Høgskolen i Bergen

Masteravhandling

M120UND509

Predefinert informasjon

Startdato:	12-05-2016 17:06	**Termin:**	2016 VÅR
Avslutningsdato:	18-05-2016 12:00	**Karakterform:**	Norsk 6-trinnsskala (A-F)
SIS-kode:	M120UND509 1 MG	**Studiepoeng:**	45
Eksamensform:	Masteravhandling		
Intern sensor:	Kacerja Suela		

Student

Navn:	Aase Espevold Orre
Kandidatnr.:	108
HiB-Id:	h130442@hib.no

Informasjon fra deltaker

Jeg godkjenner avtalen om tilgjengeliggjøring av masteroppgaven min i BORA:	Valgt

Lavtpresterende elevers dynamiske arealforståelse i en læringsprosess

Low-performing pupils' dynamic understanding of area in a learning process

Aase Espevold Orre

Master i undervisningsvitenskap, fordypning i matematikkdidaktikk

Avdeling for lærerutdanningen

18. mai 2016

Forord

Denne masteroppgaven avslutter min seksårige utdanning ved Høgskolen i Bergen. Arbeidet med masteroppgaven har vært en interessant, utfordrende, berikende og krevende tid. Jeg ser nå tilbake på en spennende berg-og-dalbane som kan beskrives med flere adjektiv enn jeg her har plass til. Det er flere som har hjulpet meg gjennom prosessen det er å skrive en masteroppgave, og dere fortjener å takkes:

Først og fremst vil jeg rette en stor takk til mine veiledere, Toril Eskeland Rangnes og Rune Herheim. Dere har vært til stor hjelp med gode samtaler, utfordrende spørsmål, kritiske tilbakemeldinger og oppmuntrende ord. Takk for et flott samarbeid!

Videre vil jeg takke Mona Røsseland for å invitere oss masterstudenter til å være med i et spennende forskningsprosjekt, og matematikklærerne som stile opp og var med i undersøkelsene. Dette felles forskningsprosjektet var for meg veldig berikende. Jeg vil også takke medstudentene mine i prosjektet for å ha gjort forskningsprosessen til en kjekk opplevelse.

Jeg vil takke venner og familie for å stille opp i medgang og motgang. Dere har vært tilgjengelige for både diskusjon, frustrasjon, oppmuntring og hjelp, noe jeg setter veldig stor pris på. Uten et så fantastisk støtteapparat ville det vært betydelig vanskeligere å komme i mål.

Til kremen av kremen på lesesalen: Dere har bidratt til å skape et godt miljø med kortspill i pauser og morsomme samtaler, og stilt med gode ideer, tips og tilbakemeldinger i skriveprosessen. Tusen takk! Det ville vært kjipt på lesesalen uten dere!

Og sist, men ikke minst: Takk til Simon (1991)[1] som mange ganger har reddet meg ut av både små og store digitale krisesituasjoner.

Aase Espevold Orre

Bergen, 18. Mai 2016

[1] Vågøy, S. (1991). *Han er født.*

Sammendrag

Vurdering av elevers forståelse sto sentralt i et forskningsprosjekt omhandlende variasjonsteori og måling som jeg var del av. Dette skapte nysgjerrighet for å se nærmere på elevers forståelse. Ut ifra dette er oppgavens fokus *å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess.* Oppgaven har to forskningsspørsmål: *Er elevenes forståelse relasjonell eller instrumentell, og hvordan kommer dette til uttrykk? Finnes det spor i forståelsen som kan knyttes til variasjonsteori, eventuelt på hvilken måte?* Formålet er å belyse faktorer i arealforståelse, kompleksiteten som ligger i utvikling, og gi kunnskap om hvordan lavtpresterende elever kan forstå areal.

Den teoretiske forankringen tar utgangspunkt i Skemp, Piaget, Inhelder og Szeminska, van Hiele, og Pirie og Kieren. Først er forskjellige typer av matematisk forståelse presentert, med utgangspunkt i Skemps beskrivelser av instrumentell- og relasjonell forståelse. Videre fremlegges arealteori basert på Piaget et al. sine beskrivelser, som videre knyttes opp mot van Hieles nivåer for geometriforståelse for å tydeliggjøre momenter i arealforståelse. Pirie og Kierens modell for utvikling av matematikkforståelse er inkludert da den bygger på ideen om forståelse som en dynamisk prosess. Denne er koblet sammen med de foregående. Modellene og teoriene er til slutt kombinert for å danne et «nytt» analyseverktøy for arealforståelse.

Videre bygger oppgaven på en kvalitativ tilnærming, med kvantitativ metode som supplement. Datamaterialet er semistrukturerte intervju med to lavtpresterende elever, der innholdet i intervjuene er sentrert rundt elevenes svar på pre- og posttester.

Det «nye» analyseverktøyet gir innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal. Det vises at lavtpresterende elever kan ha mye forståelse for emnet, selv uten en fullstendig forståelse. Videre vises hvordan forståelsen kan være relasjonell og instrumentell, der elevene kan ha grader av begge, og forståelsen kan bevege seg mellom disse i en læringsprosess. Studien viser også hvordan elevers utvikling kan være dynamisk, der elevene beveger seg mellom flere nivåer for å bygge forståelse, oppnår forståelse for ulike deler av arealbegrepet, og forståelsen kan forandre seg i læringsprosessen. Det vurderes videre om elevenes forståelse er blitt påvirket av variasjonsteori, og kritiske aspekter i areal som undervisningen basertes på. Her kommer det frem at disse muligens ikke passer helt med de lavtpresterende elevenes forutsetninger.

Abstract

After being part of a research project about Variation Theory and measurement, where pupils' understanding was central, I developed a curiosity about pupils' understanding. The focus of this study is *to seek insight into low-performing pupils' understanding of area, and how understanding can be dynamic in a learning process.* The thesis has two research questions: *Are pupils' understanding relational or instrumental, and how is this expressed? Are there traces of understanding that can be linked to Variation Theory, and in what way?* The purpose of them are to identify factors in understanding area, the complexities inherent in development and providing knowledge on how low performing pupils can understand area.

The theoretical framework is based on Skemp, Piaget, Inhelder and Szeminska, van Hiele, and Pirie and Kieren. First, different types of mathematical understanding are presented based on Skemp's descriptions of instrumental- and relational understanding. Then follows a description of area theory based on Piaget et al., which is further linked with van Hiele's levels of understanding in geometry to clarify elements of understanding area. Pirie and Kieren's model of developing mathematical understanding is included as it is based on the idea of understanding as a dynamic process. This is connected with the foregoing. The models and theories are eventually combined to form a "new" analysis tool for area understanding.

Furthermore, the thesis has a qualitative approach, with a quantitative method as supplement. The data is based on semi-structured interviews with two low-performing pupils, where the content of the interview is centred around the pupils' answers on pre- and post-tests.

The "new" analysis tool provides insight into low-performing pupils' understanding of area. It appears that low-performing pupils can have much understanding of the subject, even without a complete understanding. Furthermore, it is shown how understanding can be relational and instrumental, where pupils can have degrees of both and that understanding can move between these in a learning process. The study also shows how pupils' development can be dynamic, where pupils move between several levels to build understanding, achieve understanding for different parts of the area concept and that understanding can change in the learning process. The study assesses if the pupil's understanding has been affected by Variation Theory and the critical aspects of area the teaching is based on. Here it emerges that these may not fit with the low-performing pupils' preconditions.

Innholdsfortegnelse

Liste over figurer, tabeller, bilder og modeller

1. Innledning

1.1. Prosjektsamarbeid og bakgrunn

Doktorgradsstipendiat, Mona Røsseland, inviterte masterstudenter i matematikkdidaktikk fra Høgskolen i Bergen til å være medforskere i et forskningsprosjekt omhandlende bruk av variasjonsteori. Variasjonsteori tar sikte på en systematisk og bevisst bruk av variasjon i undervisningen: Kritiske aspekter blir identifisert gjennom testing og danner utgangspunkt for undervisningens fokus, der disse blir undervist gjennom et variasjonsmønster. Måling ble valgt som emne av Røsseland, med bakgrunn i at det var dette norske elever scorer dårligst på under nasjonale prøver. Det ble tatt utgangspunkt i delemnene lengdemåling, omkrets og areal.

Vi var fire masterstudenter som syntes dette hørtes spennende ut og valgte å gå inn i forskningsprosjektet som medforskere, og danne et prosjektsamarbeid. Selv om Røsseland, sammen med tre matematikklærere på 5. trinn, hadde lagt føringer for forskningens hovedretning og innhold, var det mulighet for individuelle fokus i prosjektets store omfang, med data tilgjengelig for deling.

