Høgskolen i Bergen

Masteravhandling

M120UND509

Predefinert informasjon

Startdato:	12-05-2016 17:06	**Termin:**	2016 VÅR
Avslutningsdato:	18-05-2016 12:00	**Karakterform:**	Norsk 6-trinnsskala (A-F)
SIS-kode:	M120UND509 1 MG	**Studiepoeng:**	45
Eksamensform:	Masteravhandling		
Intern sensor:	Kacerja Suela		

Student

Navn:	Tonje Rusten Hauge
Kandidatnr.:	111
HiB-Id:	h135118@hib.no

Informasjon fra deltaker

Jeg godkjenner avtalen om tilgjengeliggjøring av masteroppgaven min i BORA:	Valgt

Begrepssammenhenger knyttet til areal
– en kvalitativ studie av seks elevers arealforståelse

Conceptual connections related to area measurement – a qualitative study of six students` area understanding

Tonje Rusten Hauge

Master i undervisningsvitenskap,

med fordypning i matematikk fagdidaktikk

Avdeling for lærerutdanning

Innleveringsdato: 18.05.2016

Forord

Når dette forordet blir skrevet er det rart å tenke på at masteroppgaven straks er levert. Det har vært en utrolig spennende og lærerik prosess, hvor en trygt kan si at det både har vært oppturer og nedturer. Én ting er likevel sikkert: både oppturene og nedturene har gitt motivasjon til å stå på videre, og til å møte utfordringene underveis.

Selv om masteroppgaven er mitt arbeid, er det flere som har bidratt til at det ferdige produktet er blitt som det er blitt. Spesielt har veilederne mine, Tamsin Meaney og Rune Herheim, stilt gode, kritiske spørsmål, men også vist interesse og vist at de har hatt troa på arbeidet mitt. Takk for at dere bidro til å sette i gang så mange tankeprosesser, og for at dere motiverte meg til å stå på med oppgaven. Det har betydd mye å bli veiledet av dere, og jeg setter stor pris på samarbeidet vi har hatt!

Takk til Mona Røsseland for at du tok meg med i forskningsprosjektet ditt, og at du introduserte meg for variasjonsteori. Du er en stor inspirator, og det var en fryd å få delta som medforsker. Også en stor takk til lærerne og elevene som slapp oss inn i klasserommet.

Gjengen på lesesalen har hatt stor betydning for motivasjon og inspirasjon. Prosessen hadde ikke vært den samme uten dere!

Familie og venner har støttet og hatt troa. Takk for at dere har heiet på meg helt inn til mål. En ekstra takk til Tomas som også har stilt kritiske spørsmål, og som har motivert meg til å stå på.

Tonje Rusten Hauge

Bergen, mai 2016

Sammendrag

I studien, «Begrepssammenhenger knyttet til areal – en kvalitativ studie av seks elevers arealforståelse», ble følgende problemstilling undersøkt: Hvilke begrepssammenhenger knyttet til forståelse av areal finner man hos høytpresterende elever på 5.trinn? Semistrukturerte intervju basert på en ettertest ble brukt for å finne svar på dette spørsmålet. Måling er et matematisk emne hvor elever generelt presterer lavt, og ved å se på hva som ligger til grunn for deres forståelser av det avgrensede temaet areal, vil det kunne føre til en bevisstgjøring som kan bidra til å støtte læringen også hos andre elever. Intervjuene gjorde at elevers stemmer kom tydelig frem, og at det kunne stilles spørsmål for å få frem forståelsen.

Variasjonsteori ble brukt som et pedagogisk verktøy i planlegging og gjennomføring av undervisning. Det har påvirket måten å se arealbegrepet på i denne studien, ved at faktorer som blir sett på som kritiske i elevers læring blir presentert som del av det teoretiske rammeverket. Areal og geometrisk tenkning har blitt integrert i en egenkonstruert tabell med fem nivåer, inspirert av Pierre M. van Hiele sitt arbeid. Sammen med en egenkonstruert figur bestående av puslebrikker, har den bidratt til å fremheve sammenhenger mellom faktorer på ulike nivå. Inspirasjon er også hentet fra blant annet Hiebert og Lefevre (1986) for å kunne beskrive hva som ligger til grunn i forståelsene, og har slik vært med på å berike diskusjonen rundt hvilke begrepssammenhenger som finnes.

Studien viser at elevene refererer til ulike faktorer ved arealbegrepet, og at begrepssammenhenger i forståelsene de viser kan knyttes til flere nivåer. I noen situasjoner er forståelsen basert på prosedyrer og enkeltfaktorer, mens i andre situasjoner blir det vist til struktur og den faktiske meningen ved arealbegrepet. Samtlige elever i denne studien evnet å løse en oppgave hvor helhetlig forståelse for arealbegrepet måtte ligge til grunn. Geometrisk tenkning viste seg som en viktig del av problemløsningsprosessen, hvilket også fremkom i løsningen av ulike oppgaver knyttet til areal. Studien kan relateres til tidligere litteratur, hvor det blant annet ble sett på hvordan geometri integrert i arealundervisningen bedret forståelsen for areal, samt at forståelse for areal innebar at en kunne bevege seg mellom en dekke- og formeltilnærming. Den skiller seg likevel fra tidligere forskning ved at geometri ikke hadde fokus i undervisningen, men at geometrisk tenkning får en sentral plass når areal og geometri integreres i tabellen og figuren inspirert av van Hiele, og ved at variasjonsteori påvirker synet på læring.

Abstract

In the study «Conceptual connections related to area measurement – a qualitative study of six students' area understanding», the following research question was the main focus: Which conceptual connections related to the understanding of area measurement are used by high achieving students in 5th grade? Semi-structured interviews based on a post-test were used to find the answer on this question. Measurement is a mathematical subject where students generally perform at a low level in Norway. By investigating high achieving students' understanding of area measurement, other students' education can also be improved. The interviews made the students thinking clearer because questions could be asked about their understanding of how they arrived at their answers.

Variation theory was used as a pedagogical tool in the planning and teaching. It has influenced how the area conception in this study was considered, and the critical aspects presented to the students. In order to understand the students' thinking, area and geometrical ideas have been integrated in a table consisting of five levels, based on the work of Pierre M. van Hiele. Along with a figure consisting of puzzle pieces, it has been used to highlight the connections between critical aspects at different levels. Hiebert and Lefevre (1986) informed the description of the understanding about conceptual connections.

The study shows that students refer to different aspects of the area conception, and that conceptual connections in their understandings are seen at multiple levels. The understanding may in certain situations be based on procedures and single critical aspects, while in other situations they refer to both structure and meaning of the area conception. Each student in this study managed to solve a task where complete understanding of the area conception was required. Geometrical thinking was showed as an important part of the problem solving process, connected to area measurement. The study can be linked to earlier literature, where geometry integrated in the teaching of area measurement lead to a greater understanding for the area measurement, and also by moving between a unit-covering concept and a multiplicative approach. It differs however from earlier research in the way the teaching only were focusing on area measurement, and that geometrical thinking has a central place when area and geometry are integrated in the table and figure inspired by van Hiele, and where variation theory affects the view of learning.

Innholdsfortegnelse

Oversikt over figurer og tabeller

1 Innledning

1.1 Bakgrunn

I forbindelse med praksis i skolen møtte jeg en elev som fulgte matematikkundervisningen som gikk to trinn over sitt eget. Ved å bli kjent med tiltak for å tilfredsstille denne elevens behov for matematikk på et høyere nivå, fant jeg mitt interessefelt. Jeg skjønte at elever som presterer høyt i matematikk måtte få en sterkere stemme. Da jeg fikk muligheten til å delta i et prosjekt sammen med en doktorgradsstipendiat, tre lærere og medstudenter, ble dette min inngang til å forske på høytpresterende elever. Kriteriet for deltakelsen var å ha fokus på variasjonsteori brukt på det matematiske emnet *måling*, og fokuset videre i denne studien vil være på *areal*.

Gjennom min utdannelse på Høgskolen i Bergen har jeg inntrykk av at elever med ulike typer vansker eller en svakere forståelse i matematikkfaget har fått mest fokus. Dette er ofte begrunnet med opplæringsloven § 1-3, der det står at tilpasset opplæring skal være «særleg retta mot elevar med svak dugleik i lesing og rekning» (Opplæringslova, 2009, §1-3)[1]. Paragrafen gjelder for alle elever uansett nivå, ved at «Opplæringa skal tilpassast evnene og føresetnadene hjå den enkelte eleven, lærlingen og lærekandidaten» (Opplæringslova, 2009, §1-3). Jeg vil derfor vie denne masteroppgaven til elever med høy prestasjon i faget for selv å bli mer bevisst på hvordan disse elevene forstår det matematiske emnet areal, samt å bidra til forskning på området.

Det er tidligere gjort ulike undersøkelser knyttet til areal. Disse handler blant annet om hvilke strategier elever bruker, misoppfattelser, hvordan tallberegninger blir integrert i arealmålingen og hvordan fokus på todimensjonal geometri i sammenheng med areal virker inn på læringen. I en studie utført av Huang og Witz (2011) ble det sett på hvilken effekt arbeid med tallberegning knyttet til areal hadde, kontra en forening mellom todimensjonal geometri og areal. Ved å bruke *quasi experimental design* med fortest, instruksjoner, ettertest og intervju, hvor elever på 4.trinn var deltakende, undersøkte de hvordan ulike tilnærminger virket inn på forståelsen. Resultatene de viste til, tyder på at å integrere todimensjonal geometri i arealmåling vil bidra til å fremme en bredere forståelse av hvordan formler fungerer (Huang & Witz, 2011). Huang og Witz (2011) viste også i diskusjonen av resultatene til at elever

[1] https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_1#KAPITTEL_1

brukte geometriske betraktninger, som kongruens og egenskaper, oppdeling og omorganisering, i arbeidet med areal, og at dette burde være en del av grunnlaget for å bygge opp forståelse for formler. De poengterte at «The findings showed that the curriculum incorporating 2-D geometry motions and area measurement numerical calculations (GMAM) led to an improvement in mathematical judgments and explanations which require conceptual understanding of area measurement […]" (Huang & Witz, 2011, s. 10). De viste også til at geometriske operasjoner, som kongruens og omorganisering, knyttet til areal påvirket forståelsen av hvorfor- og hvordan- aspektet ved bruk av formler på en god måte, og at en både trengte kunnskap om formler og hvordan de fungerer når løsninger skulle begrunnes.

Hirstein, Lamb, og Osborne (1978) så i sin undersøkelse på hvilke misoppfattelser som oppstår i møtet med areal, og viste til areal som en måte å fremstille tall og operasjoner knyttet til tall på. Både elever fra 3.-, 4.-, 5.- og 6.trinn deltok i studien. Hypotesen var at «[…] without an operational feel for partioning and recombining, children find it very difficult to associate the unit-covering concept of area and the multiplicative approach» (Hirstein et al., 1978, s. 12). I artikkelen beskriver de at en forståelse for areal, innebærer å kunne bevege seg mellom en dekketilnærming og formeltilnærming, og at elevene som evnet dette også viste forståelse for å dele opp og omorganisere figurer. Kordaki og Potari (1998) viser blant annet til noe av det samme når de skriver om strategier elever på 6.trinn tar i bruk. I beregning av areal av rektangulære figurer ble multiplikasjon i størst grad brukt som strategi, mens irregulære figurer først ble delt inn i kjente geometriske figurer før arealet kunne beregnes. Undersøkelsen viste også til at dersom elevene ikke kunne bruke en formel til å regne ut, ble elementer som gjentakelse av måleenhet, arealkonservering og enhet for måling tatt i bruk (Kordaki & Potari, 1998).

1.2 Fokus

Begrunnelsen for valg av måling som matematisk tema er at dette er emnet der elevene presterer dårligst, både i Norge og internasjonalt (Thompson & Preston, 2004). Å få innsikt i hva som gjør at noen elever likevel presterer godt, kan være med på å støtte læringen også for andre elever.

På bakgrunn av lave resultater innenfor måling, skulle variasjonsteori testes ut som et verktøy i planlegging og gjennomføring av undervisningen mens prosjektet foregikk. Variasjonsteori har sine røtter i fenomenografi, hvor undersøkelsene fokuserer på variasjoner i oppfattelsene av et fenomen. Fokuset for de variasjonsteoretiske undersøkelsene er å se på hva som er mulig å oppfatte for eleven (Wernberg, 2009). Andre begreper kan brukes som synonymer til det å oppfatte, og noen av de som vil bli brukt videre er «å skille ut» og «å forstå».

Variasjonsteori kan ses på som et pedagogisk verktøy, der målet er å skape variasjoner i det som skal læres. Det baserer seg på at elever og lærer ser et matematisk emne på ulike måter, og ved hjelp av variasjon er målet at alle skal få mulighet til å skille ut det som er kritisk for deres læring (Marton & Pang, 1999). Ulike mønster står sentralt for å skape variasjon, og Lo (2014, s. 8) påpekte at «Den undervisningsaspekt som variationsteorin identificerar som nyckeln till bättre lärande är mønstret av variation och konstans bland exempeln […]». Mønsteret for variasjon kommer jeg tilbake til under variasjonsteoretiske prinsipper senere i dette kapittelet.

Siden studien baserer seg på forståelse, kan en knytte elementer fra variasjonsteori til ulike typer kunnskap. James Hiebert og Richard Skemp er blant forskere som har utarbeidet begreper for å beskrive typer kunnskap og forståelse. Hiebert og Lefevre (1986) diskuterte begrepsparet *procedural* og *conceptual understanding*, hva som kjennetegner begrepene hver for seg, men også forholdet mellom dem. Den norske oversettelsen vil beholde betydningen i begrepene slik Hiebert og Lefevre (1986) bruker dem, og vil heretter bli henvist til som *prosedyrekunnskap* og *kunnskap om begrepsstrukturer*. Disse begrepene skal ikke plassere elevene, men vil senere kunne være med på å beskrive hva elevenes forståelser for areal innebærer.

Prosedyrekunnskap er ifølge Hiebert og Lefevre (1986) delt inn i formelt matematikkspråk og algoritmer og regler, og handler om å ta i bruk formler og regler uten å vite hvorfor. Det kan for eksempel være å bruke formelen for areal av rektangel, uten å egentlig vite hvorfor eller hvordan formelen egentlig fungerer. Hiebert og Lefevre (1986) gjør oppmerksom på at vi i forbindelse med prosedyrekunnskap snakker om overflatisk bevissthet. Denne overflatiske bevisstheten vil fungere som en memorert veiviser for å komme frem til et svar, uten at kunnskapen blir brukt meningsfullt.

Mens prosedyrekunnskap karakteriseres som kunnskap om å gjennomføre prosedyrer, vil nøkkelord for kunnskap om begrepsstrukturer være forhold eller sammenhenger. Vi kan her snakke om nettverk av kunnskap, hvor en både legger mening i kunnskapsnettene hver for seg, men også evner å koble dem sammen. Areal kan for eksempel bli sett på som et slikt nettverk. Karakteristisk for kunnskap om begrepsstrukturer er at den ikke fungerer isolert, men innebærer sammenhenger innenfor nettverket, eller mellom ulike nettverk (Hiebert & Lefevre, 1986). En må vite hvordan kunnskapen kan brukes og hvorfor. *Dybdelæring* kan berike forståelsen av kunnskap om begrepsstrukturer. «Dybdelæring innebærer at elevene bruker sin evne til å analysere, løse problemer og reflektere over egen læring til å konstruere helhetlig og varig forståelse» (Kunnskapsdepartementet, 2014)[2]. Denne helhetlige og varige forståelsen ser jeg som karakteristisk for elever som presterer høyt. Likevel viser Hiebert og Lefevre (1986) til at både prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer må være på plass for å ha en helhetlig forståelse. Det innebærer for eksempel at elevene på en meningsfull måte kan ta i bruk prosedyrer.

Elever som presterer høyt, og ønsket om å bli mer bevisst på hvordan de forstår et matematisk emne, ble nevnt ovenfor. Det finnes mange måter å definere høy prestasjon i matematikk på, men i denne studien vil jeg se det i sammenheng med prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer. Å være høytpresterende i matematikk kan for eksempel handle om å se sammenheng mellom og ta i bruk ulike matematiske emner, og å bruke kunnskap om disse meningsfullt. Det kan blant annet være å se sammenhenger mellom geometrikunnskap og kunnskap om areal, slik det ble nevnt i forbindelse med Huang og Witz (2011) sin undersøkelse. Ved å se sammenhenger innenfor ulike matematiske emner, vil en kunne velge strategier for å komme frem til svaret ut fra hva som er mest hensiktsmessig. Hiebert og Lefevre (1986) beskrev det å være kompetent i matematikk som at en kjenner til begreper eller komponenter ved matematikken, symboler og prosedyrer, i tillegg til å vite hvordan disse henger sammen. Denne måten å se kompetente matematikere på kan være en inspirasjon for måten å snakke om høytpresterende elever i skolen på. Jeg ser det som å ha et bredere syn på matematikken, og ikke fokusere på emnene hver for seg, men i sammenheng.

1.3 Presentasjon av problemstilling

Når det er slik at elever, både nasjonalt og internasjonalt, scorer lavt på emnet måling, er det interessant å få innsikt i hvilken forståelse som ligger til grunn. Med eget behov for mer kunnskap om høytpresterende elever, vil denne studien ta for seg hvordan nettopp disse elevene forstår emnet. Jeg er opptatt av at elever selv skal se sammenhenger mellom matematiske emner, og ikke bare basere kunnskapen på memorerte prosedyrer. Hypotesen på

[2] https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-2014-7/id766593/?ch=4

forhånd var at de deltakende elevene sannsynligvis hadde forstått en hel del av arealbegrepet etter undervisningen, og at de i ulik grad ville være i stand til å sette ord på hvordan de hadde forstått emnet. Om dette stemte kunne det bidra med nyttig informasjon om sentrale faktorer innenfor areal, hvordan elevene oppfattet disse og hvordan de tok dem i bruk. Denne informasjonen kan løfte frem hva som kan være problematisk også for disse elevene. Problemstillingen i denne masteroppgaven retter fokus mot hvilke begrepssammenhenger knyttet til forståelse av areal man finner hos høytpresterende elever i 5. klasse. Dette fokuset kan gi et nyttig bilde i skolekretsen, både for lærere, lærerutdannere og skolebyråkrater.

Geometrisk tenkning ser ut til å spille en viktig rolle i arbeidet med areal. Det kan for eksempel relateres til artikkelen til Kospentaris, Spyrou, og Lappas (2011), hvor de blant annet undersøkte hvilke strategier elever på videregående brukte i arbeid med geometriske oppgaver knyttet til arealkonservering. De poengterte at

> Comparisons between the areas of different figures based only on visual estimations seem to be quite unreliable. Thus, we argue that the visualization factor and its interplay with formal geometrical knowledge appear as an aspect of the research of considerable interest. (Kospentaris et al., 2011, s. 109)

Disse betraktningene var noe av grunnlaget for undersøkelsen som Kospentaris et al. (2011) gjorde. Arealet kan alene, som sitatet viser, være en lite pålitelig kilde å forankre begrunnelser i når det gjelder å sammenligne figurers arealer. Figurer har geometriske egenskaper som kan være med på å beskrive arealene, og det kan dermed være interessant å se hvordan dette blir tatt i betraktning når elever møter ulike problemer knyttet til areal. I studien til Huang og Witz (2011) som ble nevnt ovenfor, innebar integreringen av todimensjonal geometri i arbeidet med areal at kunnskap om figurers egenskaper, kongruens og symmetri burde være en del av den grunnleggende forståelsen av arealbegrepet. Med bakgrunn fokuset som er presentert er problemstillingen formulert slik:

Hvilke begrepssammenhenger knyttet til forståelse av areal finner man hos høytpresterende elever i 5. klasse?

Med interesse for at elever skal se sammenhenger mellom og innenfor matematiske emner, ønsker jeg å løfte frem elevers stemmer og forståelser. Ordet begrepssammenhenger vil i denne studien bety at faktorer som inngår i arealbegrepet er koblet sammen. Målet er å identifisere dette i elevenes forklaringer knyttet til tester de har gjort på emnet etter endt undervisning. Som nevnt vil et matematisk emne kunne kobles til andre matematiske emner, og slik gi et mer helhetlig bilde i forståelsen. Kunnskap om figurers egenskaper vil blant annet være avgjørende i løsningen av flere problemer knyttet til areal, og det er derfor aktuelt å se på hvordan elevene tar i bruk denne kunnskapen i arbeid med areal. For å kunne undersøke begrepssammenhenger og for å spesifisere undersøkelsesområdet, har jeg utviklet tre forskningsspørsmål:

- *Hvordan er geometrisk tenkning relatert til elevers arbeid med areal?*
- *Hvordan kommer prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer til uttrykk?*
- *På hvilken måte kan variasjonsteori, som undervisningen baserer seg på, spille en rolle i å utvikle begrepssammenhenger?*

De tre forskningsspørsmålene er knyttet til de elevene som er deltakende i denne studien. Geometrisk tenkning har i noe tidligere forskning blitt sett i sammenheng med areal. Tidligere forskning viser at todimensjonal geometri blant annet kan ha positiv innvirkning på forståelsen for hvordan en formel fungerer. Siden denne studien tar utgangspunkt i begrepssammenhenger, er det interessant å se på hvordan elevene her også tar i bruk kunnskap om geometri og hvordan faktorer til dette emnet er relatert til areal. Det kan innebære å bruke geometrikunnskap til å hente inn nødvendig informasjon, eller som del av en strategi. For å kunne si noe om forståelsen er det nødvendig å se på hva som ligger til grunn, og hvordan denne forståelsen fremkommer. Begrepsparet, prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer, kan bidra til å beskrive dette, og kan slik berike diskusjonen om begrepssammenhenger som finnes i forståelsene. Spørsmålet om på hvilken måte variasjonsteori kan spille en rolle i å utvikle begrepssammenhenger er knyttet til rammeverket for undervisningen. Siden undervisningen var basert på variasjonsteori, og siden testene legger opp til å sjekke om elevene skiller ut kritiske faktorer, kan det tenkes at dette rammeverket har hatt en påvirkning. Spesielt har det påvirket mitt syn på læring. Pedagogiske implikasjoner relatert til variasjonsteori vil dermed være nødvendig å gi en plass i diskusjonskapittelet.

Teori og modeller knyttet til problemstilling og forskningsspørsmål vil jeg komme tilbake til i kapittel 2, hvor det teoretiske grunnlaget har sin plass.

1.4 Syn på læring og forståelse

Problemstillingen for denne masteroppgaven søker innsikt i elevers forståelser, og et syn på læring og forståelse vil dermed være aktuelt å si noe om. Jeg velger her å plassere studien innenfor det konstruktivistiske paradigmet, og det vil bli redegjort for hvorfor sosialkonstruktivisme vil være en mer spesifikk plassering for denne studien. Ontologiske, epistemologiske og metodologiske begrunnelser vil være med på å redegjøre for dette.

Når det gjelder det ontologiske synet innenfor konstruktivisme, fremstår absolutte sannheter som ukjente, og individets perspektiv og konstruering av virkeligheten bli sett på som undersøkelsesobjekt (Hatch, 2002). Som problemstillingen etterspør, er begrepssammenhenger i elevers forståelser her undersøkelsesområdet. Begrepssammenhenger i elevers forståelser av areal er det interessante å få innsikt i, og elevers stemmer og måter å se areal på vil her være avgjørende for hvordan virkeligheten konstrueres. Variasjonsteori er brukt i undervisningen med tanken om at elever ser objekter på ulike måter, og deres ulike erfaringer kan dermed sies å påvirke måten å se noe på. Hatch (2002) påpekte også at det innenfor det konstruktivistiske paradigmet ikke bare er én, men flere sannheter som eksisterer. Dette har sin bakgrunn i at individets ståsted påvirker dets konstruksjon av virkeligheten.

Epistemologi handler om hva en kan vite, hvilken kunnskap en kan ha og hvordan kunnskap kan tilegnes. Konstruktivismen ser på kunnskap som symbolsk heller enn objektivt konstruert. Dette fordi individets oppfattelse av et objekt påvirker hvordan kunnskapen konstrueres. Sannheten eller virkeligheten er dermed det en aksepterer at det er (Hatch, 2002). Areal kan bli sett på som et nettverk av kunnskap, men kan likevel beskrives på forskjellige måter, alt etter hvem som ser det og hvilke faktorer som er oppfattet. Hver av elevene som deltar i denne studien beskriver ut fra sitt ståsted hvordan de har forstått emnet, og sammen kan disse beskrivelsene gi nyttig informasjon om begrepssammenhenger. Individuelle konstruksjoner av virkeligheten danner grunnlaget for kunnskapen som den konstruktivistiske forskeren ønsker å søke innsikt i (Hatch, 2002).

Kvalitativ undersøkelse med intervju og observasjoner i naturlige settinger er metoder for å rekonstruere individenes konstruksjoner når det gjelder deres forståelse av verden (Hatch, 2002), og med intervju vil elevenes stemmer og forståelser for arealbegrepet her kunne komme tydelig frem. Intervju vil være metoden som i hovedsak danner grunnlaget for datamaterialet og skal bidra til å besvare problemstillingen.

Jeg velger med dette konstruktivistiske synet å plassere meg mellom Piaget og hans måte å se kunnskap som individuelt konstruert, samt som utvikling i stadier, og Vygotskys tanker om proximal utviklingssone, samspill mellom individer og at læring er situert. I denne studien konstrueres kunnskap i fellesskap, men er basert på hver elevs forståelse av arealbegrepet. Felles læringsobjekt for undervisningen ble satt opp, og elevenes ulike erfaringer kommer til uttrykk. Alle stemmer er med på å danne det helhetlige bildet av læringsobjektet. Likevel har elevene, kall det ulike mestringer og mangler, som også gjør det til en individuell konstruksjon. Læring blir her ikke sett på som situert. Det blir lagt vekt på en fleksibel bruk av arealkunnskap og geometrisk tenkning, med mål om at kunnskapen som konstrueres er meningsfull i møtet med ulike problemer. Synet på læring og forståelse i denne studien er sosialkonstruktivistisk, hvor et felles læringsobjekt er utgangpunkt for læringen, men hvor individuell konstruksjon av kunnskap er med på å danne et bilde av virkeligheten. Denne virkeligheten blir en del av utgangspunktet for å kunne besvare problemstillingen.

1.5 Begrepsavklaring 1: Variasjonsteoretiske prinsipper

Variasjonsteori ble brukt som et verktøy for undervisningen, og er allerede sagt noe om. Jeg ser det nødvendig å presentere variasjonsteoretiske prinsipper, slik at det er mulig å få en bedre forståelse av rollen det pedagogiske verktøyet har hatt i planlegging og gjennomføring av undervisningen på emnet.

1.5.1 Læringsobjekt

Ved bruk av variasjonsteori er *læringsobjekt* en del av utgangspunktet for undervisningen. Læringsobjekt er det elevene skal lære, og det «[…] syftar på vad eleverna behöver lära sig för att uppnå de önskade lärandemålen" (Lo, 2014, s. 53). En kan forholde seg til læringsobjektet intensjonelt, iscenesatt og erfart. Det læringsobjektet som fokuseres på i undervisningen, kalles for det iscenesatte læringsobjektet, mens en i forkant av undervisningen også har en intensjon om hva læringsobjektet skal være, det planlagte læringsobjektet (Lo, 2014). For å knytte dette til areal, som i denne studien er det matematiske emnet, kan planlagte læringsobjekt fra en av undervisningsøktene i det større prosjektet være: «Forstå at areal er eit mål på flata inni figuren» og «Elevane skal bli kjent med dei ulike standariserte måleeiningane for areal: cm^2 -dm^{2-} m^2 – km^2»[3]. Det kan legges opp til at samme objekt fremstilles på flere måter for å imøtekomme elevenes ulike oppfatninger av

[3] Vedlegg 3: Planleggingsdokument for arealleksjon

læringsobjektene. Dette ble gjort ved å skape variasjon i de faktorene som vi ønsker at elevene skal skille ut.

1.5.2 Kritiske faktorer

Et læringsobjekt kan deles inn i faktorer som er kritiske for at elevene skal få en helhetlig forståelse av læringsobjektet (Runesson, 2006). Lo (2014, s. 37) forklarte at «Om vi vill att andra ska se ett objekt på exakt samma sätt som vi själva gör, mäste de också kunna fokusera på samma särdrag som vi gör». Ved hjelp av tidligere erfaringer, observasjoner og eventuelt en fortest i forkant av emnet, vil læreren kunne danne et bilde av hvilke faktorer (särdrag) som er kritiske for at elevene skal lære (Lo, 2014). Dermed har lærere en sentral rolle i planleggingen for hvilke faktorer som er kritiske og hvordan disse skal løftes frem. En ettertest vil på den andre siden kunne si noe om hvilke faktorer som er skilt ut. Lo (2014) argumenterte for at alle faktorene som er kritiske for læring må være skilt ut for at forståelsen skal være fullstendig. Det må også være en forståelse for koblingen mellom faktorene, og mellom faktorene og objektet. Slikt sett vil det være ulikt hvilke faktorer som er kritiske i hver enkelt elevs læring, noe som også vil bli trukket frem i denne studien.

1.5.3 Variasjonsmønstre

Kritiske faktorer løftes frem i undervisningen ved hjelp av variasjonsmønstre, slik at elever med ulike behov får mulighet til å skille ut disse (Runesson, 2006). Wernberg (2009) skrev i sin avhandling at å skille ut handler om at læringsobjektet fokuseres og skilles fra konteksten ellers, samtidig som at faktorer ved objektet skilles ut og relateres til hverandre og til helheten. Når enten én eller flere faktorer ved et objekt varieres og én eller flere faktorer holdes konstant, skapes det en mulighet for eleven til å skille ut den eller de faktorene som er variert (Fjereide & Skjervheim, 2012). Hvilke faktorer som skal varieres avhenger både av læringsobjekt, hvilke faktorer elevene har skilt ut og ikke, og hvor langt de er kommet i den komplekse tenkningen. Pang (2003) pekte på variasjonen som helt nødvendig for at den lærende skal kunne skille ut en faktor fra læringsobjektet. For å få til dette er fire variasjonsmønstre i et læringsobjekt trukket frem. *Kontrast, separasjon, generalisering* og *fusjon* er alle med på å gjøre det mulig for elevene å skille ut faktorer, og å gi en helhetlig forståelse av læringsobjektet. Det kan være vanskelig å sette et skille mellom disse begrepene, men det viktige her er det helhetlige samspillet de er en del av.

Kontrast dreier seg om å sette to objekter opp mot hverandre for å vise hva det er og hva det ikke er (Lo, 2014). Skal en forstå hva areal innebærer kan en dekke en flate og vise til det som areal, for så å sette det opp mot et innrammet område og vise at linjen rundt representerer omkretsen. Slik kan en oppnå at elevene skiller ut deler ved læringsobjektet. Denne utskillelsen kan lede til variasjonsmønsteret seperasjon. Seperasjon gjør at en holder fokus på én faktor som er kritisk for å oppfatte læringsobjektet. Det gir mulighet for å fokusere på og skille dem ut atskilt fra hverandre (Lo, 2014). I forbindelse med areal kan det innebære å oppdage at enheten for måling må være av samme størrelse, og å ha fokus på at disse enhetene må ligge tett i tett uten å overlappe.

