper som var representer i læreverkene. Underveis i dette arbeidet laget jeg en oversikt over oppgavetypene og plasserte dem i egnet kategori (se vedlegg 2). Ved å kode oppgavene etter oppgavetype, fikk jeg lettere oversikt over hvilken kategori konkrete analyseenheter (matematikkoppgaver) som skulle plasseres i. Dette var særlig viktig for å være konsekvent i kategoriseringen ettersom det i en del tilfeller kan være noe glidende overganger mellom kategoriene, og derfor vanskelig å fastslå hvor en oppgave hører hjemme.

Oppgaver som var særlig vanskelige å kategorisere, avventet jeg kategoriseringen med til jeg hadde fått diskutert dem med enten studiekamerater eller kollegaer som underviser i matematikk. Dette gjaldt særlig for oppgaver som kombinerte tall-venner og tier-overganger. Å diskutere og reflekter rundt oppgavenes hovedfokus førte til at vi kom til enighet om hvor oppgavene skulle plasseres. Et eksempel på dette kan være diskusjonen rundt hvor oppgaver med tier-venner skulle plasseres.

Denne oppgavetypen var jeg usikker på plasseringen av ettersom jeg hadde valgt å plassere oppgaver som omhandlet å lage ulike delmengder med sum over ti i kategorien GEN (som for eksempel 57 + 24 = 50 + 20 + 4 +7 = 70 + 11 = 81 for letter å kunne legge sammen i hodet uten bruk av utregningsalgoritmer som brukes i oppgaver av typen *vis utregning*). Det å lage delmengder i slike sammenhenger forstås her som å nyttiggjøre seg av en generelle egenskap ved tallsystemet (som for denne aldersgruppen kan være at alle naturlige tall består av delmengder som i sum er lik det aktuelle tallet) til å utføre mer avanserte regneoperasjoner uten å måtte bruke algoritmer som oppstilling og bruk av mentetall. Likhetene mellom tier-venner og andre delmengder med sum over ti som i eksempelet, er store da de begge omhandler relasjoner mellom tall og delmengdene tallet består av. Det som gjorde tier-venner forskjellig fra andre delmengder med sum over ti, var at tier-venner forstås som et ledd i å lære elevene om tier-overganger. Tier-overganger er her å forstå som basal kunnskap om tallsystemet (og derfor plassert i kategorien GRU), og ettersom tier-venner er så tett koblet til dette, landet jeg på at det også var naturlig å plassere tier-vennene i samme kategori som oppgaver som har sitt hovedfokus på tieroverganger.

3.3.2.1 Algebraisk tenkning

I rammeverket kom jeg frem til fire kategoriene for oppgaver som gir muligheter for algebraisk tenkning: (a) *generalisering og generelle egenskaper* fordi den tar for seg oppgaver som omhandler det å generalisere eller de generelle egenskapene i tallsystemet, (b) *likt og ulikt* fordi oppgavene som er lagt til denne kategorien har et særlig fokus på å forstå sammenhenger som er sentrale i algebraisk tenkning, (c) *mønster i figurer, tallrekker, uttrykk og likheter* fordi oppgaver inkludert i denne kategorien fokuserer på mønster og sammenhenger og (d) *algebra med variabler* er plassert her ettersom det å arbeide med variabler er en måte å uttrykke en generalisering på. Dette er kategorier som er laget utfra oppgavene som er i læreverkene og Valenta et al. (2016) sin definisjonen av algebraisk tenkning som all tenkning som gir særlige muligheter for prosesser knyttet til generalisering, resonnering om ”det generelle”, struktur, mønster, sammenhenger og formalisering av disse.

For de av oppgavene som ikke tilhører noen av de fire kategoriene som gir muligheter for algebraisk tenkning, har jeg laget en egen kategori som er kalt GRU. Her er det plassert oppgaver som er knyttet til helt grunnleggende deler av vårt tallsystem som å telle (basalt mønster), posisjonssystemet, tieroverganger og aritmetiske operasjoner av typen a + b = c.

Det er her viktig å påpeke at kategorien GRU forstås som et helt sentralt grunnlag for algebraisk tenkning (Bass, 1998), men at den i seg selv og alene ikke fremmer algebraisk tenkning i særlig grad.

Det kan videre påpekes at det her legges til grunn at det er misoppfatninger (blant annet rundt sentrale begreper som likhetstegnet) som oppstår hos elevene i møte med et ensidig møte med denne delen av matematikken, som gjør at det er vesentlig for denne masteroppgavens problemstilling å få klarhet i hvor stor andel av oppgavene elevene møter av denne typen. Det er altså ikke egenskaper ved aritmetikken (og det som her knyttes til kategorien GRU) i selg selv, som anses som årsaken til misoppfatninger og at møtet med algebra senere kan bli vanskelig for elevene.

3.3.2.1.1 GEN – generalisering og generelle egenskaper

Oppgaver som tar for seg generelle egenskaper ved tallsystemet utover de basale, er lagt til denne kategorien. Med basale egenskaper ved tallsystemet forstås det her egenskaper som for eksempel at tall representerer et antall, og at addisjon er å legge sammen to eller flere antall til en sum. Oppgaver av denne typen er plassert i kategorien GRU.

Et eksempel på oppgaver som er plassert i denne kategorien er oppgaver som tar for seg de generelle egenskapene til partall og oddetall. Eksempler på oppgaver a denne typen kan være: Hvilken sum har adderte partall og adderte oddetall, sammenlignet med addisjon av et partall og et oddetall? Utforsking av andre relasjoner, kan være oppgaver som tar for seg sammenhengene mellom regneartene. Dette kan være øving på oppgaver av typen: Hvis 4 + 7 = 11, så er 11 – 7 = ?.

Oppgaver som tar for seg de ulike algebraiske lovene som gjelder for tallene vi regner med, er også lagt til denne kategorien. Oppgaver som gir trening i å lære den kommutative (a + b = b + a) og assosiative (a (b * c) = (a * b) c) lov for addisjon og multiplikasjon, er eksempler på dette.

Kategorien innbefatter et bredt spekter av oppgavetyper, men felles for dem alle er at de gir muligheter for å få innsikt i de generelle egenskapene ved tallsystemet utover de basale. Oppgaver med ordlyder som: analyser, vurder, sammenlign og utforsk er lagt til denne kategorien.

Et eksempel på en oppgavetype som måtte vurderes nærmere før den ble endelig plassert i denne kategorien, er oppgaver som utforsker relasjonene mellom regneartene. Et eksempel på en oppgave av denne typen er: 1 + 2 = _ og 3 – 2 = _. Dette er en oppgave som opplagt kan løses uten å reflektere over relasjonen mellom addisjon og subtraksjon som omvendte regnearter av hverandre, men på den annen side er det også en oppgave som inviterer til og muliggjøre refleksjon rundt nettopp denne relasjonen. Det som ble avgjørende for valget om å plassere denne oppgavetypen i kategorien GEN, var at oppgaven gir særlige muligheter til refleksjon rundt de generelle egenskapene ved regneartene, og ikke det faktum at den kan løses uten en slik refleksjon.

3.3.2.1.2 LOU – likt og ulikt

Oppgaver som har sitt hovedfokus på begrepsparet *likt* og *ulikt* er lagt til denne kategorien. Oppgaver som fordrer bruk av tegnene <, >, og = er et eksempel på dette, men jeg har valgt å ikke inkludere alle slike oppgaver i denne kategorien. For å skille det helt grunnleggende fra denne kategorien har jeg valgt å ikke ta med oppgaver hvor elevene skal vurdere et tall opp mot et annet i forhold til størrelsen på tallene. Dette fordi kunnskap om hvilke tall som er størst i dette tilfellet forstås som basal kunnskap, mens oppgaver hvor eleven skal vurdere uttrykk av typen (3 + 5 + 7) og (7 + 3 + 5) opp mot hverandre for å kunne si noe om relasjonen til uttrykkene ved hjelp av tegnene <, > og =, gir muligheter til å løse oppgaven uten å regne ut, da den kan løses ved å reflektere rundt generelle egenskaper ved tallsystemet som den kommutative lov. I det nevnte eksempelet er elementer fra kategorien GEN også tilstede ved at det er kunnskap om den kommutative lov som kan gjøre at elevene kan løse oppgaven uten å utføre noen regneoperasjoner. Men etter å ha diskutert dette tilfellet med en medstudent, kom vi frem til at det skulle være det eleven ble spurt om i oppgaven (altså hvilke tegn av <, > eller = som skal stå mellom uttrykkene) som skulle avgjøre hvor oppgaven skulle plasseres, og ikke at den kommutative lov er til hjelp for å løse oppgaven.

Denne oppgavetypen kommer også i andre varianter hvor relasjonstegnet er plassert mellom to uttrykk som ikke står i korrekt relasjon til hverandre (i forhold til relasjonstegnet som er valgt). Elevene blir da bedt om å endre på et siffer i uttrykket slik at korrekt relasjon oppstår.

Andre oppgavetyper som er lagt til her er oppgaver som har som hovedfokus å gi læring av begrepsparene likt og ulikt i andre sammenhenger enn de rent tallmessige. Det kan være oppgaver hvor elevene blir bedt om å finne hva som er likt og ulikt på et bilde bestående av ulike geometriske figurer i et hverdagsbilde med hus og biler, eller bilder av bamser med lik form, men ulik størrelse og farge. En annen variant av denne oppgavetypen er hvor elevene blir bedt om å plassere geometriske former som buer og rette linjer i grupper med noe felles.

Oppgaver i geometri som omhandler symmetri er også lagt til denne kategorien da gir trening i å lete etter og finne likheter samt videreføre og fullføre symmetriske figurer. Oppgaver hvor elevene blir bedt om å sammenligne gir også trening i å skill likt fra ulikt, og er derfor lagt til denne kategorien.

3.3.2.1.3 MØN – mønster i figurer, tallrekker, uttrykk og likheter

Til denne kategorien har jeg lagt alle oppgaver som primært gir muligheter til å oppdage og videreføre mønster i ulike sammenhenger. Det kan eksempelvis være mønster i tallrekker av typen:

> Velg et tall mellom 0 og 10. La tallet du valgte øke med 10 gjentatte ganger. Hvilke endringer ser du fra tall til tall?

En mer komplisert oppgave av denne typen er å jobbe med trekanttall (1, 3, 6, 10, …) hvor mønsteret som skal oppdages er at økningen fra tall til tall er én mer enn forrige økning. Det å skulle sette et skille mellom hvilke typer mønster som er å forstå som basale mønster og hvilke som skal tilhøre denne kategorien, kan oppfattes ulikt ettersom det ikke er disjunkte kategorier, men kategorier med mer glidende overganger. Det har derfor vært viktig å lage en oversikt (vedlegg 2) over hvilke oppgavetyper som her har vært forstått som basale mønster eller ikke.

En annen type oppgaver kan være mønster i likheter. Et eksempel på dette er oppgaver som viser eleven noen likheter av typen:

> 5 + 5 = 10
>
> 6 + 5 = 11
>
> 7 + 5 = 12

Elevene blir så bedt om å finne de neste likheten som følger sammen mønster. For å finne summen av 8 + 5 trenger ikke elvene å regne seg frem til svaret, det er nok å øke forrige sum med mønsterets økning som er å legge til én.

Å finne skillet mellom basale mønster (som hører til kategorien GRU) og mønster plassert i denne kategorien, har vært gjenstand for en vurdering ut ifra hvor grunnleggende hvert enkelt mønster har vært å forstå sett i lys av aldersgruppen her. Et eksempel på et skille i denne sammenhengen, er hvor et voksende mønster slutter å være basalt. Jeg har da basert valget på om *elevene vanskelig kan klare seg uten å kunne* det aktuelle mønsteret og om det er å forstå som *helt elementært innen de matematiske emnene*. Uten å kunne voksende mønster hvor tallet øker med én for hver gang (5, 6, 7, …), kan det vanskelig forklares hvordan en elev skal kunne arbeide med eksempelvis addisjon og subtraksjon ettersom det å kjenne rekkefølgen i vårt tallsystem er helt avgjørende for å kunne regne, mens det å kunne telle i partall og oddetall er noe elevene kan klare seg uten (selv om det selvsagt er en fordel å kunne med tanke på blant annet regnehastighet og generell forståelse) i møte med addisjon og subtraksjon.

3.3.2.1.4 ALG – algebra med variabler

I denne kategorien legges oppgaver som benytter algebraiske bokstavsymboler for å representere ukjente verdier. Det kan være oppgaver av typen: $x + 3 = 5$, hvor elven skal finne verdien av x. Jeg har valgt å ikke inkludere oppgaver i geometri hvor det blir brukt bokstaven ”O” for å representere lengden av en omkrets til en figur. Dette fordi bruken av ”O” i disse oppgavetypene sannsynligvis forstås mer som en forkortelse for ordet ”omkrets” enn som en algebraisk uttrykksmåte for en ukjent verdi. Dette sett i lys av at elever på 2. trinn i liten eller ingen grad har jobbet med bokstavsymboler i en algebraisk sammenheng før.