Det felles forskningsprosjektet hadde som nevnt hovedfokus på variasjonsteori, men gjennom dette hadde også prosjektet et stort fokus på forståelse. Elevers forståelse var i fokus gjennom hele prosessen: variasjonsteoriens metoder for å skape forståelse, danning av kritiske aspekter for hva elever kan ha problemer med å forstå, tester for å sjekke forståelse både før og etter undervisning og samtaler med elever for å få en bedre innsikt i deres forståelse. Dette fokuset gjorde meg nysgjerrig på elevenes forståelse, og fikk meg til å spørre: Hva innebærer forståelse? Hvordan kan det skapes innsikt i forståelse? Hvordan kan forståelse utvikles?

I dagens samfunn er det mye snakk om matematikkforståelse, med innlegg som «Matte er mer enn pugging» (Valenta, Enge, & Botten, 2012, 06.11.), «Vil erstatte pugging med tanketeknikker» (Sætre, 2014, 09.08) og «Matematikk og forståelse» (Antonsen, 2013, 20.12.). Det diskuteres hvorvidt det skal vektlegges forståelse eller pugg i matematikkundervisningen, hva undervisning bør vektlegge for å oppnå forståelse og hvilken matematikkforståelse elever egentlig skal oppnå.

Utdanningsdirektoratet (2010, s. 1) startet i 2004 med nasjonale prøver i den norske skole for å identifisere elevers forståelse. Disse blir hver høst utført på 5., 8. og 9 trinn, med en fremstilling av resultater gjennom tall som representerer hvor godt en elev, klasse og skole har prestert på prøven (Utdanningsdirektoratet, u.å.). Testområdene er orientert rundt grunnleggende ferdigheter i lesing, skriving, regning, og digitale ferdigheter (Utdanningsdirektoratet, 2010, s. 6-10), der målet er å:

> […] kartlegge i hvilken grad elevenes ferdigheter er i samsvar med læreplanens mål for de grunnleggende ferdighetene regning og lesing på norsk og engelsk, slik de er integrert i kompetansemål for fag i LK06 etter 4. og 7. årstrinn. Prøvene skal gi informasjon til elever, lærere, skoleledere, foresatte, skoleeiere, de regionale myndigheter og det nasjonale nivået som grunnlag for forbedrings- og utviklingsarbeid. (Utdanningsdirektoratet, 2010, s. 5)

Prøvene kan gi mye interessant informasjon om elevers prestasjoner, men det har blitt diskutert hvor mye informasjon prøveresultatene egentlig gir om elevene. Det poengteres at prøvene bare dekker en liten del: «De måler det som kan måles, det vil si en svært liten del av den kunnskapen og kompetansen elevene får, og som vi ønsker at de skal få» (Rydje, 2016, 18.01.). Det diskuteres også at prøver er raske løsninger i skolen, der «Vi må ta det kompliserte tilbake i skoledebatten» (Rydje, 2016, 26.01.). Det presiseres at en må slutte å forenkle skolen gjennom å behandle institusjonen som oversiktlig og enkel hvor kvalitet kan måles og testes. Utdanningsdirektoratet (u.å.) er imidlertid tydelige på at resultatene fra prøvene gir et begrenset bilde av elevens ferdigheter, og at det i det pedagogiske etterarbeidet med resultatene er viktig å få frem elevenes tanker fra når de løste oppgavene for å få innsikt i forståelsen.

Fokus på elevens forståelse i media, sammen med det store fokuset på forståelse i det felles forskningsprosjektet, skapte en nysgjerrighet for elevers forståelse av måling, hvordan forståelse utvikles og hvordan det er mulig å få innsikt i.

1.2. Avgrensning og fokus

Det var nødvendig å avgrense oppgavens størrelse, og det ble tatt valg i forhold til delemne og elevgruppe. Alle delemner innen måling var ikke mulig å undersøke grundig. Jeg valgte å fokusere på areal, med fokus på trekanter og firkanter, fordi jeg syntes dette var spennende og ønsket mer innsikt innen emnet. Videre ble fokuset rettet mot lavtpresterende elever, da jeg var interessert i å få innsikt i akkurat denne elevgruppens forståelse. Jeg har også valgt denne elevgruppen fordi det er mye fokus på lave prestasjoner etter undersøkelser, da blant annet i media med overskrifter som «Scorer svakt på nasjonale prøver» (Flaa, 2015, 20.04.), «Larvik under snittet på nasjonale prøver» (Nordheim, 2015, 21.11.), og henvisning til «listebunn» i artikler som «Dette er Norges beste skoler» (Marthinsen, Melgård, & Strømmen, 2011, 07.07.). Min definisjon av en lavtpresterende elev tar i denne studien utgangspunkt i variasjonen innen et klassefellesskap: en lavtpresterende elev vil være en elev som presterer lavt på en test innenfor ett spesielt emne (areal), utført før undervisning, i forhold til resten av sin klasse. Betegnelsen «lavtpresterende» er ikke ment som statisk, da jeg tror elevers forståelse kan være dynamisk. Jeg skal ikke undersøke matematikkvansker eller elever med spesialundervisning i matematikk.

Med utgangspunkt i det felles forskningsprosjektet, og fokuset på matematikkforståelse i media, formuleres oppgavens fokus slik:

Fokuset for oppgaven er å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess.

Ved å benytte betegnelsen «søke innsikt i» vektlegges det at jeg ikke skal søke en sannhet for hvordan forståelsen til lavtpresterende elever på 5. trinn er, eller presentere et overblikk. Videre må det presiseres at gjennom å «søke innsikt» vil forskningen som presenteres være min tolkning av elevenes forståelse, og fremsette forslag til hvordan elevenes forståelse kan være uten å tilskrive dem en spesifikk forståelse.

Det var videre noen sider ved forståelse som vekket min interesse. Når jeg tenkte på forståelse i matematikk tenkte jeg med en gang på hvilke typer forståelse elever kan ha. Pirie og Kieren (1989, s. 7) fremhever at betydningen av forståelse i matematikk har vært et omdiskutert tema gjennom de siste 20 årene, og en del av debatten har vært sentrert rundt en teoretisk identifikasjon av forskjellige typer forståelse. Blant disse står Skemp (1978) sin teori om instrumentell- og relasjonell forståelse sentralt. Dette går ut på at en elev kan ha en avgrenset regelforståelse (instrumentell) eller en forståelse rundt strukturer og relasjoner i matematikken (relasjonell). Da typer forståelse er en sentral debatt ville jeg inkludere dette gjennom forskningsspørsmål i min oppgave. Jeg vil benytte betegnelsene instrumentell- og relasjonell forståelse gjennom oppgaven, og de blir nærmere forklart i teorikapittelet.

Variasjonsteori utgjorde en stor del av bakgrunnen for undervisningen. Selv om variasjonsteori ikke har en sentral rolle i min forskning blir det allikevel undersøkt om det var noen sider ved forståelsen som kan identifiseres med variasjonsteoretiske prinsipper.

Med utgangspunkt i de to foregående avsnitt er det formulert to forskningsspørsmål for oppgaven:

- Er elevenes forståelse relasjonell eller instrumentell, og hvordan kommer dette til uttrykk?
- Finnes det spor i forståelsen som kan knyttes til variasjonsteori, eventuelt på hvilken måte?

Gjennom oppgavens fokus og forskningsspørsmål skal jeg få innsikt i lavtpresterende elevers arealforståelse, hvordan denne kan være dynamisk i en læringsprosess, vurdere om forståelsen er instrumentell eller relasjonell, og om det er spor i forståelsen som kan knyttes til variasjonsteori. Oppgaven verken kan eller skal vurdere effekten av variasjonsteori på elevenes forståelse i forhold til andre undervisningsmetoder. Forskningen var ikke knyttet opp mot en kontrollgruppe, og kan derfor ikke si om elevene ville fått samme forståelse fra vanlig lærebokundervisning, eller om forståelsen til elevene etter undervisning basert på variasjonsteori er bedre eller dårligere i forhold til annen undervisning. Videre inneholder måling mye arbeid med algebra og tall, og det kan diskuteres om det er målingen i seg selv som skaper problemer for elevene under nasjonale prøver, eller om det for eksempel er tallforståelsen som setter begrensninger. Dette er imidlertid et tema jeg ikke har mulighet for å studere nærmere grunnet oppgavens omfang og datamaterialet tilgjengelig.