En tredje form for variasjon er generalisering. Det går ut på å holde det som er sentralt for objektet konstant, mens andre faktorer varieres (Lo, 2014). For en firkant er det for eksempel de fire kantene som i hovedsak avgjør at det er en firkant, mens vinkler og sidelengder kan være ulik fra figur til figur. Målet er at elevene skal skille ut det som er felles for denne type figurer.

Variasjonsmønstrene som er nevnt er med på å dele opp læringsobjektet, og må på et tidspunkt knyttes sammen igjen til en helhet. Det er her fusjon kommer inn. Fusjon handler om å samle trådene og å variere flere faktorer ved objektet samtidig (Lo, 2014). Det innebærer at elevene allerede har skilt ut flere faktorer, og klarer å se sammenhengen mellom disse, og mellom disse og helheten, slik at et helhetlig bilde av læringsobjektet dannes. Måten å se læringsobjektet på vil på denne måten bli mer kompleks.

Det karakteristiske ved dette pedagogiske verktøyet er at læringsobjekt, kritiske faktorer og variasjonsmønstre er identifisert og systematisert. En kan også si at kunnskap om læringsobjekt og kritiske faktorer gjør det mulig å identifisere sammenhenger mellom faktorer, her ved arealbegrepet.

1.6 Begrepsavklaring 2: Prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer

Et læringsobjekt kan som nevnt bli oppfattet ulikt av elever, og dermed kan også kunnskapen uttrykkes på forskjellige måter. Hva forståelsene innebærer kan knyttes opp mot Hiebert og Lefevre (1986) og begrepene prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer.

Prosedyrekunnskap, slik det ble nevnt tidligere med å ta i bruk regler og formler uten noen mening bak, kan relateres til *instrumentell forståelse*. Skemp (1976) beskrev instrumentell forståelse som regler uten begrunnelse, og stilte spørsmålstegn ved om denne typen forståelse i det hele tatt kunne ansees som en type forståelse. Mellin-Olsen (2008, s. 22) la frem teser knyttet til barns læring, hvor han i en av disse formidlet at «Elevene har et fornuftsgrunnlag for læring, og dette fornuftsgrunnlaget er avgjørende for hvordan læringen foregår». Fornuftsgrunnlag handler i all hovedsak om hva som ligger til grunn for læringen. Elevenes læring har et *instrumentelt fornuftsgrunnlag* dersom svaret som skal produseres er i fokus og innholdet i oppgaven kommer i skyggen av dette (Mellin-Olsen, 2008). Slikt sett kan det instrumentelle fornuftsgrunnlaget også relateres til instrumentell forståelse og prosedyrekunnskap. Silver (1986) pekte på at prosedyrekunnskap må baseres på kunnskap om begrepsstrukturer, da et av formålene med denne kunnskapen er å bygge opp en støttende base for prosedyrene en skal utføre. På denne måten kan prosedyrene bli brukt mer meningsfullt.

Når det gjelder kunnskap om begrepsstruktur er dette tidligere knyttet til å se mening i og mellom nettverk av kunnskap. Et læringsobjekt kan også bli sett på som et nettverk, bestående av faktorer som er kritisk for å få en helhetlig forståelse av det. For å oppnå helhetlig forståelse blir det brukt variasjonsmønstre for å fokusere på ulike faktorer hver for seg, men også for å trekke linjer mellom og se dem i sammenheng. I denne studien kan arealkunnskap bli sett på som ett nettverk, hvilket også geometrisk tenkning eller geometrikunnskap kan. Hiebert og Lefevre (1986) understrekte at det er en forutsetning at en kan bevege seg frem og tilbake mellom kunnskapsnettene for å skjønne hvordan informasjonen er knyttet sammen. Prosedyrer kan brukes meningsfullt dersom kunnskapen som ligger til grunn er basert på kunnskap om begrepsstrutkurer. Det kan innebære å gi formelen for areal mening, og å kunne bruke den i kontekster hvor det ikke bare er lært at den skal brukes. Hiebert og Lefevre (1986, s. 14) poengterte at dette er selve nøkkelen for å bygge opp kunnskap om begrepsstrukturer: «The key is building a rich store of conceptual knowledge that covers a variety of task situations and, through its interconnections, becomes linked to a single, efficient procedure».

På samme måte som at prosedyrekunnskap og instrumentell forståelse ble sett i sammenheng, kan kunnskap om begrepsstrukturer relateres til *relasjonell forståelse*. Skemp (1976) baserte dette begrepet på forståelse for hvordan og hvorfor kunnskapen kan brukes. Mellin-Olsen (2008) så meningen med matematikken, eller det å være opptatt av selve innholdet i matematikken, som utgangspunkt for et annet fornuftsgrunnlag enn det instrumentelle, nemlig det *sosiale fornuftsgrunnlaget*. I stedet for at korrekt svar driver læringen, er det her selve kunnskapen en oppnår som er drivkraften.

Prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer kan bidra til å nyansere diskusjonen om begrepssammenhengene som finnes i elevene sin forståelse av areal. Mellin-Olsen (2008, s. 41) kom med et viktig forbehold i forhold til bruk av begrepene knyttet til ulike fornuftsgrunnlag: «Ettersom et fornuftsgrunnlag for læring dreier seg om et forhold mellom eleven og kunnskapene, kan vi bare registrere symptomer på det». Dette ser jeg også som gjeldene for prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer når det skal sies noe om hva som ligger til grunn for elevenes forståelser. Prosedyrekunnskap, slik det er beskrevet i avsnittene ovenfor, vil innebære å bruke formler eller gjøre beregninger, uten noen ytterligere mening bak. Kunnskap om begrepsstrukturer vil derimot innebære mening og sammenkobling av kunnskap, hvor hvordan- og hvorfor-aspektet kommer til uttrykk. Sammen med variasjonsteori, vil prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer være med på å holde den røde tråden gjennom oppgaven.

1.7 Oppgavens oppbygning

Videre i denne oppgaven vil kapittel 2 ta for seg det teoretiske rammeverket. Her vil arealteori inndelt i ulike emner bli presentert, før arealkunnskap knyttes opp mot van Hiele sine nivå for geometrisk tenkning. Dette vil både bli presentert i en egenkonstruert tabell og som et bilde bestående av puslebrikker. Kapittel 3 går inn på metodiske valg, både når det gjelder forskningsdesign, valg av personer til intervju og hvordan analysen skal foregå. Det tar også opp studiens gyldighet og troverdighet, og etiske spørsmål. I kapittel 4 og 5 blir datamaterialet analysert. I det første er en kvantitativ analyse av testresultater gjort, og det blir formidlet hva disse resultatene indikerer. I kapittel 5 er intervju og skriftlig test grunnlag for analyse, og funnene er knyttet til begrepssammenhenger i elevenes forståelser. Det teoretiske rammeverket vil i disse kapitlene spille en viktig rolle både for struktur og funn. I det 6. kapittelet diskuteres funnene i lys av problemstilling og forskningsspørsmål. I tillegg blir det redegjort for studiens avgrensning og begrensning og reflektert rundt videre arbeid, før hovedpoengene blir oppsummert.

2 Teori

I dette kapittelet vil det teoretiske rammeverket for oppgaven presenteres. Fokuset vil først være på areal og faktorer som er viktig for å forstå dette emnet. Deretter vil et delkapittel om Van Hiele sine nivå for geometrisk tenkning presenteres. Teori knyttet til disse emnene vil være utgangspunkt for å konstruere en tabell og en figur hvor areal og geometrisk tenkning blir sett i sammenheng.

2.1 Areal – hva er det?

Hvordan areal blir definert eller beskrevet avhenger av bakgrunnskunnskap og forståelsen en har. Dette gjør at formuleringene er ulike, selv om budskapet kan være det samme. Begrepet kan blant annet defineres som a) en benevning for antall kvadrater som trengs for å dekke en flate (Rickard, 1996), b) måling av et område som ligger innenfor en lukket kurve (Johnson, 1986) og c) at det er et mål for en todimensjonal overflate som ligger innenfor en grense, og som kan kvantifiseres på en eller annen måte (Clements & Stephan, 2004). Definisjonene fokuserer på ulike sider ved arealbegrepet. Mens den første vektlegger enhetene for måling ved å nevne antall kvadrater, fokuserer den andre definisjonen på areal som et område. Det refereres til en helhet uten å si noe om hva helheten består av. Sistnevnte sier både noe om helheten og mindre enheter ved først å beskrive areal som en todimensjonal overflate, og så at overflaten kan kvantifiseres. Å snakke om areal både som et hele og mindre enheter vil være karakteristisk i fremstillingen av begrepet videre.

Teorigrunnlaget for arealmåling som følger i avsnittene under er blant annet basert på Piaget, Inhelder, og Szeminska (1960), og jeg vil derfor ta med hvordan de skriver om areal. Eksempelet de beskriver henviser til et rektangel med bredde på 2 cm og lengde på 3 cm. Dette sier de at består av 6 kvadratenheter. Videre blir det forklart at kvadratenheter er enheter for areal, og at det ikke blir sett på som lengder i to dimensjoner (Piaget et al., 1960). Også her vises det både til en helhet, rektangelet, og til mindre enheter, de 6 kvadratenhetene.

Kunnskap om areal deles også opp ulikt, men det teoretiske rammeverket vil her basere seg på hvordan Clements og Stephan (2004) både viser til oppdeling av et område, gjentakelse av måleenhet, *arealkonservering*, strukturering av et område og *lengdemåling*. Arealkonservering er her definert som å kunne se at figurens areal består selv om figuren struktureres på en annen måte. Disse komponentene ved areal vil både være viktige hver for seg, men samspillet mellom dem vil også være viktig, slik Dickson, Brown & Gibson (1984, ref i Bond & Parkinson, 2010, s. 61) beskriver det: «If children are unable to grasp concepts such as conservation of area, they will inevitably have problems understanding the corresponding mathematical formula». Det innebærer at formler for beregning av areal uten kunnskap om komponentene den består av, ikke vil være meningsfull. Curry, Mitchelmore, og Outhred (2006) viser til at yngre elever ikke har så god forståelse for hva de måler som vi som lærere kanskje tror. Dette baserer seg blant annet på at de ofte ikke ser viktigheten av at enhetene må være like store og dekke hele flaten.

En helhetlig forståelse for arealbegrepet innebærer at en kjenner til komponentene som det består av. Dette kan relateres til læringsobjekt og kritiske faktorer slik det ble beskrevet i innledningskapittelet. Selv om de planlagte læringsobjektene for undervisningene kan være mer snevre enn areal i sin helhet, vil inspirasjon når det gjelder læringsobjekt og kritiske faktorer bidra til å se på arealbegrepet som et læringsobjekt, mens elementer som inngår vil bli sett på som kritiske faktorer. Videre blir kapittelet delt opp med utgangspunkt i komponentene som ble nevntovenfor, slik at det kommer tydelig frem hvilken kunnskap som her ligger til grunn for arealbegrepet. Som forklart vil disse bli sett på som kritiske for den helhetlige forståelsen, og dermed også være utgangspunkt for oppbyggingen av tabellen og figuren som følger senere i kapittelet.

2.1.1 Å skille mellom omkrets og areal

På et helt grunnleggende nivå må elevene vite noe om hva areal rent overflatisk er, og også hva som skiller det fra omkrets. Inndelingen av arealkunnskap slik det ble knyttet til Clements og Stephan (2004), viser til lengdemåling som en del av arealforståelsen. Lengdemåling er måling i én dimensjon, hvilket også omkrets kan defineres som. Omkretsen viser lengden rundt et område. Rickard (1996) definerer areal som antall kvadrater som trengs for å dekke en flate, og omkrets som antall enheter som trengs for å omkranse flaten. Når en kan skille disse, kan en begynne å dele opp arealbegrepet i mindre komponenter og fokusere på faktorer ved arealbegrepet separat.

2.1.2 Gjentakelse av måleenhet

Måling kan ifølge Clements og Stephan (2004) deles inn i to hoveddeler, der den ene er å identifisere en enhet for å måle, mens den andre er å bruke enhetene til å dele opp det som skal måles. Dette kalles for *unit iteration*, og kan defineres som «[…] the ability to think of the length of a small block as part of a whole and to use it repeatedly» (Piaget et al., 1960, s. 118). Slik jeg ser det kan det engelske begrepet oversettes til gjentakelse av måleenhet. Dette innebærer å kunne plassere identiske enheter tett i tett for å dekke flaten som skal måles. Det forutsetter også at elevene kan se den lille enheten som del av det større objektet (Clements & Stephan, 2004). Selv om definisjonen ovenfor er knyttet til lengdemåling, ser jeg den som overførbar til arealmåling. Arealet deles også inn i mindre enheter, og disse plasseres på samme måte tett i tett. Her vil det imidlertid være snakk om enheter som legges i to dimensjoner istedenfor på én linje.

Battista (2006) har utviklet et rammeverk der delemner ved lengdemåling inngår. Ut fra eksemplene han gir og beskrivelsene som følger disse, kan vi også trekke linjer til arealmåling og oppbygning av kunnskap om dette. På et grunnleggende nivå klarer yngre barn å legge brikker eller tegne opp dersom det er satt opp noen hjelpestreker. Disse strekene gir føringer for hvor en skal starte og stoppe, slik at enhetene blir like store. På et høyere nivå trenger ikke barna å legge brikker eller tegne opp hele veien, fordi de kjenner egenskaper som figuren de jobber med har, og de kan dermed bruke strategier for å komme fram til hvor mange det er. På det nivået han beskriver som det høyeste, vil elever kunne gjøre mer abstrakte tallberegninger, samt gjøre komplekse visuelle antakelser og bestemmelser, fordi egenskaper ved ulike geometriske figurer er kjent (Battista, 2006). Abstrakte og visuelle antakelser innebærer mentale prosesser, som da gjør at forståelsen er på et høyere nivå enn ved for eksempel arbeid med konkreter. Når det gjelder å finne arealet av et rektangel, kan det både bety at figuren er inndelt i ruter, at sidelengdene er merket med hjelpestreker for hvor strukturen i flaten skal gå, eller at de bare er merket med mål. Disse tre byr i ulik grad på abstraksjon, og krever i ulik grad at en kan se for seg hvordan enheten for måling dekker flaten. Ytterligere tanker rundt denne strukturen kommer jeg nærmer innpå under *2.1.5 Forholdet mellom omkrets og areal*.

2.1.3 Å sammenligne areal

Transitivity er et begrep som innebærer sammenligning av to eller flere objekter, for å utlede forholdet mellom dem, og kan oversettes til *transitiv relasjon*. Dersom objekt 1 er like stort som objekt 2, og objekt 2 er like stort som objekt 3, er også objekt 1 og objekt 3 like store (Clements & Stephan, 2004; Piaget et al., 1960). Kamii og Clark (1997) viste også til transitiv relasjon som muligheten til å utlede forholdet mellom to eller flere objekter, og at disse enten kan være like eller ulike. Et tredje objektet kan for eksempel fysisk legges over de to andre for å kunne si noe om størrelsene i forhold til hverandre. Denne måten å sammenligne arealer på kan innebære at en del mentale prosesser må være på plass, spesielt dersom objektene ikke er kongruente.

Transitive resonnement er ikke empirisk kunnskap utledet direkte fra observasjon, men må forankres i objektenes størrelser og forholdet mellom dem. Dersom elever ikke kan sammenligne på denne måten, vil en få problemer med å sammenligne andre objekter enn linjer som ligger ved siden av hverandre (Kamii & Clark, 1997), og som en direkte kan måle opp mot hverandre. Piaget et al. (1960, s.296-297) deler evnen til å begrunne transitivt i flere nivåer, og skriver at: «[…] at level IIIA, children use their composite common term to compare A and B but in doing so they simply counts all the cards as if they were equal units and ignore their inequality". På dette nivået blir det tatt utgangspunkt i noen egenskaper for å sammenligne, men det blir ikke tatt i betraktning at størrelsene på enhetene som dekker flatene er ulike. Forskjellig fra nivå 3A, skriver Piaget et al. (1960) at elevene på nivå 3B også tar måleenhetens størrelse i betraktning. Dette gjør at figurer kan måles og sammenlignes nøyaktig.

2.1.4 Arealkonservering

Arealkonservering blir også sett på som en av komponentene som ligger til grunn for å oppnå en helhetlig forståelse av areal, og går ut på å kunne sammenligne arealer av invariante størrelser. Det vil si å forstå at arealet består selv om figuren får en annen form. Dette blir sett på som en forutsetning for arealmåling, fordi en antar at enhetene er konservert og kan bli satt sammen på ulike måter til en helhet når en flate blir målt (Piaget et al., 1960). Piaget et al. (1960) understrekte viktigheten av å få muligheten til å eksperimentere og prøve før en blir servert formler, og at barnas mulighet til å måle areal er basert på deres evne til å konservere og deres forståelse for dette.

Videre kan dette knyttes til Euklids additive aksiom på den måten at dersom to like deler fra to like areal fjernes, vil det gjenværende arealet også være likt (Piaget et al., 1960). Kospentaris et al. (2011, s. 107) skriver at "[…] the understanding of the geometrical proof of some area formulae is directly connected to the notion of area invariance». For å eksemplifisere arealkonservering, kan en se på et parallellogram inndelt i kvadrater. En figur med skrå sider vil gi ufullstendige enheter langs sidene, og dersom elevene mentalt kan flytte noen av disse over til den andre siden, vil det danne hele enheter. Dermed blir det også lettere å regne ut eller telle opp hvor stort arealet er. Hvis elever kan utføre disse prosessene, kan det innebære at de ser at arealet består selv om de omorganiserer figurens enheter, og det vil også kunne bidra til at de ser hvordan formelen fungerer. Noe av det som blir beskrevet som problematisk med arealkonservering, er at omkretsen gjerne endres når figuren får en annen form (Piaget et al., 1960). Relasjonen mellom omkrets og areal er et mål at elevene skal se og få en forståelse for, men dette innebærer også at andre elementer ved kunnskap om areal er på plass.

2.1.5 Forholdet mellom omkrets og areal

Ved å forstå hvordan arealet er relatert til omkretsen, vil en også kunne forstå hvordan strukturen i flaten dannes, at lengdene som omkretsen består av utgjør antall rader og kolonner i flaten, og at disse danner summen av enheter som dekker flaten. Clements og Stephan (2004) påpekte at forståelsen av at areal er et todimensjonalt område baserer seg på at elevene kan strukturere området ved hjelp av figurens omkrets. Videre argumenterte de for at denne kunnskapen må ligge til grunn for at formelen for areal kan brukes på en meningsfull måte. Dette vil være viktig for å se sammenheng mellom målene på figuren, rutenettstrukturen som oppstår og formelen som brukes for å beregne areal. Hiebert og Lefevre (1986) understrekte at prosedyrekunnskap, som her kan være bruk av formel, må basere seg på kunnskap om begrepsstrukturer. Det betyr at formelen gir mening kun når komponentene ved den er på plass og forstått.

Sammen er de fem nevnte komponentene med på å danne grunnlaget for kunnskap om begrepsstrutkurer knyttet til areal. Arealbegrepet som læringsobjekt vil først gi fullstendig mening når disse fem komponentene eller kritiske faktorene er skilt ut. Det innebærer at elevene har forståelse for at arealet representerer et område, og blir delt inn i enheter som ligger tett i tett. Forståelse for de mindre enhetene og helheten spiller en viktig rolle når en skal si noe om størrelser og forhold, og også når det er behov for å endre flaten til en mer hensiktsmessig figur å arbeide med. I tillegg vil kunnskap om lengdemåling og omkrets i sammenheng med areal kunne gi mening i form av strukturen som dannes innenfor arealet. Ved både å ha forståelse for disse, samt de ulike prosedyrene som kan brukes for beregning, vil det være et godt grunnlag for at arealbegrepet fremstår meningsfullt for det enkelte individ.

2.2 van Hieles nivåer for geometrisk tenkning

I kapittel 1 ble en undersøkelse gjennomført av Huang og Witz (2011) trukket frem, hvor geometri og areal ble sett i sammenheng. Når en arbeider med areal vil det ved flere tilfeller være nødvendig å ha kunnskap om for eksempel figurenes egenskaper for å utføre beregninger. Det gjør at denne kunnskapen også kan bli sett på som kritisk i helhetsforståelsen av arealbegrepet. Pierre M van Hiele har i sitt arbeid med geometri identifisert fem nivåer for geometrisk tenkning. I denne studien vil disse nivåene spesielt fungere som inspirasjon for å konstruere nivåer hvor arealkunnskap og geometrisk tenkning er koblet sammen. En forening av disse to vil kunne si noe mer komplekst om begrepssammenhenger som finnes i elevenes forståelser. I de neste avsnittene vil geometrisk tenkning også bli sett på som et læringsobjekt, hvor faktorer på ulike nivå av kunnskap er kritiske i denne tenkningen.

Nivåene knyttet til geometrisk tenkning og van Hiele er noe ulikt kategorisert, ut fra om en ser på hans eget arbeid, eller om en ser på sekundærkilder. I "The child's thought and geometry" (Van Hiele, 1959) blir *the Base Level, the First Level, the Second Level* og *the Third Level* brukt, og det blir også presentert et femte nivå. I "Developing geometric thinking through activities that begin with play" (Van Hiele, 1999) er nivåene merket med *the visual level, the descriptive level* og *the informal deduction level.* Sekundærkilder viser at nivåene blant annet er referert til som *Visualization, Analysis, Abstraction, Deduction* og *Rigor* (Burger & Shaughnessy, 1986) og *Visualization, Analysis, Informal deduction, Deduction* og *Rigor* (Crowley, 1987). I denne studien vil van Hiele sin egen måte å kategorisere og definere nivåene på bli tatt i bruk, med utgangspunkt i begrepene fra førstnevnte. Selv presenterer han først bare fire nivåer, før et femte nivå legges frem i forbindelse med faser i utviklingen mellom nivåene. Fasene er basert på tenkning (Van Hiele, 1959), og det vil derfor være nyttig å også si noe om disse.

På det laveste nivået, the Base Level, kjenner elevene igjen figurene ut fra utseende. En vet at rektangelet er et rektangel, uten å kunne begrunne hvorfor. Likevel kan de på dette nivået skille mellom kvadrat og rektangel, og reprodusere figurer (Van Hiele, 1959). Det visuelle spiller en viktig rolle. Det kommer av at det en ser har en avgjørende betydning for hvordan vi bestemmer hvilken figur vi ser (Van Hiele, 1999).

På the First Level blir figurer, til forskjell fra det første nivået, kjent igjen ut fra hvilke egenskaper de har. I en likesidet trekant er for eksempel alle sidene like lange, og alle vinklene like store. Figurenes egenskaper er imidlertid ikke logisk organisert på dette nivået, slik at den likesidede trekanten kan sies å bestå av tre like lange sider, uten at det også refereres til at vinklene er like store (Van Hiele, 1999). De ser ikke sammenhenger mellom figurenes egenskaper, og vil dermed ikke kunne si at et kvadrat også er et rektangel (Van Hiele, 1959). Siden rektangelet har to og to sider som er like lange, og kvadratet har fire sider som er like lange, vil beskrivelsen gitt for rektangelet også passe for kvadratet. På dette nivået vektlegger Van Hiele (1999) språket som en viktig faktor i beskrivelsen av figurer og deres egenskaper.

The Second Level, baserer seg på at figurers egenskaper er ordnet, eller utledet fra hverandre (Van Hiele, 1959, 1999). Elevene kan på dette nivået bruke kunnskapen de har om ulike figurer til for eksempel å begrunne hvorfor alle kvadrater er rektangler, men ikke omvendt, da definisjonen for et kvadrat som nevnt innebærer at alle sidene er like lange. Forståelsen av aksiomer, definisjoner, teoremer og deres motsetninger er på dette nivået ikke fullstendig (Van Hiele, 1999), og kunnskapen som vises her er dermed ikke formelt argumentert for. Det kan komme av at meningen bak ikke er oppfattet, eller at sammenhengene ikke er direkte vist til. Videre er tenkningen på det fjerde nivået, the Third Level, påvirket av nettopp denne meningen (Van Hiele, 1959). Dermed legges det på dette nivået mer formelle begrunnelser til grunn.

Når elevene kan sette sammen kunnskapen de har oppnådd på de ulike nivåene, og ved å ha gått gjennom de ulike fasene, er et femte nivå oppnådd. Kunnskapen er på det femte nivået mer helhetlig, og en kan snakke om tenkningen som et system bestående av sammenhenger. Tenkningen har endret seg fra det første nivået, gjennom fasene og opp til det femte nivået. Utviklingen gjør at en ser geometriske figurer på andre måter enn tidligere (Van Hiele, 1959). Det kan være aktuelt å trekke linjer mellom dette nivået og variasjonsmønsteret fusjon, hvor de kritiske faktorene knyttes sammen og danner et helhetlig bilde. I tillegg kan det også relateres til kunnskap om begrepsstrukturer. En kan se på den geometriske tenkningen som bestående av faktorer, hvor en på det siste nivået kan se sammenhenger mellom dem.

2.2.1 Fasene mellom van Hieles nivå for geometrisk tenkning

Nivåene som er presentert ovenfor representerer barns tenkning om geometri og er uavhengig av undervisningsmetode. Innenfor variasjonsteori er fokuset på hvordan barna oppfatter læringsobjektet. Undervisning kan bidra til å endre denne oppfatningen, ved å ta i betraktning hvordan barn tenker. Det er knyttet fem faser i utviklingen til de fem nivåene som ble presentert. Disse illustrerer bevegelsen mellom nivåene, og kan også bli sett på som å bidra til endring i barnas oppfattelse av figurer og deres egenskaper (Van Hiele, 1959, 1999).

I den første fasen (*inquiry phase*) blir elevene presentert for ulikt materiale, og lærer å kjenne figurer gjennom utforskning. Dette gjør at elevene blir gitt mulighet til å oppdage ulike strukturer ved figurene (Van Hiele, 1999). Variasjonsmønsteret kontrast kan ses i sammenheng med den første fasen. Den legger opp til å sette objekter opp mot hverandre for å kunne se på ulike strukturer ved objektet som skal være i fokus videre. I forbindelse med the Base Level, vil da det å kunne skille mellom kvadrat og rektangel ut fra det visuelle være en slags kontrastering, og et grunnlag for å fokusere videre på egenskapene ved hver av dem.

Fase 2 (*direct orientation*) legger opp til å hjelpe elevene med å se strukturen ved figurene. Det kan for eksempel være å bruke figurene som puslebrikker til å se hvordan de kan settes sammen til nye figurer (Van Hiele, 1999). Jeg ser det som at det også kan handle om å separere faktorer som er kritiske for den geometriske tenkningen når det gjelder figurers egenskaper, og å skille ut noen av disse. Variasjonsmønsteret generalisering kan her knyttes til dette, da det å legge opp til at elevene skal se det karakteristiske for figurene kan være en måte å lede elevene i riktig retning på.

I den tredje fasen (*explication*) blir det beskrevet at læreren presenterer og bruker fagspråk, dette for å oppfordre elevene til å gjøre det samme i sine muntlige diskusjoner og forklaringer, samt i skriftlig arbeid (Van Hiele, 1999). Det er her gått fra konkret og visuelt arbeid, til et nivå hvor en kan beskrive figurer og sette ord på den geometriske tenkningen.

Den fjerde fasen (*free orientation*) byr på oppgaver som kan gjennomføres med ulike strategier og på ulike måter, hvilket også kan gjøre barna mer bevisst på hvilken kunnskap de besitter og kan ta i bruk. Barna kan velge å ta den veien de har forutsetning for å mestre (Van Hiele, 1999). For å kunne bruke ulike strategier, må en også ha skilt ut noen faktorer som gjør at nettopp disse strategiene blir valgt.

Når det gjelder den siste fasen (*integration*) blir det beskrevet at det her må bli gitt mulighet til å sette sammen det lærte til en helhet (Van Hiele, 1999). Flere kritiske faktorer kan fra et variasjonsteoretisk perspektiv bli variert samtidig, og fokuset vil være på å se objektet i sin helhet. Van Hiele (1999) pekte på at lærerens oppgaver med dette som utgangspunkt er å planlegge, legge til rette for å fokusere på strukturene, ta i bruk terminologi, samt knytte det opp mot kunnskap elevene allerede besitter.

En kan si at oppbygging av kunnskap hos et individ slik det er presentert ovenfor kan være en ønsket situasjon, da det ikke legges opp til å basere kunnskapen kun på prosedyrer, men å få en meningsfull helhetsoppfattelse av objektet. Videre presenteres to modeller hvor geometrisk tenkning og arealkunnskap er koblet sammen.

2.3 Forståelse av areal: to modeller

I flere tilfeller vil figurers mål ikke være oppgitt, og flatenes geometriske form vil spille en rolle for hvordan en likevel kan finne arealet. Elevenes kunnskap om og evne til å abstrahere den geometriske formen kan spille inn på hvilken informasjon som blir tilgjengelig for elevene når de skal foreta målinger. For å kunne undersøke begrepssammenhenger og forståelse vil både kunnskap om areal og geometrisk tenkning spille en rolle i konstruksjonen av verktøyet for analysen. Jeg ser det hensiktsmessig å strukturere teorien presentert ovenfor, slik at den kan brukes til å beskrive og til å analysere datamaterialet. Som kapittel 2.1 viser, kan kunnskap om areal deles inn i flere elementer. Hvilke som bør komme først og sist i utviklingen av forståelsen er vanskelig å si, spesielt om en ser på det som nettverk av kunnskap. Likevel kan en både se på utviklingen av kunnskap som nivåer, og som puslebrikker der brikkene er viktige deler av et større bilde.

Kunnskapen fremstilles litt ulikt i de følgende avsnittene, først med nivå og så med puslebrikker. I den første er faktorene i større grad basert på hverandre enn de er i den andre. Både arealkunnskap og geometrisk tenkning vil komme til uttrykk, og en forening av disse vil være hovedfokuset i fortsettelsen. Fremstillingsmåten som er karakteristisk for de to modellene vil vise at de har ulike verdier som er nyttig i det videre arbeidet med datamaterialet.