3.3.2.1.5 GRU – grunnlag for algebra

Den siste kategorien jeg definerte er en kategori som tar opp i seg oppgaver som ikke gir særlige muligheter for algebraisk tenkning, men som innbefatter områder av matematikken (eksempelvis addisjon på formelen $a + b = c$) som er vesentlige å kunne som en del av grunnlaget for å tenke algebraisk og jobbe med algebra (Bass, 1998). Jeg har valgt å kalle denne kategorien for GRU (grunnlag for algebra).

Når jeg her forstår aritmetikk som en del av grunnlaget for algebraen (Bass, 1998), er det en måte å anerkjenne at algebra uten forståelse av aritmetikk er vanskelig om ikke umulig, å tenke seg. Det betyr ikke at det nødvendigvis er slik at en som behersker aritmetikk godt også har gode forutsetninger for å lære algebra. Forskningen til Kieran (1981) og Brekke (2000) peker på at det å ensidig arbeide med aritmetikk, kan være en viktig årsak til at elever senere sliter med å lære algebra. Det er derfor viktig å presisere at selv om aritmetikk forstås som grunnleggende innen algebra, så medfører ikke det at all læring av aritmetikk kan forstås som fremmende for den matematiske forståelsen som danner grunnlaget for å lære algebra. Det er derfor viktig for denne oppgavens problemstilling å kunne gi svar på hvor stor del av oppgavene som er i denne kategorien.

Enkelte oppgavetyper som omhandler *økende mønster,* har variasjon i hvor stor grad de inviterer til algebraisk tenkning. Ifølge definisjonen til Valenta et al. (2016) er algebraisk tenkning *all tenkning som gir muligheter for prosesser knyttet til generalisering, resonnering om det generelle, struktur, mønster, sammenhenger, og formalisering av disse*. Å telle videre fra 1, 2, 3, … til ti med de naturlige tallene er unektelig å fortsette et mønster, og dermed er det også mulig å argumentere for at oppgaver som gir muligheter for tenkning rundt prosessen knyttet til videreføring av en tallrekke av de naturlige tallene fra fem til ti, er å forstå som algebraisk tenkning. Men om enhver oppgave med telling, nabotall og lignende skulle forstås som oppgaver med muligheter for læring av algebraisk tenkning, ville definisjonen blitt utvannet og mistet mye av sin verdi, samtidig som de vesentlige forskjellene som er i læreverkene ikke ville kommet ordentlig frem. Å fortsette tallrekker av naturlige tall er derfor lagt til denne kategorien.

Eksempel 1 - Oppgaver kategorisert som GRU fra Grunntall 2a

Side 95

Skriv tallene slik at de blir stående i riktig rekkefølge.

___ ___ ___ 4 5

___ ___ 9 ___ ___

___ ___ ___ 17 ___

Oppgaven i eksempel 1 fra Grunntall 2a gir elevene øving i økende mønster bestående av nabotall i rekke, og er derfor plassert i kategorien GRU og ikke i kategorien MØN. I denne oppgaven er det ikke kun de påfølgende tallene (som tell videre fra et bestemt tall) som skal finnes av elevene, men også tallene som kommer foran det eller de tallene som allerede er plassert i rekken.

Oppgaver som eksempelvis handler om å skulle plassere tall på en tallinje, skrive tall eller tell et antall, svarer slik jeg forstår det, ikke til definisjonen av algebraisk tenkning (Valenta et al., 2016), og er derfor plassert her. Det samme gjelder for oppgaver i aritmetikk, hvor fokuset er på å gi en grunnleggende forståelse av titallssystemet og de fire regneartene på standardformene a + b = _, a – b = _, a * b = _ og a / b = _. Oppgaver som gir øving i a x b = b x a er ikke plassert her. Dette fordi denne type oppgaver gir muligheter for resonnering rundt strukturene i tallsystemet utover de helt basale.

Jeg har også plassert oppgaver som for eksempel å skulle finne delmengdene et tall kan bestå av, og oppgaver hvor elevene skal øke eller minke en tallverdi med et bestemt tall, i denne kategorien. Dette er oppgaver som kunne vært vurdert plassert i andre kategorier, men de er plassert her ettersom jeg forstår dem som trening i å bli kjent med det grunnleggende i vårt tallsystem.

Oppgaver i addisjon og subtraksjon som omhandler tier-overganger er lagt til denne kategorien da en forståelse av tier-overganger er avgjørende for å kunne utføre basal aritmetikk. Det samme gjelder for oppgaver som har sitt fokus på tallene fra null til ti, ettersom dette er en helt grunnleggende del av et ti-tallsystem som vårt, og en forutsetning for å kunne arbeide med tallene som er over ti. Andre typer oppgaver som er lagt til her er typiske regn ut-oppgaver på primærformer (som a + b = c og a +b + c = d) for alle de fire regneartene addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon.

Oppgaver som omhandler posisjonssystemet hvor elevene skal dele tall opp i tiere og enere, og så legg sammen, og oppgaver knyttet til innlæring av tier-venner (som for eksempel 3 og 7 eller 4 og 6) og tall-venner er også plassert her. Dette fordi slike oppgaver her forstås som oppgaver ment for å gi forståelse av addisjon og subtraksjon i forbindelse med tier-overganger.

Oppgaver hvor en gruppe tall skal skrives i stigende rekkefølge er også plassert her ettersom det handler om å ha kjennskap til hvor store tall er i forhold til hverandre. Det kan vanskelig forsås hvordan elever skal kunne regne uten å vite om hvordan tallstørrelser uttrykkes. Mønster i for eksempel tier-venner hvor det ene leddet øker mens det andre leddet reduseres med eksempelvis én (1 + 9, 2 + 8, 3 + 7 …), er en oppgavetype som var vanskeligere å plassere uten en nærmere vurdering av hva oppgavetypen representerer. Det som ble avgjørende for å plassere denne oppgavetypen her, var det at oppgavetypen gir trening i det helt elementære ved vårt ti-tallsystem hvor kunnskap om hvilke tall som gir tier-overgang er avgjørende.

3.3.2.2 Bruk av likhetstegnet

Under kategoriseringen av bruk av likhetstegn har jeg to hovedkategorier basert på Prediger (2010) sine inndelinger av hvordan likhetstegnet forstås. Det er operasjonell bruk av likhetstegnet og relasjonell bruk av likhetstegnet.

3.3.2.2.1 OL - Operasjonell bruk av likhetstegnet

I kategorien for *operasjonell bruk av likhetstegnet* (heretter kalt OL) har jeg plassert oppgaver som har fokus på at eleven skal foreta en regneoperasjon, som for eksempel å regne ut en addisjons- eller subtraksjonsoppgave, hvor man kan tenke seg at likhetstegnet kan forstås kom en *regn ut*-kommando.

Eksempel 2 - Oppgave kategorisert som OL fra Grunntall 2b

Regn ut

64 – 2 = ___	*52 – 11 = ___*
68 – 5 = ___	*65 – 5 = ___*
57 – 3 = ___	*67 – 13 = ___*
59 – 8 = ___	*55 – 12 = ___*
65 – 11 = ___	*58 – 15 = ___*
66 – 4 = ___	*64 – 14 = ___*

I disse regn ut-oppgavene er hovedfokuset på å finne svaret etter å ha utført en regneoperasjonen i regnearten subtraksjon. Det legges altså opp til øving i å subtrahere et to-sifret tall med et annet to-sifret eller ett-sifret tall. I slike oppgaver kan det være fristende å spørre: Hva blir 64 minus 2? Dette kan forstås som en bevegelse fra noe (64 – 2) til noe annet (62). (Brekke, 2002; Kieran, 1981)

3.3.2.2.2 RL - Relasjonell bruk av likhetstegnet

Den andre kategorien er hvor det er en *relasjonell bruk av likhetstegnet* (heretter kalt RL). Da er det relasjon som likhetstegnet angir som står i fokus og ikke operasjon. I denne kategorien har jeg blant annet lagt inn oppgaver hvor et ledd i addisjonstrykket mangler eller hvor elevene skal finne en tall-venn. Felles for oppgavene i denne kategorien er at de ikke er skrevet på grunnleggende regne-ut-formel som a + b = _ eller a – b = _ , og at det er oppgaver som fokuserer på eller fremmer de relasjonelle egenskapene til likhetstegnet.

Eksempel 3 - Oppgave kategorisert som RL fra Matematikk 2b

Nummer 92

a) Elevene i en klasse begynner å skrive disse likhetene:

5 + 5 = 10   6 + 5 = 11   7 + 5 = 12

Hvilke likheter må de fortsette med?

Her er et eksempel fra Matematikk 2b hvor elevene får muligheten til å oppdage relasjonene mellom de to sidene av likhetstegnet. Øker eleven verdien med én på venstre side av likhetstegnet, øker verdien på høyre side tilsvarende. Her er det altså ikke fokus på operasjoner som skal utføres, men relasjoner som skal utforskes. At en oppgave som denne gir muligheter for å utvide den relasjonelle forståelsen av likhetstegnet, betyr ikke at alle elever nødvendigvis får utvidet denne forståelsen, men jeg vil likevel hevde at oppgaver som denne skiller seg fra de typiske regn ut-oppgavene hvor de relasjonelle egenskapene ikke kommer like godt frem.

3.3.2.2.3 Eksplisitt eller implisitt bruk av likhetstegnet

Enkelte oppgaver er uten eksplisitt bruk av likhetstegnet i oppgaveteksten. For å bli kategorisert som *eksplisitt bruk av likhetstegnet* må likhetstegnet enten være skrevet i selve oppgaveteksten eller være naturlig å skrive i løsningsforslaget til oppgaven. Eksempler på dette kan være oppgaver fra Matematikk 2ab hvor det står at elevene skal regne ut og bruke oppstilling. I læreverket er ikke likhetstegnet eksplisitt brukt, men det er i tidligere gjennomgang vist at oppgaver med oppstilling skal løses ved å sette tallene som skal adderes eller subtraheres under hverandre og at aktuelt regnetegn og likhetstegnet skal stå ved siden av som vist her:

	23
+	36
=	56

Dersom det kun kreves en forståelse og implisitt anvendelse av likhetstegnet, vil oppgaven bli kategorisert som *implisitt bruk av likhetstegnet*. Et eksempel på en slik oppgave kan være å lage en regnefortelling til en serie av bilder av noe som er i et visst antall (eksempelvis fugler i et tre) og som så reduseres (noen fugler skremmes og flyr vekk). Her er det naturlig å subtrahere og ha en forståelse og implisitt anvendelse av likhetstegnet. I slike tilfeller hvor en forståelse av likhetstegnet ligger som en forutsetning for å kunne løse oppgaven, har jeg valgt å kategorisere i relasjonell eller operasjonell bruk, men også at det er en implisitt bruk av likhetstegnet.

3.3.2.2.4 n/a – ikke aktuell

En del av oppgavene har ikke bruk av likhetstegnet verken i oppgaveteksten eller i løsningen. Det kan være oppgaver som handler om å telle og skrive tallet som representerer et gitt antall. I de tilfellene blir oppgaven kategorisert med n/a, i betydningen ikke aktuell.

Eksempel 4 - Oppgave kategorisert som n/a fra Multi 2a

(*) Sorter etter vekt.

Eple

Stein

Fjær

Blomst

Lett Litt lett Litt tung Tung

* Tegn strek til riktig sted på linjen.
(Red. anm. Gjenstandene er tegnet i læreverket, og ikke skrevet som presentert her)

Som eksempelet fra Multi 2a her viser, er det ikke nødvendig med en forståelse av likhetstegnet for å kunne løse denne oppgaven. Det er her tilstrekkelig for elevene å ha en forståelse av de ulike begrepene for vekt, og kunne koble disse begrepene til de ulike gjenstandene. Dersom det hadde vært en oppgave med vektskåler og sammenligner av ulike gjenstanders vekt i en slik forbindelse, hadde vurderingen vært annerledes.

3.3.2.3 Temainndeling av oppgavene

For å kunne gi et mer detaljert bilde av hvordan læringsmulighetene for algebraisk tenkning og bruken av likhetstegnet er i de tre læreverkene, har jeg også valgt å si noe om hvilke matematiske emner de ulike oppgavene er hentet fra. For å lage en felles måte å kategorisere oppgavene på etter matematiske emner, har jeg tatt utgangspunkt i hovedområdene i kompetansemålene (Kunnskapsdepartementet, 2014).