1.3. Formål og relevans

Måling har en sentral plass i læreplanen, og får mye fokus i elevers utdanning. Måling står som ett av hovedområdene i matematikk, helt fra 1.trinn til 10. trinn. For hvert trinn er det formulert flere kompetansemål. Dette fokuset indikerer at måling ses på som et viktig emne elever bør få god forståelse av gjennom utdanningen, og det videre vil se på hvorfor dette kan være viktig.

Forståelse innen måling vil kunne ha ringvirkninger for videre læring i matematikk, andre emner på skolen, og i hverdagen. I følge Thompson og Preston (2004, s. 515) blir måling regnet som en av de fundamentale emnene som er nødvendig for å utvikle matematisk kunnskap. Gjennom dette kan det antas at god forståelse innen måling er nødvendig for mestring av andre emner innen matematikk. Måling blir også brukt i andre fag, og elevenes forståelse innen måling kan gi ringvirkninger for forståelsen av fag som geografi med forståelse av arealstørrelse for land eller målingsaktiviteter med forskjellige stoffer i naturfag. Thompson og Preston (2004, s. 515) trekker videre frem at måling er ett av de mest nyttige emnene for en alminnelig borger. Putrawangsa, Lukito, og Siti (2014, s. 125) påpeker også at areal er en av de mest brukte målingsmetodene i hverdagen, og at gjennom arbeid med areal kan barn se nytten av matematikk i hverdagen. Dette viser at måling og areal ikke bare er et viktig område innen matematikk og i skolesammenheng, men også i hverdagslivet.

Thompson og Preston (2004, s. 516) fremhever at dårlig forståelse innen måling vil resultere i at både barn og voksne har dårlige måter å vurdere målinger på. Videre sier de at mange tror at barn vil vokse fra en uhensiktsmessig bruk av måling, men dette er ikke nødvendigvis tilfellet. Mange voksne har en begrenset forståelse av areal ved at de bare ser areal som en formel, og studenter ved høyere utdanning har problemer med forståelsen i måling til den grad at det forhindrer dem i fortsettelse med vitenskapelige fag (Thompson & Preston, 2004, s. 517). Lav forståelse innen måling vil på denne måten kunne være hindrende i en persons hverdag. Dette, sammen med utbedringen av hvor omfattende måling er i forhold til skole og hverdagsliv, viser hvor viktig det er å få innsikt i elevers forståelse av areal. Pirie (1988, s. 6) trekker også fram at det er viktig å undersøke forståelse, og de mange kategoriene forståelse kan innebære, for å kunne få innsikt i elevers utvikling.

Oppgavens fokus er å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess. Formålet med å få innsikt i dette vil være å belyse viktige faktorer i arealforståelse, og gi kunnskap om hvordan lavtpresterende elever kan forstå areal. Videre vil fokuset for oppgaven belyse kompleksiteten som ligger i utvikling av forståelse. Denne innsikten vil kunne være viktig for lærere og deres arbeid med planlegging og undervisning av areal, og aktuell for andre i arbeid med barn og matematikk. Denne forskningen kan videre være av verdi for forskning om forståelse og areal, og være nyttig for læremiddelprodusenter.

1.4. Vitenskapsteoretisk forskningssyn og paradigme

I følge Hatch (2002, s. 11) sitter alle mennesker med et sett av antakelser om hvordan verden er «satt sammen», og disse kalles for ontologiske- og epistemologiske perspektiver. Han beskriver at ontologiske perspektiver handler om hva virkelighet er, og meninger rundt hvilke virkeligheter som finnes, mens epistemologiske perspektiver handler om syn på kunnskap og hvordan kunnskap blir til. Ifølge Thagaard (2013, s. 14) er det viktig å være bevisst sine perspektiver da forståelsen forskeren utvikler, og hvilke resultater som utvikles og presenteres, blir påvirket av forskningssynet gjennom hva det fokuseres på i teori, datainnsamlingen og hvordan problemet fortoner seg. Med utgangspunkt i dette vil jeg å beskrive mine perspektiver.

Min oppgave kan plasseres under det konstruktivistiske paradigmet, som ifølge Hatch (2002, s. 15) defineres av et ontologisk perspektiv om at én absolutt virkelighet ikke finnes, men at verden består av flere virkeligheter med individuelle konstruksjoner og perspektiver. Disse unike virkelighetene blir konstruert gjennom individers personlige opplevelse av verden. Mitt perspektiv passer inn her da jeg har antakelser om at det finnes flere virkeligheter, konstruert av hvert enkelt menneske og deres syn på verden. Hensikten med oppgaven er ikke at jeg skal oppdage en sannhet, men få forståelse for et fenomen gjennom å «søke innsikt». Min forskning skal undersøke lavtpresterende elevers forståelse av areal, og for meg blir det da også klart at deres individuelle opplevelser og konstruksjoner vil ha stor påvirkning for hvilken virkelighet som presenteres. Det blir den enkeltes elevs forståelse av areal (slik jeg tolker den) som blir presentert, som kan være annerledes (eller lik) andres forståelse og virkelighet.

Videre beskriver Hatch (2002, s. 15) at konstruktivistens epistemologiske perspektiv går ut på at kunnskap om virkeligheten ikke er objektiv, men en felles enighet og konstruksjon om hva sannhet er. Gjennom dette er forsker og deltakere sammensveiset med gjensidig påvirkning av hverandre, og sammen skaper de den subjektive virkelighet som forskes på. Det er umulig for forsker å forholde seg fullstendig objektiv i sin forskning. Dette passer til mine overbevisninger da jeg ikke tror det finnes en virkelighet fri for påvirkning. Data er ikke noe som er «*gitt der ute*», eksisterende uten påvirkning fra situasjon og forskers forståelse og væremåte (Thagaard, 2013, s. 32). Jeg vil forholde meg tolkende gjennom oppgaven der mitt samarbeid med deltakere i prosjektet, situasjonskontekst, og min begreps- og teoriforståelse påvirker inntrykkene jeg får og hvordan data og resultat blir til. Dette kommer blant annet frem gjennom presisering av oppgavens fokus, der det blir fremhevet at forskningen vil bygge på min tolkning av elevenes forståelse.

1.5. Oppgavens disposisjon

Neste kapittel tar for seg tidligere forskning, der forskning innen måling og areal fremstilles. Videre blir variasjonsteori presentert, med forskning gjort for denne undervisningsmetoden.

Kapittel 3 presenterer den teoretiske forankringen til oppgaven. Dette er et omfattende kapittel da kompleks teori blir tydelig presentert og diskutert for å vise hvordan de forskjellige kan sammenlignes, for å kunne danne grunnlag til utvikling av en «ny» modell og teori for arealforståelse. Først presenteres teori for hva forståelse kan være, der Skemp sine beskrivelser av instrumentell- og relasjonell forståelse vektlegges. Videre blir arealteori presentert, med utgangspunkt i Piaget, Inhelder og Szeminska sine beskrivelser. Arealteori blir så knyttet opp mot van Hieles nivåer for geometriforståelse. Pirie og Kieren sin modell for utvikling av matematikkforståelse blir inkludert da den bygger på ideen om at forståelse kan være dynamisk, og bli satt opp mot de foregående teoriene. Helt til slutt vil Piaget et al., van Hiele og Pirie og Kieren sine teorier og modeller kombineres, der det tas utgangspunkt i deler fra hver, for å danne et «nytt» analyseverktøy for forståelse av areal.

Kapittel 4 fremlegger forskningsmetodiske tilnærminger som oppgaven baserer seg på. Først presenteres det felles forskningsarbeidet, for så å legge vekt på metodevalg, utførelse av feltarbeid, behandling og analyse av data tilknyttet denne forskningen. Etiske overveielser, reliabilitet og validitet vil også bli gjort rede for.

Resultater og drøfting av mitt datamateriale blir fremstilt i kapittel 5. Her blir intervjuer fra pre- og posttester for to lavtpresterende elever presentert. Elevenes uttalelser blir drøftet opp mot den «nye» modellen og teoriene den bygger på, for å få innsikt i deres forståelse av areal. Elevenes uttalelser vurderes også opp mot forståelsesformene beskrevet av Skemp. Elevenes forståelse blir også drøftet opp mot kritiske aspekter for areal som, gjennom variasjonsteorien, utgjør mye av hva undervisningen vektla.

Kapittel 6 er oppgavens diskusjonsdel, der funnene diskuteres opp mot oppgavens fokus og forskningsspørsmål. Avslutningsvis vil det også vises til konsekvenser for forskningen, og veien videre.