2.3.1 Fem nivå for kunnskap om areal, inspirert av van Hiele sine nivå for geometrisk tenkning

Basert på van Hiele (1959,1999) sine nivå for geometrisk tenkning, vil det her bli presentert en tabell som viser nivå for kunnskap om areal, for geometrisk tenkning og en kobling mellom disse to. Når det gjelder kunnskap om areal er disse delt inn etter de fem komponentene som fremkommer i kapittel 2.1. Ett nivå vil ikke være absolutt nødvendig å ha en full forståelse for før en jobber videre med det neste, men når en ser på helheten vil forståelse på alle nivåene spille en viktig rolle. Oppnådd kunnskap på Nivå 0 og 1 vil for eksempel gi et bedre grunnlag for forståelse på Nivå 2 enn om de to første ikke allerede ligger helt eller delvis til grunn. Noe kunnskap vil bli sett på som opplagt for elevene, og dermed kan noen elementer komme mindre tydelig til uttrykk i forståelsene deres. Nivåene med tilhørende beskrivelser er organisert i tre kolonner, og med 5 nivåer (0-4). Disse fremkommer i *Tabell 1. Fem nivå for kunnskap om areal, geometrisk tenkning og en kombinasjon:*

	Kunnskap om areal	Geometrisk tenkning (van Hiele)	Kunnskap om areal og geometrisk tenkning
Nivå 0 The Base Level	En kan se forskjell på hva omkretsen og arealet er for en figur, og bruke en enhet (konkret) til å dekke det todimensjonale rommet. Enhetene legges tett i tett og overlapper ikke. På dette nivået er det visuelle i fokus.	Figurene kjennes igjen ut fra utseende. Et rektangel er et rektangel, uten noen forståelse for hva som gjør det til et rektangel.	Jobber på et helt grunnleggende nivå, hvor en ut fra et variasjonsteoretisk perspektiv setter objekter opp mot hverandre, f.eks omkrets og areal, samt separerer faktorene ved det aktuelle objektet. Fokuserer her på enkeltfaktorer. Er ikke bevisst sammenhengen mellom areal og geometriske egenskaper.
Nivå 1 The First Level	Kan sammenligne to flater, for eksempel ved hjelp av et tredje objekt. Bruker strategier for å si noe om forholdet mellom flatene. Det tredje objektet kan være et rutenett som legges over figurene, og med det til hjelp kan en beskrive hva rutenettet dekker i den ene og den andre figuren.	Figurene kjennes igjen ut fra hvilke egenskaper de har. Egenskapene er ikke logisk organisert, slik at en likesidet trekant kan ses på som en trekant med tre like lange sider, uten å referere til at den også har tre vinkler som må være like store. En ser ikke sammenheng mellom egenskapene som figurene består av.	Kan bruke strategier for å sammenligne, for eksempel ruter, flate, osv. Beskriver størrelsene til hver av figurene med utgangspunkt i egenskaper ved figurene, for eksempel antall måleenheter det er plass til, men kan ikke sammenligne arealet av figurene ved å se egenskapene deres i sammenheng.
Nivå 2 The Second Level	Kan si noe om arealet ved å omorganisere figuren og konservere arealet. Forstår at arealet består selv om figuren får en annen form, og omkretsen endres. Forankrer løsninger i uformelle, gjerne konkrete (og visuelle) utsagn/påstander.	Figurenes egenskaper kan ordnes logisk. Egenskapene utledes ut fra hverandre, og en kan bruke kunnskapen en har om figurenes egenskaper til å for eksempel begrunne hvorfor alle kvadrater også er rektangler, hvor begge figurene har som egenskap at to og to sider er like lange.	Kan bruke figurenes egenskaper for å oppdage en struktur i figuren. Kan både si noe om strukturen når det gjelder areal, knyttet til figurenes geometriske egenskaper, men også konservere areal og ordne figuren slik at en får en mer hensiktsmessig figur å finne/regne ut arealet til. Figurens geometriske form er

			med på å gjøre prosessen med å finne areal lettere.
Nivå 3 The Third Level	Ser sammenheng mellom omkrets og areal, og vet at omkretsen indikerer antall kvadrater i hver kolonne og rad. Vet også at arealet utgjør antall ruter totalt i figuren. Forankrer valg i komponenter knyttet til areal, og ikke lenger etter tegnede rutemønster (abstraherer).	Tenkningen er påvirket, eller basert på, aksiomer, definisjoner, teoremer og motsetninger mellom disse.	Bruker kunnskap om komponenter ved areal og geometriske egenskaper ved figurer til å beregne og begrunne. Et kvadrat kan deles i to trekanter, og en finner dermed arealet av en trekant ved å først å finne hele kvadratet og så dele på to. Begrunnelsen for strukturen i en figur eller hvordan arealet er regnet ut, er mer knyttet til geometriske egenskaper.
Nivå 4 The Fourth Level	Kan på en meningsfull måte regne ut arealet. Ha forståelse for komponentene som formelen innebærer. Har en helhetlig forståelse av areal som begrep, der de hittil nevnte nivåene er grunnlaget for forståelsen.	Kunnskapen kan settes sammen til en helhet. Et system av relasjoner er oppstått, og en ser nå en geometrisk figur på en annen måte enn for eksempel på «The base level».	En har her en helhetlig forståelse, og kan bruke kunnskapen mer fleksibelt. Mestrer kompleks tenkning, og fusjon mellom arealkunnskap og kunnskap om geometri er her oppnådd. Sammenhengene kommer tydelig til uttrykk.

Tabell 1 legger opp til nivåer, da det kan tenkes at en del grunnleggende prosesser og kunnskap må være på plass for å kunne oppnå fusjonen på Nivå 4. Clements og Stephan (2004, s. 308) påpekte som tidligere nevnt at kunnskap om strukturen i et todimensjonalt rom må ligge til grunn for at formelen skal kunne brukes meningsfullt og sier at «Students need to structure an array to understand area as truly two-dimensional». I tillegg blir det i litteraturen poengtert at komponenter som arealkonservering må være på plass, slik at elevene ikke skal få problemer med å se koblingen til den matematiske formelen for areal (Bond & Parkinson, 2010). Med forståelse for arealkonservering, vil det for eksempel gi mer mening at arealet for et parallellogram regnes ut på samme måte som et rektangel, selv om figurene kan ha litt ulike egenskaper. Å først ha fokus på formelen, vil ifølge Zacharos (2006) kunne ha en uheldig innvirkning, da arealet kan bli sett på som produkt av to linjer. Dette er spesielt uheldig dersom elevene enda ikke har oppfattet hva arealbegrepet faktisk innebærer. Jeg vil derfor bruke disse poengene til å rettferdiggjøre inndelingen i nivåene ovenfor. Forståelse for noen

av elementene ved areal kan likevel bli oppnådd samtidig. Dette vil bli vist i det kommende avsnittet.

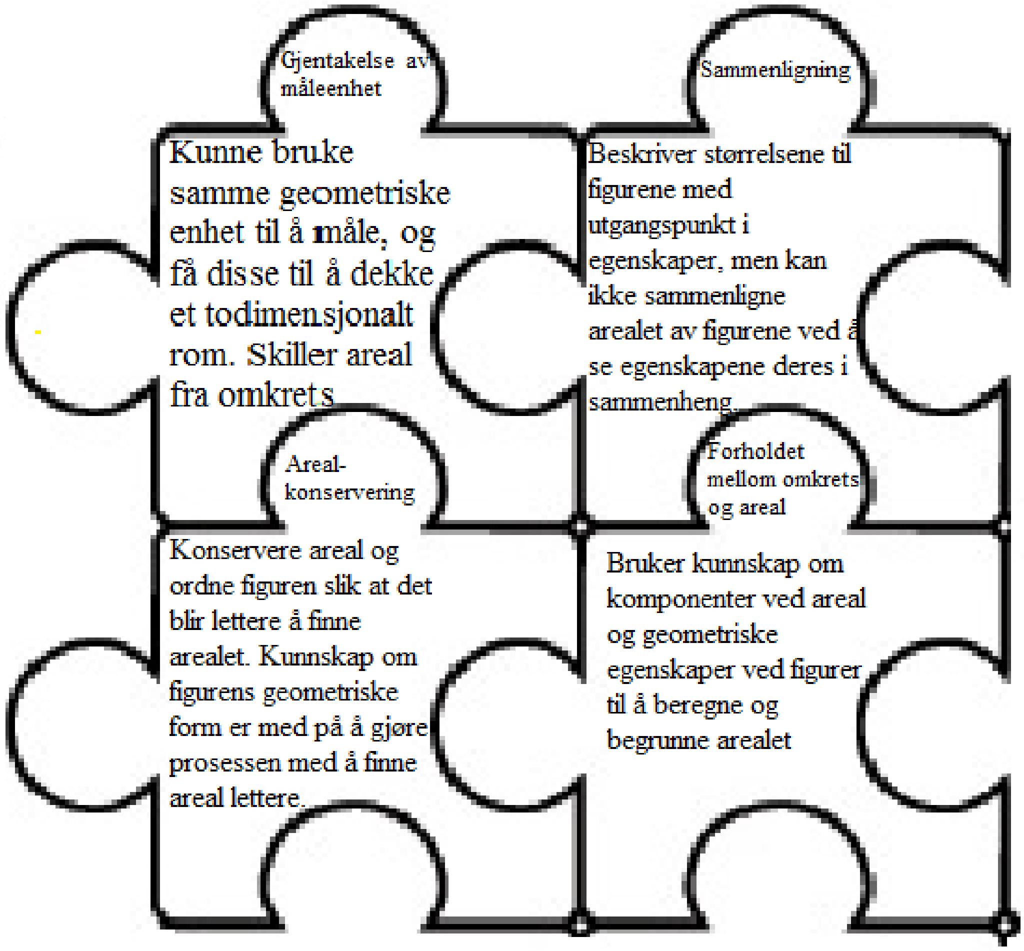
2.3.2 Arealkunnskap som bilde bestående av puslebrikker

Når det gjelder puslebrikkemetaforen er det særlig to forskere jeg ønsker å basere dette teorigrunnlaget på. Den første er Marit Johnsen-Høines (2003) som beskrev metaforen ut fra brikker som utgjør et større bilde, og at etter hvert som en får flere brikker til å falle på plass vil kunnskapen utvikles (Høines, 2003). Høines (2003, s. 47) påpekte at: «Det handler altså om å hjelpe elevene til å bli kjent med bitene og de sammenhengene de skal inngå i». Jeg ser det som at vi både kan se på et stort bilde som representerer kunnskapen vi har i matematikk bestående av mindre emner, men også at det finnes bilder for delemnene der kritiske faktorer inngår. Noen brikker vil kunne passe inn i flere bilder. Kort sagt kan det ut fra det jeg beskrev konstrueres bilder for større matematikkemner og mindre matematikkemner. Disse bildene kan knyttes til nettverk av kunnskap som ble presentert i sammenheng med kunnskap om begrepsstrutkurer. At flere brikker kan pusles sammen, symboliserer også en sammenheng, hvilket er sentralt når det er snakk om nettverk av kunnskap og bevegelse mellom disse.

Den andre forskeren jeg tar utgangspunkt i er Olof Magne. Han refererer til sammenhenger og mønster, og sier at «Han/hon lär sig, hur bitarna samspelar med varandra, hur de liknar varandra och hur det totala mönstret hänger samman» (Magne, 1944, s. 9). Dette kan knyttes til mønster av variasjon, deriblant fusjon, hvor en må vite hvordan faktorer henger sammen, og også hvordan de fungerer hver for seg.

Når det gjelder puslebrikkemetaforen handler det om å se sammenhenger mellom faktorer knyttet til brikkene, og en kan få en forståelse for én del uten at en annen først må ligge til grunn. Likt som ved nivåmodellen vil en ikke ha en helhetlig forståelse før alle brikkene er på plass. Slik tenkt kan en se på det som at kunnskapen som én brikke innebærer får en enda sterkere mening når den knyttes til en annen. Når alle hull er dekket og alle brikker er på plass, kan forståelsen bli sett på som helhetlig. Elevenes forståelser konstruert som et bilde åpner for å se på begrepssammenhenger i forståelsen, da tenkte brikker enten kan være på plass eller mangle. Hvilke faktorer som er skilt ut og hvordan de blir knyttet sammen er spørsmål som blir tatt med inn i analysen og diskusjonen.

Figur 1. Arealkunnskap og geometrisk tenkning strukturert som et bilde bestående av fire puslebrikker:



Figur 1 illustrerer arealkunnskap og geometrisk tenkning, bestående av fire puslebrikker. Det kan diskuteres om det burde vært flere, for eksempel en brikke med «Strukturering av flate». Siden dette kan inngå i alle de fire brikkene vil det være lite hensiktsmessig å sette det opp som en egen brikke. Bitene illustrerer forholdet mellom delene, og tar utgangspunkt i kolonnen lengst til høyre i *Tabell 1, «*Kunnskap om areal og geometrisk tenkning». Det ble for eksempel tidligere nevnt hvordan arealkonservering ble sett på som en forutsetning å ha forståelse for, for at komponenter ved formelen skulle gi mening. I tillegg må en vite hvilke enheter man bruker til å måle. En vil ikke alltid kunne bruke formel for å beregne arealet, og det er dermed avgjørende at en kan si noe om flatene på andre måter. Nivå 4 fra *Tabell 1* kan i denne sammenhengen være hele bildet som *Figur 1* utgjør. Slik sett vil samspillet som brikkene er en del av være det viktige, bildet de sammen skaper.

Videre kan det diskuteres om brikkene kunne vært puslet sammen på en annen måte. Slik figuren blir fremstilt er det også mulig å pusle på flere brikker. Valget om å presentere figuren slik handler om at flere komponenter kan knyttes til disse brikkene, selv om det er de fire som har fokus i denne studien. Dette kan for eksempel være brikker knyttet til kunnskap om lengdemåling og måling av volum, som danner et bilde av måling som et større emne.

2.3.3 Oppsummering

Fremstillingene av kunnskapen ovenfor forsøker å få fram hvorfor det er nødvendig å se arealkunnskap og geometrisk tenkning i sammenheng. Enheter brukes for å dekke en flate, og disse må plasseres tett i tett for å dekke hele. Egenskaper ved figurenes flate kan brukes til å sammenligne areal, for eksempel ved bruk av rutenett eller et tredje objekt. Disse egenskapene kan også brukes til å oppdage en struktur i planet, ved at enhetene blir knyttet opp mot omkretsen og slik gir en forståelse for hva arealet innebærer.

Flatens geometriske form kan spille en viktig rolle for beregningen av arealet. Arealkonservering blir sett på som en forutsetning for forståelsen av arealbegrepet. Ved å forstå at arealet er det samme selv om en endrer figuren, vil en kunne få frem mer hensiktsmessige geometriske flater for beregning. I tillegg vil kunnskap om hvordan figurer er bygd opp hjelpe til å finne arealet, både ved å gjøre det lettere visuelt, og for å få en bedre forståelse av prosedyrene. Det kan være at et rektangel består av to trekanter, og dermed vil en finne arealet av den ene ved å dele arealet av rektangelet på to.

Sammenhengen mellom areal som nettverk og geometrisk tenkning som nettverk blir her sett på som viktig i møte med problemer knyttet til areal. En kan se på det som to nettverk bestående av ulik informasjon, hvor det også er mulig, noen ganger nødvendig, å bevege seg mellom. Den geometriske delen vil kanskje ikke være brukt bevisst hos alle, men likevel kunne komme til utrykk. Både *Tabell 1* og *Figur 1* viser til en seperasjon av elementene som emnene består av. Forståelse på alle nivåer, eller alle brikker på plass, kan symbolisere en fusjon, en bevegelse mellom nettverkene av kunnskap. Kunnskap om begrepsstrukturer når det gjelder de to emnene vil innebære at det legges mening i hvert av dem, men også at det foregår bevegelse mellom. Det innebærer at en har kunnskaper knyttet til den første kolonnen i *Tabell 1* (Kunnskap om areal) den andre (Geometrisk tenkning) og den tredje (Kunnskap om areal og geometrisk tenkning). Kunnskap som den tredje kolonnen presenterer, sammen med *Figur 1*, viser sammenhengen mellom disse nettverkene.

Videre vil fremstillingene av kunnskapen spille litt ulik rolle. Den nivåbaserte modellen vil være med på å beskrive datamaterialet. Det innebærer å si noe om hva forståelsen til de deltakende elevene innebærer, ved hjelp av nivåene fra *Tabell 1.* Bildet med de fire brikkene vil også kunne bidra med å besvare noe av det som er målet å få innsikt i her, nemlig begrepssammenhenger i elevenes forståelse av areal. Da handler det om å se på hvordan elementer innen areal henger sammen, og også hvordan geometrisk tenkning er koblet til denne kunnskapen.

Ser en arealbegrepet som et læringsobjekt, må visse faktorer være på plass for å kunne oppnå helhetlig forståelse. Mye av arealkunnskapen kan være knyttet til prosedyrer når det gjelder å beregne areal, men med forståelse for de ulike faktorene, og ved å se sammenhengen mellom dem, vil kunnskapen bli brukt mer meningsfullt. Samspillet mellom kunnskap om begrepsstruturer og prosedyrekunnskap vil være med på å beskrive hva som ligger i elevenes forståelser, og vil også kunne bidra til å nyansere funnene som tabellen og figuren forsøker å fremheve. I kapittel 3.6 blir det forklart hvordan tabellen og figuren som teoretisk rammeverk fungerte i analysen av datamaterialet. Det vil også bli beskrevet hvordan modellene vil bli sett i sammenheng med prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer, samt variasjonsteori. Før dette blir analysert og diskutert vil metodiske betraktninger når det gjelder design, problemstilling, utvalg og datamateriale bli lagt frem.

3 Metode

I dette kapittelet blir metode presentert. Metoden innebærer valg som er tatt av forsker når det gjelder forskningsdesign, datainnsamling og analyse. Delkapitlene under vil også begrunne valg som angår intervjupersoner og deres anonymitet, innsamling av datamaterialet og analyse av dette. I tillegg vil metodens gyldighet og troverdighet bli diskutert. Forskningsetiske spørsmål vil bli reist i et avsluttende avsnitt.

3.1 Valg av metode og forskningsdesign

Formålet med denne studien er å få innsikt i hvilke begrepssammenhenger knyttet til forståelse av areal en finner hos høytpresterende elever i 5.klasse. Problemstillingen med tilhørende forskningsspørsmål gir rom for å se på datamaterialet på forskjellige måter, og elevers stemmer står sentralt. Dette fokuset gjør at en metode som kan gi mer detaljert innsikt i en konkret situasjon, heller enn innsikt basert på tall, vil være hensiktsmessig. Kvalitativ metode vil derfor være egnet. Thagaard (2013) påpekte at en viktig målsetting ved kvalitativ metode er å oppnå forståelse av sosiale fenomener, hvor fortolkning også har en stor betydning. Med problemstillingen som ligger til grunn, kan en si at målsettingen er å oppnå forståelse for hva som finnes i elevenes forståelser knyttet til areal. En kvantitativ studie vil i så måte ikke kunne gi innsikt i forståelsen av sosiale fenomener, men det kan likevel gi oversikt over et kvantifisert datamateriale. I denne studien vil det bidra med tabeller på elevenes resultater fra tester som er gjennomført. Dette materialet vil kunne peke på interessante trekk ved testresultatene. Studien er kvalitativ på bakgrunn av den detaljerte innsikten metoden kan gi, men bruker også kvaliteter ved kvantitativ metode til å peke på viktig informasjon.

3.2 Intervju og for-, etter- og sen ettertest

Intervju har i denne forskningsprosessen fått frem elevenes stemmer, og gitt verdifull innsikt i deres forståelser av areal. Elevene kunne beskrive og forklare, og oppfølgende spørsmål ble stilt for å få dypere innsikt i hvordan de hadde tenkt. I følge Thagaard (2013) vil intervju, med den karakteristiske direkte kontakten mellom forsker og elev, kunne gi innsikt i opplevelser og refleksjoner, noe det her var viktig å få frem. Intervjuet gav rom for å stille spørsmål slik at fokuset var på det jeg ønsket å få innsikt i, og dermed så jeg denne metoden som svært informasjonsgivende. Observasjon kunne imidlertid gitt informasjon om hva eleven gjorde og sa i øyeblikket, hvilket kunne styrket gyldigheten av funnene, da de hadde vært basert på noe som skjedde der og da. Observasjon ville likevel gjort at jeg i større grad måtte basert funnene på antakelser i stedet for faktiske forklaringer. Dermed ble det naturlig å velge en metode hvor elevenes stemmer var i fokus, der elevene kunne utdype og forklare hva de hadde tenkt og hvorfor de hadde tenkt slik. Det ble også nødvendig å supplere intervjuene med elevenes skriftlige ettertester, da det var dette intervjuet i hovedsak handlet om.

Gjennom prosjektperioden gjennomførte elevene tre tester. Én før undervisningen startet, én rett etter undervisningen, og én cirka to uker etter at undervisningen var ferdig. Ettertesten var utgangspunktet for intervjuene, noe som ble valgt for at elevene på det tidspunktet nettopp hadde hatt undervisning på emnet. Dermed kunne de snakke om emnet før et nytt emne ble undervist i. Til tross for at ettertestene er en del av datamaterialet, vil intervjuene ha hovedfokus, eksemplifisert ved bilder fra testene der det er nødvendig. Et samspill mellom intervju og skriftlig test har belyst faktorer, og hvordan forståelsen for disse er. Denne måten å samle innsiktsfull data på har bidratt til å øke bevisstheten rundt elementer som areal inneholder, hvilket er verdifullt når det er en del av emnet måling som elever generelt scorer lavt på.

Det ble lagt opp til en mest mulig fleksibel samtale for å få elevene til å forklare og beskrive hva de hadde tenkt på ettertesten. Å lage en komplett intervjuguide ville hindret denne fleksibiliteten, og det kunne også hindret en dypere innsikt i deres tankegang. Fokuset i intervjuet ble derfor på et utvalg oppgaver hvor elevene fikk forklare, både ut fra egen hukommelse, men også ut fra innspill fra meg. Forskningsintervjuet skaper ifølge Kvale, Brinkmann, Anderssen, og Rygge (2009) rom for å konstruere kunnskap i samspill mellom intervjuperson og intervjuer. Jeg ville få frem elevenes kunnskap ved å la samtalen flyte best mulig, og ved å se an hvilke tanker som var interessant å spille videre på.

Intervjuene var semistrukturerte, i den forstand at tema og forslag til spørsmål var satt på forhånd, men at rekkefølgen i samtalene var ulik (Kvale et al., 2009). Et utvalg oppgaver som viste ulike aspekter ved areal ble på forhånd plukket ut. I samtalene var det varierende behov for å stille oppfølgende spørsmål, hvilket også har bidratt til at noen oppgaver har fått mer fokus hos enkelte elever. Ut fra formålet med intervjuet, ville strukturerte intervju med fast rekkefølge og faste spørsmål satt begrensninger for å oppnå den ønskelige innsikten. Oppfølgende spørsmål og fleksibilitet rundt dette var i ulik grad nødvendig for å få frem hva elevene hadde tenkt på de forskjellige oppgavene. På forhånd kunne en ikke forutsi hvilke svar en ville få, og dermed åpnet det semistrukturerte intervjuet for den fleksibiliteten jeg erfarte at det var behov for. Dette gjaldt først og fremst behovet for å kunne be om utdypning, samt å se underveis hvilke oppgaver det var nødvendig å snakke om eller snakke mer om.

3.2.1 Lydopptak og videofilm

For å sikre solid dokumentasjon av intervjusituasjonen, ble det brukt både videokamera og lydopptaker. Videokameraet var hovedverktøyet for innsamlingen, noe som sikret at jeg både fikk med hvilke oppgaver det var snakk om og hva som ble sagt. I tillegg gav dette verktøyet mulighet for å se på elevenes handlinger. Ifølge Kvale et al. (2009, s. 188) gir videoopptak «en enestående mulighet til å analysere det mellommenneskelige samspillet i et intervju». Dette har også bidratt til at peking og andre gester ble oppfattet. Kladdebok og penn var også med på alle intervju, og det var viktig for å hjelpe med å holde oversikt over personer, video- og lydfiler og tid. Videofilm og båndopptakere ble også brukt i den vanlige undervisningen gjennom prosjektet. Elevene var dermed vant med disse gjenstandene før de deltok i intervjuet.

3.2.2. Transkribering

Transkribering innebærer å overføre det talte, selve samtalen, til det skriftlige (Kvale et al., 2009). Forskjellene mellom disse to representasjonene, vil være at det talte innebærer ulikt stemmeleie, naturlige ytringer og kroppsspråk. Når en leser utskriften av det talte vil en ikke kunne legge merke til disse faktorene, med mindre de blir skrevet inn. Eksempler på dette kan være å peke når en teller, vise hvilke sidekanter det er snakk om, og så videre. Flere av disse beskrivelsene var viktige underveis i prosessen, fordi det gav informasjon om hva eleven faktisk snakket om. I transkripsjonene er gester tatt med i klammeparentes, og slik blitt skilt fra det talte.

Prosessen fra intervjusituasjon til nedskrevet intervju inneholder flere steg, og for hvert steg blir situasjonen mer og mer abstrakt. Dette gjør at vesentlig informasjon kan gå tapt underveis, og dermed kan transkripsjonen ha en svekkende funksjon for datamaterialet (Kvale et al., 2009). Det har derfor vært viktig å være bevisst på valg som er tatt i forbindelse med transkripsjonen, og spesielt det som går på å sile ut unyttig informasjon. Det har vært viktig å spille gjennom intervjuene i etterkant av nedskrivingen for å se at samtalene er korrekt gjengitt.

3.3 Utvalg

Fokuset for denne studien er begrepssammenhenger i høytpresterende elevers forståelser. Det ble redegjort for valg av intervju i et avsnitt ovenfor, hvor elever ble sett på som de interessante intervjupersonene, nettopp fordi det var deres forståelse jeg ønsket innsikt i. Problemstillingen setter begrensninger for hvilke elever som har vært interessante å velge ut i denne studien. Hva som blir ansett som høy prestasjon kan diskuteres, og det ble først vurdert om det kunne være en idé å ta utgangspunkt i fortestene for å finne ut hvem disse elevene var. Et enkelt testresultat så jeg imidlertid som for tynt til å bestemme dette, spesielt når jeg fra før av ikke kjente elevene, deres behov og potensiale. Fortestene ble også tatt før undervisningen tok til, og gav dermed ikke nødvendigvis et helt realistisk bilde på prestasjonen. Derfor ble det tatt et valg om at de enkelte lærerne skulle plukke ut to elever hver. Utvalget av elever utgjorde til sammen seks personer, tre gutter og tre jenter.

Kjønn vil ikke bli tatt med som en bestemmende faktor i diskusjonen, da det ikke er relevant å vite noe om kjønn ut fra hva problemstillingen spør etter. På bakgrunn av dette, og for å holde elevene anonyme, vil elevene bli henvist til som Elev 1, og så videre. Det kan diskuteres om dette er en praktisk måte å gjøre det på. Slik jeg ser det bevarer inndelingen elevenes anonymitet, samt at det gir rom for en organisering som kan være grei å forholde seg til i lesningen av oppgaven. Når elevene skal henvises til med pronomen, vil h*n bli brukt i stedet for han og hun, hvilket også bidrar til å bevare anonymiteten og unngå innblanding av kjønn.

Elevene som var intervjupersoner i dette prosjektet kom alle fra klasser på 5.trinn. Siden TIMSS innebærer undersøkelser på 4. og 8.trinn, og blant annet viser til lav prestasjon på emnet måling, var 5.trinn hensiktsmessig å gjennomføre denne studien på. Det som er oppnådd etter 4.trinn kan være en veiviser for hva som trenger å bli jobbet med på 5.trinn, hvor også kompetansemålene etter 7.trinn er i siktet.

Til tross for at det kan se ut som et tilfeldig valg av intervjupersoner, ser jeg det som et strategisk valg, da egenskaper og kvalifikasjoner hos elevene var utgangspunktet for utvelgelsen (Thagaard, 2013). Det ble gjort en begrensning for hvilke elever som var aktuelle for å kunne svare på problemstillingen. Selv om elevene er direkte plukket ut, har de stått fritt til å delta.

3.4 Roller i undersøkelsen

En avklaring av roller ble gjort i forkant av intervjuene. Siden jeg var en voksen som hadde satt meg inn i emnet og også deltatt i undervisningen, kunne det virke skummelt for elevene å fortelle hva de hadde gjort på testene. Deltakelsen min i undervisningen var verdifull fordi det gjorde at jeg kunne vite en del om hva det var ment at elevene skulle kunne. Ulempen var dermed at elevene kunne få inntrykk av at jeg hadde svaret på alle spørsmålene.

For å få en best mulig samtale med elevene ble det viktig for meg å poengtere at jeg ikke på noen måte skulle vurdere dem, og at jeg var interessert i å høre hvordan de hadde tenkt, fremfor om svaret var rett eller galt. Likevel ble jeg den styrende i intervjusituasjonen når det gjaldt hvilke oppgaver vi skulle ta utgangspunkt i, og også dersom jeg tenkte at eleven hadde mer å fortelle, men trengte mer spesifikke spørsmål enn «hvordan har du tenkt?». Til tross for at jeg var styrende ved noen anledninger, la jeg også vekt på å være en åpen intervjuer, hvilket Kvale et al. (2009) peker på som en viktig kvalifikasjonskriteria for intervjueren. Å være åpen innebærer å være en god lytter, samt at en også er åpen for å følge intervjupersonen i den retningen han eller hun tar intervjuet. Det innebar også at jeg fulgte opp med kommentarer og spørsmål på det elevene sa. Med denne fordelingen av roller kunne jeg som forsker sørge for at vi fikk snakket om det jeg ønsket innsikt i, samtidig som intervjupersonen fikk mulighet til å fortelle (Thagaard, 2013). På den måten oppstod det en slags fleksibilitet i intervjusituasjonen. Klargjøringen av roller virket positivt på begge parter, på den måten at en kunne tilpasse seg sin rolle på en god måte.

3.5 Datainnsamling og datamateriale

Når det kom til innsamling av data gav dette prosjektet mange muligheter for valg. Som del av et forskningsprosjekt var det tilgang på data fra tre klasser bestående av omtrent 20 elever i hver. Måling ble delt inn i lengdemåling og omkrets/areal. Som nevnt tidligere ble det gjennomført tre tester til emnene.

Etter at seks elever hadde sagt seg villig til å delta i studien, ble deres tester en sentral del av datamaterialet. Tall fra testene kan inngå i tabeller som viser elevenes score før og etter undervisning på emnet, og kan bidra med et visuelt bilde i diskusjonen. I tillegg kan disse tallene bidra til å peke ut informasjon for diskusjon. Hovedvekten vil likevel ikke ligge på disse tabellene, men kvaliteter ved disse kan bidra til det store bildet som skal diskuteres.

De seks elevene var med på et individuelt semistrukturert intervju etter gjennomført ettertest på emnet omkrets/areal. Undervisningen hadde i alle de tre klassene hatt fokus på spesifikke kritiske faktorer og brukt ulike variasjonsmønstre for å løfte disse frem. Elevene som deltok i intervjuene hadde på den måten gjennomgått det samme, og opplevd omtrent de samme variasjonsmønstrene i undervisningen. Elevene fremstod likevel noe ulikt på intervjuene, hvilket har gjort at grad av dybde og innsikt har vært varierende fra intervju til intervju. En medforsker har også bidratt som intervjuer med to av elevene. Jeg kunne dermed ikke bestemme hvilken retning disse intervjuene skulle ta. Likevel var situasjonen godt planlagt ved at vi begge kikket på samme intervjuguide[4] i forkant, samt tok utgangspunkt i flere av de samme oppgavene. Vi hadde også avtalt at målet var å få innsikt i hva forståelsen deres av areal innebar, og at det dermed var viktig å spørre hva elevene tenkte på de ulike oppgavene og hvordan de hadde løst disse. Samme intervjuguide ble brukt i alle intervju knyttet til det større prosjektet, og fokuset i disse intervjuene ble dermed på det som hadde med å fremme forståelse å gjøre. Alle intervjuene ble tatt opp med videokamera, slik at jeg som forsker kunne se intervjuene flere ganger.