Å se rammeverket i sammenheng med hovedområdene i kompetansemålene, gir også en forståelse av hvordan læreverkene har vektlagt de ulike kompetanseemnene. Det er særlig interessant å se hvordan et kompetanseemne som *algebra* er vektlagt, men det er også av interesse å se hvordan et kompetanseemne som *tall* blir behandlet opp mot algebraisk tenkning og hvordan likhetstegnet er brukt innen de ulike emnene. Hvis elevene primært møter oppgaver fra kompetanseemnet *tall* med grunnleggende aritmetikk og en operasjonell bruk av likhetstegnet, i en forholdsvis liten andel av det totale oppgaveantallet, vil man kunne argumentere for at konsekvensene kan være mindre enn om elevene møter dette i en stor andel av det totale oppgaveantallet. Videre kan det at elever får møte algebraisk tenkning og relasjonell bruk av likhetstegnet i mange oppgaver innad kompetanseemnet *tall*, si noe om hvor sterk denne innlæringen kan bli. Det er derfor nyttig å se rammeverket i lys av hvordan læreverkene har prioritert mellom de ulike kompetanseemnene.

Det er Kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet, 2014) som definerer hvilke mål et læreverk skal utformes etter. Det at det er relativt få kompetansemål som er definert for elever etter 2. årstrinn, kan forklare deres generelle formuleringer og romslige mål. For å gjøre kategoriseringen overkommelig, har jeg valgt å slå sammen kompetansemålene i hovedområder slik som de er kategorisert i Kunnskapsløftet. Det er etter 2. årstrinn 13 kompetansemål fordelt i de fire hovedområdene: *tall*, *måling*, *geometri* og *statistikk*. Det er disse fire kategoriene som oppgavene primært er blitt plasserte i. Algebra er først definert som et kombinert hovedområde (Tall og algebra) etter 7. trinn. For å kunne synliggjøre at enkelte oppgaver i de valgte læreverkene gir anledning til å arbeide med algebra gjennom blant annet å løse ligninger, har jeg valgt å kalle *algebra* for et eget hovedområde i kategoriseringen etter kompetansemål.

I 2006 kom læreplanen Kunnskapsløftet (Kunnskapsdepartementet, 2014) hvor fokuset på måloppnåelse ble særlig fremtredende. Hensynet til innhold og metode fikk ikke lenger en like sentral plass. Mens det i tidligere læreplaner var definert et gitt pensum til hver årstrinn, slo man nå sammen årstrinn og satte mål for hver gruppe av årstrinn i hvert fag. For småskolens sin del ble 1. og 2. trinn slått sammen med følgende kompetansemål i matematikk:

Kompetansemålene etter 2. trinn består av de fire hovedområder: tall, geometri, måling og statistikk. Hvert hovedområde er igjen delt inn i underpunkter som definerer ulike mål for kompetanse. Oppgavene i læreverkene ble plassert i den kategorien for kompetanse hvor samsvaret mellom oppgavens hovedfokus og et spesifikt kompetansemål var størst. En del av oppgavene i læreverkene faller ikke innunder noen av de spesifikke kompetansemålene etter 2. årstrinn. Et eksempel på dette er oppgaver om hva som veier mest. Det er ikke et eget punkt for vekt under kompetansemålet for måling etter andre årstrinn, men ettersom vekt er plassert under kompetansemålet for måling i senere årstrinn, har jeg valgt å plassere dette under måling. I tilfeller hvor jeg ikke kunne finne et spesifikt kompetansemål for gjeldende trinn eller senere, valgte jeg også her å legge oppgaven til det hovedområde som tematisk sett passet best. Oppgaver som ikke tematisk sett ikke kunne plasseres under noen av hovedområdene, ble ikke kategoriserte.

3.3.2.3.1 Tall

Det hovedområdet som har flest kompetansemål er *tall*. Her er seks av de tretten kompetansemålene plassert. I denne kategorien plasserte jeg oppgaver hvor tall, posisjonssystemet og regneoperasjoner (addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon) står i hovedfokus. Et eksempel på en oppgave som er lagt til denne kategorien er oppgaven på side 50 i Multi 2b hvor elevene blir bedt om å legge sammen to tall ved å hoppe på tallinjen. Oppgaven starter med tallet 20 og øker så med 10 gjentatte ganger. Dette er en oppgave som gir elevene trening i regneoperasjonen addisjon og hvordan posisjonssystemet fungerer når det legges til dekadiske enheter.

3.3.2.3.2 Geometri

Her plasserte jeg oppgaver som omhandler todimensjonale geometriske figurer som trekanter (rettvinklet, likebeinte og likesidet), firkanter (irregulære og regulære som kvadrat og rektangel) og sirkler, men også elementene som disse figurene er bygget opp av. Med elementer forstås her (rette, krumme og brukne) linjer, ståler og linjestykker. Oppgaver som omhandler tredimensjonale figurer med tilhørende egenskaper som hjørner, kanter og flater, samt geometriske mønstre og symmetri, ble også plassert i denne kategorien. I oppgave 91 hentet fra Matematikk 2a blir elevene bedt om å finne ut hva som er felles for noen trekanter som alle har en rett vinkel, og videre arbeide med en definisjon på slike trekanter. Hovedfokuset er på gjenkjenning av like egenskaper ulike figurer imellom og begrepsinnlæring knyttet til disse egenskapene.

3.3.2.3.3 Måling

Oppgaver som har sitt hovedfokus på måling av ulike størrelser som lengde, areal og vekt er plassert her. Enkelte oppgaver oppgir ikke noen måleenhet som gram eller kilo, men tar kun for seg forskjeller i vekt. Et eksempel på dette er oppgaver hvor en skålvekt viser ulike utsalg etter hva som ligger oppi skålene, eller kombinasjoner av vektskåler hvor ulike gjenstander er plassert og målet er å finne sammenhenger i gjenstandenes vekt. Disse oppgavene ble også plassert i denne kategorien. Videre plasserte jeg oppgaver som har sitt hovedfokus på tidsbegreper som dager, måneder og klokkeslett. Oppgaver som omhandler mynter og sedler ble også plassert i denne kategorien. Et eksempel på en oppgave lagt til denne kategorien, er oppgaven på side 101 i Multi 2a. Der får elevene i oppgave å plassere datoene i desember inn i en tabell med kolonner fra mandag til og med søndag. Dette gir blant annet trening i å se hvordan datoene fordeler seg uke for uke, og hvor mange dager det er i en bestemt måned. I tilknytning til tabellen er det også et samtalebilde som viser månedene i et sektordiagram med illustrasjoner som sier noe om årstiden månedene hører til. Dette gir muligheter for å lære navn og rekkefølge på månedene, i tillegg til når på året de er. Som dette eksempelet viser, er det ikke vanntette skott mellom oppgavetypene. Bruk av sektordiagram, kunne isolert sett vært plassert under kompetanseemnet *statistikk*, men ettersom det er oppgavenes hovedfokus som er bestemmende, er denne oppgaven langt til det kompetanseemnet som er mest fremtredende i oppgaven, og som i dette tilfellet er *måling*.

3.3.2.3.4 Statistikk

Dette hovedområdet består kun av ett kompetansemål. Her ble alle oppgaver som har sitt hovedfokus på innhenting og fremstilling av data gjennom tellestreker, tabeller og diagrammer plassert. På side 54 i Multi 2a får elevene se 22 ulike tegninger av ting man kan finne i naturen som for eksempel steiner og epler. Elevene får så i oppgave å kategorisere tingene etter om de er lette eller tunge, og etter om de er spiselige eller ikke spiselige. Dette skal elevene synliggjøre ved å fargelegge en rute i en søyle for hver ting som plasseres i samme kategori, og så avslutningsvis skrive det totale antallet i hver kategori. Elevene får her anledning til å skille ting utfra egenskaper, og se at ting kan plasseres ulikt avhengig av hvilke egenskap man har fokus på. Videre får de bli kjent med en visuell måte å fremstille dataene sine på, ved at det blir benyttet søyler for å vise antall og forskjeller i størrelser kategoriene imellom.

3.3.2.3.5 Algebra

Dette kompetanseområdet er ikke å finne blant kompetansemålene som er satt for elever etter 4. trinn. Algebra er først å finne i Læreplanenes kompetanseområdet *Tal og algebra* etter 7. trinn. Men jeg har likevel valgt å ta det med siden det ene læreverket har oppgavetyper med bokstavsymboler som faller naturlig innunder dette kompetanseområdet. Oppgaver som ble plassert i dette hovedområdet er oppgaver som bruker algebraiske notasjoner som bokstaver for ukjente eller variable verdier. Et eksempel på dette kan være oppgaver av typen hvor elevene blir bedt om å løse likningene. Likningene kan være av typen: $y + 7 = 14$ (hentet fra Matematikk 2a, nummer 4). I denne typen oppgaver er det en ukjent (representert med en algebraisk notasjon hvor en bokstav som eksempelvis x eller y er benyttet) i en ligning hvor elevene skal finne verdien til den ukjente ved å gjøre endringer i ligningen (uten å endre likhetstegnets gyldighet), og til slutt ende opp med bokstaven på den ene siden av likhetstegnet og et enkelt tall på den andre siden. Dette er en type oppgaver hvor elevene får erfaringer med at tall kan brukes matematisk i sammenhenger hvor et bestem tall er ukjent.

3.4 Reliabilitet og validitet

To sentrale begreper innen vitenskapen for å kunne verifisere holdbarheten til det som er observert, er *reliabilitet* og *validitet*. Et bilde på disse to begrepene, er sammenligne dem med skudd på en skyteskive. Hvis skuddene er samlet rundt et felles felt på skyteskiven, kan man si at reliabiliteten er god. Men dette sier ikke noe om hvor på skyteskiven man har truffet med skuddene (annet enn at de er samlet). Skuddene kan være samlet langt utenfor selve sentrum av skyteskiven. Validiteten sier noe om hvor godt de traff i forhold til blinken (sentrum av skyteskiven). I forskningsøyemed er både hvor sentrert man ”treffer” og hvor man ”treffer” avgjørende for verdien av forskningen. Jeg vil i det følgende si noe om reliabiliteten og validiteten til kategoriseringene som er gjort i denne masteroppgaven, og si noe om begrensningene som er ved den metoden som er valgt.

3.4.1 Reliabilitet

Under kategoriseringen av oppgavene som danner det primære datamateriale i denne oppgaven kommer vurderingen av *reliabilitet* inn. Reliabiliteten sier noe om troverdigheten til dataene som danner grunnlaget for drøftelsene og konklusjonene. Dataene kan eksempelvis være observasjoner, målinger eller, som i dette tilfellet, kategoriserte oppgaver. Reliabiliteten til dataene i denne masteroppgaven, sier noe om hvorvidt en annen person ville plassert oppgavene i de samme kategoriene som er gjort her. (Silverman, 2011)

Denne masteroppgaven beveger seg i et område av matematikken hvor begreper som aritmetikk og algebra kan være vanskelig å klart skille fra hverandre (og særlig når man kommer ned på konkret oppgavenivå), og hvor ulike måter å forstå begrepene er presentert i faglitteraturen (Bass, 1998; Carraher & Schliemann, 2007). En naturlig konsekvens av dette, er at kategoriene som søker å definere og skille mellom ulike oppgavetyper som eksempelvis gir muligheter for algebraisk tenkning, ikke kan være av disjunkt karakter, men bestå av grensetilfeller som ulike personer kan vurdere forskjellig fra hverandre.

En utfordring som må håndteres når man velger kategorier som ikke er av disjunkt karakter, men som har glidende overganger i mange av tilfellene, er å sette det endelige skille som avgjør hvor konkrete oppgavetyper skal plasseres. Under arbeidet med kategorier var det mange vurderinger som ble gjort, og som kan vektlegges ulikt fra person til person. For å gjøre kategoriene mest mulig transparens, var det viktig å beskrive dem godt, og bruke eksempler for å vise hvilke oppgavetyper som er typiske for kategorien, og hvilke oppgavetyper som var å forstå som grensetilfeller. For ytterligere å kunne styrke dataenes reliabilitet, laget jeg en veiledning (vedlegg 2) hvor oppgavetypene som jeg fant i de ulike læreverkene ble plassert i kategorier og underkategorier. En slik veiledning kan være med å øke reliabiliteten i kategoriseringsarbeidet.