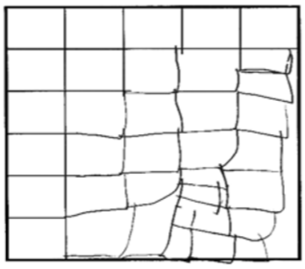
2. Tidligere forskning

Oppgavens fokus er å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess. Ut ifra oppgavens fokus er det hensiktsmessig å se på tidligere forskning av elevers forståelse av areal. I søkeprosessen etter tidligere forskning ble kombinasjonen «forståelse av areal på barnetrinnet» vektlagt. I det videre vil både kvantitativ og kvalitativ forskning bli trukket inn. Da et av forskningsspørsmålene skal se på om det er spor i forståelsen til elevene som kan knyttes til variasjonsteori vil undervisningsmetoden her bli presentert, sammen med tidligere forskning innen undervisningsmetoden.

2.1. Forståelse innen måling og areal

Det utføres mye forskning rundt elevers prestasjoner innen måling gjennom kvantitativ forskning med diagnostiske tester både nasjonalt og internasjonalt. Resultatene fra nasjonale prøver i matematikk viser at måling er det emnet norske elever scorer dårligst på (Ravlo, Vinje, Johansen, & Åsenhus, 2014, s. 8). Det er også det emnet som scores dårligst på i internasjonale matematikkundersøkelser. I følge Thompson og Preston (2004, s. 515) viser TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) at elever scorer dårligst på måling, og NAEP (The National Assessment of Educational Progress) har gjennom de siste 13 år vist at elever oppnår en lavere score på måling, sammen med geometri, enn noe annet emne i matematikk. Disse undersøkelsene viser at måling er den største utfordringen blant elever, der elever over hele verden oppnår en lavere score enn i noe annet emne i matematikk. Videre viser NEAP at eksempelvis elever fra USA er svært flinke til å begrunne svarene sine på «multiple-choice»-spørsmål, men dette er ikke tilfellet for måling. Thompson og Preston (2004, s. 516) sin forskning indikerer at elever har problemer med å begrunne og forklare sine svar, noe som kan forsterke bilde av at elever har lav forståelse av måling.

Kvalitativ forskning i areal, eksempelvis McCool og Holland (2012), Zacharos (2006), Yuberta, Zulkardi, Hartono, og Galen (2011) og Putrawangsa et al. (2014) viser også til lave prestasjoner for areal blant elever, og problemer med målingsprosesser. I studiene påpekes det at problemene er sentrert rundt bruk av regler og formler. Det indikeres at regler og formler ofte blir lært gjennom pugging, og resulterer i manglende begrepsmessig forståelse av innholdet i formelen. Zacharos (2006, s. 229) trekker frem at barn ofte har problemer med å tolke den fysiske meningen bak den numeriske representasjonen for areal. McCool og Holland (2012, s. 545) understreker dette videre med å si at selv om elever er i stand til å bruke formelen for areal av et rektangel, forstår de gjerne ikke hvorfor formelen virker eller hva svaret betyr, da elevene ikke har en begrepsforståelse for rekke-strukturene av et areal. Som eksempel kan elever bruke formelen til å regne ut arealet for et rektangel, men når de blir spurt hvor mange ganger enheten 1cm^2 passer inn i rektangelet klarer de ikke å svare. Om elevene blir bedt om å tegne ferdig et rektangel (figur 1) ved å tegne inn ruter i figuren, kan dette bli gjort uten at elevene viser forståelse for antall, størrelse og plassering av rutene (Zacharos, 2006, s. 229). Elevene kommer frem til feil svar, og reagerer gjerne ikke på at formelen viser et areal på $5 \cdot 6 = 30 \text{ cm}^2$ for rektangelet, mens antall kvadrater tegnet inn er 36:



Figur 1: Problem: En elevs måte å tegne inn ruter i figurer (McCool & Holland, 2012, s. 546).

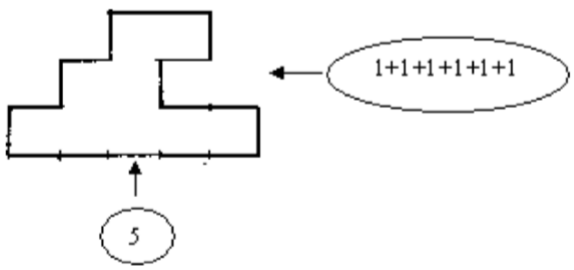
Zacharos (2006, s. 225-226) fremhever at det er flere faktorer som skaper problemer med å forstå arealformler. Lengde i omkrets blir direkte målt, mens areal blir indirekte målt gjennom lengdene i formelen som brukes for å kalkulere størrelsen. Den indirekte målingen gjør det ikke selvsagt for eleven hva som egentlig måles. Videre ligger noe av problemene på språknivå. Da ordene «lengde» og «bredde» blir brukt med samme begrepsinnhold i hverdagen til elever er de lette å forstå. «Areal» er i kontrast mer abstrakt for elever da det består av en sammensetning av lenge og bredde, samt tilleggsinformasjon om fasongen til figuren som skal måles. Å kunne bruke symboler i utregning er heller ikke en automatisert prosess. Symboler representerer et eget språk som eleven må lære. Mange symboler er ofte ikke oppdaget av elevene selv, men tildelt gjennom en sosial overføring der disse kunnskapene er blitt «gitt» til eleven (gjerne fra lærer eller lærebok). Elevene kan da mangle forståelse for bakgrunnen for symbolene, og mangler grunnlag til å kunne bruke formelen «lengde · bredde».

2.1.1. Feiloppfatninger

McCool og Holland (2012, s. 542) beskriver at elevers mangel på forståelse på begrepsnivå påvirker deres arbeid med å løse problemer og oppgaver da de har vanskeligheter med bruk av formelen. Zacharos (2006, s. 229) påpeker at tidlig bruk av formelen (lengde · bredde) har blitt kritisert for å resultere i feiloppfatninger. Han identifiserer i sin forskning noen av de vanligste feiloppfatningene som kan oppstå:

1: Areal = lengde + bredde

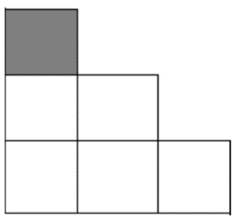
En vanlig feiloppfatningene som er identifisert hos elever er at de ser på areal som summen av lengdene til linjene, istedenfor størrelsen av en flate. De bruker addisjon istedenfor multiplikasjon: areal = lengde + bredde (Zacharos, 2006, s. 232). Her fokuserer elevene på yttersidene av figuren (som de lærte i omkrets, og ofte presenteres før areal), og har et endimensjonalt syn på figuren. En elev med denne feiloppfatningen vil legge sammen lengden av utsiden av en figur, der arealet av figur 2 vil bli regnet ut ved å legge sammen de fem enhetene nede på figuren og de seks fordelt enkeltvis rundt figuren: 5+1+1+1+1+1+1=11.



Figur 2: Feiloppfatning: telle sider for å finne areal (Zacharos, 2006, s. 233).

2: Generalisering av formel

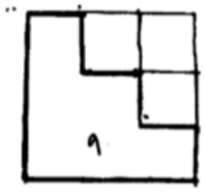
Elever bruker formelen for rektangler og parallellogram (lengde · bredde) for å finne arealet for andre figurer uavhengig av deres form (Zacharos, 2006, s. 231). Ved utregning av figur 3 vil en elev med denne feiloppfatningen fortsatt regne $3 \cdot 3$, og få arealet 9 cm^2 istedenfor et areal på 6 cm^2.



Figur 3: Feiloppfatning: bruk av formel i tilfeller den ikke gjelder (Zacharos, 2006, s. 232).

3: Endring av figurens form

Noen elever oppdager at figurene ikke stemmer overens med de dem har regnet areal for tidligere. Noen ganger velger de da å «gjøre figurene ferdig», ved å transformere dem inn til kjente figurer slik at de kan benytte formelen for areal av et rektangel. Figur 3 ville da blitt gjort om til figur 4.



Figur 4: Feiloppfatning: «tegner ferdig» en figur (Zacharos, 2006, s. 233).

Forskningen til eksempelvis Zacharos (2006), McCool og Holland (2012), Yuberta et al. (2011), Putrawangsa et al. (2014) og Thompson og Preston (2004) presenterer undervisningsmetoder som kan hjelpe elevene til å få en bedre grunnforståelse for arealkonseptet. Disse undervisningsmetodene fokuserer på mer praktiske tilnærminger, der det enes om at elever må få en forståelse for den fysiske meningen av areal før de blir introdusert for areal som tall og symboler. De foreslåtte metodene vil ikke bli trukket inn da oppgaven ikke har et inngående fokus på undervisning.