Før hver undervisningsøkt ble det laget planleggingsdokumenter[5] for å best mulig kunne ta i bruk prinsipper fra variasjonsteori og for å løfte frem kritiske faktorer i den enkelte økta. Disse dokumentene gir et innblikk i hva som er læringsobjekt, samt hvilke aktiviteter og variasjonsmønstre det er lagt opp til for at elevene skal ha mulighet til å skille ut faktorer ved læringsobjektet. Planleggingsdokumentene gir ikke innblikk i det som faktisk skjedde i undervisningen, men hva som var intensjonen med undervisningen.

3.5.1 Testen om omkrets/areal

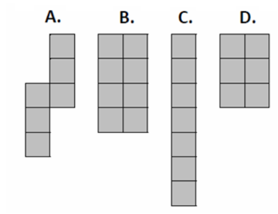
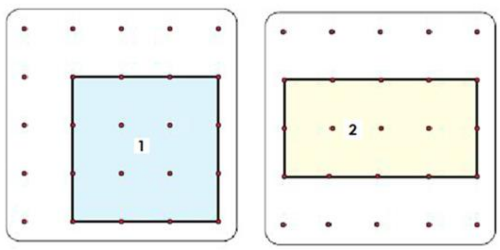
I følgende avsnitt vil jeg se på ettertesten i lys av *Tabell 1*. Oppgavene vil bli rangert etter nivå ut fra denne tabellen. Måten å løse dem på avgjør imidlertid hvilket nivå kunnskap eller forståelse er vist på. Det betyr at det ikke nødvendigvis er noen direkte kobling mellom nivå på oppgavene og forståelsen elevene viser. I tillegg er også oppgavene markert med enten prosedyrekunnskap (PK) eller kunnskap om begrepsstrukturer (KOB), noe som også kan komme frem annerledes når en tar intervjuene i betraktning. Det ble forklart tidligere at det kan være en kobling mellom prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer, men her

[4] Intervjuguiden finnes som vedlegg, se Vedlegg 2.
[5] Et planleggingsdokument ligger vedlagt, Vedlegg 3.

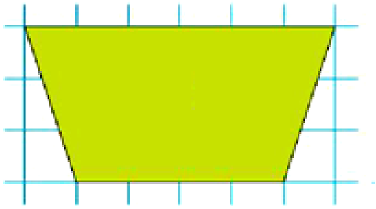
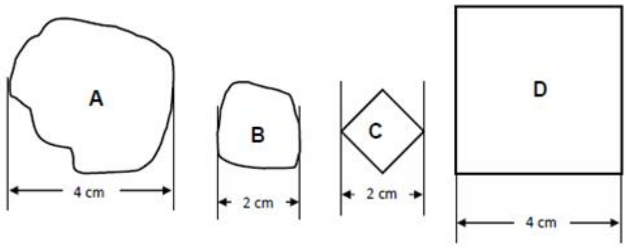
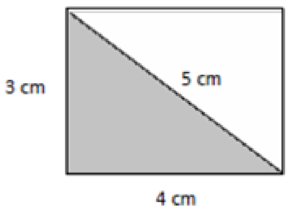
har jeg valgt å beskrive oppgavene med ett begrep. I analysen og diskusjonen vil det også bli sett på om de to baserer seg på hverandre.

Videre følger en tabell med nivå, oppgaver og noen eksempler på oppgaver, og deretter vil det bli gitt en beskrivelse av alle oppgavene ut fra nivåene.

Tabell 2. Oppgavesettet strukturert etter Tabell 1[6]*:*

Nivå	Oppgave	Eksempel
Nivå 0	Oppgave 3a og 3b (PK) Oppgave 4 (KOB)	 3a. Hva er omkretsen til figurene? A______ B_______ C_______ D_______ 3b. Hva er arealet til figurene? A______ B_______ C_______ D________
Nivå 1	Oppgave 2a og 2b (PK)	 2b Hvilken av figurene har størst areal? Sett ring rundt riktig svar. Figur 1 b. Figur 2 c. Likt areal d. Umulig å si, fordi …

[6] Noen oppgaver vil bli eksemplifisert i *Tabell 2,* de resterende finnes i Vedlegg 1

Nivå 2	Oppgave 5 (PK) Oppgave 7 (PK) Oppgave 8 (PK) Oppgave 9 (PK) Oppgave 11 (KOB) Oppgave 12 (PK)	9. Hva er arealet av figuren?  <u>A.16</u> <u>B.18</u> <u>C.15</u> D. Umulig å si, fordi_____________ 11. Hvilken av figurane har et areal på nærmest 4 cm²?  A Figur ______, B fordi______________________________ ____
Nivå 3	Oppgave 6 (KOB) Oppgave 10 (PK)	10. Rektanglet har et areal på 12 cm². Hva er arealet av den grå trekanten inn i rektanglet?  Arealet er_____________________________
Nivå 4	Oppgave 13 (KOB)	13. Sindre skal klippe en plen som har form som et rektangel. Den lengste siden er 6 meter lang. Omkretsen til plenen er 20 meter. Hva er arealet til plenen? Du kan gjerne tegne til oppgaven.

Oppgave 1 vil ikke bli beskrevet her, da denne ikke hadde fokus på areal, og dermed ikke er relevant ut fra det denne studien søker å finne svar på. Oppgave 2a og 3a handler om omkrets, men siden 2b og 3b handler om areal, er disse også tatt med for å se om elevene skiller mellom omkrets og areal.

Nivå 0: Oppgave 3b legger opp til å se om elevene skiller mellom omkrets og areal, ut fra om de teller antall ruter i figuren eller antall streker rundt. En kritisk faktor som er ønsket at elevene skal skille ut her er at det ved omkrets dreier seg om enheter langs ytterkantene på figuren (oppgave 3a), mens det for areal er enhetene inni figuren som er karakteristisk (oppgave 3b). Når det gjelder arealkunnskap på dette nivået skal elevene kunne identifisere måleenhet og gjenta denne. Fokus på enkeltfaktorer gjør at oppgaven plasseres på Nivå 0*: The base level.* I tillegg er den markert som å vise prosedyrekunnskap, da det blir lagt opp til at en kan telle hver enkelt enhet for å komme frem til svaret. Oppgavene kan også løses ved hjelp av andre strategier, og ved å vise til hvordan og hvorfor disse strategiene fungerer kan en også si at kunnskapen kan være basert på begrepsstrukturer.

Også oppgave 4 er delt inn i ruter, men derimot i ruter av ulik størrelse. Oppgaven ber eleven si noe om arealet, og målet er at de skal skille ut faktoren som går på at enhetene må være like store. Mens 3b legger opp til å vise prosedyrekunnskap, legger oppgave 4 opp til å vise kunnskap om begrepsstrukturer. Elevene må både vite at areal er det som flaten dekker og at det er av avgjørende betydning at enhetene er like store.

Nivå 1: Nivå 1 er dekkende for Oppgave 2. Oppgaven tester om elevene kan skille mellom omkrets og areal, ved at de må vite hva enheten for måling er i de to tilfellene. At oppgaven plasseres her, kommer av at elevene skal sammenligne arealet av to figurer med noe ulike egenskaper. Figurene inneholder et prikkmønster som kan fungere som utgangspunkt for en oppdeling av omkrets og areal. Oppgaven er markert med prosedyrekunnskap, fordi den legger opp til at elevene kan telle strekene og rutene som dannes av prikkmønsteret, for så å si noe om størrelsene ut fra antall enheter for hver figur.

Nivå 2: Oppgave 5 viser et rektangel med bare én kolonne og én rad med ruter dekket. En må vite at areal er flaten, og dermed også se at omkretsen indikerer antall ruter i hver kolonne og rad. Strukturen i flaten må bestå av enheter som er like store, og disse må dekke hele rektangelets flate. Ser en på den skriftlige testen alene kan en si at prosedyren om å tegne opp og telle er nok for å finne svaret.

Både oppgave 7 og 8 er markert med (PK), og det er her lagt opp til at de henholdsvis skal tegne opp etter oppgitt areal, samt regne areal av et rektangel med oppgitte sidelengder. Oppgave 7 gir rom for ulike løsningsforslag, da arealet skal være 12 cm^2 og figuren kan tegnes opp med ulike sidelengder som gir denne flaten. Det ligger her også noe geometrikunnskap i oppgaven, da kunnskap om figurers egenskaper vil være med på å bestemme sidelengdenes mål.

Oppgave 8 er en nokså abstrakt oppgave, ved at rektangelet ikke inneholder oppmerking for hvordan måleenhetene danner strukturen i flaten. Med oppgitte sidelengder legger oppgaven opp til å kunne bruke formelen for areal, og dermed til å vise prosedyrekunnskap. Det kan ligge en bredere forståelse for arealbegrepet til grunn, ved at en kan vise til hva de ulike komponentene ved formelen innebærer. Intervjuene vil gi innsikt i om elevene vet hva tallene på sidelengdene står for, og hvordan disse skal brukes. Løsningen kan plasseres både på lavere og høyere nivå, ut fra hva som ligger til grunn for løsningen. Begge oppgavene legger opp til en kobling mellom sidelengder og areal.

Elevene skal i oppgave 9 finne areal av et trapes, og her er et rutenett plassert bak figuren. Det kan gi elevene litt hjelp til å se hvordan enhetene kan tegnes opp i flaten. Oppgaven byr på utfordringer når det gjelder hele og ufullstendige enheter. Det innebærer for eksempel at en kan tenke seg at den halve ruta ytterst i midten blir flyttet over på den andre siden for å få en hel enhet. I tillegg utgjør alle de hele rutene et 3*4 rektangel, slik at en også kan bruke kunnskapen om figurenes egenskaper på veien for å løse oppgaven.

Oppgave 12 kan sies å utfordre mye av det samme som oppgave 9, da problemet her også er knyttet til et trapes. Her blir det oppgitt en kvadratisk enhet til å dekke flaten med. Det betyr at en må evne å legge enhetene tett i tett, uten gap eller overlapping. Siden det ikke bare vil bli hele ruter, må også forståelse for arealkonservering være på plass når det skal sies noe om hvor mye det er plass til i figuren. Prosedyrekunnskap kan i de to sistnevnte oppgavene bli vist dersom elevene kan ta i bruk en formel for å beregne areal av et trapes, eller dersom telling brukes som strategi. En bredere forståelse av disse oppgavene innebærer at kunnskapen består av flere faktorer, og at disse er koblet sammen. Det gjelder kunnskap om måleenheten, struktur og arealkonservering.

Den ellevte oppgaven ber elevene finne figuren som har areal nærmest 4 cm^2. Igjen vil det være nyttig med både geometrikunnskaper og arealkunnskap, selv om koblingen mellom disse kan brukes noe ubevisst. En må vite hva målene i de ulike figurene betyr, for eksempel at det i den tredje figuren står for diagonalen i kvadratet. Reversering av formel for beregning av areal er nødvendig, og elevene må da vite hvilken figur som har sidelengder som kan passe inn. Oppgave 11 er todelt, hvor elevene i A skal velge riktig figur, og B begrunne hvorfor. Dermed er oppgaven markert som å vise kunnskap om begrepsstrukturer.

Nivå 3: I oppgave 6 finnes målestreker og måleenheter langs sidene. Også her må elevene se sammenheng mellom antall ruter i hver kolonne og rad med det antallet måleenheter som er oppgitt langs sidene. På dette nivået trenger ikke elevene nødvendigvis å tegne opp rutene, men kan ut fra markeringene og sidelengdene som er oppgitt si noe om de ulike flatene som figuren består av. Arealet kan regnes ut ved å dele opp figuren i mindre figurer, for eksempel i to rektangler, ved å bruke oppgitt informasjon til å finne målene på sidelengdene til de mindre figurene. Oppgaven er markert som å vise kunnskap om begrepsstruktur. Den helhetlige figuren er gjerne ukjent for elevene, men ved hjelp av geometrisk tenkning og identifisering av rektangler fremstår to kjente figurer. Å koble geometrikunnskap og arealkunnskap kan dermed være nødvendig.

Når det gjelder å finne arealet til trekanten (oppgave 10), kan elevene enten tegne opp ruter, eller ta i bruk kunnskapen de har om areal og rektanglets egenskaper. Supplerer en med intervjuene, vil en her få svar på hvilken forståelse som ligger til grunn. Arealet av trekanten kan beregnes ved hjelp av formelen (grunnlinje*høyde)/2, og er slik sett lagt opp til å vise prosedyrekunnskap. Kunnskapen om at to trekanter utgjør en firkant, og at en ser sammenhengen mellom sidelengdene, diagonalen, og flatene som trekantene dekker, er her kritisk for å kunne løse oppgaven. Som nevnt i blant annet beskrivelsen til oppgave 8, kan prosedyrekunnskapen være basert på kunnskap om begrepsstrukturer dersom en kan grunngi hvorfor formelen fungerer, og hva de ulike komponentene ved den betyr.

Nivå 4: I oppgave 13 møter elevene den første tekstoppgaven. Informasjon om én sidelengde og omkretsen til plenen blir oppgitt, og dermed må flere delprosesser ved areal og geometri være på plass for å kunne si noe om arealet som plenen dekker. En må bruke kunnskap om rektangelets egenskaper til å finne de resterende sidene, vite hva omkretsen faktisk innebærer, og selvsagt vite hva areal innebærer. Bevegelse mellom kunnskap om areal og geometrisk tenkning er her nødvendig. Siden oppgaven legger opp til å se på arealet i en mer kompleks situasjon plasseres den på Nivå 4. Prosedyrer vil her være vanskelig å benytte, da koblinger mellom geometrikunnskaper og arealkunnskap må ligge til grunn for å vite hvilke prosesser som må gjennomføres. Det er lagt opp til at flere komponenter må knyttes sammen, og dermed at kunnskap om begrepsstrukturer må ligge til grunn.

Tabell 2 er konstruert med utgangspunkt i hvordan jeg ser at oppgavene er lagt opp, og ut fra beskrivelsene som ble brukt i *Tabell 1*. Som nevnt vil elevenes faktiske forståelser gjøre at oppgavene blir analysert og diskutert på andre nivåer.

3.5.2 Kritiske faktorer

I forkant av prosjektet utarbeidet doktorgradsstipendiaten i samarbeid med de tre lærerne en oversikt over faktorer som er kritisk i forståelsen av arealbegrepet. Fortesten elevene gjennomførte før undervisningen tok til, bidro til å oppdage flere faktorer som bli sett på som kritiske i læringen. Det vi så etter fortesten var at mange elever hadde problemer med å:

- Oppfatte at måleenhetene må være like store
- Finne areal uten å telle ruter
- Finne areal når det er halve ruter
- Finne areal av trekanter.

Ser en disse punktene opp mot *Tabell 1*, kan de plasseres på ulike nivåer. Det første punktet er helt grunnleggende i den begynnende arealforståelsen, og inngår i kunnskapen på Nivå 0. Skal elevene finne arealet uten å telle ruter, punkt to, innebærer dette enten at de kan sammenligne med noe, se for seg strukturen eller bruke formel for beregning. Hvilket nivå denne kritiske faktoren kan knytes til, avhenger av hva problemet er og hvordan det blir løst. Når det gjelder å finne areal når det er halve ruter er disse knyttet opp mot oppgave 9 og 12 fra oppgavesettet, og legger opp til konservering av areal (Nivå 2). Det siste punktet er mer komplekst, og dersom trekanten ikke er dekket av ruter må geometrikunnskaper trekkes inn, sett at en ikke har memorert en formel for beregning av areal for trekanter. Av løsningene på oppgave 10 kan en se om elevene har skilt ut dette, i utgangspunktet knyttet til Nivå 3.

Noen elever hadde også problemer som gikk på å koble antall ruter med lengdemålene, at kvadratcentimeter er rutene inni figurene, finne sider når arealet er oppgitt, skille mellom omkrets og areal, og så videre. Alle de nevnte faktorene er kritiske for at elevene skal kunne oppnå en helhetlig forståelse av arealbegrepet.

Videre følger kritiske faktorer som en av lærerne i prosjektet hadde lagt inn i et planleggingsdokument for en av undervisningsøktene knyttet til areal:

Forventede kritiske faktorer: - Elevene blander sammen areal og omkrets. - Elevene er usikre på måleenhetene for areal. De trenger øving på å oppfatte at måleenhetene må være like store. - Elevene kan tegne og telle ruter, men klarer ikke å koble tallet på ruter med lengdemålene langs kantene. - Elevene har ikke klart for seg hva arealenhetene står for: Areal av kvadrat med gitt enhet.

Læringsobjektet som disse ble formulert ut fra var: «Forstå at areal er et mål på flaten inni figuren. Elevene skal bli kjent med de ulike standardiserte måleenhetene for areal: cm^2 -dm^2- m^2 – km^2. I denne sammenheng spesielt arbeide med cm^2 og m^2»[7]. Av punktene over ser en at planlagt arbeid med kritiske faktorer er på et grunnleggende nivå. Det går for eksempel på et en må øve på at enhetene for måling er like store, å tegne og telle ruter, og skille mellom omkrets og areal. Dette er ut fra *Tabell 1* arbeid rettet mot kunnskap på *Nivå 0.* Siden undervisningen ikke er fokuset for denne studien, vil ikke arbeidet med kritiske faktorer bli diskutert ytterligere.

3.6 Analyse

For å analysere datamaterialet ble det teoretiske rammeverket presentert i kapittel 2 brukt, med fokus på innholdet i *Tabell 1* og *Figur 1*. Intervjuene basert på ettertestene var grunnlaget som det teoretiske rammeverket skulle brukes på. Målet var å få innsikt i hva elevenes forståelse innebar slik den fremkom. Derfor var det også nyttig å knytte prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer til det som kom til uttrykk.

[7] Hele planleggingsdokumentet ligger som vedlegg (Vedlegg 8). Er i teksten oversatt fra nynorsk til bokmål.

Elementene innenfor det teoretiske rammeverket spilte ulik rolle i analysen. Areal består av flere komponenter som er kritiske for helhetsforståelsen. Teori om arealmåling hjalp med å plukke ut hva som var viktig i det som ble sagt, og i det som ble gjort på testen. Det gav også en forståelse for hvorfor oppgavene ble løst og forklart slik de ble. Testene og intervjuene viste hvilken kunnskap som kom til utrykk, og hvilken forståelse som lå bak. En nærmere kikk på dette gjorde at ikke bare arealbegrepet kom til syne, men også geometriske betraktninger. Variasjonsteori var med i planlegging og gjennomføring av undervisning, og påvirket dermed mitt syn på arealbegrepet; som et læringsobjekt hvor flere faktorer er kritiske for forståelsen. For å kunne si noe om elevenes forståelser, var prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer sentrale i beskrivelsene. Begrepene representerte begge viktige egenskaper ved forståelsen, og kunne på den måten være med på å nyansere diskusjonen av hva forståelsene faktisk innebar. Målet var her å se begrepene i samspill for å best mulig beskrive det som kom frem.

Tabell 1 og *Figur 1* ble konstruert med mål om å besvare problemstillingen best mulig, og for å få fram interessante aspekter ved denne. Kompleksiteten dette rammeverket byr på er for meg en spennende innfallsvinkel til problemstillingen. Den nivåbaserte modellen spilte en viktig rolle i beskrivelsen av datamaterialet når det gjaldt hvilke faktorer som forekom i forståelsene. Den spilte også en rolle for strukturen i presentasjonen av funnene. Bildet bestående av puslebrikker bidro til å se på hvordan faktorene i forståelsene hang sammen. I tillegg var det et nyttig bilde å ha i bakhodet når en skulle snakke om de helhetlige forståelsene som kom frem. Datamaterialet ble gjennom hele analyseprosessen og diskusjonen sett i lys av det teoretiske rammeverket fra kapittel 2.

3.7 Metodens gyldighet og troverdighet

Reliabilitet og validitet er med på å si noe om samme metode kan gi de samme svarene i en tilsvarende undersøkelse, og om det intensjonen er å undersøke blir undersøkt. Når det gjelder kvalitativ metode blir ofte pålitelighet eller troverdighet brukt for begrepet reliabilitet, mens gyldighet blir brukt for validitet (Krumsvik, 2014). Siden dette i hovedsak er en kvalitativ studie kan det bli sagt noe om forskningens pålitelighet først og fremst ved å gjøre rede for hvordan data er samlet inn, behandlet og analysert. Thagaard (2013, s. 193) påpekte at «I samsvar med den kvalitative forskningens fortolkende karakter er det en viktig målsetting at kvalitative tekster representerer en forståelse av de fenomener forskeren studerer». Ved å hele tiden sørge for at de ulike delene ved denne studien samsvarer med problemstilling og forskningsspørsmål, vil en rød tråd holde teksten sammen. Det vil kunne bidra til at den kvalitative teksten representerer funn knyttet til noen elevers forståelse av areal, og hvordan begrepssammenhenger forekommer.

Det er gjort beskrivelser av og refleksjoner rundt valg knyttet til forskningsprosessen, og en åpenhet rundt dette gjør at andre kan gjennomføre en studie inspirert av denne. Grunnen til at jeg sier inspirert, er at det ved kvalitative metoder, her intervju, kan være flere årsaker til at utfallet blir som det blir. Krumsvik (2014) viste til at det i forbindelse med kvalitative metoder ikke vil være snakk om at noe er direkte etterprøvbart, men ved at metoden er transparent vil reliabiliteten likevel kunne styrkes.

Når det gjelder intervjuene, kan utfallet av disse bli noe ulikt, da intervjuene var semistrukturerte uten noen fastlagt intervjuguide. Likevel har jeg som forsker vært åpen om målet om å få frem elevenes forståelser, og brukt en semistrukturert intervjuguide som var utgangspunkt for de seks intervjuene. Ved å ta i bruk en slik intervjuguide, og med et slikt mål vil intervjusituasjonen kunne bli delvis lik. Derfor kan en si at funnene kan være overførbare, men at de ikke kan generaliseres (Thagaard, 2013). At undersøkelsen ikke blir direkte etterprøvbar handler også om roller og relasjoner i intervjuet, og at svarene elevene gir spiller en rolle for retningen intervjuet tar. Mitt ståsted og mine erfaringer, sammen med de ulike synene elevene har på arealbegrepet, har påvirket hvordan forskningen har foregått og hvilket datamateriale som har blitt samlet inn. Ved å være åpen om intervjusituasjonen, transkriberingsprosessen, hvordan datamaterialet ble analysert, samt avgrense studien ved å legge et teoretisk rammeverk til grunn, vil en kunne bidra til å gjøre forskningsprosessen transparent. Denne åpenheten kan bidra til å styrke studiens troverdighet (Thagaard, 2013). Metodekapittelet med presentasjoner av valg og begrunnelser for disse har på den måten bidratt til å gjøre forskningsprosessen så gjennomsiktig som mulig.

Studiens validitet er knyttet til om resultatene fra forskningen er representative for den virkeligheten det er forsket på, eller om det som er blitt undersøkt var intensjonen å undersøke (Krumsvik, 2014; Thagaard, 2013). Semistrukturerte intervju ble ansett som en informativ metode for å få frem elevenes faktiske forklaringer. Intervjusituasjonen åpnet også for at jeg som forsker kunne være noe styrende, slik at elementer i samtalen ble relevant for studiens formål. Ved bruk av andre metoder ville jeg ikke fått den direkte kontakten med elevene, og intervjuene gav i tillegg mulighet for å basere tolkningene på direkte sitater fra det elevene sa.

Ved å ta i bruk videoopptak av intervju basert på skriftlig ettertest, kan informasjon trekkes ut av både det skriftlige og det muntlige materialet. I tillegg deltok flere elever, samt at dataene ble fremstilt i et kvantitativt- og et kvalitativt analysekapittel. Disse aspektene har hatt en triangulerende effekt og gitt mulighet for å oppnå et sterkere grunnlag for funnene og en mer nyansert innsikt i hvordan elevene forstår arealbegrepet. Det betyr ikke at det får frem noe som kan bli sett på som en sannhet, men at det får frem flere perspektiver ved det som blir undersøkt (Marshall & Gretchen, 2011). Elevenes forståelser er representert på flere måter, og også uttrykt både skriftlig og muntlig. Dette bidrar til å styrke metodens validitet (Krumsvik, 2014).

Datamaterialet gir grunnlag for å besvare problemstillingen for oppgaven ved at forståelse er en sentral del av både materialet og forskningsområdet. Det teoretiske rammeverket er komplekst ved at det inneholder to egenkonstruerte modeller, hvor begge forener areal og geometrisk tenkning. Analyseverktøyet er utviklet i samspill med innsamlingen og bearbeidingen av datamaterialet. Problemstillingen gir retninger for forskningen, analysen og diskusjonen, og ved å være åpen om valg gjennom forskningsprosessen og hvordan disse er begrunnet, vil troverdigheten og gyldigheten for denne studien kunne sies å være styrket.

Siden dette er en kvalitativ studie med få intervjupersoner, vil det være vanskelig å generalisere funnene som er gjort. Målet er her ikke å kunne si noe generelt, men å legge vekt på at funnene kan være en døråpner for ny innsikt, og ikke minst nyttig innsikt når det gjelder begrepssammenhenger i elevenes forståelser av areal. Undervisningen som ble gjort i dette prosjektet baserte seg på prinsipper fra variasjonsteori, og det ville dermed vært en forutsetning at det ved andre anledninger også ble gjort, da det kan ha hatt innvirkning på elevenes måter å se emnet på. Det har også påvirket mitt syn når det gjelder å se på matematiske emner.

3.8 Forskningsetikk og metodekritikk

Det har blitt tatt flere hensyn underveis i forskningsprosjektet og datainnsamlingen. Først og fremst har NSD godkjent prosjektet, og elevene har fått samtykke fra foreldre til å delta, også i intervju. Deretter har det vært opp til eleven selv når det gjelder å delta eller ei i intervjusituasjoner. For å ivareta intervjupersonens anonymitet er lydklipp og videofilm oppbevart i en kode- og passordbelagt forskningsdatabase knyttet til Høgskolen i Bergen. Videre er elevene i transkripsjonene markert med elevnummer, noe som også er blitt gjort i analysen. Dette gjør at det ikke er mulig å identifisere intervjupersonene. I transkripsjonene er det tatt hensyn til at dialekt kan identifiseres, og dermed er disse gjengitt på bokmål. Muntlige ytringer, som «eh» og «ehm» er ikke tatt med, fordi det hindrer flyt i forklaringene, og fordi det heller ikke er viktig i forståelsen av det som er formidlet.

Det er knyttet ulik type påvirkning til samspillet mellom forsker og intervjuperson. Dette kan både handle om maktrelasjonene mellom voksen og barn, og mellom forsker og elev, samt forskerens måte å se situasjonen på. Kvale et al. (2009, s. 70) tar opp det moralske perspektivet i situasjonen, og skriver at «Det er knyttet moralske spørsmål både til intervjuundersøkelsens midler og til dens mål». Spesielt i transkribering og analyse av datamaterialet har det vært viktig å forholde seg nøytral. I utskriften av det som er blitt sagt i intervjuene har jeg notert ned utsagn slik eleven selv har sagt det, men tatt noen valg når det gjelder om utsagn og gester er relevant å ha med eller ei. Da er det ikke snakk om utsagn knyttet til forklaringer, men avsporinger som ikke gir nyttig informasjon for å besvare problemstillingen. Deltakerne har ikke vært til stedet under analyseprosessen, og som ansvarlig for tolkningen har det dermed vært viktig å forholde seg til et korrekt materiale, samt å bruke et godt bearbeidet analyseverktøy. Fokuset har slik vært å ivareta virkeligheten på best mulig måte.

Som forsker har en et ansvar når det gjelder om funnene man offentliggjør er nøyaktige og representative for de faktiske opplysningene. Kvale et al. (2009) skrev om etiske krav i forbindelse med den vitenskapelige kvaliteten, og denne vitenskapelige kvaliteten er forankret i forskningens validitet og reliabilitet. For å ivareta best mulig kvalitet ble intervjuene gjennomgått flere ganger, og det ble også sjekket at utsorteringen av unyttig informasjon stemte. Når det gjelder å se på elevenes forståelse, får en ikke med mer av elevenes forståelse enn det som blir etterspurt. Det vil si at grad av oppfølgende spørsmål har hatt noe å si for informasjonen som kom frem. Mangel på oppfølgende spørsmål kan ha gjort at noe kunnskap ikke ble vist, og det var derfor enda viktigere å ikke plassere elevene på nivå, men si noe om forståelsene som ble vist.

4 Presentasjon av testresultater – kvantitativ analyse

En kvantitativ analyse av datamaterialet innebærer at dataene er tallfestet, og kan si noe om kvantumet. Målet med denne masteroppgaven er å få frem hvilke begrepssammenhenger knyttet til forståelse av areal som finnes hos høytpresterende elever i 5.klasse, og blant annet hvordan prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer kommer til utrykk. Å starte med en analyse av elevenes resultater på testene vil først og fremst gi en oversikt over hver enkelt elevs score på de tre testene. Mens analysen i dette kapittelet vil peke på ulike aspekter ved resultatene, vil kapittel 5 vise innsikt i datamaterialet ved å se på hvilke faktorer som finnes, hvordan de henger sammen og hvilken forståelse som faktisk ligger til grunn.

Resultatene i dette kapittelet viser at elevene presterer høyt på emnet, spesielt på ettertesten hvor elevene scorer mellom 86,36 % og 100 %. I innledningskapittelet ble høy prestasjon i matematikk sett på som å ha et bredere syn på matematikken, og å fokusere på emner i sammenheng, slik at kunnskapen kan brukes meningsfullt. Hiebert og Lefevre (1986) refererte til kompetente matematikere som å ha kjennskap til begreper og komponenter, i tillegg til hvordan disse er knyttet sammen. Resultatene viser at flere faktorer ser ut til å være på plass, mens sammenhenger mellom disse ikke kan sies noe om. Ved å se på hvilke oppgaver som er gjort rett og feil, i sammenheng med hvilket nivå oppgavene legger opp til, kan en også si at noen elever presterer høyt på fortest, mens alle presterer høyt på ettertest og sen ettertest. Likevel kan en ut fra hva oppgavene legger opp til si at det ligger noen spesifikke og noen mer komplekse feil til grunn.

Presentasjonen av kvantitative data vil foregå i tabeller med tilhørende tekst. To og to elever blir presentert i samme tabell, men beskrivelse av testresultatene vil foregå individuelt for hver elev. Til slutt vil et oppsummerende avsnitt med likheter og forskjeller mellom resultatene fra de seks elevene kunne si noe om hva som ser ut til å forekomme i forståelsene.