3.4.2 Validitet

Validiteten til en studie sier noe om gyldigheten av det som forskningen kommer frem til (Thagaard, 2009). En svakhet ved gyldigheten til kategoriene som er laget her, kan være at det er oversett elementer som andre kan finne relevante, eller som ville vært med om det var andre læreverk som ble gjenstand for analysen. Hellevik (1994) omtaler validitet i sammenheng med datainnhenting som *relevans*. En annen måte å formulere dette på, er å spørre: Svarer du på det du faktisk spør om? Jeg har prøvd å lage kategorier som sier noe om mulighetene for algebraisk tenkning og hvordan likhetstegnet er brukt. I dette ligger det en antakelse om at gitte oppgaver gir slike muligheter. For noen oppgavetyper som ikke er helt åpenbart algebraiske, er det tilfeller hvor det kan være uenighet om hvilke muligheter de gir. Det samme gjelder eksempelvis for hvor grensen skal settes mellom hvilke oppgaver som er å forstå som basale innen området *mønster*. Dette er en klar svakhet, men den er prøvd å gjøres med så stor grad av transparens som mulig ved at oppgavetypene som kan forstås som grensetilfeller, er listet opp og plassert i kategorier og underkategorier i veiledningen, og ved en del av de oppgavene som var vanskelige å plassere er diskutert i kategoriseringskapittelet. Det skal dog sies at det her legges til grunn at ulike vurderinger av grensetilfellene ikke oppleves å kunne gi vesentlige resultatmessige utsalg som endrer på hovedlinjene i funnene som er gjort i denne studien.

3.5 Forskningsetiske betraktning

Forskningsetikk sier noe om verdier og normer for god og forsvarlig forskning. NESH (2016) presenterer et sett med etiske retningslinjer som kan deles inn i to hovedgrupper. Den første gruppen av etiske normer er interne, og omhandler selvreguleringen i forskningsmiljøet. Dette handler om normer for sikker, dekkende og relevant kunnskap på den ene siden, og redelighet, etterrettelighet og habilitet på den andre siden. Den andre gruppen av etiske normer er av ekstern art og omhandler forholdet mellom forskning og samfunnet. Sentrale begreper i denne forbindelsen er respekt, menneskeverd, konfidensialitet og samtykke.

Et viktig hensyn i denne forbindelse er hensynet til personer. I dette forskningsprosjektet er det ingen personer (utover indirekte ved forfatterne bak de ulike læreverkene) som er involvert gjennom observasjoner eller liknende, noe som gjøre at denne masteroppgaven ikke er å regne som et meldepliktig prosjekt (NESH, 2016). Mitt mål er ikke å finne hvilke lærebøker som er bedre enn andre, men å finne hvordan lærebøkene vektlegger ulike elementer som er sentrale ved én side av matematikken, nemlig det algebraiske.

Gjennom å vise til kildene jeg har brukt, og ved å etter beste evne, gjengi kildenes informasjon på så adekvat måte som mulig, samt å være transparent i forhold til hvilke oppgavetyper som er plassert hvor, mener jeg å kunne si at de forskningsetiske hensynene er godt ivaretatt i denne masteroppgaven.

4 Funn

4.1 Generelt om oppbygningen av læreverkene

Samlet sett i de tre læreverkene Matematikk 2ab, Multi 2ab og Grunntall 2ab var det 2 436 oppgaver som ble kategoriserte. Av disse var det 1 742 oppgaver i Matematikk 2ab, 388 oppgaver i Multi 2ab og 306 oppgaver i Grunntall 2ab. Antall sider i læreverkene fordelte seg med 271 sider i Matematikk 2ab, 256 sider i Multi 2ab og 289 sider i Grunntall 2ab. Mens Matematikk 2ab og Multi 2ab er trykket i A4-format, er Grunntall 2ab noe mindre. Den store forskjellen i antall oppgaver læreverkene imellom har ikke med det totale antallet enkeltoppgaver å gjøre, men gjenspeiler variasjonshyppigeten av oppgavetypene (hvor ofte oppgavetypen varierer fra enkeltoppgave til enkeltoppgave). I Grunntall 2ab kan det på en side være 12 addisjonsoppgaver av samme type, mens det i Matematikk 2ab kan være 7-8 ulike oppgavetyper per side.

4.1.1 Matematikk 2ab

Læreverket Matematikk består av to grunnbøker. Innholdet er kapittelinndelt, men det er stor variasjon av matematiske emner innad i hvert kapittel. Det vil si at i kapittelet som heter *Addisjon og subtraksjon av tosifrede tall* ikke utelukkende har oppgaver i henhold til kapittelnavnet, men i tillegg inneholder flere oppgaver fra emner som *geometri* og *statistikk*. Elevene vil derfor møte oppgaver fra ulike deler av kompetanseområdene i hvert kapittel.

Dette læreverket har svært mye tekst i matematikkoppgavene i forhold til de to andre læreverkene. De oppgavene som tar for seg nytt stoff er merket med rød skrift, mens oppgaver som hovedsakelig dreier seg om repetisjon eller mer frittstående oppgaver er skrevet med blå skrift. De røde oppgavene omtales i lærerveiledningen som obligatoriske. For å kunne løse oppgavene i grunnboken, må elevene har en egen arbeidsbok med ruter. Dette fordi grunnbøkene ikke er engangsbøker hvor elevene kan skrive svarene direkte i boken.

Det er også utarbeidet oppgavehefter som kan komplimentere oppgavene i grunnbøkene. Til hver av grunnbøkene er det laget et eget hefte hvor elevene finner varierte oppgaver fra drill og repetisjon til oppgaver som krever både kreativ tenkning og dyp grad av konsentrasjon. I tillegg til dette er det laget et arbeidshefte som er mer frittstående og som kalles for ”Regn og tegn”. Hovedfokuset her er rettet mot utvikling av telle- og regneferdigheter og har til hensikt å gi elevene mengdetrening og repetisjon. Av omfangshensyn i denne masteroppgaven er disse oppgave- og arbeidsheftene ikke gjort til gjenstand for en analyse.

Tabell 1 viser hvordan oppgavene i Matematikk 2a og 2b delt inn i henholdsvis fire og tre kapitler. Kapitlene *Hva er en tekstoppgave?* og *Tresifrete tall* er eksempler på kapittelnavn som ikke er å forstå som tradisjonelle matematiske emner som addisjon og brøk. Læreverket har en kombinasjon av tradisjonell kapittelinndeling (etter matematiske emner som multiplikasjon og divisjon) og en kapittelinndeling etter andre fokusområder som arbeid med hva en tekstoppgave er.

Tabell 1 - Kapittelinndeling i Matematikk 2ab

Matematikk 2a	Matematikk 2b
Masse - Måling av masse	Multiplikasjon og divisjon
Hva er en tekstoppgave?	Multiplikasjonstabellen
Addisjon og subtraksjon av tosifrede tall	Tresifrede tall
Tid - Måling av tid	

Læreverket Matematikk 2ab har fokus på begrepsforståelse, og har særlig lagt vekt på å bruke begrepsparet *likt* og *ulikt* i sine oppgaver. En forståelse av matematiske sammenhenger fremheves som et sentralt grunnlag for å kunne utvikle regnetekniske ferdigheter på en enklere måte. (Melhus, 2015c, s. 4)

4.1.2 Multi 2ab

Multi sitt læreverk har to grunnbøker med kapittelinndelt innhold hvor oppgavene er inndelt etter emner. Kapittelnavnet gir en adekvat beskrivelse av hvilke matematisk emne som møter elevene, da det i liten eller ingen grad varieres med andre deler av matematikken innad i kapitlene.

Tabell 2 - Kapittelinndeling i Multi 2ab

Multi 2a	Multi 2b
1 Tallene 0-20	8 Symmetri
2 Pluss og minus med tallene opp til 20	9 Dobling og halvering – partall og oddetall
3 Statistikk	10 Regning til 100
4 Lengdemål	11 Areal
5 Tall til 100	12 Regning
6 Pluss og minus	13 Mangekanter og sirkler
7 Tid	14 Romlige figurer

4.1.3 Grunntall 2ab

Læreverket Grunntall 2ab består i likhet med de to andre læreverkene av to grunnbøker. På samme måte som Multi 2ab er også Grunntall 2ab sine oppgaver inndelt etter emner, som i all hovedsak gjenspeiles i oppgavene. Flere av oppgavene er kodet for å vise hvilke arbeidsmåter som kan brukes.

Tabell 3 - Kapittelinndeling i Grunntall 2ab

Grunntall 2a	Grunntall 2b
Tallene 1 – 10	Måling av tid
Tallene 11 – 20	Tallene 31 - 50
Figurer og måling	Mønster
Tallene 20 – 30	Romfigurer
Symmetri	Tallene 51 – 100
	Telle og farge
	Husker du dette?

4.1.4 Emnefordeling i læreverkene

For å kunne si noe om det forekommer matematikkoppgaver i læreverkene som er av typen *algebra*, og hvordan forholdet mellom emnet *tall* (slik det er definert i Kunnskapsdepartementet (2004) og bruken av likhetstegnet, har jeg valgt å se på hvordan læreverkene har vektlagt ulike matematiske emner.

Kapittelinndelingene i de tre læreverkene er ikke egnet til å lage en felles emnefordeling av oppgavene. Dette fordi læreverkene bruker ulike måter å organisere oppgavene på, og videre fordi læreverket Matematikk 2ab følger en ikke-temabasert organisering av oppgavene hvor oppgaver fra ulike matematiske emner er plassert i samme kapittel. For å kunne si noe om hvordan de matematiske temaene er fordelt læreverkene imellom, har jeg derfor ikke tatt utgangspunkt i kapittelinndelingen, men heller sett på hvilke kompetanseemner de dekker.

I tabell 4 er det gitt en oversikt over hvordan de ulike oppgavene er fordelt mellom de kompetanseemnene. Kompetanseemnet *algebra* er ikke en del av kompetansemålene satt for elever etter 2. årstrinn, men er likevel tatt med her da flere av oppgavene som ble kategorisert var å forstå som tilhørende dette kompetanseemnet.

Tabell 4- Tall- og prosentvis fordeling av kompetanseemner

	Matematikk 2ab		Multi 2ab		Grunntall 2ab	
Geometri	285	16 %	56	14 %	31	10 %
Måling	185	11 %	60	15 %	30	10 %
Statistikk	15	1 %	18	5 %	7	2 %
Tall	1222	70 %	254	65 %	238	78 %
Algebra	33	2 %	0	0 %	0	0 %
Totalt	1742	100 %	388	100 %	306	100 %

Den klart største dekningen av kompetansemål i oppgavene for de tre læreverkene er blant målene som omhandler kompetanseemnet *tall*. Oppgaver som omhandler statistikk er i svært liten grad tatt med i de tre læreverkene. (Matematikk 2ab med 1 %, Multi 2ab med 5 % og Grunntall 2ab med 2 %). Det er kun i et læreverk oppgaver tilhørende kompetanseemnet *algebra* er med, og det er i Matematikk 2ab med 33 oppgaver som utgjør 2 % av det totale antall oppgaver. Kompetanseemnene *geometri* og *måling* er noenlunde jevnt fordelt med andeler fra 10 % til 16 % av oppgavene gjeldende for alle de tre læreverkene.

4.2 Algebraisk tenkning

I tabell 4 gis en oversikt over hvordan den tall- og prosentvise fordelingen av oppgaver med muligheter for algebraisk tenkning fordeler seg i de tre læreverkene. Kategorien for oppgaver med algebraisk tenkning inkluderer underkategoriene: (a) generalisering og generelle egenskaper, (b) likt og ulikt, (c) mønster i figurer, tallrekker, uttrykk og likheter og (d) algebraiske notasjoner. Kategorien for oppgaver *uten særlig algebraisk tenkning* inkluderer underkategoriene (e) grunnlag for algebra og n/a (ikke aktuelle)

Tabell 5 - Tall- og prosentvis fordeling av oppgaver med og uten særlig algebraisk tenkning

	Matematikk 2ab		Multi 2ab		Grunntall 2ab	
Med algebraisk tenkning	867	50 %	54	14 %	17	6 %
Uten særlig algebraisk tenkning	875	50 %	334	86 %	289	94 %
Totalt	1 742	100 %	388	100 %	306	100 %

Læreverket Matematikk 2ab har klart størst andel oppgaver med muligheter for algebraisk tenkning med 50 % av oppgavene. Dette er over åtte ganger større andel enn Grunntall 2ab som har den laveste andelen med 6 % av oppgavene. Multi 2ab har i overkant av dobbelt så stor andel som Grunntall 2ab med 14 % andel.

Tabell 6 - Tall- og prosentvis fordeling av oppgaver med algebraisk tenkning

	Matematikk 2ab		Multi 2ab		Grunntall 2ab	
GEN	332	38 %	22	41 %	3	18 %
LOU	234	27 %	4	7 %	3	18 %
MØN	215	25 %	28	52 %	11	65 %
ALG	85	10 %	0	0 %	0	0 %
Totalt	866	100 %	54	100 %	17	100 %

For læreverkene Multi 2ab og Grunntall 2ab er over halvparten av oppgavene som gir muligheter for algebraisk tenkning knyttet til kategorien mønster. For Multi 2ab sin del er kategorien for generelle egenskaper også stor med 41 %. Det kan dog være på sin plass å bemerke at dette gjelder relativt få oppgaver totalt sett, noe som gjør fordelingen oppgavetyper for Multi 2ab og i ende større grad for Grunntall 2ab, mindre interessant. For læreverket Matematikk 2ab derimot er andelen oppgaver som gir muligheter for algebraisk tenkning langt større, og fordelingen dermed mer beskrivende. Her er det en forholdsvis jevn fordeling mellom kategoriene hvis man holder kategorien for algebra utenfor.