2.1.2. Kritikk

Presentasjon av feiloppfatningene som her fremlegges er identifisert gjennom bruk av areal i skolesammenheng. Jeg kan ikke se at det har blitt vurdert om disse problemene eksisterer eller er de samme i elevens arealbruk i hverdagen. «Skoleareal» kan i noen sammenhenger skille seg fra areal i hverdagen. Barn blander ofte areal og omkrets i oppgaver på skolen, og ser gjerne ikke relasjonen mellom disse. I hverdagen vil imidlertid ikke barn ha samme problemer da det er mer praktisk rettet. Eksempelvis vil elever forstå at de må måle en veggs størrelse «inni» for å finne ut hvor mye maling de trenger, og ikke blande dette med eksempelvis lister rundt veggen. Jeg mener at det ikke finnes en virkelighet fri for påvirkning, og at forholdene her kan spille en rolle for forståelsen til elever. Mellin-Olsen (1977, s. 37) påpeker også dette gjennom sin beskrivelse av at eksempelvis positivister ofte ikke ser forskningen sin og resultater i sammenheng med elevens skolehverdag, og påviser sannheter uten tanke for omstendigheter: «*Slik løsrives resultatene på testene fra den sammenheng de bestemmes innenfor. Egenskapene legges på* *individsiden, og ikke på den situasjonen som de er bestemt innenfor*» (Mellin-Olsen, 1977, s. 38). Dette sitatet er passende her da forskningen løsriver seg noe fra situasjon, der problemer påvises uten å vurdere om disse kan være kontekstavhengige.

2.2. Variasjonsteori

Marton og Booth (1997) referert i Ling (2014, s. 26) samlet tankene i fenomenografien, som kort går ut på de forskjellige måter mennesker opplever, forstår og forklarer et fenomen. Ling beskriver at de videreutviklet disse tankene til noe som kan brukes i undervisning, og det dannet grunnlaget for variasjonsteori. Variasjonsteoriens hoveddeler er «læringsobjektet», «kritiske aspekter» og «variasjonsmønster». Jeg vil videre forklare disse delene, der «læringsobjekt» og «kritiske aspekter» identifiseres som særlig aktuelle i forhold til forskningsspørsmålet for oppgaven. «Variasjonsmønster» vil ikke utdypes da oppgaven ikke har et inngående fokus på undervisning.

Ling (2014, s. 51-53) trekker frem at forskjellen på læringsobjekt og læringsmål er at læringsmål fokuserer på slutten av undervisningen og læringsobjekt på starten: Et læringsmål sier hva eleven skal kunne ved endt undervisning, mens et læringsobjekt er det elevene behøver å lære seg for å oppnå læringsmålene. Ling (2014, s. 66-67) beskriver at læringsobjekter blir fastsatt før undervisningen, men er dynamiske i undervisningens gang. Dette betyr at et «planlagt læringsobjekt» kan forandre seg noe når det blir «iscenesatt», da læreren kontinuerlig tilpasser sin undervisning gjennom innspill med elevene. Ulike elever kan oppleve det «iscenesatte læringsobjektet» på ulike måter grunnet forskjellige forkunnskaper. Elever kan på denne måten få forskjellige forståelser, og det kalles det «erfarte læringsobjekt». Variasjonsteori vektlegger imidlertid lærerens bevissthet rundt elevers forskjellige måter å danne ny forståelse på i tråd med sine forkunnskaper. Disse forskjellige forståelsene danner grunnlaget for kritiske aspekter.

Ling (2014, s. 79-80) skriver at et læringsobjekt kan ha mange særtrekk, der noen av disse særtrekkene kalles kritiske aspekter. Han forteller at kritiske aspekter er det elevene som deltar i undervisningen har problemer med (2014, s. 77), og disse aspektene er viktige å identifisere for å gjøre det lettere for elevene å forstå læringsobjektet slik det er ment (2014, s. 80). Videre er de viktige å identifisere for å hjelpe læreren å håndtere elevenes individuelle forutsetninger fra start (2014, s. 83). For å kunne få innsikt i elevenes forutsetninger må en identifikasjon av kritiske aspekter alltid inneholde empirisk undersøkelser (2014, s. 77). Kritiske aspekter kan blant annet identifiseres gjennom diagnostiske pre- og posttester, intervju av elever før og etter undervisning, lærerens tidligere erfaringer og gjennom lærebøker (2014, s. 85).

Ling (2014, s. 85) presenterer at etter en undersøkelse av elevenes oppfatning av læringsobjektet, og hva de har problemer med ved identifikasjon av kritiske aspekter, kan læreren «undervisa specifikt och effektivt om just dem». Læreren benytter da variasjonsmønster i undervisningen for å hjelpe elevene å oppdage disse kritiske aspektene og oppnå effekt på elevens læring (Ling, 2014, s. 67).

2.2.1. Forskning på variasjonsteori

Ling (2014, s. 43-45) presenterer tre store studieprosjekter, med blant annet fokus på elevers læringsutbytte av undervisningsmetoden. Disse var Catering for Individual Difference – Building on Variation (CID(v)), Centre for Learning Study and School Partnership (CLASP) på Hong Kong Institute of Education (HKIEd), og Variation of the Improvement of Teaching and Learning (VITAL). Redegjørelser av disse studiene er hentet fra Ling (2014, s. 43-45) sine beskrivelser:

Gjennom CID(v)-prosjektet kom det frem at på 24 av 27 studier hadde metoden en positiv effekt på hele gruppens resultater. Videre viste 25 av 27 studier at lavtpresterende elever tjente betydelig mer på metoden enn høgtpresterende. Ling beskriver at mye av grunnen til at lavtpresterende har godt utbytte er fordi metoden identifiserer vanskeligheter (kritiske aspekter) elever har med det som skal læres (læringsobjektet), som undervisningen videre baserer seg på. Videre viste både CLASP på HKIEd og VITAL en positiv effekt på elevers læring, der elevenes poengsum på prøvene ble høyere.

2.3. Oppsummering

Kapittelet har presentert kvantitativ forskning på måling, og kvalitativ forskning på areal. Nasjonale og internasjonale undersøkelser i matematikk viser at måling er det emnet som elever gjør det dårligst på. Kvalitativ forskning av arealforståelse fremlegger hvorfor elever kan ha problemer med å forstå areal, og viser til forskjellige feiloppfatninger elever kan utvikle. Videre har forskningene mye fokus på hvordan det kan undervises i areal for å bedre elevers forståelse. Forskningen tilbyr på denne måten en oversikt over problemer og mulige løsninger. Fokuset for denne studien er imidlertid å se nærmere på lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan denne kan være dynamisk i en læringsprosess, uten å identifisere typiske problemer eller definere elevenes løsningsmetoder som rette eller gale. Videre er fokuset på hvordan elevers utvikling av forståelse kan bevege seg i en læringsprosess, og på forståelsesformer elevene uttrykker.

Variasjonsteori, og hvordan læringsobjekt og kritiske aspekter utgjør fokuset i en undervisningssituasjon, er presentert i dette kapitlet. Videre er forskning rundt hvordan elever har bedret sin forståelse gjennom bruk av variasjonsteori lagt frem. Resultatene, basert på forskjeller mellom pre- og posttest, viser at elevene har stort utbytte, særlig lavtpresterende. Som nevnt innledningsvis blir imidlertid tester kritisert for å gi begrenset innsikt i elevers forståelse, og jeg stiller meg derfor noe kritisk til at det er brukt poengsum som indikasjon på fremgang i forståelse. Jeg skal se nærmere på elevers forståelse ved å basere meg på andre innfallsvinkler enn testresultater. På denne måten skal jeg se om det er spor i forståelsen som kan knyttes opp til variasjonsteori, og kunne få innblikk i hvordan undervisningsmetoden kan ha en innvirkning på elevers forståelse av areal.