4.1 Resultattabell Elev 1 og Elev 2

Tabellen under viser testresultatene for Elev 1 og Elev 2, både når det gjelder fortesten, ettertesten og den sene ettertesten. Dersom en oppgave er gjort rett er den markert med X, mens den er market med O dersom den er gjort feil. For å gjøre forskjellen mer synlig er oppgavene som er feil besvart også markert med gult. Med informasjonen fra tabellen vil det bli gitt en beskrivelse av hva resultatene for hver elev indikerer, hvilket nivå oppgavene er plassert på og hvilke faktorer som inngår. Det blir også tatt i betraktning hvilken type kunnskap oppgavene legger opp til å vise.

Tabell 3: Testresultater fra Elev 1 og Elev 2

	Elev 1 Fortest	Elev 1 Ettertest	Elev 1 Sen ettertest	Elev 2 Fortest	Elev 2 Ettertset	Elev 2 Sen ettertest
1	X	X	X	O	X	X
2a	X	X	X	O	X	X
2b	X	X	X	X	X	X
3aA	X	X	X	O	O	X
3aB	X	X	X	O	X	X
3aC	X	X	X	O	X	X
3aD	X	X	X	O	X	X
3bA	X	X	X	O	X	X
3bB	X	X	X	O	X	X
3bC	X	X	X	O	X	X
3bD	X	X	X	O	X	X
4	X	X	X	O	X	X
5	X	X	X	X	X	X
6	X	X	X	X	X	X
7	X	X	X	X	X	X
8	X	X	X	X	X	X
9	X	X	X	X	O	X
10	O	X	X	O	X	X
11a	O	X	X	O	O	O
11b	O	X	X	O	X	O
12	X	X	X	O	X	O
13	O	O	X	O	X	X
Resultat	18/22	21/22	22/22	6/22	19/22	19/22
Resultat %	81,82 %	95,45 %	100 %	27,27 %	86,36 %	86,36%

4.1.1 Elev 1

Av *Tabell 3* ser en at Elev 1 jevnt over scorer høyt. Fra fortesten er oppgavene 10, 11a, 11b og 13 gjort feil. Dette er oppgaver som utfordrer til å finne arealet av en trekant som del av et rektangel, og å finne riktig figur når arealet og alternative figurer er oppgitt, samt begrunne hvorfor. Oppgave 13 handler om å vise en mer kompleks tenkning rundt areal og omkrets, sammen med figurens egenskaper. Oppgavene er plassert på henholdsvis Nivå 3, Nivå 2 og Nivå 4. Både 11a, 11b og 13 er markert som å vise kunnskap om begrepsstrukturer, mens oppgave 10 legger opp til å vise prosedyrekunnskap. Måleenhet og gjentakelse av denne, sammenligning, arealkonservering, bruk av formel og noe sammenheng mellom areal og omkrets ser ut til å være på plass allerede på fortesten. Resultatene for ettertesten viser at oppgave 13 fremdeles er feil besvart, og dermed at det er gjort rett på oppgaver av Nivå 0-3. Samme oppgave er gjort rett på den sene ettertesten, til tross for at det ikke har foregått noe undervisning mellom disse testene.

Med 18/22 rett på den første testen, viser dette allerede høy prestasjon på emnet. Likevel viser feilene som er gjort at mer kunnskap om begrepsstruktur ser ut til å måtte ligge til grunn for å kunne løse også de fire siste oppgavene rett, både ved å koble kunnskap om geometri og areal, samt kunne reversere formel. På ettertesten er oppgaven hvor helhetlig tenkning må ligge til grunn markert som feil. I flere av de andre oppgavene må en også se sammenhenger mellom faktorer, slik at en likevel kan si at det både ligger kunnskap om faktorer og sammenhenger mellom dem til grunn i forståelsen, men at bevegelsen mellom kunnskapsnett ikke ser ut til å være fullstendig. På de to siste testene viser oppgavene som er rett besvart at mer kompleks tenkning ligger til grunn, og at areal av trekant, samt hvordan areal kan knyttes til rett figur også er gjort rett. Full score på den siste testen indikerer at faktorene som testen legger opp til er skilt ut.

4.1.2 Elev 2

For Elev 2 viser tabellen ovenfor at seks oppgaver er markert som rett på fortesten; oppgave 2a og oppgave 5-9. Oppgave 2a handler om å sammenligne omkrets, mens 2b som er feil besvart handler om å sammenligne areal. Nivå 0 fra *Tabell 1* innebærer blant annet at en kan skille mellom omkrets og areal, hvilket ikke ser ut til å være skilt ut her. Oppgavene 5-9, med unntak av oppgave 6, er plassert på Nivå 2. Oppgavene som er gjort rett, Nivå 1-3, handler om kunnskap om formel for areal, gjentakelse av måleenhet og å strukturere flate. Både oppgave 5, 7, 8 og 9 legger opp til å vise prosedyrekunnskap. Ut fra *Tabell 2* er oppgave 6 plassert på Nivå 3, og innebærer å se på hvordan strukturen i figuren dannes. På fortesten kan feilene som er gjort knyttes til alle de fem nivåene. At alle deloppgaver fra oppgave 3 er besvart feil, kan tyde på at måleenhet for omkrets og areal ikke er på plass. Oppgavene som er markert som feil legger opp til at elevene må ta i bruk spesifikk kunnskap, som gjentakelse av måleenhet, og at denne må være av samme størrelse. Noen av oppgavene legger også opp til mer helhetlig forståelse, hvor sammenhenger mellom faktorer ved areal og mellom areal og geometri må ligge til grunn.

På ettertesten har antall rette oppgaver økt til 19, og feilene som er gjort her er oppgaver på Nivå 0 og Nivå 2, henholdsvis oppgave 3aA på det første, og 9 og 11a på det andre. Dette viser dermed at oppgaver på alle nivå er gjort rett på ettertesten. Oppgavene som er rett besvart legger opp til å kunne si noe om hva omkrets innebærer, å gjenta måleenhet, sammenligne areal, strukturere flater, beregne areal for trekant, konservere areal og å tenke mer helhetlig om arealbegrepet. Til tross for at arealkonservering i oppgave 12 ser ut til å lykkes, viser oppgave 9 at det også er gjort feil knyttet til dette på ettertesten. Oppgave 3aA og 11a viser at noe knyttet til omkrets og å koble areal til rett figur ikke er helt på plass. Dermed kan det se ut til at noen faktorer ikke fullt ut er skilt ut.

På den sene ettertesten er oppgave 11a fremdeles markert som feil, mens 11b og 12, som også var feil på fortesten, igjen er markert som feil på den sene ettertesten. Når det gjelder arealkonservering er oppgave 9 besvart rett, mens oppgave 12 igjen er feil. Resultatene tyder på noe ustabilitet i besvarelsene, selv om selve scoren på de to siste testene er lik. Elev 2 er den med mest økning mellom fortest og ettertest. Ved at oppgaver basert på mer komplekse sammenhenger er besvart rett, kan det tyde på at det er spesifikk kunnskap som fremdeles er manglende, og som dermed trenger fokus i den videre utviklingen av Elev 2 sin forståelse. At eleven har 6/22 rett på fortesten kan tyde på at h*n ikke har nok bakgrunnskunnskap for å kunne besvare oppgaver hvor spesifikk, men også kompleks, kunnskap må ligge til grunn. Eleven viser senere høy prestasjon ved å oppnå over 90 % rett på de to siste testene, hvor det kan se ut til at forståelsen er varig og basert på både spesifikk og kompleks kunnskap.

4.2 Resultattabell Elev 3 og Elev 4

Som for Elev 1 og Elev 2 vil også resultatene for Elev 3 og Elev 4 bli presentert i én tabell. Tabellene viser her få feil hos begge elevene, samt 21/22 rett på ettertest.

Tabell 4: Testresultater fra Elev 3 og Elev 4

	Elev 3 Fortest	Elev 3 Ettertest	Elev 3 Sen ettertest	Elev 4 Fortest	Elev 4 Ettertest	Elev 4 Sen ettertest
1	X	X	X	X	X	X
2a	X	O	X	X	X	X
2b	X	X	X	X	X	X
3aA	X	X	X	O	X	X
3aB	O	X	X	X	X	X
3aC	X	X	X	X	X	X
3aD	X	X	X	X	X	X
3bA	X	X	X	X	X	X
3bB	X	X	X	X	X	X
3bC	X	X	X	X	X	X
3bD	X	X	X	X	X	X
4	O	X	X	X	X	X
5	X	X	X	X	X	X
6	X	X	X	O	X	X
7	X	X	X	X	X	X
8	X	X	X	O	X	X
9	X	X	X	X	X	X
10	O	X	X	O	X	X
11a	O	X	X	O	O	O
11b	X	X	X	O	X	X
12	O	X	X	O	X	O
13	X	X	X	X	X	X
Resultat	17/22	21/22	22/22	15/22	21/22	20/22
Resultat %	77,27 %	95,45 %	100 %	68,18 %	95,45 %	90,90 %

4.2.1 Elev 3

Av *Tabell 4* ser en at oppgaver fra fortesten som legger opp til fokus på måleenhet, sammenligning av areal, bruk av formel, strukturering av flate, arealkonservering og helhetlig tenkning ser ut til å være på plass for Elev 3. På fortesten har eleven rett på oppgaver av alle nivå. Oppgavene 3aB og 4 (Nivå 0), 10 (Nivå 3), 11a og 12 (Nivå 2) er markert som feil.

Oppgavene som er feil besvart har med omkrets å gjøre, størrelsen på måleenhetene, areal av trekant som del av et rektangel, å knytte areal til rett figur og arealkonservering. Informasjonen som her kommer frem, viser at mye er på plass, men også at det er noen mangler.

I kolonnen for ettertesten er det bare én oppgave som er markert som feil, 2a, og denne er også forskjellig fra feilene på fortesten. Oppgaven er plassert på nivå 1, og ber eleven sammenligne omkretsen av to figurer. Samtlige oppgaver av høyere nivå er gjort rett både på ettertesten og den sene ettertesten. Den sene ettertesten viser full score. Ut fra resultattabellen ser Elev 3 ut til å ha skilt ut alle faktorer som testen legger opp til å skille ut, ved at eleven ser noen sammenhenger. Siden oppgavesettet både legger opp til prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer, kan det se ut til at begge ligger til grunn i forståelsen. Det vil her være vanskelig å si noe om hva som kan være kritisk i ytterligere utvikling av denne elevens forståelse, da andre figurer og andre problemer knyttet til areal ikke er tatt med i denne testen. Eleven viser høy prestasjon ved at alle komponenter her er på plass. Det innebærer spesifikk kunnskap og å kunne se sammenhenger innenfor arealbegrepet, samt å koble dette til geometrisk tenkning. Scoren på spesielt de to siste testene ser også ut til å være varig, slik det ble nevnt i forbindelse med høy prestasjon i kapittel 1.

4.2.2 Elev 4

I likhet med Elev 3 viser også resultatene for Elev 4 en nokså jevnt høy score, bare at det fra ettertest til sen ettertest blir én mer feil. Sju oppgaver er markert som feil på fortesten. Oppgave 3aA (Nivå 0) innebærer kunnskap om omkrets, oppgave 8 om å beregne areal av rektangel med oppgitte sidelengder og 11a og 11b om å plassere rett figur til arealet som er oppgitt og begrunne hvorfor. Oppgave 12 (Nivå 2) legger opp til å dekke planet med måleenhet og å konservere areal, mens 6 og 10 (Nivå 3) handler om å finne areal av sammensatte figurer. Oppgaver knyttet til sammenligning av areal, strukturering av flater, noe konservering og helhetlig tenkning er på plass allerede før undervisning. Oppgavene som er gjort rett på fortesten kan plasseres på alle nivå med unntak av Nivå 3, hvor begrunnelse av struktur og utregningen av arealet er mer knyttet til geometriske egenskaper. I likhet med fortesten er oppgave 11a fremdeles markert som feil på ettertesten. Faktorene som tilsynelatende ikke var skilt ut før undervisningen startet, kan ut fra resultattabellen se ut til å være det på ettertesten. Oppgave 12 blir igjen besvart feil på den sene ettertesten, og resultatet på oppgave 11a består også. Til tross for at scoren ble omtalt som nokså jevnt høy, viser det noe ustabilitet når det gjelder arealkonserveringen som oppgave 12 legger opp til. Likevel ser det også her ut til at de fleste faktorer er skilt ut, men at noe spesifikk kunnskap knyttet til arealkonservering i oppgave 12 er manglende.

4.3 Resultattabell Elev 5 og Elev 6

Den siste tabellen med resultater viser Elev 5 og Elev 6 sine scorer på de tre testene. Tabellene viser til at omtrent de samme oppgavene som ble gjort feil hos de andre elevene på ettertest og sen ettertest også er gjort feil her. Resultatene på ettertest og sen ettertest ser ut til å være stabil både for Elev 5 og Elev 6.

Tabell 5: Testresultater fra Elev 5 og Elev 6

	Elev 5 Fortest	Elev 5 Ettertest	Elev 5 Sen ettertest	Elev 6 Fortest	Elev 6 Ettertest	Elev 6 Sen ettertest
1	X	X	X	X	X	X
2a	X	X	X	O	X	X
2b	X	X	X	X	X	X
3aA	O	X	X	X	X	X
3aB	X	X	X	X	X	X
3aC	X	X	X	X	X	X
3aD	O	X	X	X	X	X
3bA	X	X	X	X	X	X
3bB	X	X	X	X	X	X
3bC	X	X	X	X	X	X
3bD	X	X	X	X	X	X
4	O	X	X	X	X	X
5	O	X	X	X	X	X
6	X	X	X	X	X	X
7	O	X	X	X	X	X
8	X	X	X	X	X	X
9	O	X	X	X	X	X
10	X	X	X	O	X	X
11a	O	O	O	X	O	X
11b	O	O	O	X	O	O
12	O	X	X	O	X	X

13	O	X	X	X	X	X
Resultat	12/22	20/22	20/22	19/22	20/22	21/22
Resultat %	54,55 %	90,90 %	90,90 %	86,36 %	90,90 %	95,45 %

4.3.1 Elev 5

Elev 5 har gjort rett på litt over halvparten av oppgavene på fortesten, men har økt antall rett til 20/22 på både ettertest og sen ettertest. Feilene fra fortesten kan plasseres på tre nivå fra *Tabell 1*; oppgave 3aA, 3aD og 4 på Nivå 0, Oppgave 5, 9, 11a, 11b og 12 på Nivå 2 og oppgave 13 på Nivå 4. Ser en dette i sammenheng med *Tabell 1,* kan det tenkes at feilene er relatert til omkretsbegrepet, forståelse for at måleenhetene må være like store, arealkonservering, inndeling av figurer, reversering av formel og kompleks tenkning rundt arealbegrepet. Dette er oppgaver som både legger opp til å vise kunnskap om enkeltfaktorer, men også til å basere forståelsen på kunnskap om begrepsstrukturer. Feilene indikerer dermed at forståelsen for arealbegrepet generelt har noen mangler.

Ser en på ettertesten og den sene ettertesten er det to feil, oppgave 11a og 11b, begge på Nivå 2. Oppgave 11 viser til figurer både av kjente og ukjente former, og legger opp til at areal skal kobles til rett figur. Dette innebærer en forståelse for hvordan sidelengder og areal henger sammen, samt en evne til å beregne omtrentlig. Bare oppgave 11 er feil på de to siste testene, hvilket kan tyde på at de fleste faktorene fra testen er oppfattet. Både prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer ser ut til å ligge til grunn ut fra oppgavene som er rett besvart. Det kan dermed tyde på at en del spesifikk kunnskap og sammenhenger mellom faktorer er på plass. Scoren innebærer i tillegg det samme i de to testene, noe som indikerer at forståelsen som ligger til grunn er varig.

4.3.2 Elev 6

Tabell 5 viser også at Elev 6 har hatt en jevnt høy score på de tre testene, med 19/22 riktige allerede på fortesten, 20/22 riktige på ettertesten og 21/22 riktige på den sene ettertesten. Dette viser at en del av arealbegrepet må være på plass, uten at en kan si noe mer om hva forståelsen faktisk innebærer. Det en imidlertid kan si, er at oppgavene som er gjort feil på fortesten er oppgaver på Nivå 1, 2 og 3, henholdsvis oppgave 2a, 12 og 10. Oppgave 11 a og b (Nivå 2) er gjort feil på ettertesten, og kun 11b på den sene ettertesten. Når det gjelder feilene fra fortesten, tilsier disse oppgavene at det har noe å gjøre med omkrets, plassering av enheter på flaten og arealkonservering, samt areal av trekanten. Feilene knyttet til oppgave 11 handler om å velge riktig figur til det oppgitte arealet, og å begrunne hvorfor. Hvorfor-aspektet er manglende i de to siste testene, men for å kunne velge riktig kan det likevel ligge noen koblinger mellom sidelengder og areal til grunn. 11b er eneste feil på sen ettertest. Den høye prestasjonen kan også her relateres til hvordan det ble definert i innledningskapittelet, ved at faktorer og sammenhenger mellom dem ser ut til å være på plass, samt at prestasjonen tilsynelatende er varig.

4.4 Oppsummering

Fra fortesten ser en at oppgave 10 (Nivå 3) og 11a (Nivå 2) er oppgaver hvor 5 av de seks elevene har gjort feil. Disse oppgavene er basert på at elevene allerede har en del kunnskap om arealbegrepet, da det dreier seg om å bruke kunnskap om formel og oppdeling av figurer (10), samt om å snu om på formelen for areal (11). Deloppgaver knyttet til oppgave 3 (Nivå 0), og oppgave 5-9 (Nivå 2 og 3) er kun feil besvart av enkelte, og dermed er dette oppgaver som de fleste elevene var i stand til å løse før undervisningen startet. Flere av deloppgavene knyttet til oppgave 3 og 5-9 byr på visuelle bilder, hvor elevene kan telle og tegne, og legger opp til å vise prosedyrekunnskap. Den mest komplekse oppgaven, 13, er gjort rett av halvparten av elevene på fortesten. Oppgave 10, 11 og 13 er oppgaver hvor flest elever har gjort feil, hvilket kan komme av at en må vite noe om hvordan figurene er bygd opp, og hvordan og hvorfor formelen for areal fungerer. Dermed kan det tenkes at nok bakgrunnskunnskap ikke ligger til grunn.

På ettertesten er det generelt gjort lite feil. Oppgave 2a (Nivå 1), 3aA (Nivå 0), 9 (Nivå 2) og 13 (Nivå 4) er hver gjort feil av enkeltelever, mens 11a og 11b (Nivå 2) er gjort feil av to elever. I de tre førstnevnte oppgavene er det lagt opp til å vise prosedyrekunnskap, og i tillegg skal elevene i to av oppgavene vise kunnskap om omkrets. Kunnskap om omkrets må også ligge til grunn for å kunne skille mellom omkrets og areal. Siden oppgave 12 er gjort rett av alle og i likhet med oppgave 9 innebærer arealkonservering, kan det tenkes at samtlige elever i alle fall har en begynnende forståelse for dette. Oppgave 11a, 11b og 13 kan ikke uten videre kun beregnes ved hjelp av lærte prosedyrer, da de legger opp til å vise at en må vite hva formelen for areal innebærer og hvilken informasjon som er nødvendig. Det er imidlertid bare enkelte elever som har gjort feil på disse, i tillegg til at flere andre oppgaver som er rett besvart også legger opp til å skille ut noen av de samme faktorene.

Når det gjelder den sene ettertesten ser oppgave 11 a og b fremdeles ut til å være litt trøblete, og oppgave 12 kommer inn som en ny feil igjen. En kan si at resultatene fra den sene ettertesten sier noe om en varig score, da resultatene her i stor grad er de samme som på ettertesten. De innebærer likevel noen andre feil enn dem som ble gjort på ettertesten, hvilket kan indikere at forståelsen på noen områder ikke er helt fullstendig.

Å være høytpresterende ble sett i sammenheng med prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer, samt det å vise helhetlig og varig prestasjon. Til tross for at scoren på fortesten er noe ulik mellom elevene, scorer samtlige elever høyt på ettertest og sen ettertest. Scorene mellom 86,36 % og 100 % på ettertest viser at det er noen forskjeller, men at scorene som vises for hver elev ser ut til å være noen lunde stabil mellom ettertest og sen ettertest. Det betyr at forståelsene også må være på plass en tid etter undervisningen. Noen av elevene ser ut til å ha mangler i forståelsen på ettertesten knyttet til omkrets, arealkonservering, reversering av formler og den helhetlige tenkningen. Til tross for at noe kunnskap ser ut til å mangle, kan det tenkes at oppgavene kunne blitt løst dersom forståelse for eksempel for hvordan og hvorfor formelen fungerer hadde lagt til grunn.

Tabell 1 plasserer kunnskapen på nivåer, men det kommer frem i disse resultatene at oppgaven på Nivå 4 ikke nødvendigvis er den vanskeligste, men at manglende forståelse for enkelte faktorer gjør at oppgaver på noen nivå blir løst feil. Variasjonsteori med fokus på elevers ulike måter å se objekter på er interessant her, da ulike faktorer vil være kritisk i disse elevenes helhetlige forståelse av arealbegrepet. Slik læring og forståelse blir sett i denne studien vil disse resultatene indikere at de har skilt ut noen av de samme faktorene, men også at noen av elevene ikke har skilt ut enkelte faktorer. Hva som faktisk ligger til grunn for prestasjonen er vanskelig å si noe om i dette kapittelet. Det vil komme frem i kapittelet som følger.

5 Kvalitativ analyse

I forrige kapittel ble det pekt på noe informasjon fra resultattabellene som kan fungere som utgangspunkt for videre analyse. Testresultatene indikerte at de fleste faktorene som oppgavene la opp til var skilt ut. I dette kapittelet blir skriftlig test og intervju sett i sammenheng. De muntlige forklaringene vil gjøre det mulig å se på hvilke begrepssammenhenger som finnes i forståelsene, samt hvordan geometriske betraktninger er knyttet til disse. Kunnskap om begrepsstrukturer og prosedyrekunnskap vil særlig være med på å beskrive hva forståelsen er basert på. Analysen vil bli strukturert ut fra *Tabell 1,* og på hvert nivå vil det bli eksemplifisert hva som fremkommer hos flere elever, men også hva som ser ut til å skille seg ut. Siden løsningene kan beskrives ut fra ulike nivåer vil noen av oppgavene trekkes frem på flere av disse.

5.1 Nivå 0: The base level

Karakteristisk for Nivå 0 er at elevene henviser til enkeltfaktorer, og at sammenhenger innenfor areal, samt mellom areal og geometrisk tenkning ikke kommer til uttrykk. Prosedyrekunnskap beskriver dermed best kunnskapen som blir vist her. Fra oppgavesettet er oppgave 3a, 3b og 4 plassert på Nivå 0, ut fra hvordan de legger opp til å skille ut enkeltfaktorer som gjentakelse av måleenhet, bruk av formel og at størrelsen på måleenhetene må være like store. Forståelse av oppgave 2, 4 og 8 vil imidlertid bli trukket frem.

5.1.1 «Da må jeg gange […]»

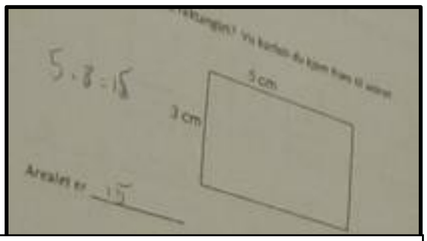
I oppgave 2a skal elevene sammenligne omkretsen til to figurer. En må vite forskjell på omkrets og areal, og dermed blir også en kort analyse knyttet til omkretsbegrepet tatt med. Sammenligningen som her er eksemplifisert er tydelig knyttet til gjentakelse av måleenhet. Elev 1 fortalte i samtalen at «Det er jo lik omkrets siden du må jo telle strekene». I figurene omkranser strekene en blå og en gul flate. Eleven viser til hvorfor omkretsen er lik, og begrunner det i strekene som prikk- og strekmønsteret rundt figuren danner. Elev 4 viser også forståelse for gjentakelse av måleenhet i denne oppgaven, ved å telle og peke: «[…] fra den prikken [peker på en prikk] til den prikken [peker på neste], og så telte jeg én, to, tre, fire, fem, seks, syv, åtte, ni, ti, elleve, tolv [viser hele veien rundt]». I begge eksemplene kommer det frem at omkretsen er det rundt, ved at det i det første blir sagt noe om at enhetene må telles for å finne omkretsen, og mer indirekte ved å telle hele veien rundt i det andre.

Gjentakelse av måleenhet, slik det ble forklart ovenfor, gjelder også for areal, men i stedet for enkle linjer er enhetene todimensjonale. Denne måten å se areal på kommer ikke like tydelig frem hos alle de deltakende elevene. I noen av forklaringene i oppgave 2b blir arealet uttrykt som et produkt av to linjer, hvilket gjør at diskusjonen foregår under dette nivået. På spørsmål om hvordan en finner arealet av de to figurene, forklarer blant annet Elev 4 at «Da hadde jeg bare telt sånn 1,2,3 [peker på bredden] og 1,2,3 [peker på lengden] og ganget det med hverandre». Enhetene som sidelengdene består av kommer frem ved at de tre strekene i bredden og lengden telles opp, mens arealet er produktet av disse lengdene. Elev 1 viser på samme måte som Elev 4 til prosedyrekunnskap gjennom sin forklaring av hvilken figur som har størst areal, og sier at «Da må jeg gange det [peker på én side] med det [peker på en annen]». Svarene er korrekte, men tellingen og bruk av formel gir ingen innsikt i hva forståelsen for strategien innebærer. Hverken bruk av formel eller telling viser til sammenhenger mellom enhet og formel, eller til andre komponenter ved arealbegrepet, og blir dermed sett på som prosedyrekunnskap. Det kan komme av at elevene ser utregningen som tilstrekkelig, og at de ikke trenger å legge mer mening i svaret ut fra hva oppgaven spør etter. Metoden fremstår som en lært strategi til tross for at enhetene som sidelengdene består av blir referert til. På nivåene som følger kommer arealbegrepet tydeligere frem ved at det blir henvist til enheter og flaten som arealene dekker.

5.1.2 «Da, jeg tok 5 og 3 så fikk jeg svaret»

Oppgave 8 er en oppgave som kan legge opp til å vise prosedyrekunnskap, spesielt hvis en bare har det skriftlige arbeidet til å representere elevenes tanker. Oppgaven viser et rektangel med sider 3 cm og 5 cm. Figuren har ingen markeringer for strukturen som arealet danner, og svaret kan skrives på en svarstrek uten å vise til hvordan det ble funnet. Ulike tilnærminger til oppgaven blir vist. Prosedyrekunnskap gjenspeiler seg her i Elev 4 sin forklaring, ved hjelp av spørsmålet om hva 3 ganger 5 betyr. H*n svarer at

> Da, jeg tok 5 og 3 så fikk jeg svaret. Når jeg var liten så lærte vi gangesang, sånn 1,2,3,4 og så opp til 10. Så da brukte jeg gangesangen i hodet, og tok sånn 3,6,9,12,15 og da fikk jeg det.



Elev 4 sin løsning på oppgave 8.

Det oppfølgende spørsmålet søkte innsikt i hva arealet faktisk innebar, og dermed hva 3 og 5 representerte. Som tregangen legger opp til blir tre og tre enheter gjentatt oppover, men siden det ikke blir vist til hva de tre her innebærer, verken gjennom det talte eller tegning, slik bildet ovenfor viser, indikerer det at en innlært prosedyre blir brukt. Forklaringen viser ikke til selve arealet, men til hvordan gangetabellen kan hjelpe med å begrunne prosedyren. Ordene «så fikk jeg svaret» viser også dette. Én faktor kan likevel sies å være skilt ut fra arealbegrepet. Eleven multipliserer to sidelengder for å finne arealet, uten at hvorfor-aspektet ved denne kommer frem. Det ser ut til at eleven har tolket spørsmålet dit hen at det skulle begrunnes hvorfor 3 multiplisert med 5 er det samme som 15. Senere i kapittel 5 kommer det frem hvordan oppgaven er basert på kunnskap om begrepsstrutkurer, ved at flere faktorer blir knyttet til formelen.

5.1.3 «Det er jo umulig å si, fordi rutene er ikke like store […]»

I tillegg til å ha kunnskap om at måleenheten gjentas og at sidene i figuren kan brukes til å beregne arealet, er en annen kritisk faktor for forståelse av arealbegrepet at enhetene for måling må være like store. Oppgave 4 sjekker om elevene har oppfattet dette, ved å vise et rektangel bestående av enheter med ulike størrelser. Resultatene fra ettertesten for de seks elevene viser at alle elevene har svart rett på denne oppgaven, og tilsynelatende skilt ut denne faktoren. Elev 5 forklarer at «Det er jo umulig å si, fordi rutene er ikke like store […]», og Elev 6 beskriver problematikken med at «[…] firkantene i selve firkanten ikke er like store». Dette indikerer en bevissthet for at arealet ikke kan måles når enhetene som dekker flaten ikke er like store, uten at det blir beskrevet noen konsekvens av å bruke måleenheter av ulike størrelser. Til tross for at alle elevene har gjort denne rett, viser besvarelsene for oppgave 12 at enhetenes størrelser gjør at elevene får noe upresise svar. Det blir trukket frem i kapittel 5.3.1.

5.1.4 Å separere faktorer ved arealbegrepet

Som eksemplene ovenfor viser ser det ut til at flere faktorer er skilt ut: at en må gjenta måleenheten, at enhetene må være like store og at formelen for beregning av areal av en firkant innebærer å multiplisere to sider. Clements og Stephan (2004) pekte på å identifisere en enhet for måling som en viktig del av forståelsen knyttet til måling. Enheten må bli sett på som en liten del av det større objektet (Clements & Stephan, 2004; Piaget et al., 1960), noe som kom frem ved sammenligningen av omkretsene. Elevene kan se ut til å ta utgangspunkt i det visuelle, både ved å bruke peking når enhetene i omkretsen telles, og ved å vise til de opptegnede rutene i rektangelet fra oppgave 4. Oppgavene legger opp til dette ved å ha markeringer rundt og i figurene fra oppgave 2, og ved at enhetene tydelig er av ulik størrelse i oppgave 4. Oppgave 8 er mer abstrakt, hvilket også gjenspeiler seg i måten oppgaven ble løst på. Prosedyrekunnskap kan sies å være mest karakteristisk for løsningene som her er vist, da det i hovedsak enten er telt opp måleenheter eller brukt formel, uten at det er vist til mening for hvorfor dette er blitt gjort. Enkeltfaktorene som her er skilt ut ses på som kritiske i den helhetlige forståelsen av arealbegrepet, og vil dermed være viktig å ha på plass. Enheten for areal kom på dette nivået ikke frem i begrunnelsene knyttet til prosedyrene, men vil komme tydeligere frem på Nivå 1.

5.2 Nivå 1: The first level

Fokuset på enkeltfaktorer separert fra hverandre, gjorde at oppgave 2 ble diskutert under Nivå 0. Sammenligningen som oppgave 2 legger opp til gjør at en kan ta utgangspunkt i flatenes egenskaper for å si noe om forholdet mellom dem, hvilket vil være karakteristisk for funnene som på dette nivået blir løftet frem.