4.3 Bruk av likhetstegnet

Tabell 5 viser den tall- og prosentvise fordelingen av hvordan likhetstegnet er brukt i de tre læreverkene. Her er eksplisitt og implisitt bruk slått sammen under henholdsvis *relasjonell* og *operasjonell* bruk.

Tabell 7 - Tall- og prosentvis bruk av likhetstegnet

	Matematikk 2ab		Multi 2ab		Grunntall 2ab	
Relasjonell	550	49 %	36	17 %	39	19 %
Operasjonell	569	51 %	175	83 %	164	81 %
Totalt	1119	100 %	211	100 %	203	100 %

Læreverkene Grunntall 2ab og Multi 2ab har en nokså lik fordeling mellom bruken av likhetstegnet. De har begge i underkant av 20 % av oppgavene med en relasjonell bruk av likhetstegnet, mens Matematikk 2ab derimot har en nærmest lik fordeling mellom relasjonell og operasjonell bruk av likhetstegnet.

Tabell 6 viser hvordan den eksplisitte bruken av likhetstegnet fordeler seg tall- og prosentvis for hvert av de tre læreverkene.

Tabell 8 - Tall- og prosentvis eksplisitt bruk av likhetstegnet

	Matematikk 2ab		Multi 2ab		Grunntall 2ab	
Relasjonell, eksplisitt	363	49 %	14	14 %	35	23 %
Operasjonell, eksplisitt	383	51 %	89	86 %	119	77 %
Totalt	746	100 %	103	100 %	154	100 %

De gangene likhetstegnet er brukt eksplisitt (enten brukt i selve oppgaven eller forventet brukt i elevens svar) har Matematikk 2ab nærmest likt fordeling mellom relasjonell og operasjonell bruk. For

Grunntall 2ab sin del er forholdet slik at relasjonell bruk kun utgjør 14 % av tilfellene, mens andelen hos Multi 2ab er noe høyere med 23 %.

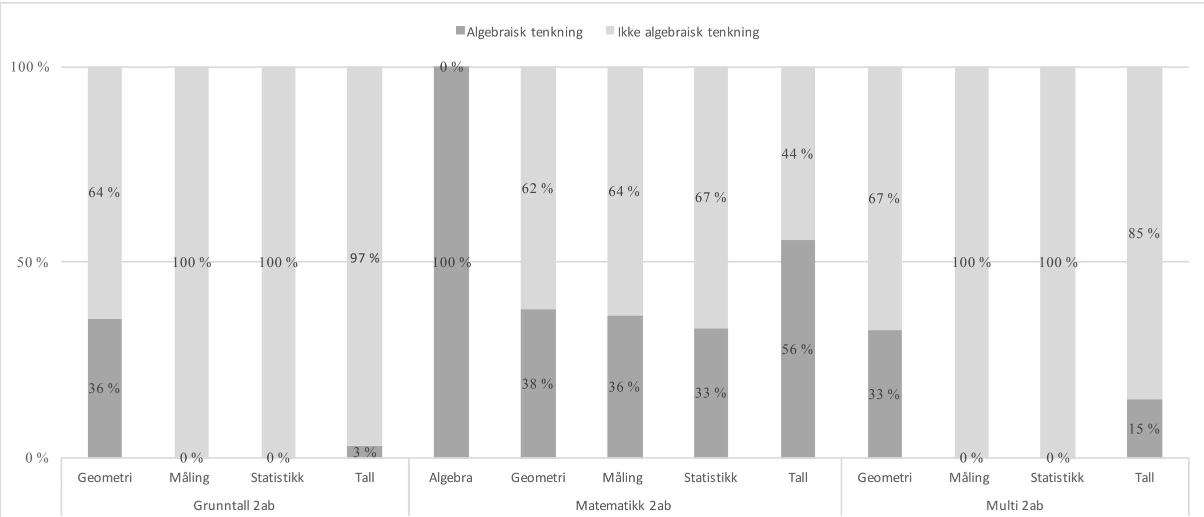
4.4 Resultater sett i sammenheng med kompetanseemner

Med utgangspunkt i inndeling av oppgaver etter kompetanseemner (se tabell 4), vil jeg her vise hvordan muligheten for algebraisk tenkning og er fordelt, og videre hvordan bruken av likhetstegnet fordeler seg mellom de ulike kompetanseemnene.

4.4.1.1 Algebraisk tenkning fordelt på kompetanseemner

Figur 4 viser hvordan den prosentvise fordelingen av muligheter for algebraisk tenkning er fordelt innad i hvert enkelt kompetanseemne for hvert av læreverkene.

Figur 4 - Prosentvis fordeling av algebraisk tenkning innad kompetanseemner



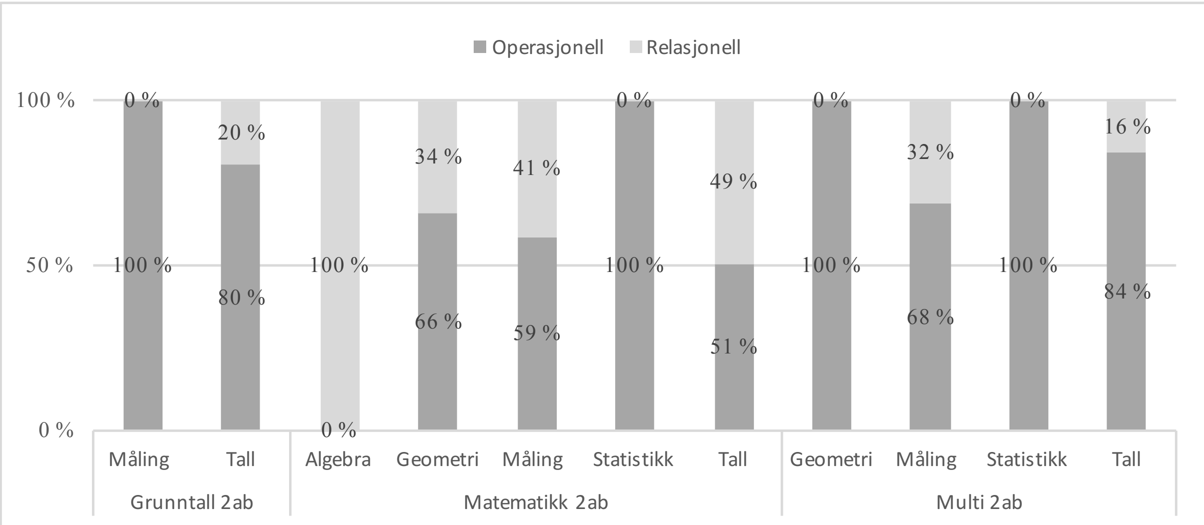
For læreverkene Grunntall 2ab og Multi 2ab er det kun de fire kompetanseemnene: *geometri*, *måling*, *statistikk* og *tall* som det er funnet oppgavetyper fra. I læreverket Matematikk 2ab er det i tillegg funnet oppgaver plassert i kompetanseemnet *algebra*.

For læreverkene Grunntall 2ab og Multi 2ab er det kun innad kompetanseemnet *geometri* at en vesentlig andel, på rundt en tredjedel av oppgavene, gir muligheter for algebraisk tenkning. Innad det største kompetanseemnet *tall*, sett i forhold til fordelingen av oppgaver jf. tabell 4, er det få muligheter for algebraisk tenkning med 3 % andel for Grunntall 2ab og 15 % andel for Multi 2ab. Matematikk 2ab har derimot 55 % andel med muligheter for algebraisk tenkning i oppgavene knyttet til kompetanseemnet *tall*. I tillegg har Matematikk 2ab en vesentlig andel oppgaver med muligheter for algebraisk tenkning knyttet til alle kompetanseemnene med andeler fra rundt en tredjedel i *geometri*, *måling* og *statistikk*. Andelen algebraisk tenkning for kompetanseemnet *algebra,* er ipso facto 100 %.

4.4.1.2 Bruk av likhetstegnet

Figur 5 gir den prosentvise fordelingen av hvordan likhetstegnet er brukt innad i hvert enkelt kompetanseemne for de tre læreverkene. Det er her ikke hensyntatt om bruken er eksplisitt eller implisitt.

Figur 5 - Prosentvis fordeling av likhetstegnet innad kompetanseemner



Likhetstegnet er ikke brukt, verken eksplisitt eller implisitt, i oppgaver som dekker kompetanseområdene *statistikk* og *geometri* i Grunntall 2ab, og derfor ikke med som egne søyler i diagrammet. Alle læreverkene har kompetanseområder (henholdsvis *måling* for Grunntall 2ab, *statistikk* for Matematikk 2ab og *geometri* og *statistikk* for Multi 2ab) hvor det kun er funnet operasjonell bruk av likhetstegnet.

Innad de kompetanseområdene hvor det er funnet relasjonell bruk av likhetstegnet, er det kun i 16 til 32 prosent av oppgavene til Grunntall 2ab og Multi 2ab. For læreverket Matematikk 2ab sin del har likhetstegnet vært bruk relasjonelt i 34 til 49 prosent av oppgavene. I det største kompetanseområdet som er tall, har likhetstegnet vært brukt cirka halvparten av gangene.

4.5 Sammenhenger mellom resultatene

Tabell 9 viser hvordan den prosentvise fordelingen er av bruken av likhetstegnet fordelt på oppgaver med og uten særlig algebraisk tenkning.

Tabell 9 - Prosentvis fordeling av likhetstegnet innad med og uten særlig algebraisk tenkning

	Matematikk 2ab		Multi 2ab		Grunntall 2ab	
	Rela.	Oper.	Rela.	Oper.	Rela.	Oper.
Med algebraisk tenkning	88 %	21 %	17 %	8 %	3 %	4 %
Uten særlig algebraisk tenkning	12 %	79 %	83 %	92 %	97 %	96 %
Totalt	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %	100 %

Når vi ser på hvordan likhetstegnet har vært brukt fordelt på oppgaver henholdsvis med og uten særlig algebraisk tenkning, finner vi at Matematikk 2ab har en relativt klar sammenheng. Det er 88 % av oppgavene hvor likhetstegnet er brukt relasjonelt som også er oppgaver med algebraisk tenkning, og 79 % av oppgavene av oppgavene hvor likhetstegnet er brukt operasjonelt som også er oppgaver uten særlig algebraisk tenkning. Oppgaver med relasjonell bruk av likhetstegnet er altså i all hovedsak også oppgaver med algebraisk tenkning, og tilsvarende motsatt når det gjelder oppgaver med operasjonell bruk av likhetstegnet. Denne sammenhengen er ikke gjeldende for læreverket Multi 2ab, hvor 83 % av oppgavene med relasjonell bruk av likhetstegnet er oppgaver uten særlig algebraisk tenkning. For læreverket Grunntall 2ab sin del, er det kun 3 % av oppgaven med relasjonell bruk av likhetstegnet som også er med algebraisk tenkning.

At en oppgave kan kategoriseres som å være *med algebraisk tenkning*, og samtidig har en operasjonell bruk av likhetstegnet, kan virke som en motsigelse, men dette har sin forklaring i at det i denne oversikten er tatt med, ikke bare den eksplisitte, men også den implisitte bruken av likhetstegnet. Det kan derfor være greit å vise til et konkret eksempel hvor nettopp denne kombinasjonen har oppstått. I Multi 2b (s. 38, nummer 2) skal elevene finne de tallene som mangler i tallrekken (plassert på kroppen til en slange)

Eksempel 5 - Oppgave kategorisert som MØN og OL fra Grunntall 2b

10 - 20 - ___ - 40 - ___ - ___ - ___ - 80 - ___ - ___ - ___

I en oppgave hvor elevene skal gjenkjenne og videreføre et mønster vil det kunne være behov for å addere eller subtrahere. Det å gjenkjenne og videreføre mønster, er i noen tilfeller plassert i kategorien MØN som er en underkategori av kategorien *med algebraisk tenkning*, mens det å legge til eller trekke fra et bestemt tall for å fortsette en tallrekke er å forstå som en operasjonell bruk av likhetstegnet.

5 Diskusjon

I diskusjonsdelen vil jeg se på hvilke forskjeller og likheter som er funnet gjennom å kode, kategorisere og sammenligne dataene fra de tre læreverkene, og prøve å belyse problemstillingen som det her er tatt utgangspunkt i: Hvilke forskjeller i læringsmuligheter for algebraisk tenkning er det i oppgavene i læreverk brukt av norske småskoleelever?