3. Teoretisk forankring

Oppgavens fokus er å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess. For å få innsikt i dette vil den teoretiske forankringen sentrere seg rundt teorier av hva forståelse kan være, hva arealforståelse kan innebære, geometriforståelse og en modell for dynamisk utvikling av forståelse. Først blir forskjellige typer av matematisk forståelse presentert, der det blir tatt utgangspunkt i Skemps beskrivelser av instrumentell- og relasjonell forståelse. Videre blir arealteori presentert, med utgangspunkt i Piaget, Inhelder og Szeminska sine beskrivelser av nivåer av arealforståelse. Videre blir det vist hvordan areal kan knyttes sammen med geometri, der arealforståelse kan bli tydeliggjort gjennom forståelse innen geometri. Her blir van Hieles modell for geometriforståelse trukket inn. Da de foregående modeller er hierarkisk oppbygd blir Pirie og Kieren sin modell for utvikling av forståelse inkludert som en «motpol», da jeg har tro på at elevers utvikling av forståelse ikke nødvendigvis er en lineær prosess. Denne modellen presenterer utvikling av matematikkforståelse som en dynamisk prosess, der utviklingen foregår ved en bevegelse frem og tilbake mellom forskjellige nivåer. Helt til slutt vil modellene og teoriene kombineres, der det blir tatt utgangspunkt i deler av de enkelte, for å danne et «nytt» analyseverktøy for forståelse av areal.

Navnene på nivåer i modellene er tildelt norske ord i oppgaven. Dette for å gi bedre flyt til oppgaven og for å bidra med utvikling av det norske fagfelt. Navnene som brukes i van Hieles modell er hentet fra Smestad (2008), mens navnene presentert for Pirie-Kieren modell er utviklet av meg selv. Originaluttrykkene vil bli presentert i parentes.

3.1. Instrumentell- og relasjonell forståelse

Jeg skal søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal og det er da nødvendig å identifisere hva forståelse er, eller kan være. I følge Pirie (1988, s. 2) er det ikke mulig å fullt og helt gripe hva forståelse egentlig er, men det kan prøves å utarbeide elementer og avgrensinger for å få innsikt i hva det kan være. Det finnes flere begrep på hva forståelse kan være, der to anerkjente blir fremstilt av Skemp og Hiebert. Skemp (1978, s. 9) beskriver forståelse med begrepene instrumentell- og relasjonell forståelse (instrumental- and relational understanding), der instrumentell forståelse innebærer utenatlæring av regler, mens relasjonell forståelse innebærer å ikke bare vite hva som skal gjøres, men hvorfor. Hiebert (1986, s. 3-8) beskriver forståelse som begreps- og prosedyrekunnskap (conceptual- and procedural knowledge), der begrepskunnskap blir karakterisert som forståelse som er rik på relasjoner, og prosedyrekunnskap som regler for å løse matematikkoppgaver. Star (2014, s. 306) trekker frem at det nå benyttes Hiebert sine begreper for å beskrive matematikkforståelse, men problematiserer at disse begrepene er utgangspunktet for misforståelser og uenighet blant forskere. Videre beskriver Star (2014, s. 306) at «this field currently lack consensus on which framework(s) are optimal», men at da Skemps begreper har stått sentralt innen feltet, og grunnet problemene rundt de nye begrepene, burde disse fortsette å bli brukt. Med utgangspunkt i dette velger jeg å benytte relasjonell- og instrumentell forståelse.

Skemp krediterer æren for opprinnelsen av termene «instrumentell-» og «relasjonell forståelse» til Stieg Mellin-Olsen (Star, 2014, s. 304). Skemp (1978, s. 9) påpeker at han bare hadde sett på forståelse som definert ut ifra «å vite hva som skal gjøres, og hvorfor», og hadde ikke vurdert en ren regelforståelse (instrumentell forståelse) som en type forståelse i det hele tatt. Dette ble han først oppmerksom på under en presentasjon av Mellin-Olsen. Relasjonell- og instrumentell forståelse ble videre utarbeidet gjennom et samarbeid mellom Mellin-Olsen og Skemp, der de undersøkte termene gjennom norske og engelske læreplaner (Star, 2014, s. 304).

Mellin-Olsen skriver om strukturforståelse og regelforståelse i boken «Eleven, matematikken og samfunnet» (Mellin-Olsen & Hoel, 1984), som omhandler relasjonell- og instrumentell forståelse. Jeg velger imidlertid å ta utgangspunkt i Skemp sine beskrivelser da de er mer internasjonale. Skemp har ikke utarbeidet eksplisitte definisjoner, men beskriver disse termene slik at det kan forstås hva de innebærer (Star, 2014, s. 304). Det videre vil beskrive begrepene.

3.1.1. Instrumentell forståelse

Instrumentell forståelse presenterer en overfladisk regelforståelse, og denne forståelsen blir av Skemp (1978, s. 9) beskrevet som «rules without reasons». Dette innebærer utenatlæring av regler, formler og prosedyrer, og å vite når og i hvilke sammenhenger disse skal brukes. Et eksempel på instrumentell forståelse i matematikk kan være hvordan det kan regnes arealet av et rektangel: multipliserer lengden med bredden ($A = l \cdot b$). Eleven klarer å bruke formelen, men vet ikke hvorfor formelen virker eller hva den representerer. Elever med instrumentell forståelse vil muligens heller ikke registrere om lengden og bredden er oppgitt i forskjellige måleenheter, da de benytter regelen uten dypere forståelse. For å unngå slike feil må elevene lære enda en regel: at enhetene må oppgis i samme måleenhet (Skemp, 1978, s. 10). Dette illustrerer at instrumentell forståelse involverer mangfoldige regler, og memorering av hvilke oppgaver de fungerer for og ikke (Skemp, 1978, s. 12).

3.1.2. Relasjonell forståelse

Skemp (1978, s. 9) beskriver relasjonell forståelse som «knowing both what to do and why». Elevene har en forståelse rundt hvordan og når regler, formler og prosedyrer skal brukes, og hvorfor de virker. De vil da forstå at formelen for arealet av et kvadrat ($A = l \cdot b$) virker på bakgrunn av forståelsen om rekke-strukturene areal er bygget opp av.

En relasjonell forståelse inneholder også kjennskap til hvordan kunnskapen relateres til andre deler innen samme emne. (Skemp, 1978, s. 12). Eksempelvis kan elever med forståelse for hvorfor formelen for areal av et rektangel fungerer, være i stand til å se og lære formlene for andre figurer i relasjon til et rektangel. Skemp (1978, s. 12) fremhever at dette gir fordelen at kunnskapen er enklere å huske, selv om den er vanskeligere å lære. Det er mye enklere å lære regelen for areal av en trekant, enn å lære hvorfor den er sånn. Problemet er imidlertid at om elevene bare lærer regelen må de lære separerte regler for alle figurer. Det er fortsatt ønskelig å lære reglene, men å vite hvordan de relaterer seg til hverandre og hvorfor de virker vil gjøre at elevene husker dem som en del av en helhet, noe som er mye enklere. Kunnskapen blir på denne måten mer langvarig (Skemp, 1978, s. 13). Videre er kunnskapen mer «tilpasningsdyktig», med mer generelle anvendelser (Skemp, 1978, s. 12). Elevene forstår hvordan kunnskapen kan brukes i oppgaver som gjerne skiller seg litt fra konteksten de er lært i, og når en oppgave skiller seg så mye fra det opprinnelige at kunnskapen ikke kan brukes lenger. Ett eksempel på dette er når det skal regnes areal for et parallellogram. Selv om formen på figuren skiller seg fra et rektangel kan forståelsen av hva areal representerer og figurers egenskaper gjøre at eleven ser at formelen allikevel kan benyttes. Ved å «klippe av» ene siden i trapeset og sette det sammen med andre siden kan det lett dannes et rektangel, og regnes areal ved å bruke «lengde · bredde». Denne regelen kan imidlertid ikke brukes når det skal regnes arealet av en sirkel.

Kunnskap som trengs for ett spesielt emne, er ofte grunnleggende i andre emner innen matematikken (Skemp, 1978, s. 13). En relasjonell forståelse gjør det lettere å forstå og se underliggende kontekster i det lærte, som kan resultere i at ny kunnskap som bygger på de samme kontekster blir enklere å lære. Dette blir spesielt viktig innen måling og areal, da emnet regnes som en av de fundamentale innen utvikling av matematisk kunnskap (Thompson & Preston, 2004, s. 515).

3.1.3. Kritikk og relevans

Skemp's beskrivelser av relasjonell- og instrumentell forståelse gir et inntrykk om en «enten-eller» forståelsene (selv om det muligens ikke er tenkt slik). Da jeg har tro på at virkeligheten og kunnskap er en personlig konstruksjon, problematiserer jeg det å bare skulle ha én av forståelsene. Jeg ser forståelsesformene i et samspill og ikke som to adskilte kunnskapskategorier, da jeg tror elever kan ha grader av disse to forståelsene.

Når det er poengtert ser jeg på disse to forståelsesformene som et viktig grunnlag i forhold til det å få innsikt i elevers forståelse. De representerer begge egenskaper ved forståelse, der de kan gi en overordnet innsikt i hvilke typer forståelse elevene uttrykker. Målet skal være å beskrive hvordan elever forklarer og forstår areal, og forståelsesformene vil kunne brukes til å belyse elevenes uttalelser.