5.2.1 «Det vil si at de har lik flate, eller lik.. det er like stort rundt!»

I likhet med det som ble vist på Nivå 0, forklarer også Elev 2 at h*n ser på avstandene rundt figurene når det gjelder sammenligning av omkrets. At oppgaven igjen blir tatt opp her, kommer av at Elev 2 tar utgangspunkt i egenskaper i hver av figurene og mer spesifikt sier hva den innebærer: «Når jeg tenkte omkretsen så tenkte jeg hvor mange avstander det var. Liksom 1-2-3 [peker på mellomrommene]. Det er liksom det rundt». Av dette kommer gjentakelse av måleenhet frem, og at en vet hvilke enheter som sammen utgjør omkretsen. På spørsmålet om hva det vil si at de har lik omkrets, viser eleven til en sammenligning basert på sitatet ovenfor, og forklarer at «Det vil si at de har lik flate, eller lik.. det er like stort rundt!». Enhetene er her utgangspunkt for sammenligningen. Til tross for at denne oppgaven er markert som feil for Elev 3, snakker h*n likevel om figurene som om de har lik omkrets:

> Der [peker på figur 1] er det tre øverst og så er det et kvadrat så da er det tre på alle kanter, og 3 + 3 er 6, og 6 + 6 er 12. Og 4 + 4 er 8 [peker på figur 2] og så er det 2 på hver slik at det blir 12.

Eleven viser til en slags gjentakelse av måleenhet, ved å ta i bruk kunnskap om figurens egenskaper for å summere sidelengdene. At det refereres til «tre på alle kanter» kan se ut til å representerer en inndeling av figurens sidelengder. Når det gjelder rektangelet legger h*n sammen to og to sider, slik rektangelets egenskaper tillater, og får at også det har en omkrets som er 12. Elev 3 har tatt i bruk noen elementer for å sammenligne figurene, både sidelengder, som for øvrig blir omtalt som «kanter» og geometriske egenskaper ved figurene, men sier ikke her noe mer spesifikt om at omkretsen er det rundt. Den geometriske tenkningen viser gjerne ingen tydeligere forståelse enn det er blitt vist tidligere, men det blir tilsynelatende brukt som en strategi for å lettest mulig komme frem til omkretsen.

I 2b skal arealet sammenlignes, og forklaringen her skiller seg fra Nivå 0 ved at flere faktorer blir gitt mening. Elev 2 peker ut figur 1 til å ha større areal enn figur 2 og forankrer begrunnelsen i figurenes flater: «For den [figur 1] har liksom større plass inni, eller flere ruter enn den [figur 2]». Eleven bruker tilsynelatende prikkemønsteret til å identifisere ruter i figurene, og kan dermed si at den ene har flere ruter enn den andre. Igjen blir det vist til at enhetene i figuren er utgangspunktet for å si noe om hver av figurene, før helheten kan sammenlignes. Til tross for at eleven på den skriftlige ettertesten bare har satt ring rundt de riktige svarene, får Elev 2 likevel vist hva omkrets og areal faktisk innebærer, og skiller dem ved å snakke om avstandene rundt og plass inni figuren. Med andre ord er enhetene og definisjonene som er karakteristisk for omkrets og areal brukt for å sammenligne figurene.

5.2.2 Å sammenligne figurer med utgangspunkt i egenskaper ved dem

Nivå 1 bygger på at elevene kan bruke ulike strategier for å sammenligne, med utgangspunkt i egenskaper som flatene består av. For at elevene ikke skal bli bundet til å kun se på areal ved hjelp av et tradisjonelt verktøy, er det viktig at elevene kan utlede forholdet mellom to eller flere objekter som enten er like eller ulike, og begrunne det i objektenes størrelser og egenskaper (Kamii & Clark, 1997). Spesielt vil det være viktig å ha kjennskap til egenskaper som kan brukes dersom en ikke har redskaper eller kunnskap til å måle eller beregne. Ovenfor blir sammenligningen basert på koblinger mellom enhet og gjentakelse av denne, og mellom enhet og helhet. Elev 3 bruker kunnskap om figurenes geometriske egenskaper til å hente informasjonen som trengs for å beregne arealet for hver av dem, og kan slik avgjøre at den ene er større. Kunnskapen som kommer til uttrykk her viser at det ligger mer mening i prosedyrene enn på Nivå 0, ved at flere faktorer er vist til, og at hva omkrets og areal innebærer kommer tydeligere frem.

5.3 Nivå 2: The second level

Nivå 2 innebærer at elevene kan «[…] si noe om strukturen når det gjelder areal, knyttet til figurenes geometriske egenskaper, men også konservere areal og ordne figuren slik at en får en mer hensiktsmessig figur å finne/regne ut arealet til» (*Tabell 1*). *Tabell 2* viser at oppgavene som legger opp til dette er oppgavene 5, 7, 8, 9, 11a, 11b og 12. I dette delkapittelet er det oppgave 9, 12 og 8 som vil bli diskutert. Noe geometrisk tenkning ble uttrykt på Nivå 1, og det vil også komme tydeligere frem her.

5.3.1 «[…] og to halve blir jo en hel»

I oppgave 9 skal elevene finne arealet av et trapes, hvor et rutenett bak figuren gjør det mulig å se hvordan ruter i figuren kan tegnes opp. Her er det mulighet for å bare sette ring rundt rett alternativ, men også å tegne. De skriftlige testene viser at noen elever har tegnet opp, mens samtaler fra intervjuene får frem at denne strukturen for noen er synlig uten tegning. Elevene viser også til en omorganisering av figuren. I intervjuene kommer det frem at noen av elevene ser hvordan et rektangel blir dannet av de hele rutene som trapeset består av, før de resterende enhetene settes sammen til hele ruter og legges til.

Elev 1 viser hvordan øverste del kan settes sammen med den nederste og danne en hel rute.

Elev 1 viser i bildet til venstre hvordan de ytterste enhetene kan bli satt sammen til hele ruter, og forklarer at

> Først må jeg ta de sidene helt ute [peker på høyre side] og så tar jeg den og den [de to midterste på hver av ytterkantene] og det blir liksom en hel, og så tok jeg de to [øverst og nederst] da var det to, og de to [øverst og nederst på motsatt side], og da var det tre. Så må jeg gange arealet inni.

I dette resonnementet kommer det frem at rutene har betydning for arealet. De som er ufullstendige blir satt sammen, og resten av arealet multipliseres. Sistnevnte indikerer også at eleven ser sammenheng mellom sidelengdene og strukturen som rektangelet bestående av de hele rutene danner. Til tross for at prosedyrekunnskap ser ut til å være det fremtredende her, kan det se ut som at denne er basert på kunnskap om begrepsstrukturer ved at komponentene som inngår er gitt mening. Enhetene kommer tydelig frem, og blir koblet til formel for areal og omstrukturering av enheter slik at kunnskapen ikke fungerer isolert, men innebærer sammenhenger.

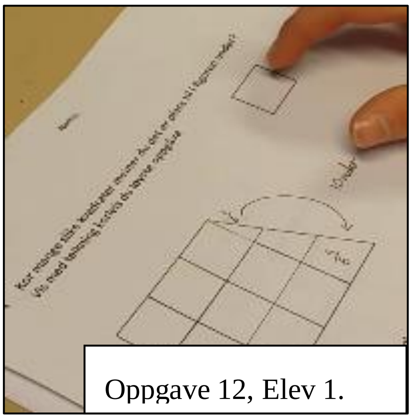
Elev 6 sitt resonnement er noe liknende, men starter med den geometriske figuren som kommer til syne. H*n formidler det slik: «Først begynte jeg å telle de som er hele, 1,2,3 [teller nedover] og 1,2,3,4 [teller bortover], 12 […]». Eleven tar utgangspunkt i enhetene langs sidene, og får dermed 12. Forklaringen indikerer at eleven ser hvordan de hele rutene inngår i en rektangelformet struktur, hvor formelen for areal kan benyttes. På samme måte som Elev 1, forteller Elev 6 at de ufullstendige enhetene kan settes sammen, for så å legge dem til de 12 hele rutene som rektangelet består av.

En annen tankegang skiller seg fra den som ble nevnt ovenfor, ved at det i hovedsak blir brukt telling. Elev 2 sitt svar er ut fra *Tabell 3* markert som feil, men en samtale fra intervjuet kan tyde på at det ble gjort en tellefeil, da fremgangsmåten som blir formidlet i intervjuet gir korrekt svar. H*n forklarer at: «Da tenker jeg liksom at det bare er å dele litt sånn opp. Sånn som den [øverste] og den [nederste] blir jo sånn cirka èn, og den [midterste] og den [midterste på andre sida] blir cirka èn». Eleven har på testen markert 16 som det riktige svaret, men sier ikke noe i samtalen rundt oppgaven om hvor dette tallet kommer fra. Mer forklaring på hva som er gjort er derfor nødvendig og eleven forteller at «Da tok jeg bare de inni og plusset de på». Samme løsningsmetode ser ut til å ha blitt tatt i bruk av Elev 4, og h*n beskriver at rutene ble tegnet opp med linjal, og følger opp med denne forklaringen:

> […] så tok jeg den biten [peker øverst til høyre] med den biten [nederst til høyre] så ble det en hel, og så den biten og den biten og det ble også hel. Så telte jeg de andre og så så jeg at det var to halve igjen og to halve blir jo en hel.

Løsningsmetodene basert på telling og omstrukturering av ufullstendige ruter tar utgangspunkt i måleenhet og gjentakelse av denne. Forståelsen som blir formidlet ser dermed ut til å være basert på prosedyrekunnskap. Likevel må en være i stand til å visualisere at de ufullstendige rutene settes sammen, og slik forstå at arealet fremdeles er det samme, hvilket indikerer at forståelse for arealkonservering også ligger til grunn.

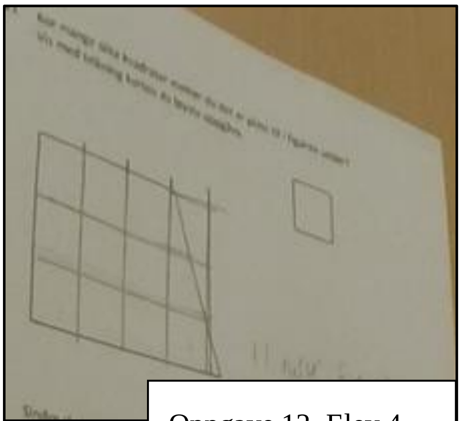
Elevene møter noe samme oppgavetype i oppgave 12, men her er det derimot tenkt at elevene skal kopiere det lille kvadratet utenfor trapeset for å dekke flaten. Denne oppgaven kan se ut til å ha bydd på noen problemer. For det første gjør unøyaktig tegning til at antall ruter blir feil, slik det vises hos Elev 4. I tillegg blir det kun tatt med hele ruter i besvarelsen, slik Elev 1 har gjort. Elev 6 tegner nøyaktige enheter i sin besvarelse, hvilket kan vise til en forståelse av at enhetens størrelse har noe å si for hvor mange det blir plass til. Til tross for at noen elever har tenkt hele kvadrater, innebærer arealbegrepet at hele flaten blir dekket.


Oppgave 12, Elev 1.

Elev 1 har tegnet opp nøyaktig, og skriver i besvarelsen at det er plass til 10 ruter. Tre enheter blir stående som ufullstendige kvadrater helt til høyre i figuren, slik tegningen til høyre viser. Eleven har estimert den øverste av de ufullstendige enhetene som 1/6 og den nederste som 5/6 og satt pil mellom. Omorganiseringen av enhetene er begrunnet ved hjelp av brøk:

> […] siden jeg prøvde å tegne alle like stor som den [peker på kvadratet utenfor figuren], så ble det 3 ganger 3 er 9, og så blir den og den [øverst (1/6) og nederst (5/6) til høyre)] èn og den [midterste til høyre] blir ikke like stor som den [kvadratet utenfor].

Eleven kan ha tolket det som å oppgi svaret i hele ruter, da det blir vist til at den halve som gjenstår ikke er like stor som kvadratet utenfor figuren. Et fokus i undervisningen har også vært på at enhetene for måling må være like store, hvilket også kan være en årsak til at den halve er blitt utelatt. Enhetene følger en viss struktur og dekker hele planet i tegningen. Arealet som blir oppgitt mangler en halv enhet, hvilket ikke er i samsvar med arealbegrepet om å dekke hele flaten. Flere faktorer ser likevel ut til å være skilt ut i tegningen fra den skriftlige testen, som å gjenta måleenheten, at de må være like store og at de må dekke hele planet. I samtalen viser det seg også at geometrisk tenkning og arealkonservering ligger til grunn, ved at et kvadrat identifiseres og regnes ut ved at to av sidene multipliseres, og ved at enhetene omstruktureres.



Oppgave 12, Elev 4

Elev 4 får også et svar som er noe ukorrekt. Bildet til høyre viser hvordan unøyaktig tegning gjør at eleven får plass til flere enheter enn det ville blitt ved nøyaktig tegning. Eleven får at det er plass til 11 kvadrater ved å telle de hele og sette sammen de ufullstendige. 10,5 kvadrater er antallet som skal få plass i figuren, hvilket Elev 6 får ved at enhetene tegnes i riktig størrelse. H*n forklarer i intervjuet at h*n startet med å måle det lille kvadratet, og fant at «Den var 1,7. Så da målte jeg nedover». Dette viser at måleenhetens størrelse har noe å si for hvor mange enheter det blir plass til, og at enheten må gjentas nedover, som det her blir referert til. Det kan dermed også se ut til at eleven er bevisst enhetenes størrelser.

Som i oppgave 9 kommer prosedyrekunnskap til uttrykk gjennom multiplikasjonen og tellingen som utføres. Noen av elevene viser til de geometriske figurene som kan identifiseres i de to trapesene, og det kan se ut til at elevene beveger seg mellom kunnskap om areal og egenskaper ved geometriske figurer, samt at faktorer ved arealbegrepet blir gitt mening. At måleenheten blir tydelig uttrykt, gjentatt og omstrukturert, samt at formel blir brukt på de identifiserte figurene tyder på at prosedyrekunnskapen som blir vist også er basert på kunnskap om begrepsstrukturer. Det kan begrunnes med at det foregår en bevegelse mellom nettverkene av kunnskap, og at løsningsmetodene som elevene har valgt ser ut til å være meningsfull for dem. Kordaki og Potari (1998) viste til strategier elever tok i bruk når figurene de arbeidet med ikke var rektangulære. Figurene ble da inndelt i kjente geometriske figurer, slik at arealet kunne beregnes omtrentlig. Tankegangen elevene viser til i forbindelse med oppgave 9 og 12 kan til en viss grad knyttes til dette. Trapeset var i utgangspunktet ukjent for elevene i arbeid med areal. Elevene som først identifiserte rektangel og kvadrat i trapesene tok utgangspunkt i noe kjent, og fant arealet nøyaktig ved å sette sammen de resterende enhetene. I Kordaki og Potari (1998) sin studie kom det også frem at dersom elevene ikke kunne bruke formel, ble det i større grad vist til andre faktorer, som måleenhet og arealkonservering. Dette fremkommer også her, blant annet når Elev 2 og Elev 4 forklarer hvordan rutene i trapeset fra oppgave 9 ble telt opp. Forståelse for arealkonservering kom frem hos alle ved at det gjerne ikke eksisterte kunnskap om bruk av formel for areal av trapes.

Noen elever identifiserte geometriske figurer som del av trapeset, og brukte formel for å beregne areal, hvilket indikerer at de kunne se hvordan sidelengdene fungerte som utgangspunkt for strukturen i figuren. Alle elevene viser forståelse for at det er mulig å omorganisere figuren uten at det påvirker arealet. Det blir ikke brukt noe ytterligere informasjon til å begrunne, som for eksempel å si noe eksplisitt om hvorfor de faktisk kan omstrukturere og hva det har å si for figuren. En mer formell begrunnelse, kunne vært å forklare hvordan et rektangel formes når de ufullstendige enhetene settes sammen. Derfra kunne det blitt vist til antall enheter i lengden og bredden, for så å bruke kunnskap om formelen for areal av rektangel til å beregne hele trapeset.

5.3.2 «[…] da gjør bare ganging det enklere enn å telle»

Rektangelet i oppgave 8 ble vist til på Nivå 0. Forståelse på Nivå 2 knyttet til denne oppgaven skal eksemplifiseres her. I samtalen med Elev 3 kom multiplikasjon frem som fremgangsmåte for å si noe om arealet til rektangelet. Dette er en måte å regne ut areal på som typisk kan baseres på prosedyrekunnskap. Siden det ikke ble gitt noe informasjon om logikken bak i det skriftlige arbeidet, fikk eleven mulighet til å beskrive tankegangen sin, hvor en beskrivelse av kolonner og ruter inngikk:

> For her er det jo 3 cm, og her er det 5 [peker på sidelengdene], og da må vi dele det inn her [peker inni figuren] i 5 kolonner på en måte og så er det tre ruter i hver kolonne, og da gjør bare ganging det enklere enn å telle

Selv om det først ble vist til multiplikasjon, viser de videre utsagnene i intervjuet mer til kunnskap om begrepsstruktur, da komponenter i formelen blir gitt mening. I motsetning til måtene sidelengder og areal er blitt knyttet sammen på de tidligere nivåene, blir det i dette utsagnet tydelig vist til hva som faktisk blir produsert når formelen benyttes. Hvorfor formelen fungerer kommer dermed tydelig frem. Koblingen mellom enheter og struktur kommer til syne, ved at det blir vist forståelse for at strukturen som utgjør arealet er knyttet til figurens sidelengder, jamfør Nivå 2.

5.3.3 Å bruke figurenes egenskaper for å oppdage en struktur i figuren

Funnene ovenfor viser til løsninger som igjen ser ut til å være basert på prosedyrekunnskap. Samtalene med elevene har vist at det likevel er gjort koblinger innenfor arealbegrepet, samt mellom areal og geometri. Både i oppgave 9 og 12 kan det først og fremst se ut til at det er prosedyrekunnskap som dominerer tankegangen, ved at det hos alle elevene enten blir henvist til å multiplisere eller å telle. Enheter for måling, arealkonservering og strukturen i flaten kommer her frem. Koblingen mellom geometri og areal kommer til uttrykk når de hele enhetene identifiseres som geometriske figurer, da sidelengder og hele enheter kobles sammen. En kan her si at eleven beveger seg mellom kunnskapsnett for areal og geometri, og at det indikerer bruk av kunnskap om begrepsstrukturer. Oppgave 9 og 12 legger opp til en slags utforskning, hvor en kan si at målet skal være at elevene får kunnskap om hvordan figurene er satt sammen, hvordan de kan endres, og dermed hvordan en formel for beregning av areal fungerer. Denne invariansen understreker Piaget et al. (1960) som viktig i forståelsen av måling. Kospentaris et al. (2011) pekte på linken mellom geometrikunnskap og formelen for areal, og understreket i den sammenheng at forståelse for hvordan arealet kan varieres, er en viktig del av læringen. Uten forståelse for hvordan arealet kan omstruktureres og deles opp, vil det være vanskelig å se sammenhengen mellom formel og enhetene som arealet består av, slik Hirstein et al. (1978) viste til i sin undersøkelse.

Hvordan strukturen dannes i arealet kommer klarest frem i samtalen med Elev 3 om oppgave 8. Eleven viser her til strukturen bestående av kolonner med antall ruter i hver. Til tross for at en prosedyre er brukt, ligger det mening i hva de ulike delene i prosedyren innebærer. Figurenes sidelengder er koblet til strukturen i figuren, og det er dermed trukket linjer mellom måleenhet, sidelengder og formelen.

5.4 Nivå 3: The third level

Funnene som følger er knyttet til at koblingen mellom areal og geometri kommer tydeligere frem, og at komponenter ved disse kunnskapsnettene brukes til å beregne og begrunne. Fra testene er det oppgave 6 og oppgave 10 som er plassert på Nivå 3. Analysen vil her fokusere på forståelse av oppgave 10.

5.4.1 «Da tenkte jeg 3 ganger 4 og så bare ta halvparten av det»

Forståelse og kunnskap knyttet til trekanten i oppgave 10 så først og fremst ut til å være basert på prosedyrekunnskap, men med oppfølgende spørsmål om mer presise beskrivelser ble det vist dypere mening bak enn bare noe innlært. Det som karakteriserer elevenes tankegang i denne oppgaven, er at de på en eller annen måte først viser til hele rektangelet og så til en deling av dette. Elevenes forklaringer er i ulik grad presise. Elev 1 forklarer for eksempel først hvordan produktet av rektangelets sidelengder utgjør hele arealet, og så at dette må deles på to. I begrunnelsen for hvorfor dette blir gjort forteller h*n at «Fordi først må vi finne arealet av hele figuren og så må vi dele det på to».

Elev 3 sin forklaring kan nesten ses på som identisk med det Elev 1 forklarte: «Jeg tenkte først hele firkanten og det er 12, og så delte jeg han på to. Og da ble det 6». Det kan se ut til at informasjonen i oppgaveteksten er blitt brukt, da det ikke blir sagt noe om hvordan hele arealet er regnet ut. Forklaringen om først å se på hele «firkanten» viser til bevissthet rundt hvilken rolle målene på figuren og tallene fra oppgaveteksten spiller. At elevene viser til en todeling av rektangelet, kan tyde på at geometrisk tenkning rundt figurenes oppbygning ligger til grunn.

Utdrag fra samtalene med Elev 2 og Elev 4 eksemplifiserer litt mer presise måter å se på arealet av trekanten. I samtalen med Elev 2 fremhevet jeg de tre tallene som var oppgitt, samt hele figuren, og fulgte opp med at h*n «[…] skulle jo bare finne arealet av den [grått felt]. Hvordan har du tenkt der da?». Svaret Elev 2 gir viser først til prosedyrekunnskap, ved at h*n forteller at h*n «ganger» og tar «halvparten»: «Da tenkte jeg 3 ganger 4 og så bare ta halvparten av det». På oppfølgingsspørsmålet om hvorfor dette ble gjort, blir det begrunnet med at «[…] det er liksom halve, bare halvparten av rektangelet, og da må halvparten vekk». Eleven viser ikke til målene som er gitt, men likevel til bevissthet for hvilke mål som har betydning for arealet av trekanten, og hva prosedyren får frem. H*n refererer også til at trekanten utgjør halve rektangelet, og forankrer fremgangsmåten sin i dette. For å avdekke hva eleven legger i arealet, må h*n også begrunne hvorfor 3 ble multiplisert med 4. Det følger en forklaring om hva det er plass til: «Men 3 ganger 4 liksom, da får du vite hvor mange ruter, eller hvor mange kvadratcentimeter det er plass til, og da finner vi hvor mange ruter det er inni». I begrunnelsen for at arealet var 6 cm^2, henviser eleven både til prosedyren som går på å multiplisere sidene og å dele på 2, samt at h*n mer formelt kan si noe om hva dette konkret innebærer.

Elev 4 formidler også hva arealet innebærer, men skiller seg likevel noe fra Elev 2. H*n multipliserer først sidelengdene i rektangelet, og viser så hvordan trekanten er halvparten av dette: «[…] denne her [peker på grått felt] dekker bare halve». Det blir pekt på rollen trekanten spiller i figuren, og at arealet innebærer å dekke noe. Selve fremgangsmåten kan igjen ses på som at eleven viser prosedyrekunnskap, men med utsagnet om å dekke halve gir prosedyren mer mening for hva det produserte svaret innebærer, hvilket kan indikere en bredere forståelse. Strukturen blir det ikke sagt noe om, annet enn at trekanten dekker halve rektangelet, og hva 3 og 4 representerer blir heller ikke nevnt.

5.4.2 Bruk av kunnskap om areal og geometrisk tenkning til å beregne og begrunne

Utsagnene ovenfor indikerer at noe geometrisk tenkning ligger til grunn i forklaringene. Faktorer som ruter og kvadratcentimeter, bruk av formel og en kobling mellom disse vises som komponenter i elevenes forståelse av areal knyttet til trekanten. De refererer på ulike måter til hva arealet av trekanten innebærer, som for eksempel å dekke halve og ved å vise til kvadratcentimeter. Igjen ser en at det er tatt utgangspunkt i en kjent geometrisk figur, rektangel, for å kunne beregne arealet av trekanten. At rektangelet deles i to, sier noe om hvordan det er bygd opp, og hvordan kunnskapen om disse egenskapene kan kobles sammen med formelen for å beregne arealet av trekanten.

Begrunnelsene for løsningene støtter på ulike måter opp svaret som er skrevet. Forklaringene kan vise til at elevene er bevisste hvilken rolle sidelengdene på 3 cm og 4 cm spiller for arealet, og hva delingen innebærer. Fremgangsmåten sier noe om hvordan geometriske egenskaper ved én figur, samt en oppdeling av denne, kan få frem en annen figur. Rent visuelt viser rektangelet fra oppgave 10 at to kongruente trekanter utgjør hele flaten. En sammenligning av flater kan dermed ligge til grunn for å dele på to i prosedyren som blir vist. Dette kommer imidlertid ikke klart frem. Når elevene referer til delingen, kan det tyde på at de ser hvordan diagonalen skiller de to trekantene i rektangelet.

5.5 Nivå 4: The fourth level

Det 5. nivået handler om en helhetlig forståelse, hvor tenkningen er mer kompleks og fusjon mellom arealkunnskap og geometrisk tenkning er oppnådd. Koblingen mellom disse to kunnskapsnettene, samt komponentene i hver av dem, kommer tydeligere til uttrykk på dette nivået. *Tabell 2* viser at det bare er oppgave 13 som legger opp til dette, og det er også forståelse vist i tilknytning til denne oppgaven som vil bli analysert her.

5.5.1 «[…] 6 + 6, to sider blir jo 12, og da må jeg ha noe som blir 20»

I oppgave 13 får elevene oppgitt omkretsen og én sidelengde i meter på en plen som skal klippes. Spørsmålet er hva arealet til plenen er, og elevene kan her velge om de også vil bruke tegning som representasjonsform. I *Tabell 3* kan en se at Elev 1 har fått denne oppgaven markert som feil på ettertesten. Til tross for dette kommer det frem forståelse og tenkning gjennom intervjuet.

Måtene elevene har løst oppgaven på, tar først og fremst utgangspunkt i rektangelets egenskaper. Samtlige elever starter med sidelengden de har fått oppgitt, og viser på ulike måter til bevissthet for at to og to sider i et rektangel er like lange. Deretter blir summen av de to kjente sidene sett opp mot omkretsen på 20 meter, slik at resterende metere kan fordeles på kortsidene. Etter at kunnskap om figurens egenskaper er brukt for å hente manglende informasjon til utregningen, blir det vist til prosedyrekunnskap hvor sidelengdene multipliseres for å beskrive arealet. Dette gjelder utelukkende alle de deltakende elevene, men ved spørsmål om hva det innebærer å multiplisere sidene beskriver de fleste elevene prosessen mer presist.

Elev 1 har i sin besvarelse bare brukt tegning for å vise plenens areal, og dermed fått feil. Ved å måle opp sidene i rektangelet som er tegnet, ser en at sidene er 4cm og 6cm, som da gir en omkrets på 20cm og et areal på 24cm^2. Tegningen tilfredsstiller dermed kravene oppgaven gir, men viser ikke hvilken forståelse som ligger bak. I intervjuet etter ettertesten stilte jeg spørsmål om hva Elev 1 tenkte når h*n løste oppgaven, og hvilke ord fra oppgaveteksten som kunne brukes for å finne ut hva som skulle gjøres. Eleven startet sitt resonnement slik:

> Nei siden den ene siden var 6 meter sant, og så da må jo den andre siden også bli 6 meter. Så må jeg finne ut hva jeg må gange med for å få 24 meter. Nei… Omkretsen var 20 meter så da har jeg 8 igjen.

H*n viste med tegningen at breddene var 8 til sammen, slik at hver av dem var 4 og at hver av langsidene var 6. Selv om det ikke er skrevet ned på testen, kunne Elev 1 også fortelle at «Arealet til plenen blir jo 24, for 6 ganger 4 er 24». Igjen stilte jeg spørsmål for å få et mer presist svar: «Hva betyr egentlig 4 ganger 6 da?». Til tross for å først ha tatt i bruk det som høres ut som prosedyrekunnskap, svarer eleven at «Det betyr at du tar 6 fire ganger, du plusser det på 4». Måten eleven uttrykker seg på indikerer at sidelengdene kan være med på å danne en struktur ved hjelp av multiplikasjon. Forståelse for strukturen kunne likevel blitt vist tydeligere ved å være mer presis på hva de to representerte. For å finne frem til den riktige plenen må en ha forståelse for både omkrets og areal og hvordan plenen er bygd opp.

I Elev 2 sin besvarelse står det i oppgave 13 at omkretsen er 24. Som for Elev 1 kan ikke skriftlig besvarelse fullt ut representere hvilken forståelse som ligger til grunn. Gjennom samtalen viser eleven til streker og mål, og sier at

> Da tenker jeg liksom, da har jeg en strek her som er 6 cm for eksempel [viser på arket], og da må jeg finne ut hva, for 6 + 6, to sider blir jo 12, og da må jeg ha noe som blir 20. Da tok jeg 4 på hver side.

I forklaringen kommer det ikke frem hva arealet er, og i begrunnelsen for hvorfor h*n multipliserte sidene forteller h*n at «Det ble jo 24, for jeg ganget 6 med 4». Det blir også lagt til: «Oj, ja kvadratmeter», etter å ha sett at det stod omkrets i besvarelsen.

Elev 3 formidler en tydelig forklaring på innhenting av informasjon med utgangspunkt i omkretsen, men ikke like tydelig hva arealet består av, bort sett fra at sidelengdene kan multipliseres. Likevel ble dette konkretisert i samtalen rundt oppgave 8, Nivå 2, hvor strukturen i rektangelet med sider 5cm og 3cm ble beskrevet som 5 kolonner med 3 ruter i hver. Det gjorde at det ikke ble ansett som nødvendig å spørre mer om dette. Flere av oppgavene søker spesifikk kunnskap, separert fra helhetsforståelsen, og når da den siste oppgaven forsøker å få fram den mer helhetlige forståelsen, kan de andre besvarelsene også være nyttig å ta i betraktning, slik det er eksemplifisert her.