5.1 Generelt om oppbygning av læreverkene

Alle tre læreverkene var delt inn i likt antall bøker, en a- og en b-bok. De hadde også alle ekstra oppgaver som supplement til dette. Antall sider og størrelsen på bøkene var også nokså likt. Videre var det likheter i at innholdet var delt inn i kapitler. Multi 2ab og Grunntall 2ab har en strengere tematisk organisering av innholdet i kapitlene enn Matematikk 2ab. Dette fremgår kanskje ikke så tydelig når innholdsfortegnelsene sammenlignes, men ved å sammenligne organiseringen av oppgavene i hvert kapittel, er forskjellene klare. I tillegg til at det varieres tematisk innad i hvert kapittel i Matematikk 2ab, så er også variasjonene store i forhold til oppgavetyper og matematiske emner innad hver enkelt side i læreverket. Mens det for Multi 2ab og Grunntall 2ab sin del kan være en oppgavetype på en hel side, er det i Matematikk 2ab eksempelvis 8 ulike oppgavetyper fordelt på flere ulike matematiske emner.

Denne forskjellen kan si noe om en grunnleggende forskjell i hvordan forfatterne av læreverkene tenker om hvordan begynneropplæringen (eller læring generelt) i matematikk skal være. Ved å holde seg til et emne om gangen, vil faren for sammenblanding muligens være mindre enn om man varierer mellom ulike emner fra oppgave til oppgave. På den annen side kan det at elevene ”holder poteten varm” i alle emnene, gjøre at ikke så mye glemmes av et emne mens de andre gjennomgås. Behovet for å starte gjennomgangen av et emne med repetisjon fra forrige gang elevene hadde om emnet (sannsynligvis forrige skoleår), er ikke til stede i samme grad. Det vil også kunne være lettere å se matematikken som en stor sammenheng når elevene møter ulike deler av matematikken jevnlig (og ikke med eksempelvis et års mellomrom) og om en annen, og ikke som relativt isolerte deler uten videre relevans for hverandre.

Den mest fremtredende forskjellen som viser seg mellom læreverkene ved første øyekast, er at Matematikk 2ab består av vesentlig mer tekst enn tall, mens de to andre læreverkene har motsatt vekting. For elever på 2. trinn som er i starten av sin leseopplæring, kan en overvekt av tekst by på utfordringer som fordrer sterk involvering av lærer og foresatte. For en del elever, må det antas at læreverket ikke kan brukes uten at en lesekyndig hjelper til med langt de fleste oppgavene. For elever som er svake lesere, men med gode evner til å lære matematikk, kan et møte med matematikken hvor det primært er tekst elevene ser, virke demotiverende.

Det er ikke denne masteroppgavens fokus å si noe om hvor avanserte oppgavene er i de ulike læreverkene, men gjennomgangen av innholdsfortegnelsene indikerer at det er store ulikheter i det faglige nivået, og hvor Matematikk 2ab skiller seg ut ved å fremstå som det læreverket med raskest progresjon ved at emnene som tas opp, er av mer komplisert art enn de to andre. Mens Matematikk 2ab har kapitler som eksempelvis heter *addisjon og subtraksjon av tosifrete tall*, *multiplikasjon og divisjon* og *tresifrete tall*, har Grunntall 2ab kapitler som heter *tallene 1 – 10*, *tallene 11 – 20* og *tallene 51 – 100* og Multi 2ab kapitler som heter *tallene 0 – 20*, *tall til 100* og *dobling og halvering – partall og oddetall* (se tabell 1-3). Et annet eksempel er at Matematikk 2ab har oppgaver hentet fra kompetanseemnet *Tal og algebra* (se tabell 4), som først er å finne i Kunnskapsløftet (2014) etter 7. årstrinn, mens de to andre ikke har oppgaver fra dette kompetanseemnet. Denne forskjellen i hvor komplisert matematikk kapitlene inkluderer, underbygges av Blank et al. (2014) sin fremstilling av at undervisningen skal ha et fokus på rask progresjon. Dette inntrykket samsvarer med hvordan Melhus (2015c) i lærerveiledningen til Matematikk 2a gjør rede for prinsippene som læreverket bygger på, hvor blant annet rask progresjon er vektlagt.

En annen forskjell er ordbruken. Muntlige begreper som ”pluss” og ”minus” er brukt i Multi 2ab og Grunntall 2ab, mens det i Matematikk 2ab er et fokus på å lære de matematiske fagbegrepene, som addisjon og subtraksjon, fra starten av. Et annet eksempel er begreper som ”tier-venner” og ”tall-venner” som benyttes i Multi 2ab og Grunntall 2ab. Dette er begreper som kan forbindes med yngre elever, mens man i liten grad ville forvente å bruke dem på de høyere alderstrinnene. For læreverket Matematikk 2ab derimot, er slike begreper i liten eller ingen grad en del av det matematiske språket. Eksempler på andre begreper som er gjennomgående brukt i Matematikk 2ab er røtter i forbindelse med ligninger, og begrepene verdi og sum i forbindelse med addisjon. Vygotsky setter ifølge Daniels (2005) et skille mellom begrepene det her vises til. Han deler begrepene inn i hverdagsbegreper og vitenskapelige begreper. Videre sier han noe om hvordan barnets generelle evne til å danne begreper er av betydning for hvordan barn oppfatter vitenskapelige begreper. Ifølge Vygotsky er det systematisk og organisert tenkning som danner grunnlaget for å kunne danne vitenskapelige begreper, mens for de hverdagslige begrepene er det koblingen til spesielle kontekster som er det avgjørende. Forfatterne bak Grunntall 2ab og Multi 2ab har i denne forbindelse valgt å fokusere på det kontekstuelle og bruken av hverdagsbegreper, mens Matematikk 2ab har valgt å starte med en systematisk innlæring av de vitenskapelige begrepene.

5.1.1 Fordeling av matematiske emner

Når man ser på hvordan de ulike kompetanseemnene er vektlagt i de tre læreverkene (se tabell 4), så er det en nokså lik vektlegging å se. Det er på ingen måte en helt lik vektlegging, men variasjonene de ulike kompetanseemnene imellom følger stort sett den samme tendensen. Konkret vil det si at kompetanseområdet *tall* er det som har fått størst plass i samtlige læreverk med en vekting på 65 % (for Multi 2ab), 70 % (for Matematikk 2ab) og 78 % (for Grunntall 2ab) av oppgavene. Dette er kanskje ikke så rart ettersom det også er her de fleste kompetansemålene er å finne. I et område mellom 10 % og 16 % av oppgavene finner vi hvor kompetanseemnene *geometri* og *måling* ligger for alle de tre læreverkene. Ser vi dette opp mot kompetansemålene, så er det også her en sammenheng mellom antall kompetansemål innen disse kompetanseemnene og hvordan de er vektlagt i læreverkene. Det kompetanseemnet som rommer færrest kompetansemål, er også det kompetanseemnet som er minst i samtlige læreverk. Statistikk har kun to kompetansemål knyttet til seg, og har en prosentvis vekting på 1 % i Matematikk 2ab, 2 % i Grunntall 2ab og 5 % i Multi 2ab. For Matematikk 2ab og Grunntall 2ab sin del fremstår dette som uforholdsmessig lavt, men det er ikke anledning til å gå nærmere inn på dette i denne studien.

I tråd med blant andre Blanton et al. (2015) sine tanker om viktigheten av å la undervisningen være preget av både arbeid med aritmetikk og algebra ved å jobbe med matematikkoppgaver av algebraisk karakter, har Matematikk 2ab som det eneste læreverket i denne studien tatt med oppgaver som kommer inn under kompetansemål tilhørende kompetanseemnet *algebra*. Dette til tross for at det ikke er definert noen kompetansemål i *algebra* for 1. og 2. trinn i Kunnskapsløftet. At det er dobbelt så mange oppgaver i *algebra* som i *statistikk*, er en indikasjon på at forfatterne bak dette læreverket er av den oppfatning at algebra er et område av matematikken som må undervises parallelt med aritmetikken (Carraher & Schliemann, 2007), og ikke slik det tradisjonelt har vært gjort med innlæring av aritmetikk først og så algebra (Kieran, 1981). Fraværet av oppgaver innen kompetanseemnet *algebra* hos Grunntall 2ab og Multi 2ab, kan forstås som et uttrykk for at forfatterne ønsker å være tro mot de sentralt satte kompetanseemnene, men uavhengig av hvilke motiver som ligger bak, er resultatet at læreverkene følger den tradisjonelle forståelsen av rekkefølgen aritmetikk først, så algebra.

5.2 Læreverkenes møte med rammeverket

5.2.1 Algebraisk tenkning

En vesentlig forskjell mellom læreverkene er hvor stor andel av oppgavene som gir muligheter for algebraisk tenkning (se tabell 5). For Grunntall 2ab sin del er det i svært liten grad lagt til rette for at elevene skal ha muligheter for å tenke algebraisk. Med kun 6 % av oppgavene er det ikke å forvente at elvene vil kunne tilegne seg vesentlige ferdigheter innen algebraisk tenkning. I noe større grad hadde Multi 2ab oppgaver som gav denne muligheten for læring, men med kun 14 % av oppgavene, er også dette læreverket i for liten grad egnet til å gi elevene vesentlige ferdigheter innen algebraisk tenkning. Når det i 50 % av oppgavene gir muligheter som algebraisk tenkning, slik som i Matematikk 2ab, er det å forstås som en vesentlig andel.

Hvis vi ser nærmere på hvordan muligheten for algebraisk tenkning fordeler seg på kategoriene GEN, LOU, MØN og ALG (se tabell 6), så er det for Multi 2ab og Grunntall 2ab flest oppgaver (henholdsvis 52 % og 65 %) som er plassert i kategorien for mønster (MØN). Dette utgjør dog kun henholdsvis 28 av 388 oppgaver og 11 av 306 oppgaver totalt sett. Så selv om det er store andeler innad oppgaver med muligheter for algebraisk tenkning, så er det av det totale antallet oppgaver som elevene møter i læreverkene, en relativ liten andel av oppgavene. Men selv om antallet oppgaver totalt sett med arbeid sentrert rundt arbeid med mønster, er noe beskjedent, så gir det slik Van de Walle (2013) beskriver det, en viktig kobling til det som har med mønster å gjøre innen algebraisk tenkning. Matematikk 2ab hadde 25 % av oppgavene med algebraisk tenkning innen denne kategorien. I forhold av det totale antallet oppgaver utgjør dette i overkant av 12 %. Så sammenlignes de tre læreverkene i forhold til mulighetene for å arbeide med mønster, som en del av arbeidet med algebraisk tenkning, finner man at Matematikk 2ab er det læreverket som i størst grad ivaretar dette hensynet, mens Grunntall 2ab og Multi 2ab ivaretar hensynet i noen grad.

Det at det ikke er noen oppgaver i kategorien for algebra (ALG) i læreverkene Grunntall 2ab og Multi 2ab (se tabell 6) er nok ikke overaskende sett i lys av hvordan Kunnskapsløftet har vektlagt dette kompetanseemnet gjennom utdanningsløpet (Kunnskapsdepartementet, 2014), og heller ikke når det har vært en rådende oppfatning at aritmetikken skal komme foran algebraen (Sjøberg, 1998). Men for å møte de utfordringene som elevene vil treffe på med algebra senere, er det ifølge Blanton et al. (2015) mulig å gi elever i denne aldersgruppen oppgaver som er algebraiske i sitt uttrykk med gode resultater. Det kan også være verdt å merke seg at målene som er definert i Kunnskapsløftet ikke er til hinder for å arbeide med andre sider ved matematikken så lenge de definerte målene har et hovedfokus, og det ikke går på bekostning av kompetansemålene. At Matematikk 2ab har 85 oppgaver i kategorien ALG, viser at forfatterne til dette læreverket har valgt å gå utenfor det som er vanlig i norsk skole, og satt som mål for alderstrinnet i Kunnskapsløftet. Dette forstår jeg som et uttrykk for at algebra er et område av matematikken som ikke skal spares på til elevere er mer utrustet kognitivt sett, men at det skal heller skal gjøres til en naturlig del av matematikken helt fra starten av.