3.2. Arealforståelse

Da oppgavens fokus er å søkes innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal har jeg valgt å trekke inn teori om arealforståelse. Piaget, Inhelder, og Szeminska (1960) formulerer nivåer innen forståelse av måling, og tydeliggjør gjennom disse blant annet komponenter i forståelse av areal. Dette er valgt som utgangspunkt da Piaget regnes som en grunnteoretiker, og hans arbeid og teorier er anerkjent verden over.

Nivåene for arealforståelse vil i det videre beskrives. Som nevnt innledningsvis i oppgaven ble det fokusert på forståelse for areal på 5. trinn, med en test før og etter undervisning som fokuserte på areal av trekanter og firkanter (Vedlegg 2), og forståelsen for areal vil fokusere på dette i det videre. Forståelse av areal for sirkler vil eksempelvis bli utelatt grunnet begrensninger for oppgavens størrelse.

3.2.1. Nivåer av arealforståelse

Piaget et al. (1960, s. 262) påpeker at å være i stand til å analysere helheten ut fra mindre deler er en forutsetning i måling og areal. Dette fordi i måling av areal, som ved all måling, utgjør deler en helhet, og kan settes sammen på forskjellige måter for å lage forskjellige helheter. Med dette som bakgrunn utviklet de nivåer for forståelse av areal ved å studere hvordan barn forholder seg til arealkonseptet (Piaget et al., 1960, s. 261). De så på hvordan forskjellige alderstrinn forhold seg til delene i et areal, hvordan de så relasjoner mellom delene og helheten, om de så på areal som en stabil enhet som ville bevares selv om formen til figuren ble endret, og om deres sammenligninger og vurderinger av areal ville kunne gi mulighet for å regne areal ved bruk av aritmetisk multiplikasjon og symboler.

Nivåene presenterer forståelse som fremtrer og som kan identifiseres hos elever. Forståelsen som fremtrer er imidlertid presentert ved hjelp av mange eksempler med identifikasjon av nivå, og eksemplene er spredt ut i verket til Piaget et al. (1960). Det videre har samlet alle identifikasjonene, og satt dem sammen i nivåinndelingen, for å gjøre presentasjonen mer oversiktlig. For å unngå misforståelse må det presiseres at fra nivå I til og med nivå IIIB står «enheter» for firkanter eller trekanter som en figur kan deles inn i, da det er dette elever klarer å håndtere. Det er først på siste nivå (IV) at enheter også blir regnet som tallrepresentasjon fra enheter på linjalen, da det er først her elever forstår dette.

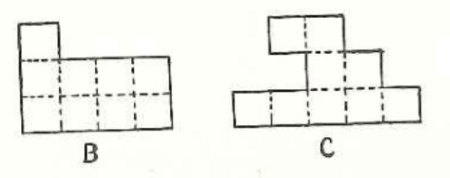
Nivå I.

Piaget et al. (1960, s. 263) presenterer at elever på dette nivået har vanskeligheter med å følge en undersøkelse. Elever klarer heller ikke å se sammenhengen mellom deler og helheten til en figur, og bruker ikke enheter før de eventuelt blir bedt om det (Piaget et al., 1960, s. 293). Om elevene prøver å bruke enhetene vil de ikke få det til da de ikke forstå hva enhetene brukes for eller hvor de skal plasseres (Piaget et al., 1960, s. 294).

Nivå IIA:

Elever begynner å bruke enheter, men har enda ikke en forståelse for hva de representerer. Elever ser ikke at antall enheter addert sammen samsvarer med hele området de dekker (Piaget et al., 1960, s. 294). De mangler også en forståelse for hvordan arealet bevares selv om enhetene i en figur flyttes på (Piaget et al., 1960, s. 298). Om en figur er irregulær vil elever på dette nivået gjerne prøver å rekonstruere formen ved å sette inn ekstra enheter slik at en figur blir lik en annen som de skal sammenligne med, eller lik en form de er vant med (Piaget et al., 1960, s. 294).

Vurderinger elever foretar er basert på visuelle inntrykk (Piaget et al., 1960, s. 264). De vurderer en figur til å være større enn en annen figur basert på utseendet, og ser vekk ifra det numeriske antallet enheter som figurene er bygget opp av (Piaget et al., 1960, s. 294). Et eksempel er figurene B og C (figur 5) som er av samme areal (9 cm^2) men har forskjellig form. Elever vil eksempelvis mene at C er større enn B fordi visuelt ser det sånn ut. De vil også avvise at de er like store fordi de har samme antall enheter om dette blir påpekt, eller om de selv teller at begge består av 9 enheter. Elevene klarer ikke å koble at antall enheter representerer arealet og utseendet overvinner den numeriske identiteten til figuren.

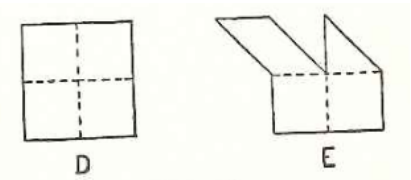


Figur 5: B og C: Visuelt mener elever at C er størst (Piaget et al., 1960, s. 296).

Nivå IIB:

Piaget et al. (1960, s. 295) beskriver at elever på dette nivået har en begynnende forståelse for måling av areal ved bruk av enheter, der de ser en sammenheng mellom enheter og figurens helhet. Elever har oppnådd en forståelse for å addere enheter for å finne størrelsen (arealet), og at posisjonen til enheter kan variere uten at figurens størrelse endres (Piaget et al., 1960, s. 299). Elever vil eksempelvis forstå at figur B og C (figur 5) er like store fordi de består av et likt antall enheter. Elever vurderer fortsatt gjerne figurer ut fra utseende, og danner seg et svar basert på en visuell vurdering av figuren, men er villig til å endre svaret om resultatene fra adderingen av enheter går imot hypotesen (Piaget et al., 1960, s. 295).

Selv om elever ser sammenheng mellom enheter og figurens helhet, forstår de enda ikke at enhetene må være av samme størrelse (Piaget et al., 1960, s. 295). De vil eksempelvis telle enheter av trekanter og firkanter som likeverdige, og ha problemer med å benytte enhetene sammen. Elever ser ikke sammenhengen mellom disse to formene, ved at to trekanter kan settes sammen til en firkant. Et eksempel er når elever sammenligner figurene D og E (figur 6). Her vil elever betrakte trekanter og firkanter som likeverdige, og si at figurene er like store fordi de har samme antall enheter: 4.

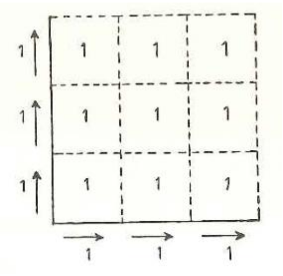


Figur 6: D og E: Teller trekanten som likeverdig med firkantene (Piaget et al., 1960, s. 296).

Nivå IIIA:
Elever på dette nivået vil ha en enda sterkere forståelse for sammenhengen mellom figurens helhet og enhetene den er bygget opp av. Elever benytter enheter som trekanter og firkantet automatisk ved vurdering av areal, der de er i stand til å benytte disse to sammen (Piaget et al., 1960, s. 296). De klarer å måle en figur ved eksempelvis å bruke firkanter og trekanter for å dekke figuren, eller dele den opp i disse gjennom tegning. Elever vil imidlertid også her telle enhetene som likeverdige, men vil endre dette om form- og størrelsesforskjeller blir påpekt (Piaget et al., 1960, s. 301).

Nivå IIIB:
Elever har en klar forståelse av relasjonen mellom enheter og figurens helhet, og hvordan enheter kan brukes for å måle et areal. De har en forståelse for hvordan forskjellige enheter relateres til hverandre, der de eksempelvis forstår at en trekant er halvparten av en firkant og at trekanter kan settes sammen til en firkant (Piaget et al., 1960, s. 229). De ser med andre ord at måleenheter må være like store, eller settes sammen til å bli like store (Piaget et al., 1960, s. 296).

På dette nivået er måling for to dimensjoner forstått (Piaget et al., 1960, s. 339). Forståelsen rommer en logisk multiplikasjon, der enheter kan ganges sammen for å finne areal. Elever forstår areal som repetisjon av enheter, og ser at areal er representert av enheter langs sidelinjene. (figur 7) (Piaget et al., 1960, s. 345).