5.5.2 Kompleks tenkning og fusjon mellom arealkunnskap og geometrisk tenkning

Besvarelsene som er gitt både muntlig og skriftlig på den siste oppgaven tyder på at en fusjon på dette emnet er oppnådd. Det innebærer å kunne ta i bruk nødvendige elementer ved areal for å løse problemet. Prosedyrekunnskap alene strekker ikke til, da det er nødvendig å ta i bruk flere prosedyrer, og å ta i bruk kunnskap om areal og geometri. Geometrisk tenkning faller inn som en naturlig del av løsningen i denne oppgaven, da plenens geometriske form spiller en rolle for hvordan en kan finne informasjon om sidelengdene. Det spiller også en rolle for hvilken formel en skal bruke for å regne ut arealet som plenen dekker. Oppgaven åpner ikke for å bruke en memorert fremgangsmåte, men for kompleks tenkning hvor aktuell informasjon fra flere kunnskapsnett må tas i bruk. Clements og Stephan (2004) vektla forholdet mellom omkrets og areal som viktig i forståelsen av hvordan den matematiske formelen for beregning fungerte, og for å kunne bruke den på en meningsfull måte. Faktorene som her er blitt trukket frem som oppfattet i elevenes forståelse, tyder på at prosedyrene elevene tar i bruk må være basert på kunnskap om begrepsstrukturer. Sidelengdene er tilsynelatende gitt mening ved at de blir sett på som avgjørende for å si noe om omkrets, før de kan brukes i formelen for å beregne arealet. Det ble ikke stilt mange detaljspørsmål for å få frem forståelse for enkeltfaktorer i løsningen av denne oppgaven. Elev 2 hadde for eksempel tidligere referert til hvordan kvadratcentimeter og ruter kunne beskrive arealet, mens Elev 3 forklarte hva det betydde å multiplisere målene på to sidelengder ved å vise til kolonner og ruter. Ser en funn på de ulike nivåene i sammenheng, viser at forståelsen innebærer flere faktorer ved arealbegrepet.

6. Diskusjon

Fokuset i denne studien har vært på begrepssammenhenger knyttet til forståelse av areal hos høytpresterende elever i 5.klasse. For å avgrense undersøkelsesområdet ytterligere ble tre forskningsspørsmål utarbeidet:

- Hvordan er geometrisk tenkning relatert til elevers arbeid med areal?
- Hvordan kommer prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer til uttrykk?
- På hvilken måte kan variasjonsteori, som undervisningen baserer seg på, spille en rolle i å utvikle begrepssammenhenger?

Gjennom denne studien har faktorer knyttet til forståelse av areal som finnes hos de seks deltakende elevene blitt belyst, og hvordan prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer ofte er basert på hverandre. Resultatene er også knyttet opp mot høy prestasjon slik det ble definert i kapittel 1, hvilket vil bli trukket frem senere. Problemstillingen og de tre forskningsspørsmålene vil være fokuset for diskusjonen av de viktigste funnene fra kapittel 4 og 5. Den vil i all hovedsak ta for seg hvilke begrepssammenhenger som finnes i elevenes forståelser, ved å kort diskutere faktorer knyttet til areal og sammenhenger mellom dem, før det blir sett på hvordan geometrisk tenkning er relatert. Funnene viser at det ligger mer til grunn enn isolert bruk av arealkunnskap, ved at figurers egenskaper viser seg som viktig å ha kunnskap om i arbeid med areal.

Hva forståelsene er basert på vil bli diskutert ved hjelp av begrepsparet prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer. Når det gjelder å si noe om figurers areal, viser det seg ved flere tilfeller i denne studien at kjente figurer først blir regnet ut ved hjelp av formel, mens ukjente figurer enten blir knyttet til kjente figurer eller at enhetene blir identifisert og telt opp. I tilfellene hvor prosedyrekunnskap først blir brukt, blir også forståelsen ofte basert på kunnskap om begrepsstrukturer ved spørsmål om ytterligere forklaringer. Som et siste punkt i diskusjonen om problemstilling og forskningsspørsmål, vil betraktninger rundt variasjonsteori og rollen dette pedagogiske verktøyet har hatt i å utvikle begrepssammenhenger også bli diskutert. Diskusjonen med utgangspunkt i de tre forskningsspørsmålene vil samlet sett bidra til å besvare problemstillingen. Refleksjoner rundt studiens avgrensning og begrensning, samt rundt videre arbeid, vil så bidra til en bevisstgjøring av hvordan disse funnene er trukket frem, samt hva som enda ikke er besvart. Avslutningsvis vil poengene bli samlet i en oppsummering.

6.1 Hvilke begrepssammenhenger knyttet til forståelse av areal finner man hos høytpresterende elever i 5.klasse?

Kapittel 4 viste at elevene jevnt over hadde høy score på ettertest og sen ettertest. Likevel var det noen problemer knyttet til reversering av formelen for areal, samt ett tilfelle hvor arealkonservering og ett hvor utregningen av arealet av plenen i oppgave 13 var markert som feil. Gjennom intervjuet kom det frem at elevene likevel viste forståelse på disse oppgavene. Kapittel 5 så på hvordan ulike faktorer kom til uttrykk i elevenes forståelser. For å få frem dette ble den egenkonstruerte tabellen, *Tabell 1*, et verktøy for å se på hvilke faktorer som ble synlig, hvilket nivå og hvilke begrepssammenhenger som fantes i elevenes forståelser.

Tabellen var nyttig ved at den la opp til nivåer, hvor kompleksiteten av sammenhenger mellom faktorer var ulik fra nivå til nivå. I tillegg var den knyttet opp mot geometrisk tenkning. Koblingen mellom areal og geometrisk tenkning har vært med på å nyansere funnene, ved at flere sammenhenger relatert til elevenes forståelser av areal ble synlig. Koblingene kan ses i sammenheng med *Figur 1*, hvor puslebrikker er blitt brukt for å visualisere hvordan matematiske emner kan være bygd opp. Beskrivelser av kunnskap på ulike nivåer i *Tabell 1* gjorde at elevenes forklaringer kunne bli sett direkte opp mot disse. Beskrivelsene ble veiledende for hvilke faktorer og sammenhenger som var fokus i den kvalitative analysen, og hvordan disse funnene ble løftet frem. Det har vært viktig å koble oppgavene til denne tabellen, for å kunne ta i betraktning hva oppgavene legger opp til at elevene skal skille ut, hvilket fremkommer i *Tabell 2*.

Forståelse på Nivå 0 innebar å kunne skille ut enkeltfaktorer. På dette nivået ble det ikke vist til sammenhenger mellom faktorene, men til enkeltfaktorer. Resultatene fra tabellene i kapittel 4 viste at elevene stort sett hadde løst alle oppgaver som fra *Tabell 2* var plassert på Nivå 0 rett, både på fortest og på ettertest. Faktorer det ble vist til var måleenhet i forbindelse med sammenligning av omkrets og formel i forbindelse med sammenligning av areal (oppgave 2a og 2b), formel for areal (oppgave 8), samt at størrelsene på enhetene måtte være like store (oppgave 4).

På Nivå 1 stod sammenligning i fokus, og det ble beskrevet at elevene tok utgangspunkt i egenskaper ved hver av figurene for å sammenligne flatene, men at de ikke kunne se egenskapene ved hver av dem i sammenheng. Oppgave 2a og 2b ble igjen trukket frem. Når det gjaldt hvordan 2b ble løftet frem på Nivå 0, så prosedyrekunnskap ut til å prege Elev 1 og

Elev 4 sine forklaringer av forholdet mellom arealene. Elevene viste til bruk av formel, men hvorfor denne prosedyren fungerte kom ikke frem. Siden én enkeltfaktor kom til syne ble forståelsen her knyttet opp mot Nivå 0. Nivå 1 var imidlertid beskrivende for forståelsen som Elev 2 viste for samme oppgave. Det ble direkte referert til at den ene hadde større plass inni, hvilket også var med på å vise til hva arealet faktisk innebar, og hva formelen produserte. Dermed ble enhetene i hver av figurene brukt til å si noe om arealene hver for seg. Elev 2 sin tankegang viste også til at flere faktorer, både formel og flaten, ble sett i sammenheng. Hirstein et al. (1978) kalte det å bevege seg mellom tilnærminger, og då dette som sentralt for at elevene også skulle forstå hvordan figurer kunne deles opp og omorganiseres. Oppdeling og omorganisering ble også synlig i denne studien ved at ulike faktorer ved arealbegrepet ble sett i sammenheng, men også ved at geometrisk tenkning var en del av forståelsene.

Resultattabellene fra kapittel 4 viste at Elev 2 hadde mest utvikling fra fortest til ettertest, med henholdsvis 27,27 % rett og 86,36 % rett. Gjennom funn fra intervjuene som ble lagt frem i kapittel 5, viser det seg at eleven løser én av de tre oppgavene som var feil på ettertesten korrekt, og at det dermed kan ha vært slurv i den skriftlige løsningen. De to gjenværende oppgavene som er markert som feil består av figurer som fra før av ikke er kjent for eleven, hvor den ene dreier seg om omkrets (oppgave 3aA), mens den andre handler om å finne rett figur til arealet som er oppgitt (oppgave 11). Med funnene som kommer frem i de to kapitlene, kan det dermed tenkes at noe spesifikk kunnskap, som for øvrig ikke trengs på samme måte i andre oppgaver, er manglende. Det kan ha noe med ukjente figurer å gjøre, eller med koblingen mellom sidelengder og helhet.

I den begynnende diskusjonen ovenfor er det trukket frem hvordan formelen for areal tilsynelatende er blitt brukt meningsfullt, men også hvordan den er brukt som en lært prosedyre. Til tross for at Elev 1 og Elev 4 ikke viste til sammenheng mellom bruk av formel og enheter for måling kom det imidlertid frem en bredere forståelse når en ser på helheten og tar andre oppgaver i betraktning. Elevene i denne studien viste ofte først til formel når de skulle si noe om arealet, og det kunne dermed se ut som isolert bruk av prosedyrekunnskap. Ved spørsmål om ytterligere forklaringer, viste Elev 2 for eksempel til «større plass inni, eller flere ruter enn den», mens elev 3 brukt kolonner og ruter til å forklare strukturen i flaten. På den måten ble det i større grad vist til en bevegelse mellom en dekketilnærming og formelbruk. Hirstein et al. (1978) påpekte at barn som kunne bevege seg mellom en enhet-/dekke-/telle-tilnærming og bruk av formel for areal, så ut til å ha forståelse for arealbegrepet.

Denne bevegelsen kommer her til syne ved at hva som blir produsert kommer frem og hva komponenter ved formelen innebærer.

Bevegelsen mellom faktorer og kunnskapsnett kom i denne studien mer tydelig frem i oppgaver på høyere nivå, slik *Tabell 1* også la opp til, og kan dermed tyde på at mer forståelse ligger til grunn også der hvor kun formelen er brukt på lavere nivå. Bevegelse mellom ulike tilnærminger, samt begrepssammenhenger, vil bli ytterligere diskutert i avsnittene som følger, hvor også geometrisk tenkning vil komme til uttrykk.

6.1.1 Hvordan er geometrisk tenkning relatert til elevers arbeid med areal?

Figurene fra oppgave 2 og 8, kvadrat og rektangler, var kjent for elevene. Trapesene fra oppgave 9 og 12 var imidlertid ikke like kjent. Forståelse elevene viste i forbindelse med trapesene kan beskrives ved hjelp av Nivå 2, ved at figurenes egenskaper og strukturen i flaten kom tydelig frem. Det ble her henvist til en enhet-/dekke-/telle-tilnærming, samt til bevegelse mellom disse og formel. Oppdeling og arealkonservering ble også vist som en del av forståelsen på dette nivået. Elev 1 og Elev 6 la flere faktorer i arealbegrepet da de tok i bruk en strategi hvor de hele enhetene bidro til å identifisere kjente figurer som del av trapeset. Bruk av formel for areal av rektangel/kvadrat innebar en kobling mellom sidelengder og struktur i figuren, bestående av de hele enhetene. Denne identifiseringen viste også til bevissthet for enhetenes rolle i strukturen. I tillegg ble arealet konservert når de ufullstendige enhetene ble satt sammen til hele enheter og lagt til. Identifisering av geometriske figurer, bruk av formel, fokus på enhet og arealkonservering, viser til bevegelse mellom kunnskapsnettene for geometri og areal, samt innenfor areal.

Fremgangsmåten som Elev 2 og Elev 4 tok i bruk kan bli sett i sammenheng med Kordaki og Potari (1998) sin undersøkelse, hvor gjentakelse av måleenhet ble sett på som en sentral del av strategien for å si noe om arealet dersom formel ikke kunne brukes. Enheten ble identifisert i trapesene, og gjentatt til å dekke flaten ved hjelp av telling, samt at arealkonservering også fremkom ved omorganisering av de ufullstendige rutene. Likevel var ikke dette gjeldende for alle elevene, ved at Elev 1 og Elev 6 identifiserte geometriske figurer og brukte formel til å regne arealet. Sammenhengene mellom faktorene skilte seg derfor fra dem som fremkom hos Elev 1 og Elev 6 ved at geometrisk tenkning og identifisering av kjente figurer ikke lå til grunn, og at det ikke ble tatt i bruk en formel som del av problemløsningen. Enheten og gjentakelse av denne var i større grad fokusert.

I forbindelse med oppgave 10 kom sammenhenger mellom kunnskap om oppbygging av figurer, bruk av formel for areal, enhet for måling og arealbegrepets overordnete betydning til uttrykk. I forståelsene var det prosedyrekunnskap som først og tydeligst kom til syne, ved at løsningene var basert på multiplikasjon og divisjon. Likevel fremkom noen sammenhenger. Det ble vist gjennom bruk av formel på hele rektangelet, for så å bruke kunnskap om figurens egenskaper til å se på trekanten som halvparten. Det ble også vist til hva trekanten dekket og til antall kvadratcentimeter, hvilket igjen kan ses på som en enhet-/dekke-tilnærming. Dermed så det ut til at det eksisterte en bevissthet for hva formelen produserte. I undersøkelsen hvor Huang og Witz (2011) så på geometri integrert i arealundervisningen, brukte elever geometriske betraktninger som kongruens, oppdeling og egenskaper i arbeid med problemer knyttet til areal. I studien som her er gjennomført ser en også at en oppdeling kommer til syne ved at elevene viser til hvor mye trekanten for eksempel dekker, men det blir her ikke nevnt eksplisitt at geometrikunnskap spiller en rolle for deres forståelse. Det vil kunne baseres på at fokuset bare har vært på arealmåling gjennom prosjektperioden.

Begrepssammenhenger som finnes i elevenes forståelser er ikke identisk, og det ble lagt ulike faktorer og strategier til grunn i måten å løse oppgaver på. Dersom en ser forståelse vist på én oppgave atskilt fra de andre, vil det kunne se ut til at forståelsen for arealbegrepet er snever, og ofte også at det kun ligger lærte prosedyrer til grunn. Det som imidlertid ble viktig når funn fra studien skulle løftes frem, var at samtlige elever hadde forstått oppgave 13 rett på ettertesten. Denne oppgaven ville vært vanskelig, kanskje umulig, for elevene å løse uten å vite noe om plenens geometriske egenskaper. Samtlige elever tok utgangspunkt i figurens egenskaper for å finne den manglende informasjonen, slik at arealet kunne regnes ut. Noen av elevene kom inn på strukturen som arealet bestod av, men de fleste viste også her til å multiplisere sidelengder. Likevel fulgte denne prosedyren etter at kunnskap om areal og omkrets, samt plenens geometriske egenskaper, hadde blitt tatt i bruk for å hente inn nødvendig informasjon.

Selv om fokuset i undervisningen i hovedsak var på måling, mer spesifikt på areal i noen av ukene hvor prosjektet foregikk, viser det seg også at arealkunnskap alene ikke alltid er tilstrekkelig for å løse problemer på dette emnet. Det fremkommer her ved at elevene tar i bruk kunnskap fra andre nettverk, og i disse eksemplene er fokuset på geometri. Ser en på kunnskapen som et bilde bestående av puslebrikker, vil bildene inneholde brikker knyttet til geometri og areal, og innebærer at en ikke ser matematiske emner atskilt, men i sammenheng.

Bevegelsen mellom nettverk av kunnskap gir en indikasjon på at kunnskapen som elevene viser er meningsfull for dem, og at den er forankret i begrepsstrukturer og ikke bare i prosedyrer.

6.1.2 Hvordan kommer prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer til uttrykk?

I kapittel 4 ble oppgavene som var rett og feil besvart knyttet til prosedyrekunnskap og kunnskap om begrepsstrukturer slik det var satt opp i *Tabell 2.* I kapittel 5 ble begrepene imidlertid brukt til å beskrive elevenes forståelser.

Begrepsparet ble nyttig i beskrivelsene av forståelsene som fremkom i den kvalitative analysen. Elevene viste ofte til prosedyrer først, men med oppfølgende spørsmål om utdypning kom det frem at flere av disse tilsynelatende var basert på kunnskap om begrepsstrukturer. En formidlet prosedyre forteller ikke nødvendigvis så mye om forståelsen som ligger til grunn, og dermed var intervjuet verdifullt ved at de oppfølgende spørsmålene fikk frem mer. Her ble oppgave 8, 9 og 10, som nevnt markert som å vise prosedyrekunnskap i den kvantitative analysen, men kunne også relateres til forståelse basert på kunnskap om begrepsstrukturer, hvilket ble vist i kapittel 5. Når elevene i denne studien ofte viste til prosedyrer først, kunne det bety at noen av oppgavene i for stor grad la opp til dette, både fordi flere figurer var kjente og rektangelformede, slik Kordaki og Potari (1998) fant i sin undersøkelse, men også fordi flere av oppgavene var abstrakte eller halvabstrakte. Sistnevnte innebærer at det enten ikke er merket opp hvordan strukturen i flaten skal dannes, eller at det er noe markering, som for eksempel i oppgavene 5, 6 og 8.

Arealet av rektangelet i oppgave 8 ble også regnet ut ved hjelp av prosedyrer, og denne ble både vist som lært, men også som basert på kunnskap om begrepsstrukturer. Begrunnelsene viste både til hvordan forståelse kan forekomme på Nivå 0 og på Nivå 2, ut fra hvordan strukturen i flaten ble uttrykt. Elev 4 begrunnet med en gangesang, mens Elev 3 viste til hvordan sidelengdene og formelen kunne representere strukturen ved å se hvordan disse sammen kunne danne kolonner og ruter i flaten. Henvisningen til kolonner og ruter kan knyttes til kunnskap om begrepsstrukturer, ved at komponentene ved formelen blir gitt mening. Gangesangen viser til noe innlært, hvilket indikerer at prosedyrekunnskap ligger til grunn.

Til tross for at elevene ikke alltid viser til hva prosedyren de bruker innebærer, eller hvilke faktorer som inngår, kan det likevel tenkes at elevene her evner å bevege seg mellom ulike tilnærminger til arealbegrepet. Både bevegelse mellom faktorer, samt isolert bruk av prosedyrer kommer frem i elevenes løsninger. Dersom det i samtalen om én oppgave for eksempel ble vist til måleenhet, kan det ha ført til at samme faktor ikke ble vist til i forklaringer av andre oppgaver. Helheten av forståelsene de viser gjør at vi likevel kan snakke om bevegelse mellom, og forståelse for, flere faktorer ved arealbegrepet. I en av oppgavene var det også helt nødvendig å ta i bruk geometrikunnskap, og dermed kan en snakke om bevegelse mellom kunnskapsnett slik det ble nevnt i kapittel 1. Forståelsen av oppgave 13 ville for eksempel ikke kunne vært basert på én lært prosedyre, men i stedet måtte faktorer fra flere kunnskapsnett vært på plass for at oppgaven i det hele tatt skulle kunne løses.

Høy prestasjon i matematikk ble i innledningskapittelet beskrevet som å være inspirert av Hiebert og Lefevre (1986). De brukte begrepet kompetente matematikere, og beskrev dem som å kjenne til komponenter ved matematikken, både symboler og prosedyrer, i tillegg til å vite hvordan disse henger sammen. Høytpresterende elever ble også sett i sammenheng med hvordan man evner å koble og ta i bruk ulike nettverk av kunnskap, bruke kunnskapen meningsfullt, samt at prestasjonen er varig og helhetlig. Kapittel 4 viste til generelt høy score hos elevene, hvor flere komponenter tilsynelatende var på plass uten at det kunne bli sagt noe om sammenhengen mellom dem. I den helhetlige forståelsen som blir løftet frem i kapittel 5, blir både symboler og prosedyrer tatt i bruk, og det blir også vist til at kunnskap om begrepsstrukturer i flere tilfeller ligger til grunn. Hiebert og Lefevre (1986) fremhevet at en helhetlig forståelse må basere seg på begge kunnskapstyper. Dette kommer spesielt til syne i den siste oppgaven hvor formler og kunnskap om areal og geometri ligger til grunn, men også i andre tilfeller hvor elevene har gitt formler og andre prosedyrer mening.

Huang og Witz (2011) fant i sin undersøkelse at elever som ble undervist på emnet areal hvor også geometri var integrert, i større grad kunne redegjøre for hvorfor en formel fungerte. Både spesifikk kunnskap om prosedyrer og kunnskap om begrepsstrukturer så de som nødvendig for å løse oppgaver som eksplisitt ba om begrunnelser, og at elever som hadde hatt geometri integrert i undervisningen da hadde bedre forutsetninger for å vise til hvorfor-aspektet. Det ble blant annet gjort ved å vise til geometriske aspekter som for eksempel kongruens og omorganisering. I denne studien om begrepssammenhenger har også elever som har tatt i bruk geometrisk tenkning vist til forståelse av hvordan måleenheter, gjentakelse av disse og omorganisering, i sammenheng med formel, kan bidra til å løse oppgaver som i utgangspunktet ikke var helt kjent. Disse sammenhengene har også gjort at forståelsen kan sies å være forankret i kunnskap om begrepsstrukturer. Det har gitt formelen mer mening enn der hvor den enten ble brukt isolert eller sett i sammenheng med måleenhet. Disse funnene skiller seg likevel fra undersøkelsen utført av Huang og Witz (2011) ved at undervisningen ikke hadde fokus på geometri, og at elevene ikke viste direkte til geometriske begreper, som for eksempel kongruens. I oppgavene hvor geometrisk tenkning kom til syne, kom kunnskap om begrepsstrukturer til uttrykk ved at det blant annet ble trukket linjer mellom figurens egenskaper og formel for areal, hva figuren dekket og formel for areal, og gjennom bevegelse mellom kunnskapsnett.

Resultatene fra kapittel 4 og 5 viser ingen mønster for om oppgavene som var besvart feil la opp til å vise prosedyrekunnskap eller kunnskap om begrepsstrukturer. Siden intervjuene var basert på ettertesten, er det vanskelig å si noe om hva som lå bak feilene fra fortesten. Ni forskjellige oppgaver var der gjort feil. De fleste av oppgavene som la opp til å vise prosedyrekunnskap var kun gjort feil av enkeltelever, mens oppgave 10 med trekanten og oppgave 11 var gjort feil av 5 av 6 elever. Oppgave 13, hvor 3 av 6 elever besvarte oppgaven rett, var det nødvendig å kunne tenke komplekst. De ulike oppgavene som ble gjort feil på fortestene er plassert på Nivå 0 og 2-4. Spesielt de på Nivå 2, 3 og 4 (oppgave 11, 10 og 13) innebar både at elevene hadde skilt ut enkeltfaktorer ved arealbegrepet, og at de kunne se noen sammenhenger mellom dem. Feil på Nivå 0 vil innebære at spesifikk kunnskap er manglende. Fra ettertesten viser intervjuene seg å være helt nødvendig for å få riktig oppfatning av elevenes forståelser og hva de innebærer. Resultatene peker ut oppgavene 2a, 3aA, 9 og 13 som feil besvart av enkelte, hvilket kan plasseres på Nivå 0 og 1 (omkrets), 2 og 4. Intervjuene viste at elevene i samtalene om oppgave 2a, 9 og 13 likevel hadde forstått disse.

I denne studien kom prosedyrekunnskap til uttrykk ved at elevene viste til bruk av formler og telling. Prosedyrekunnskapen var i flere tilfeller basert på kunnskap om begrepsstrukturer, ved at sammenheng mellom sidelengder, formel og areal ble beskrevet, og hvor en kan si at elevene bevegde seg mellom nettverket for areal og geometri. Som nevnt ble det ofte først vist til prosedyrekunnskap, men med spørsmål om utdypning ble det i flere tilfellet også lagt mening i prosedyrene. Elevene viste da gjennom å relatere geometrisk tenkning og å vise til flere faktorer ved arealbegrepet hvordan kunnskap om begrepsstrukturer også var en del av forståelsene.

6.1.3 På hvilken måte kan variasjonsteori, som undervisningen baserer seg på, spille en rolle i å utvikle begrepssammenhenger?

Som nevnt i innledningen er fokuset for variasjonsteoretiske undersøkelser å se på hva som er mulig å oppfatte for eleven (Wernberg, 2009). Det karakteristiske ved dette pedagogiske verktøyet er at læringsobjekt, kritiske faktorer og variasjonsmønstre er identifisert og systematisert. Denne måten å se et matematisk emne på har for meg gitt kunnskap om hvordan læringsobjekter kan knyttes til matematiske emner, og hvordan disse er bygd opp av faktorer som er kritiske for læringen. I denne studien er det ikke mulig å si om variasjonsteori har bidratt positivt for elevenes resultater og utvikling av begrepssammenhenger, men en kan si at det har hjulpet til å identifisere sammenhenger mellom faktorer i elevenes forståelser.

Elevene som deltok i denne studien ble sett på som høytpresterende. På fortesten kunne en likevel se at noen oppgaver på de fleste nivå var gjort feil. Som nevnt kan feil knyttet til for eksempel Nivå 0 bety at noen spesifikke faktorer ikke er skilt ut. Feil på oppgaver av høyere nivå, innebærer gjerne at det komplekse synet på faktorene mangler. Testene som ble brukt ble på den måten nyttige for å se på hva som så ut til å være på plass, og hva som så ut til å mangle. Intervjuene viste at elevene refererte til ulike faktorer når det var snakk om de samme oppgavene. Det ble for eksempel vist til ruter hos én elev i oppgave 2b, mens det ble vist til formel hos en annen. I oppgave 8 ble prosedyren både begrunnet med en gangesang og kolonner og ruter. De ulike måtene å snakke om arealet på kan tyde på at synet der og da også var noe ulikt, og at de hadde skilt ut ulike faktorer ved objektet. Informasjon fra en fortest kan brukes til å se på hvilke faktorer som er kritiske i læringen for at de ulike elevene skal få et helhetlig bilde av det som skal læres. I så måte kan informasjon fra en ettertest si noe om hvilke av faktorene som ser ut til å være skilt ut etter undervisning. Å løfte frem elevenes stemmer vil være med på å få bedre tak på denne informasjonen.

Til tross for at undervisningen ikke hadde fokus på geometri, viser funn fra kapittel 5 at også geometrisk tenkning tidvis ligger til grunn i elevenes forståelser. Geometrisk tenkning har vist seg som nødvendig i løsningen av noen problemer, og kan dermed også rettferdiggjøre dette som kritisk i forståelsen av areal. Hirstein et al. (1978) fant i sin studie at tallberegninger og bruk av geometri ville bedre forståelsen for formler knyttet til areal. Ved å løfte dette frem i arealundervisningen, vil det kunne bidra til at elevene ser nytten av å bruke geometri, og også hjelpe til å utvikle kunnskap om begrepsstrukturer ved å gi komponenter ved arealbegrepet mening. Som nevnt var ikke dette fokus i undervisningen, men elevene tok likevel i bruk kunnskap fra begge kunnskapsnettene, både der det var nødvendig, men også til tider som en del av en strategi der det ikke var absolutt nødvendig.

Tabell 1 og *Figur 1* var begge utgangspunkt for å se på arealbegrepet i sin helhet. Kunnskap om arealbegrepet bidro til å identifisere læringsobjekter, hvilket innebar at noe ved arealbegrepet fikk fokus i undervisningen. Hvilke faktorer som er kritiske for å forstå læringsobjektet kan være flere. Dersom målet er at elevene skal få forståelse for arealkonservering, vil både enheter, gjentakelse av og størrelsen på disse, og gjerne noe geometrisk tenkning, være kritisk for å oppnå helhetlig forståelse for dette. Har elever mangler knyttet til arealkonservering, kan en slik det blir tenkt her, se på hvilke faktorer som er kritiske for at elevene skal mestre dette. Å fokusere på elevenes ulikheter når det gjelder hvordan de oppfatter arealbegrepet vil være sentralt når en skal hjelpe dem i utviklingen.

Fokus på læringsobjekt og matematiske emner som nettverk av kunnskap, og hva som er kritisk i forståelsen av disse, vil kunne bidra til å identifisere hva som er kritisk i elevenes læring, og hva som skal til for at de skal kunne utvikle seg. Slik det kommer frem her kan variasjonsteori med sine prinsipper være et godt utgangspunkt for utvikling av begrepssammenhenger, ved at fokuset på kritiske faktorer og variasjoner av disse kan være en del av den tilpassede opplæringen. Med studien som er gjennomført vil det være vanskelig å si hvilken rolle variasjonsteori har hatt direkte, men med de variasjonsteoretiske prinsippene som ligger til grunn, har det pedagogiske verktøyet kunne bidratt til å endre elevenes syn på et læringsobjekt, eller et matematisk emne som det her er blitt sett på.

6.2 Studiens avgrensning og begrensning

Når det gjelder avgrensning, er dette først og fremst gjort ved å gå fra måling til arealmåling, men også ved å ta i bruk det teoretiske rammeverket som er brukt. Problemstillingen med tilhørende forskningsspørsmål avgrenser undersøkelsesområdet ytterligere, og er slik med på å bestemme hva diskusjonen kan handle om. Denne studien kan dermed diskutere hvilke begrepssammenhenger som finnes i elevenes forståelser knyttet til areal. Dersom en ser på matematikkfaget som et bilde, vil denne studien bare være en veldig liten del av dette. Andre teoretiske perspektiv kunne bidratt til andre funn, ved for eksempel å ha fokus på språket elevene brukte. Samme teoretiske rammeverk, men en annerledes problemstilling ville også bidratt til at andre aspekter innen emnet ble belyst. Fokuset kunne da vært mer på strategier og tenkning heller enn sammenhenger.

Oppgavesettet består av 13 oppgaver, hvor elevene kun får vist kunnskap med utgangspunkt i disse oppgavene. Arealforståelsen er knyttet til noen spesifikke figurer og oppgavetyper, og dermed vil andre måter å representere besvarelsene på ikke komme til syne. Dette har fungert som en begrensning for hva datamaterialet kan si. En slik begrensning må dermed bli tatt i betraktning når en ser på hva elevenes forståelser innebærer. Ved å bruke andre figurer og oppgavetyper i testene kunne flere og andre begrepssammenhenger i elevenes forståelser ha kommet til uttrykk.

Intervju som metode for å løfte frem elevers stemmer, gjør at en kan stille spørsmål for å utdype og oppklare. Denne funksjonen gir også en begrensning når det gjelder hva diskusjonen kan omhandle. De seks intervjusituasjonene som inngår i datamaterialet for denne studien har hatt samme utgangspunkt. Likevel vil det i en samtale med elever kunne oppstå uforutsette hendelser, og også dukke opp interessant informasjon som kan være bestemmende for retningen intervjuet tar. Elevene er ikke blitt bedt om å utdype tankene bak akkurat de samme oppgavene, hvilket har vært noe begrensende for å kunne se på elevenes besvarelser på samme oppgave. Målet var likevel ikke å sammenligne elevene, men å kunne vise til sammenhenger som fantes. Ved å være åpen om og bevisst på ulikhetene som finnes i datamaterialet, har det vært mulig å analysere det i lys av problemstilling og forskningsspørsmål. Dersom andre skal gjøre en undersøkelse inspirert av denne, vil det være viktig å bestemme seg på forhånd for hvor fokuset skal ligge, enten det handler om å sammenligne eller å ta utgangspunkt i det som viser seg som interessant hos de ulike elevene.