Ser man på antall oppgaver, og ikke prosentvis fordeling, har Grunntall 2ab kun tre oppgaver av typen GEN og tilsvarende kun 3 for typen LOU (se tabell 6). Ser man dette i lys av Lee referert i Radford (1996) og Mason (1996) sine vurderinger av generaliseringens verdi for utvikling av matematikkforståelse generelt og algebraforståelse spesielt, er det en svært stor avstand mellom det Grunntall 2ab kan tilby av læringsmuligheter for generalisering og det som de nevnte forfattere anbefaler. Multi 2ab har kun fire oppgaver i kategorien LOU, men en vesentlig høyere andel av oppgaver i kategorien GEN, hvor 41 % av oppgavene med algebraisk tenking er plassert. Grunntall 2ab gir altså i svært liten grad muligheter for algebraisk tenkning, men noen muligheter for arbeid med mønster (MØN). Multi 2ab har i noe større grad muligheter for algebraisk tenkning, men det begrenser seg i all hovedsak til kategoriene MØN og GEN. Så dersom hensynet til elevenes muligheter for algebraisk tenkning veier tungt, er læreverket Matematikk 2ab et læreverk som svarer til dette hensynet og som må vurderes, mens de to andre læreverkene ikke egner seg i særlig grad til å møte dette hensynet.

5.2.2 Likhetstegnets bruk

Når det gjelder hvordan likhetstegnet er bruk i de tre læreverkene (se tabell 7), så er det funnet at Matematikk 2ab i vesentlig grad har en relasjonell bruk av likhetstegnet med 49 % av gangene tegnet er brukt enten implisitt eller eksplisitt. For Multi 2ab sin del er likhetstegnet kun brukt relasjonelt i 17 % av tilfellene, mens det for Grunntall 2ab sin del er noe høyere med 19 % andel. Den samme tendensen er det når vi ser på hvordan den eksplisitte bruken av likhetstegnet er i de tre læreverkene (se tabell 8). Den eksplisitte bruken kjennetegnes av at elevene visuelt får se likhetstegnet enten ved at det står skrevet i selve oppgaveteksten, og eller ved at det forventes av elevene at de vil skrive det i sitt svar. Matematikk 2ab har også her 49 % av gangene tegnet er brukt eksplisitt en relasjonell bruk, mens Multi 2ab og Grunntall 2ab ligger på henholdsvis 14 % og 23 %. At elevene i langt de fleste møtene med likhetstegnet, kan forstå likhetstegnet som en regn ut-kommando, vurderes som lite gunstig særlig med henblikk på senere møter med algebra (Falkner et al., 2012). Det kan selvsagt hevdes at å møte en relasjonell bruk av tegnet i nærmere en femtedel av tilfellene er langt bedre enn aldri, og dette er selvsagt riktig, men dersom det oppleves som viktig å gi elevene en relasjonell forståelse av likhetstegnet fra starten av, slik at en operasjonell forståelse ikke så lett kan feste seg (Prediger, 2010), så er det min oppfatning at det vil være vesentlig bedre å møte en relasjonell bruk i nærmere halvparten av tilfellene.

5.2.3 Resultater sett i sammenheng med kompetanseemner

I Grunntall 2ab er det i kompetanseemnet *geometri* at det i gis rom for algebraisk tenkning med 36 % av oppgavene, mens det er 3 % innen kompetanseemnet *tall*, og helt fraværende innen måling og statistikk (se figur 4). Ser vi dette i sammenheng med hvor likhetstegnet er brukt (enten eksplisitt eller implisitt), så viser resultatene at for Grunntall 2ab sin del, så er det ikke brukt av likhetstegnet innen dette emnet (geometri) hvor muligheter for algebraisk tenkning har vært representert (se figur 5). Dette gjør at den direkte koblingen mellom muligheter for algebraisk tenkning (Valenta et al., 2016) og utviklingen av en relasjonell forståelse av likhetstegnet (Prediger, 2010), i svært liten grad er tilstede i dette læreverket.

For Multi 2ab sin del, er sammenhengen mellom hvilke kompetanseemner algebraisk tenkning er representert i (se figur 4), og hvordan likhetstegnet er brukt innen det samme kompetanseemnet (se figur 5), også slik at koblingen mellom muligheter for algebraisk tenkning (Valenta et al., 2016) og utviklingen av en relasjonell forståelse av likhetstegnet (Prediger, 2010), er tilstede i svært liten grad. På samme måte som for Grunntall 2ab er det innad kompetanseemnet *geometri* at det er funnet størst andel oppgaver (33 %) med muligheter for algebraisk tenkning. I motsetning til Grunntall 2ab, så er likhetstegnet brukt innad dette kompetanseemnet, men bruken er utelukkende av operasjonell art.

Læreverket Matematikk 2ab har vesentlige muligheter for algebraisk tenkning innad alle de fire (jeg ser her bort fra kompetanseemnet *algebra* ettersom det ipso facto gir muligheter for algebraisk tenkning) kompetanseemnene med dekning fra 33 % (i statistikk) til 56 % (i tall), og gir å så måte et inntrykk av en helhetlig tenkning rundt hvordan algebraisk tenkning skal være en integrert del av fagfeltet *matematikk* (se figur 4). Læreverket plasserer seg dermed, ved å integrere algebraisk tenkning i alle kompetanseemnene i læreverket, i forlengelse av det tredje trinnet i utviklingsmodellen til Lins og Kaput (2004) om å sette forståelse av at aritmetikk skal gå foran algebra, på prøve.

5.2.4 Sammenhenger mellom resultatene

I tabell 9 fremkomme det at det kun er læreverket Matematikk 2ab som har en klar sammenheng mellom oppgaver med muligheter for algebraisk tenkning og en relasjonell bruk av likhetstegnet. Sammenhengen er tilsvarende når det gjelder oppgaver uten særlige muligheter for algebraisk tenkning og en operasjonell bruk av likhetstegnet. For Grunntall 2ab og Multi 2ab sin del, er det ingen klare sammenhenger mellom disse resultatene. Dette underbygger inntrykket om at Grunntall 2ab og Multi 2ab ikke er laget utfra en forståelse om at algebraisk tenkning og en relasjonell forståelse av likhetstegnet skal være integrerte deler av matematikken elever på dette alderstrinnet skal ha som mål å lære.

6 Konklusjon

Jeg har i denne masteroppgaven kodet, kategorisert og analysert 2 436 oppgavene i matematikk som er presentert i lærebøkene for 2. trinn (kalt 2a og 2b) til de tre læreverkene: Grunntall, Matematikk og Multi. Kategoriene ble laget for å kunne si noe om læringsmulighetene til algebraisk tenkning, og hvordan likhetstegnet er brukt.

Det legges her til grunn at det er sannsynliggjort gjennom forskning, at det er en positiv sammenheng mellom læringsmuligheter og elevprestasjoner (Hiebert & Grouws, 2007), og at læringsmuligheter kan gis gjennom matematikkoppgavene elevene arbeider med (Floden, 2002).

Videre forutsettes det at muligheter for algebraisk tenkning og en relasjonell forståelse av likhetstegnet hos elever i småskolealder, er fremmende for forståelse av algebra som de vil møte senere i utdanningsløpet (Blanton, et al., 2015; Kieran, 1981; Van de Walle, 2013). Gitt disse forutsetningene, kan det hevdes at læreverk med liten grad av muligheter for algebraisk tenkning og en hovedsakelig operasjonell bruk av likhetstegnet, kan være en medvirkende årsak til at elever sliter med å lære algebra senere i utdanningsløpet (Grønmo et al., 2012).

Ved å sammenligne resultatene fant jeg at det var signifikante forskjeller mellom læreverkene. Matematikk 2ab skilte seg ut ved at dette læreverket hadde en vesentlig høyere andel oppgaver med muligheter for algebraisk tenkning og en relasjonell bruk av likhetstegnet, enn Grunntall 2ab og Multi 2ab. Matematikk 2ab er i tillegg det eneste av læreverkene som har oppgaver med variabler og algebraiske notasjoner.

Det er i så måte denne masteroppgavens konklusjon at dersom man ønsker å gi elevene vesentlige læringsmuligheter for algebraisk tenkning og relasjonell forståelse av likhetstegnet i tidlig skolealder, så vil det å være naturlig å vurdere å velge læreverket Matematikk 2ab. Det skal dog sies at denne masteroppgaven kun tar for seg hensynet til en side ved matematikken i læreverkene, og derfor ikke er egnet til å gi en generell anbefaling av læreverk, eller å tas til inntekt for å hevde at det ene læreverket er bedre enn det andre. Det vil alltid være en helhetsvurdering som må legges til grunn når man skal velge læreverk, og ulike vektlegginger vil bli gjort, men jeg håper at denne masteroppgaven kan bidra til noen viktige avklaringer.

6.1 Veien videre, nye forskningsspørsmål

Gitt at veien videre i matematikkundervisningen i den norske skolen følger andre lands eksempel og setter et særlig fokus på å gjøre algebraisk tenkning til en naturlig del av opplæringen allerede i de første skoleårene, ville det kunne være interessant å lage et rammeverk for kategorisering av oppgaver som var mer generelle og egnet til alle tilgjengelige læreverk. I hvilke grad de kategoriene som her er brukt, er egnet i den forbindelse vites ikke, men deres evne til å favne om sentrale deler av algebraisk tenkning og lage skiller mellom dem, tror jeg kan være til hjelp dersom mer universale kategorier skal lages. Det er også mulig at nye kategorier som fanger opp oppgavetyper som her ikke er representert, vil være naturlig å ha med. For å kunne lage et slikt rammeverk, er det nødvendig å se på oppgavene for alle de andre læreverkene som er tilgjengelige.

Andre sider ved dette som kan være interessante å utforske videre, er hvordan mulighetene for algebraisk tenkning er på andre årstrinn. Hvordan står det for eksempel til i læreverkene for ungdomsskolen? Er graden av algebraisk tenkning større der i de kapitlene som ikke omhandler algebra? At innslagene av variabler og ukjente blir større i de ulike matematiske emnene er overveiende sannsynlig, men om bruken av likhetstegnet som relasjonstegn er vesentlig mer fremtredende eller ikke, ville være interessant å se nærmere på. Etterhvert som læreverket Matematikk utvides i omfang, og kanskje også blir et læreverk brukt i ungdomsskolen, ville det være særlig interessant å gjøre en sammenligning av læreverk på disse alderstrinnene.

En annen mulighet, er å se på læreverk fra ulike land, og sammenligne dem med henblikk på hvor sterkt fokus det er på algebraisk tenkning. Jeg tenker da særlig på USA som her hatt denne problematikken på agendaen i mange år (Carraher & Schliemann, 2007).

Ettersom utgangspunktet mitt var et ønske om bedre resultater for elevene, er det naturlig å tenke at en studie av hvordan det går med elevene som undervises med læreverket Matematikk gjør det i tiden fremover. Hadde de gode resultatene på nasjonale prøver til elevene som begynte å bruke det russiske læreverket med selve læreverket å gjøre, eller var det mer en effekt av andre årsaker. Dersom de gode resultatene fortsetter å komme med nye elever og andre lærere på andre skoler, er dette i så fall interessant å se nærmere på.

7 Bibliografi

Algebra. (2017). I *Store norske leksikon*. Hentet fra https://snl.no/algebra

Alseth, B., Arnås, A. C., Kirkegaard, H., & Røsseland, M. (2011a). *Multi: Grunnbok 2a* (2. utg.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Arnås, A. C., Kirkegaard, H., & Røsseland, M. (2011b). *Multi: Grunnbok 2b* (2. utg.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Alseth, B., Arnås, A. C., Kirkegaard, H., & Røsseland, M. (2011c). *Multi: Lærerens bok 2b* (2. utg.). Oslo: Gyldendal undervisning.

Bachmann, K. E. (2004). Læreboken i reformtider – et verktøy for endring? I G. Imsen, *Det ustyrlige klasserommet. Om styring, samarbeid og læringsmiljø i grunnskolen.* Oslo: Universitetsforlaget.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006a). *Grunntall 2a: Matematikk for barnetrinnet.* Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2006b). *Grunntall 2b: Matematikk for barnetrinnet.* Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bakke, B., & Bakke, I. N. (2011). *Grunntall: Matematikk for barnetrinnet: Ressursperm 2ab* (2. utg.). Drammen: Elektronisk undervisningsforlag.

Bass, H. (1998). *Algebra with Integrity and Reality.* New York: Columbia University.

Bergem, O., Goodchild, S., Henriksen, E., Kolstø, S., Nortvedt, G., Reikerås, E., & Bøe, M. (2015, 01). Hentet 03 10, 2017 fra Realfag - relevente - engasjernede - attraktive - lærerike. Rapport fra Eksepertgruppa for realfagene: http://www.naturfagsenteret.no/binfil/download2.php?tid=2101889

Blank, N., Melhus, K., Tveit, C., & Moe, G. (2014). Utviklende opplæring i matematikk. *Utdanning*. Hentet fra https://user-nc1yu2a.cld.bz/Utdanning-nr-13-2014#50/z

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The Development of children´s algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algera intervention in third grade. *Jourmal for research in mathematics edjucation*, 46(1), 39-87.

Bratholm, B. (2001). *Godkjenningsordningen for lærebøker 1889- 2001, en historisk gjennomgang.* Hentet 03 14, 2017 fra http://www-bib.hive.no/tekster/hveskrift/notat/2001-05/not5-2001-02.html

Brekke, G. (2002). *Kartlegging av matematikkforståelse - Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk.* Oslo: Læringssenteret.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. I F. K. Lester, (Red). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. (s. 669-706) Charlotte, N.C.: Information Age:

Cohen, L. M. (2007). *Research methods in education.* Hentet 03 23, 2017 fra https://pdfs.semanticscholar.org/1233/be4b0bef75972fd084b5916ce7ca1a63e089.pdf

Daniels, H. (2005). *An introduction to Vygotsky (2. utg.).* New York: Routledge.

Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (2012). Barns forståelse av ekvivalens: et grunnlag for algebra. *Artikkelsamling matematikkvansker. Læringsnettverk i matematikkvansker for skoler og PP-tjeneste i Trøndelag 2011-12*: Hentet fra http://www.acm5.com/kompendier/artikkelsamling-matematikkvansker.pdf

Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. I A. C. Porter, & A. Gamoran, *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement* (s. 231-266). Washington, DC: National Academy Press.

Grønmo, L., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H., & Borge, I. (2012). *Framgang, men lang fram. Norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMMS 2011.* Oslo: Akademia forlag.

Gyldendal Undervisning. (u. d.). *Multi Matematikk 1-7.* Hentet 3. februar 2017 fra http://www.gyldendal.no/grs/Multi

Hellevik, O. (1994). *Forskningsmetode i sosiologi og statsvitenskap* (5. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mayhematics*(27), s 59-78.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. I F. K. Lester Jr. (Red.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (s. 371-404)**.** Charlotte, N.C.: Information Age

Johansen, E. B. (1999). *Lærebokkunnskap – innføring i sjanger og bruk.* Oslo: Tano Aschehoug.

Kieran, C. (1981, 04 03). *Concepts associated with the equality symbol.* Hentet 2017 fra https://oak.ucc.nau.edu/smg224/401pdfs/algebrareadings/kieran1.pdf

Lamis. (2017, 02 21). *lamis.no*. Hentet fra http://ungeabel.lamis.no

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009, 04 16). *Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division.* Hentet 04 9, 2017 fra Springer Link https://link-springer-com.galanga.hib.no/article/10.1007/s11858-009-0177-5

Likhetstegn. (2017). I *Store norske leksikon*. Hentet fra https://snl.no/likhetstegn

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. I H. C. K. Stacey, *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th icmi study* (ss. 47-70). Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., & I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). (1996). *Expressing generality and roots of algenbra.* Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Matematikklandet. (2017). Hentet 03 10, 2017 fra Innovasjonspris til Sandnes kommune for satsing på russisk matematikk: http://matematikklandet.no/innovasjonspris-til-sandnes-kommune-for-satsing-pa-russisk-matematikk/

McDonnell, L. (1995). *Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. Educational Evaluation and Policy Analysis.* Hentet 03 21, 2017 fra http://www.jstor.org.galanga.hib.no/stable/1164509?seq=1#page_scan_tab_contents

Melhus, K. (2015a). *Matematikk: Grunnbok 2a.* Kirkenes: Barenstsforlag.

Melhus, K. (2015b). *Matematikk: Grunnbok 2b.* Kirkenes: Barenstforlag.

Melhus, K. (2015c). *Matematikk: Lærerveiledning 2a.* Kirkenes: Barentsforlag.

Melhus, K. (2015d). Å stimulere barns evne til å tenke. *Tangenten*(2), ss. 13-16.

Moe, G., & Moe, S. (2016). *Utviklende opplæring i matematikk – utfordringer for læreren.* Hentet 03 10, 2017 fra Bedre skole: https://www.utdanningsforbundet.no/upload/Tidsskrifter/Bedre%20Skole/BS_4_2016/BedreSkole-0416-WEB_Moe_og_Moe.pdf

NESH. (2016, 04 27). *etikkom.no*. Hentet 03 07, 2017 fra https://www.etikkom.no/forskningsetiske-retningslinjer/Samfunnsvitenskap-jus-og-humaniora/

Prediger, S. (2010). How to Develop Mathematics for Teaching and for Understanding: The Case of the Meanings of the Equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), ss. 73-93.

Radford, J. (1996). Hentet 03 29, 2017 fra Some reflections on teaching algebra through generalization: https://www.researchgate.net/publication/291245418_Some_Reflections_on_Teaching_Algebra_through_Generalization

RAND Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: toward a strategic research and development program in mathematics education.* Santa Monica, CA: RAND.

Silverman, D. (2011). *Interpreting Qualitative Data.* London: Sage.

Sivertsen, A. (2013, 01 17). *Lærer matte av russerne*. Hentet 03 02, 2016 fra Oljedirektoratet: http://www.npd.no/Publikasjoner/Norsk-sokkel/Nr3-2012/Larer-matte-av-russerne/

Sjøberg, S. (1998). *Jean Piaget: Forstått og misforstått? -- Brukt og misbrukt? Nordisk pedagogikk(2), 108-117.*

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? – An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 133–162

Thagaard, T. (2003). *Systematikk og innlevelse. En innføring i kvalitativ metode (2. Utgave).* Bergen: Fagbokforlaget.

Thagaard, T. (2009). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode.* Bergen: Fagbokforlaget.

Kunnskapsdepartementet. (2014). *Kunnskapsløftet.* Oslo: Kunnskapsdepartementet. Hentet fra https://www.udir.no/kl06/MAT1-04

Valenta, A., Nosrati, M., Åsenhus, R., & Wæge, K. (2016, 11 17). *Skisse av den "ideelle læreplan i matematikk".* Hentet 11 17, 2016 fra https://nettsteder.regjeringen.no/fremtidensskole/files/2014/05/Skisse-av-den-ideelle-læreplanen-i-matematikk.pdf

Van de Walle, J. A. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics, Teaching Developmentally* (8. utg.). Boston: Pearson.

Weber, R. (1990). *Basic Content Analysis (2. utgave).* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Zankov, L. V. (1977). *Teaching and development: A Soviet investigation.* White Plains, New York: M.E.Sharpe.

8 Vedlegg

8.1 Vedlegg 1: Excel-ark

I dette vedlegget vises det et eksempel på hvordan datamaterialet er kategorisert og organisert i et Excel-ark.

Vedlegg 1 - Eksempel på Excel-ark

Læreverk	Bok	Oppg.	Kompetansemål	Algebraisk tenkning	Bruk av likhetstegn
Multi	2 b	84,0	Tall	GRU	Operasjonell, eks
Multi	2 b	85,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	86,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	87,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	88,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	89,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	90,0	Tall	GRU	Operasjonell, impl
Multi	2 b	91,0	Tall	GRU	Operasjonell, impl
Multi	2 b	92,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	92,1	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	93,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	94,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	94,1	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	95,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	96,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	96,1	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	97,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	81,1	Tall	GRU	Operasjonell, impl
Multi	2 b	82,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	83,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	83,1	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	84,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	85,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp
Multi	2 b	86,0	Tall	GRU	Operasjonell, eksp

8.2 Vedlegg 2: Veiledning til kategoriseringen

8.2.1 Algebraisk tenkning

8.2.1.1 GEN

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

  - partall
  - oddetall
  - lag tall av siffer
  - utvidet form, pga. det er en forløper til å kunne regne mellom ulike tallsystem
  - 52 + 4 = 54 + 2
  - assosiative lov 6 + (4 + 3)
  - 9 + 1 = 1 + 9
  - 5 + 5 = 10 da er 5 (+1) + 5 = 10 (+1)
  - regnerekkefølge med parentes
  - regnefortellinger med mangler, jf. variabler/ukjente
  - relasjon mellom addisjon og subtraksjon, 1 + 2 = _ og 3 – 2 = _
  - relasjon mellom addisjon og subtraksjon ved tall-venner
  - relasjoner mellom regnearter
  - omregning mellom regnearter
- refleksjonsoppgaver, løsningsmetoden er ikke gitt i oppgaven, unntaket er regulære tekstoppgaver hvor løsningsmodellen følger primærformlene inkl. sammensatte oppgaver
- sammenligne
- bytt ut ledd
- utforsking
- analyser
- vurder
- begrunn
- vanskelighetsgrad
- generaliseringer, hvis 5 + 5 = 10 så er summen av 5 + 6 én mer

8.2.1.2 LOU

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- < > = ulikheter/likheter, sett inn tegn 6 + 2…9, (ikke tall mot tall)
- sanne/usanne ulikheter
- ting på vektskål
- hva er likt og ulikt på bildet
- symmetri
- del i grupper, eks linjer og buer, eller likheter
- forskjeller og likheter
- sammenlign
- skriv likheter og ulikheter
- sett inn siffer slik at ulikhetene blir sanne
- lag like oppgaver

8.2.1.3 MØN

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- mønster i uttrykk
- tallmønster- stigende, 10 større enn, 20, 25, 30, …
- trekanttall 1, 3, 6,
- 2, 4, 6 jf. partall
- viderefør mønster
- utforske mønster ved å endre plassverdier
- addisjonstabeller
- multiplikasjonstabell
- figursymmetri
- kombinatorikk

8.2.1.4 ALG

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- ligninger med en ukjent
- symboler for variabler, men ikke O for omkrets (forstått brukt som forkortelse for omkrets)

8.2.1.5 GRU

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- skriv tall
- tallinje
- nabotall
- tallrepresentasjon
- gjett antall og tell
- telle, hvor mange er det?
- ordinaltall dato
- tall, tellestreker, lage eller lese av diagram
- tegn strek etter tall
- finne det største tallet, 3 < 5 og like tall
- hvilke to delmengder et lite antall (opp til 10) kan bestå av, 8 = _ + _ og _ + _
- skriv tall som er 2 større og 2 mindre
- regn ut-oppgaver på primærform
    - a + b = _
    - a + b + c =_
    - a - b = _
- addisjon og subtraksjon på tallinje
- lag, tegn eller fortell en basal regnefortelling (a + b = c eller a – b = c)
- lag oppgaver i addisjon og subtraksjon
- tegn øyne på terninger
- tall-venner
- dobling og halvering - forløpere til multiplikasjon og divisjon
- løse tekstoppgaver (a + b = _ eller a – b = _)
- åpen setning, 3 + _ = 5 (plassert her pga. at oppg. forstås som en øving i basal aritmetikk og ikke primært som en forberedelse til ligning med en ukjent)
- sett inn regnetegn, 3_4 = 7, 6_3_4 = 7 (plassert her pga. at oppg. forstås som en øving i å forstå basal aritmetikk)
- regulære tekstoppgaver hvor løsningsmodellen følger primærformlene inkl. sammensatte oppgaver
- er dette en tekstoppgave?
- del et tall i tiere og enere
- bruk av tier-venner, tall-venner ved tier-overgang og tier-søyler
- tall-venner til bruk i addisjon og subtraksjon 23 -5 (5 deles i 3 og 2)
- 9 + 7 = 10 + 6 = 16
- addisjon og subtraksjon med tier-søyler

    - tier-venner
    - tall-venner opp til ti, eks. 4 = _ + _
    - lag tiere og finn det andre tallet
    - hvor mange tiere og enere
    - tegn tiere og enere
    - lag en tier og regn ut, 9 + 4 = 10 + 3 = 13
    - del opp i tiere og enere og regn ut, 13 + 4 = 10 + 3 + 4 = 10 + 7 = 17
    - fortsett tallmønster: 1, 2, 3, 4 eller 14, 15 eller baklengs 7, 6, 5, …
    - mønster i tier-venner: 1 + 9   2 + 8   3 + 7
    - tall skal skrives i stigende rekkefølge 8, 10, 15,
    - klokken: ord og visere, halv og hel

8.2.1.6 n/a – algebraisk tenkning

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- finn linjene som kan skjære hverandre
- hvilken type vinkel er vinkel ABC?

8.2.2 Bruk av likhetstegnet

8.2.2.1 OL

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- a + b = _
- a * b = _
- oppgaver hvor tall-venner og tier-venner brukes til å utføre operasjoner
    - lag en tier og regn ut, 9 + 4 = 10 + 3 = 13
    - del opp i tiere og enere og regn ut, 13 + 4 = 10 + 3 + 4 = 10 +7 = 17

8.2.2.2 RL

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- a + _ = c
- a - _ = c

- a _ b = c
- a = _ + _

8.2.2.3 n/a - likhetstegnet

Eksempler på oppgavetyper som er lagt til denne kategorien:

- tell et antall
- fargelegg et antall
- skriv tall
- hvilke tall er størst?
- skriv i stigende rekkefølge
- hvor mye er klokken?