Siden det bare er seks elever som har deltatt i denne studien, er mange elever utelukket, og studien har dermed ikke grunnlag for å si noe generelt om begrepssammenhenger i høytpresterende elever på 5.trinn sine forståelser. Valg som er gjort for denne studien har blitt sett på som å bidra til å begrense hvilke funn som kommer frem. På samme måte vil valg av klassetrinn være en begrensende faktor. Det vil med stor sannsynlighet finnes andre begrepssammenhenger i forståelsene til elever på andre trinn. Dermed blir det viktig å fremheve at testene som er brukt er tilpasset elever på 5.trinn, og at funnene også er knyttet til dette trinnet.

Noen oppgaver er fokusert på, andre er ikke, og dette kan begrunnes i tid og hvorvidt det har vært mulig å gå i dybden på løsningene til alle oppgavene. Variasjonen i de ulike samtalene kan bli sett på som en berikelse for funnene, ved at flere aspekter kom til syne. Dersom flere forskere hadde bidratt i denne studien, kunne det gjerne vært mulig å intervjue flere elever, og det kunne også blitt gjort en fordeling når det kom til å analysere datamaterialet. Dette kunne bidratt til å styrke funnene i studien.

6.4 Videre arbeid

Datamaterialet kan kun besvare det som problemstillingen med tilhørende forskningsspørsmål, samt teoretisk rammeverk, åpner for. Området som studien er en del av er stort, og det er flere aspekter som kunne vært interessante å løfte frem. Det kunne for eksempel vært interessant å se på den faktiske betydningen variasjonsteori har hatt når det gjelder å bygge opp sammenhenger i elevenes forståelser. Det kan innebære å ha fokus på variasjonsteoretiske prinsipper i én klasse, og ikke ha dette fokuset i en annen. Mine første tanker da jeg gikk inn i prosjektet med én doktorgradsstipendiat, tre medstudenter og tre lærere, kretset rundt variasjonsteori og på hvilken måte bruk av dette verktøyet kunne være gagnlig for høytpresterende elever. Siden dette ikke fikk fokus i denne studien, kunne det vært interessant å undersøke om det er noen forskjell på hvordan bruk av variasjonsteori påvirker de ulike elevenes forståelser.

Fokuset har her vært på begrepssammenhenger knyttet til elevers forståelser av areal. Geometrisk tenkning er blitt sett på som viktig i problemløsning relatert til dette emnet, og dermed ble det konstruert en tabell og en figur hvor arealkunnskap og geometrisk tenkning ble integrert. Siden tabellen er tatt i bruk for å se på begrepssammenhenger knyttet til disse spesifikke testene, kunne det også vært interessant å se på hvordan tabellen enten kunne blitt brukt som utgangspunkt for undervisningen for å utvikle elevenes forståelse for arealbegrepet, og om den er nyttig for å se på sammenhenger i elevers forståelser i en større studie knyttet til areal. Oppgavene som her var utgangspunktet for intervju kan ses på som en begrensning når det gjelder hva arealforståelsen innebærer. Ved å ta i bruk flere figurer som er ukjente for elevene, irregulære figurer og komplekse oppgaver, kunne det vært interessant å se på hvordan tabellen kan bidra til å identifisere sammenhenger i tilknytning til dette, og hvilke sammenhenger som da vil komme til syne.

6.5 Oppsummering

Analyseverktøyet som ble brukt, i hovedsak *Tabell 1*, men også inspirasjon fra *Figur 1*, fungerte bra på den måten at det bidro til å trekke ut interessante aspekter ved det elevene formidlet i intervjuene og det de hadde gjort på testene. Verktøyet var komplekst og gjorde det mulig å se på hvilke faktorer ved arealbegrepet som fantes, hvordan disse hang sammen, samt hvordan geometrisk tenkning ble tatt i bruk. At Nivå 0 kan være beskrivende for noen løsninger, viser at enkelte faktorer er på plass. Når elevene i tillegg viser forståelse på det femte nivået, innebærer dette at en helhetlig tenkning rundt arealbegrepet er på plass, og det understreket også geometrisk tenkning som avgjørende i forståelsen. Elevenes forståelser ble ikke knyttet til alle de fem nivåene, og det som vises er for noen mer basert på prosedyrer enn på kunnskap om begrepsstrukturer.

Det helhetlige bildet var viktig å ta i betraktning når funnene for studien ble diskutert. Begrepssammenhenger på de ulike nivåene hadde ulik kompleksitet, og funnene fra denne studien viser at det samme problemet ble løst med ulike faktorer og sammenhenger til grunn i forståelsene. Mens noen i én oppgave kun brukte formel, kunne andre relatere formel til strukturen som ble dannet i flaten. Det kunne også være å dele opp og omorganisere et trapes slik at enhetene og arealkonservering kom tydelig frem. En tellestrategi ble så brukt for å få frem arealet, hvor andre i samme oppgave i tillegg identifiserte kjente figurer som de kunne bruke formel på. I noen av oppgavene var det nødvendig å ha kunnskap om figurenes egenskaper for å hente inn manglende informasjon, og også for å avgjøre hvilken formel som kunne brukes. I all hovedsak handlet den geometriske tenkningen knyttet til areal om figurers oppbygning.

Forståelsene elevene uttrykte så ofte ut til å være basert på prosedyrekunnskap, da det var det de henviste til først, gjennom formler og telling. Likevel kunne elevene ofte begrunne disse prosedyrene med ulike faktorer knyttet til areal, og bevege seg mellom kunnskapsnett, slik at forståelsen så ut til å være mer basert på kunnskap om begrepsstrukturer. I noen av oppgavene ble det også sett på som nødvendig å basere forståelsen på kunnskap om begrepsstrukturer, da kunnskap fra flere kunnskapsnett måtte brukes.

Med bruk av variasjonsteori som et pedagogisk verktøy i undervisningen, har jeg i denne studien vært oppmerksom på elevenes ulike måter å se et objekt på, og hvilke faktorer som er kritiske i elevenes læring. Elevene viste til ulike faktorer i intervjuene, hvilket også kan tyde på at de ser objektene på ulike måter. Variasjonsmønstre og fokus på ulike faktorer har kunnet bidra til at elevene får mulighet til å skille ut faktorene som er kritisk for deres læring, og at de endrer synet på objektet noe. Som nevnt ovenfor vil en kunne si lite om hvilken påvirkning variasjonsteori faktisk har hatt på utviklingen av begrepssammenhenger. Likevel kan en si at det kan være et nyttig verktøy når læringsobjekt og kritiske faktorer skal identifiseres og løftes frem, slik at elevene kan få mulighet til å skille ut det som er kritisk for læringen deres.

Ved å integrere areal og geometri i nivåer inspirert av van Hiele, har det kommet frem hvordan elevene også tenker geometrisk i problemer knyttet til areal. Det har vært nyttig for å få frem kompleksiteten av begrepssammenhenger som finnes i elevenes forståelser. Med tanke på at dette er en ganske liten studie, ville det vært interessant å se på hvorvidt *Tabell 1* kunne vært nyttig å bruke også i større studier, og om sammenhenger mellom areal og geometri også da er nyttig for å forstå elevers tenkning. For å bli bevisst på hvordan geometrisk tenkning kan være relatert til arbeid med areal, kan det dermed være nyttig å ha *Tabell 1* som utgangspunkt for å finne læringsobjekt og kritiske faktorer.

Det har vært nyttig å se nivåene som del av utviklingen, og ikke som en lineær progresjon i elevenes utvikling. Det kom frem i intervjuene at alle elevene evnet å løse oppgaven som var plassert på det høyeste nivået, mens det for enkelte likevel var gjort noen feil på lavere nivå. Bakgrunnskunnskapen for å kunne besvare oppgavene kan ses på som ulik fra nivå til nivå. Det kan dermed være enkelte faktorer som er kritiske for læringen som de enda ikke har skilt ut, og som ikke var absolutt nødvendig for å løse oppgaver på andre nivåer. Fokuset og funnene i denne studien kan bidra til å gjøre andre bevisst på hvilke komponenter som inngår i areal, hvordan de henger sammen, og hvordan de er relatert til andre matematiske emner. I tillegg eksemplifiserer det hvordan disse seks elevene forstår det matematiske emnet areal, og at flere begrepssammenhenger er tilgjengelig enten der hvor elevene måtte ta i bruk en helhetlig forståelse, men også dersom de ble spurt om å utdype. Hvordan disse elevene forstod emnet og hvilke begrepssammenhenger som fantes kan være nyttig å være bevisst også for å hjelpe andre elever i å utvikle arealforståelsen.

7 Referanser

Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics, 13*(3), 140-146.

Bond, T. G., & Parkinson, K. (2010). Children's understanding of area concepts: Development, curriculum and educational achievement. *Journal of Applied Measurement, 11*(1), 60-77.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48.

Clements, D. H., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*, 299-317.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. I Mary Montgomery Lindquis (Red.), *Learning and teaching geometry, K-12* (s. 1-16).

Curry, M., Mitchelmore, M., & Outhred, L. (2006). *Development of children's understanding of length, area and volume measurement principles*. Paper presentert ved Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague, Czech Republic.

Fjereide, M., & Skjervheim, E. (2012). *Trua på at alle kan ta eit steg til:" Med salutogenes som ledstjärna i skolan"*. (Masteroppgave). Universitetet i Oslo.

Hatch, J. A. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Albany, N.Y: State University of New York Press.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. I James Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1-29). New York and London: Routledge.

Hirstein, J. J., Lamb, C. E., & Osborne, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *The Arithmetic Teacher, 25*(6), 10-16.

Huang, H.-M. E., & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction, 21*(1), 1-13. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.09.002

Høines, M. J. (2003). Det skjer i mellomrommet. *Tangenten, 2*, 42-48.

Johnson, H. C. (1986). Area is a measure. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 17*(4), 419-424.

Kamii, C., & Clark, F. B. (1997). Measurement of length: The need for a better approach to teaching. *School Science and Mathematics, 97*(3), 116-121.

Kordaki, M., & Potari, D. (1998). Children's approaches to area measurement through different contexts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(3), 303-316.

Kospentaris, G., Spyrou, P., & Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 105-127.

Krumsvik, R. J. (2014). *Forskningsdesign og kvalitativ metode - ei innføring*. Bergen: Fagbokforlaget Vigmostad & Bjørke AS.

Kunnskapsdepartementet. (2014). *Elevenes læring i fremtidens skole— Et kunnskapsgrunnlag*. (NOU 2014:7). Hentet fra: https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/NOU-_2014-7/id766593/?ch=4

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T. M., & Rygge, J. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Lo, M. L. (2014). *Variationsteori: för bättre undervisning och lärande*. Studentlitteratur.

Magne, O. (1944). Taluppfatningens pussel. *Särtryck og Småtryck, 821*, 1-21.

Marshall, C., & Gretchen, R. B. (2011). *Designing qualitative research* (5. utg.). California: SAGE Publications Inc.

Marton, F., & Pang, M. F. (1999). *Two faces of variation.* Paper presentert ved 8th European Conference for Research on Learning and Instruction, 24-28 August 1999.

Mellin-Olsen, S. (2008). *Eleven, matematikken og samfunnet. En undervisningslære.* (1. utg.). Bekkestua: NKI Forlaget.

Opplæringslova - Oppll. Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa. Hentet fra: https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61/KAPITTEL_1#KAPITTEL_1

Pang, M. F. (2003). Two faces of variation: On continuity in the phenomenographic movement. *Scandinavian Journal of Educational Research, 47*(2), 145-156.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *Child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.

Rickard, A. (1996). Connections and confusion: teaching perimeter and area with a problem-solving oriented unit. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(3), 303-327. doi: http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90008-5

Runesson, U. (2006). What is it possible to learn? On variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research, 50*(4), 397-410.

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. I James Hiebert (Red.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 181-199). New York and London: Routledge.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Thompson, T. D., & Preston, R. V. (2004). Measurement in the middle grades: Insights from NAEP and TIMSS. *Mathematics Teaching in the Middle School, 9*(9), 514-519.

Van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, 243-252.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teach. Child. Math, 5*, 310-316.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna.* (PhD). Högskolan Kristianstad.

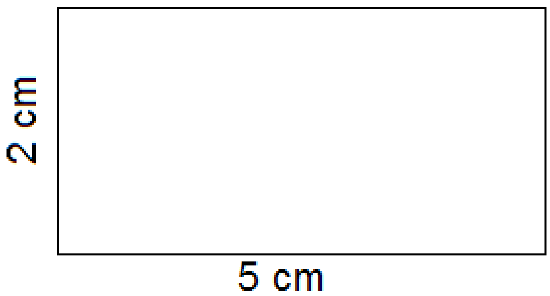
Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 224-239.

8 Vedlegg

Vedlegg 1: Oppgavesettet fra ettertesten

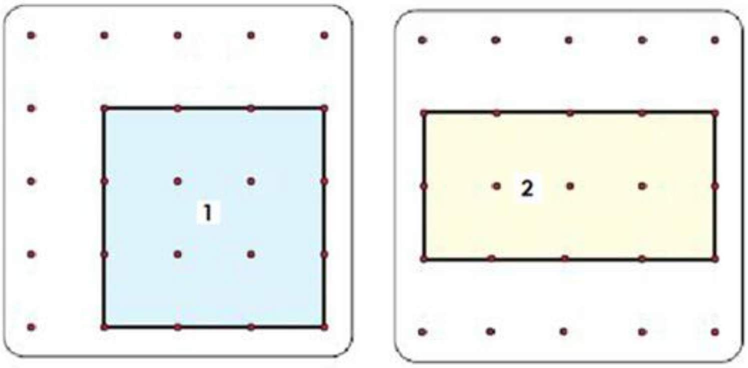
1

Hva er omkretsen til figuren?



Omkretsen er ______________

2a Hvilken av figurene har størst omkrets? Sett ring rundt riktig svar.

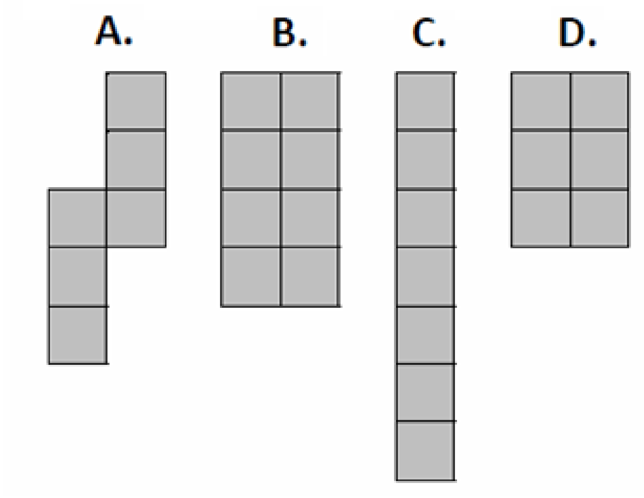


A. figur 1	B. figur 2	C. Lik omkrets	D. Umulig å si, fordi______________________________

2b Hvilken av figurene har størst areal?

A. figur 1	B. figur 2	C. Likt areal	D. Umulig å si , fordi______________________________

3a Hva er omkretsen til figurene?



A_________ B__________ C___________ D_____________

_

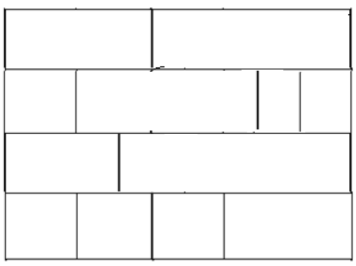
3 Hva er arealet til figurene?

b

A_________ B__________ C___________ D_____________

_

4 Hvor stort areal har figuren?

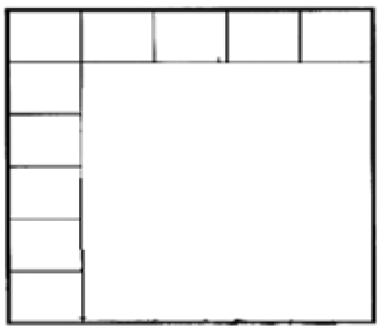


A. 8 B. 11 C. 12 D. Umulig å si,

fordi____________________________

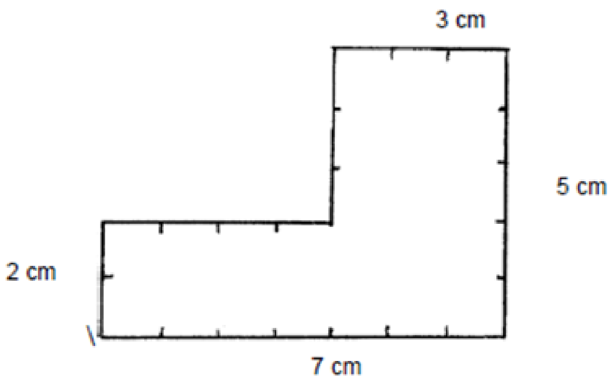
5

Hva er arealet av figuren? Vis hvordan du kommer frem til svaret.

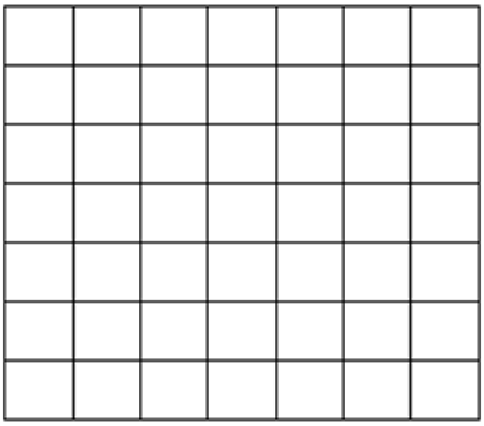


Arealet er ______________

6 Hva er arealet av figuren? Vis hvordan du kommer frem til svaret.

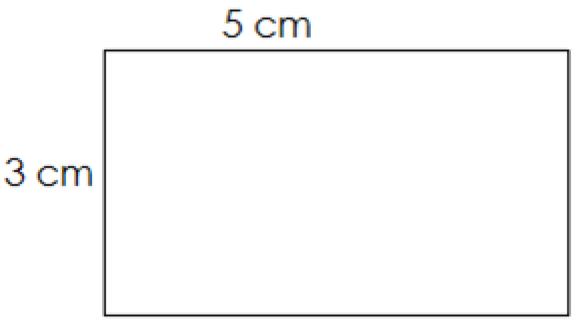


7 Tegn et rektangel som har areal på 12 cm².



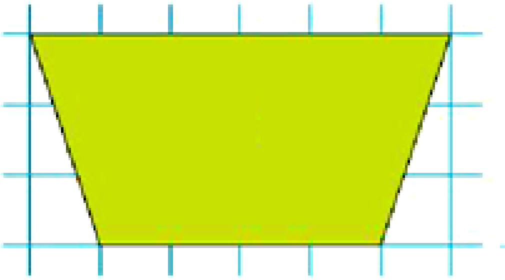
Hva er arealet av dette rektanglet? Vis hvordan du kommer frem til svaret.

8



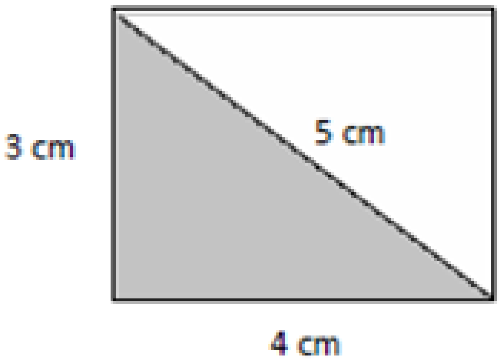
Arealet er _______________

9 Hva er arealet av figuren?



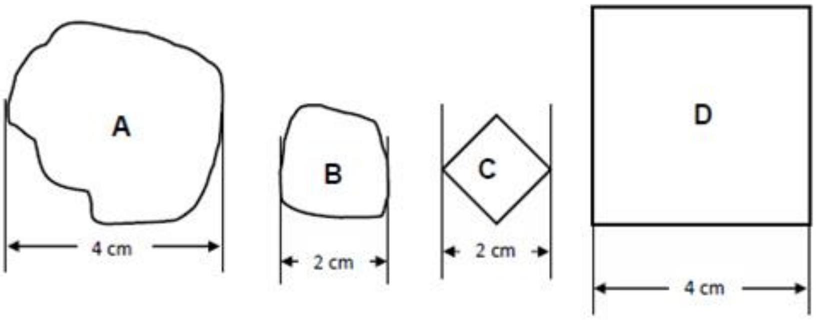
A. 16 B. 18 C. 15 D. Umulig å si, fordi______________________________

10 Rektanglet har et areal på 12 cm². Hva er arealet av den grå trekanten inn i rektanglet?



Arealet er______________________________

11 Hvilken av figurane har et areal på nærmest 4 cm²?

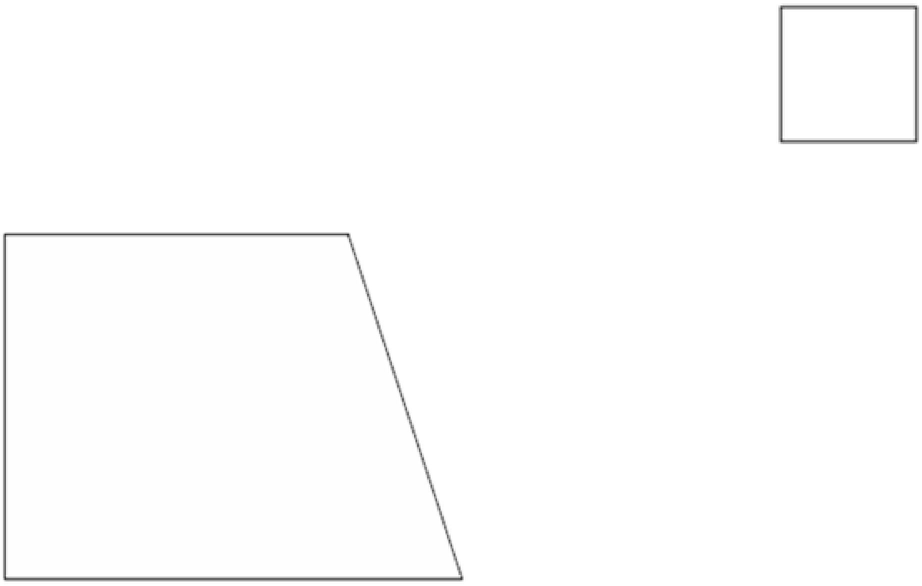


A Figur ______, B fordi____________________________

____

12 Hvor mange slike kvadrater mener du det er plass til i figuren under?

Vis med tegning hvordan du løste oppgaven.



13 Sindre skal klippe en plen som har form som et rektangel. Den lengste siden er 6 meter lang. Omkretsen til plenen er 20 meter. Hva er arealet til plenen?

Du kan gjerne tegne til oppgaven.

Vedlegg 2: Intervjuguide

Intervjuguide til semi-strukturert oppgavebasert intervju med elever

Hensikten med elevintervjuene er å forstå hvordan elevene tenker og resonnerer. Målet er å prøve å finne kritiske faktorer, dvs på hvilke måte elevene oppfatter ulike emner innen måling. Gjennom slike intervju kan en oppdage og avdekke mulige misoppfatninger eller misforståelser som elever kan ha. Intervjuet kan også ytterligere avdekke elever forståelse for et emnet, dette kan være elever som har alt eller svært mye riktig på testen.

Målet er at elevene får anledning til å vise og forklare, og at vi på denne måten kan forsøke å forstå hvordan eleven tenker og resonnerer når han forsøker å løse en oppgaver eller forklarer hvordan han tenkte når han løste oppgaven.

Intervjusituasjonens hovedfokus er å få klarhet i elevenes tenkemåte, det vil si at en ikke skal drive undervisning.

1. **La elevene stå for snakkingen**. Om eleven ikke sier så mye, så er det viktig at han blir oppmuntret til å forklare og beskrive og at intervjuer bare bryter inn og klargjør utydeligheter, og fortsetter å sørge for at elevene og elevens tanker er i fokus.
2. **Unngå å undervise i intervjusituasjonen**. Hensikten er å få tak i elevens forkunnskaper. Den informasjonen som eleven gir, skal brukes til å planlegge undervisningen. Hvis intervjuer forsøker å få eleven til å riktig svar eller foreslå passende strategier, kan dette forstyrre elevens egen tankeprosess.
3. **Ikke vis hvordan du tenker underveis i intervjuet.** Svarene til eleven bør ikke underveis i intervjuet bli vurdert som riktige, gale, gode eller dårlige, men som interessante og informative. «Gale» svar er gjerne mer verdifulle i denne situasjonen.

Velg ut noen oppgaver fra testen, f.eks 5 stykker. Ta også med et par oppgaver som eleven har svart riktig på. Ha testen til eleven med på intervjuet. Hele intervjusituasjon videofilmes eller tas opp på lydbånd. Ta gjerne notater underveis i intervjuet, bruk vedlagt skjema.

Ha med papir, blyant og materiell (linjal, kvadratiske plastbrikker) som elevene kan bruke underveis. Plasser eleven slik at distraksjoner kan unngås (f.eks utsikt gjennom vindu, dør).

Gjennomføring av intervju

Oppstart: Forklar at du har lyst til å høre hvordan eleven har kommet fram til noen av svarene og hvordan han har tenkt.

- ***Jeg er interessert i hvordan du tenker. Det hadde derfor vært fint om du tenker høyt. Jeg er ikke opptatt av hvor <u>godt</u> du løser oppgavene, men hva du tenker.***

Start gjerne med en oppgave de har løst riktig.

Disse spørsmålene kan være greie å ha i bakhodet i intervjuet, fordi de dekker alle trinn i en løsningsprosess.

1. ***Kan du lese spørsmålet for meg?*** (Lese)

2. ***Hva spørres det etter i oppgaven?*** (Forstå)
3. ***Kan du vise meg hvordan du fant svaret og si meg hvordan du går fram for å finne det?*** (Beskrive fremgangsmåte)
4. ***Kan du skrive ned eller tegne svaret på oppgaven?*** (Avkode).

En kan også starte med å spørre:

- ***Kan du fortelle meg hvordan du kom fram til svaret på denne oppgaven?***

Følg opp med spørsmål som:

- ***Hvorfor tenkte du sånn? Hvorfor valgte du den løsningen?***

Andre eksempel på spørsmål:

1. Hvis eleven er stille i mer enn 3 sekunder, kan disse kommentarene hjelpe:

- ***Fortsett å snakk høyt***
- ***Hva tenkte du når du forsøkte å løse oppgaven?***
- ***Fortell meg hvorfor du valgte det svaret.***

2. Hvis eleven spør om hjelp eller ber om ytterligere informasjon, spør lignende spørsmål:

- ***Hvis jeg ikke kan hjelpe deg, hva ville du bestemt deg for å gjøre?***
- ***Det kan virke som oppgaven var litt vanskelig. Kan du fortelle meg hvorfor du synes den ble vanskelig?***

3. Dersom du trenger ytterligere informasjon hvordan eleven har tenkt i en oppgave, så spør følgende oppfølgingsspørsmål:
   - ***Jeg la merke til at du nevnte ____, hva mente du med det?***
   - ***Hva tenker du at dette ordet betyr?***
   - ***Kan du fortelle meg hva oppgaven ville du skulle gjøre?***
   - ***Kan du gjengi hva oppgave med dine egne ord?***

Vedlegg 3: Planleggingsdokument for arealleksjon

Leksjon 2 Areal

Læringsobjekt:

- Forstå at areal er eit mål på flata inni figuren.
- Bevisstgjera elevane på måleeiningane. Måle storleikar av flater med ikkje-standariserte dermed skriv måleeininga opphøgd i andre: cm^2
- Elevane skal bli kjent med dei ulike standariserte måleeiningane for areal: cm^2 -dm^{2-} m^2 – km^2. I denne samanheng spesielt arbeida med cm^2 og m^2.

Forventa kritiske faktorar:

- Elevane blandar saman areal og omkrins.
- Elevane er usikre på måleiiningane for areal. Dei treng øving på å oppfatta at måleeiningane må vera like store.
- Elevane kan teikna og telja ruter, men klarer ikkje å kopla talet på rute med lengdemåla langs kantane.
- Elevane har ikkje klart for seg kva arealeiningane står for: Areal av kvadrat med gitt eining.

Undervisningsopplegget

Fusjon

1. Ta opp igjen frå i går: Kva er det vi måler når vi snakker om areal? Døme.

Seperasjon

2. Kva er størst av dei to kvadrata? Kva er det vi måler? Korleis kunne vi måle det? Ta fram igjen dette med ruter(eller ikkje-standardiserte måleeiningar). Samanlikne med cm^2 og m^2. Kvifor er det viktig at vi hugsar det lille ^{2}-talet? Korleis trur de vi skriv centikuben som Nikolai snakka om i går?
3. s 14. Elevane får kopi til oppg 5.22. Ekstra: kopiorginal 5.219
   ulike svar på kor stort arealet er: Måltal og eining. Visa med å måla tavla. Kva med mindre objekt som ei bok. → (Generalisering)
4. Felles: Oppg s 15
5. Oppsummering: Visa fysisk samanhengen mellom dei ulike arealeiningane/samtale (Fusjon)

Variasjonsmønster:

Konstant	**Variert**
Måleobjektene(figur)	Standerdiserte og ikkj-standardiserte måleeiningar
Måleobjekt	Metode: måle eller rekne
Måleobjektene	Målereiskapen(ruter, evt rekne for dei som kan det)
Måling av areal(telle ruter)	Måleobjekt(sirkel, rektangel, samansette rektanglar)

Kontrast:

Todimensjonalt – tredimensjonalt

Omkrins – Areal?

Vedlegg 4: NSD

Från: Anne-Mette Somby <anne-mette.somby@nsd.uib.no>
Datum: 12. februar 2015 15:01
Till: Mona Røsseland <mona@fiboline.no>
Ämne: Meldeskjema for prosjektnummer 39894 registrert hos personvernombudet

BEKREFTELSE PÅ ENDRING

Personvernombudet bekrefter at utvalget er utvidet til tre lærere.

Vi har også registrert at fire studenten deltar som prosjektmedarbeidere. I den forbindelse minner vi om at studentene må lagre data på forsvarlig måte, og slette eller anonymisere dette materialet senest ved prosjektslutt. Som en hovedregel bør personopplysninger ikke behandles i f.eks nettsky, på mobiltelefon eller minnepinne uten kryptering. Utvalget må også informeres om at studentene deltar i prosjektet.

Vennlig hilsen

Anne-Mette Somby
Seniorrådgiver

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
Personvernombudet for forskning
Harald Hårfagres gate 29, 5007 BERGEN

Tlf. direkte: (+47) 55 58 24 10
Tlf. sentral: (+47) 55 58 81 80
Faks: (+47) 55 58 96 50