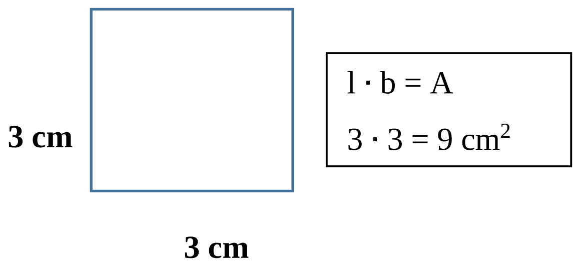


Figur 7: Areal som repetisjon av enheter (Piaget et al., 1960, s. 349).

Gjennom dette kan elever nå oppdage at sidene og areal relaterer seg til hverandre gjennom multiplikasjon av lengde og bredde. Piaget et al. (1960, s. 348) påpeker imidlertid at elever enda ikke er i stand til dette, da problemet ikke er løst abstrakt gjennom aritmetisk multiplikasjon og symboler. Piaget et al. (1960, s. 345) forteller at aritmetisk multiplikasjon ikke er vanskeligere enn en logisk multiplikasjon, men problemet ligger i at multiplikasjonen blir inkludert i utregning av geometriske figurer for å finne areal. Dette er et problem da elever enda ikke ser relasjonen mellom sidelinjene (lengde og bredde) i en figur med enhetene den er bygget opp av og arealet (Piaget et al., 1960, s. 345). Elever ser fortsatt på areal som et område avgrenset av linjer, og forstår ikke hvordan linjer kan produsere areal (Piaget et al., 1960, s. 350).

Nivå IV:

Piaget et al. (1960, s. 349) beskriver at elever på dette nivået begynner å arbeide med formelle operasjoner, som formelen «lengde · bredde». Elever vil her bruke aritmetisk multiplikasjon for relasjonen mellom sidelengder og areal («lengde · bredde» gjennom bruk av symboler: 3 cm · 3 cm = 9 cm^2) (Piaget et al., 1960, s. 301). Det presiseres også at når elever oppnår dette nivået er de ikke lenger opptatt av metoder som presentert på tidligere nivåer (Piaget et al., 1960, s. 339).



Figur 8: Areal som aritmetisk multiplikasjon.

3.2.2. Rammer

Inndelingen av nivåene ser ut til å bygge hierarkisk på hverandre, der et nivå bygger på forståelse fra alle tidligere nivåer. Piaget et al. (1960, s. 268) påpeker ikke dette eksplisitt, men nivåene kan forstås slik da det eksempelvis presiseres at forståelsen om at «delene av helheten kan flyttes på uten at arealet forandres» (*mobility*) er en forståelse som vokser mer og mer for hvert nivå. At en forståelse «vokser for hvert nivå» sier indikere at forståelsen i nivåene bygger på hverandre, og at et nivå dermed bygger på de foregående nivåer.

Videre presenteres det at nivå IIIB er et vendepunkt, da elever går vekk ifra responser og forståelse på foregående nivåer, og vender seg mer mot de som finnes på nivå IV (Piaget et al., 1960, s. 346). Dette skjer gjennom at elever får en praktisk forståelse for rekkestrukturene for areal under nivå IIIB, som vil utvikle seg til en aritmetisk forståelse av symboler og rekkestrukturer under nivå IV. Piaget et al. (1960, s. 351-352) påpeker imidlertid et problem ved at elever ofte blir presentert for formelen når de kommer til nivå IV, uten å få oppdage denne selv (dette skjer gjerne også før elevene er helt klare for formelen). Dette påvirker elevers evne til å se relasjonene mellom sidelinjene og arealet, men elever kan allikevel ha en delvis forståelse for formelen.

Nivåene og teoriene som presenteres for arealforståelse ser ut til å ha en oppbygning som kan knyttes til Skemps beskrivelser av relasjonell- og instrumentell forståelse. Elevene bygger en vid forståelse rundt relasjoner mellom del og helhet, og mellom forskjellige enhetsformer som trekant og firkant. Videre ser det ut for at disse relasjonene og oppdagelsene elever tilegner seg blir et grunnlag for å forstå formelen «lengde · bredde», slik at elever ser hvorfor den virker og hva symbolene i formelen representerer. Piaget et al. (1960, s. 337) påpeker videre at elever ikke vil klare å forstå den matematiske formelen «lengde · bredde» før ved nivå IV, og at det er problematisk at formelen introduseres for tidlig da dette vil påvirke elevers evne til å se relasjoner. Piaget et al. beskriver at nivåene må ligge til grunn før elever arbeider med formelen og at om formelen blir introdusert tidligere vil ikke denne forstås. Dette kan tolkes til at de ser på forståelse som relasjonell forståelse. Bruk av formler uten en grunnforståelse vil ikke gi fullstendig forståelse, og kan knyttes opp mot instrumentell forståelse.

3.2.3. Kritikk og relevans

Piaget et al. (1960) identifiserer nivåer som kan brukes som analyseverktøy for å se på elevers forståelse av areal. Da jeg har fordypet meg i emnet forståelse og utvikling av forståelse mener jeg imidlertid at modellen er noe «enkel». Det er i etterkant av denne teorien kommet mye forskning rundt forståelse, og utvikling av forståelse. Disse kan virke utfyllende og tydeliggjørende når elevers forståelse skal studeres, og bringe inn elementer som kan berike Piaget et al. sin teori. Jeg vil derfor kombinere Piaget et al. sin modell for arealforståelse med van Hieles modell for utvikling av geometriforståelse, for å belyse hvordan forståelse for geometriske egenskaper påvirker arealforståelsen. Videre vil Pirie og Kierens dynamisk modell for utvikling av forståelse kunne tydeliggjøre elevers bevegelse i utviklingen.

3.3. Van Hieles modell for geometriforståelse

Areal og geometri kan knyttes sammen, der eksempelvis en relasjon mellom emnene kan trekkes langt tilbake i historien. Ifølge Zacharos (2006, s. 225) har den originale utvikling av areal ingenting å gjøre med de moderne algebraiske metoder med aritmetisk multiplikasjon som i dag benyttes. Areal har historisk sitt utgangspunkt i geometri. Før det teoretiske grunnlaget var fastsatt for geometri ble det brukt til å bestemme relasjonen mellom mennesker og deres omgivelser, der det startet med et forsøk på å måle lengder og arealer. Det ble brukt kvalitative metoder for å regne areal, som kan relaters til overlappingsmetoden. Denne metoden går ut på å overlappe en overflate (areal) ved å bruke andre flater (enheter) som målingsenheter. Disse «andre flatene» var geometriske figurer, som f.eks. kvadrater på 1cm^2.

Overlappingsmetoden er belyst av Piaget et al. (1960) som sentral innen elevers utvikling av arealforståelse, og da denne metoden stammer fra geometri kan det antas at elevers forståelse av areal kan henge sammen med forståelse av geometriske figurer og deres egenskaper. Piaget et al. nevner ikke eksplisitt hvordan deler av forståelsen i areal kan knyttes opp mot geometriforståelse, men dette kan identifiseres gjennom en sammenligning mellom nivåene for arealforståelse og nivåer for geometriforståelse. Van Hiele presenterer en modell som identifiserer komponenter av en geometrisk forståelse, som her kan brukes.

Videre vil jeg presentere van Hieles modell for utvikling av geometriforståelse, og knytte dette opp mot nivåene for arealforståelse formulert av Piaget et al. Det vil også vises hvordan arealforståelsen kan tydeliggjøres ved geometriforståelse. Sammenhengen presenteres også i tabell 1 til slutt for å gi oversikt over sammenligningen mellom modellene.

3.3.1. Modell

Van Hiele (2004, s. 61-62) identifiserte at lærere baserte sin undervisning på kunnskap og et forståelsesnivå elever enda ikke hadde oppnådd. Undervisningen benyttet begreper og sammenhenger som elever ikke forsto, og læreren resonerte ut ifra et system av relasjoner og brukte et språk som det kun var han eller hun som forsto. Van Hiele (2004, s. 62) knyttet dette til at lærer og elever tenkte på forskjellige nivåer innen geometri. Gjennom sin erfaring som lærer og arbeid med elever utviklet han en modell for nivåer av tenkning innen geometrisk forståelsesutvikling (Van Hiele, 1999, s. 310). Denne modellen inneholder 5 nivåer:

<u>Nivå 0: Visualisering (Visual)</u>

Dette er det laveste nivået innen geometrisk tenkning, og tar for seg det visuelle. På dette nivået blir figurer vurdert ut ifra utseende alene, der en figur blir gjenkjent av dens form. Det er ingen vurderinger rundt figurens spesifikke egenskaper. Elever vil gjerne i sin vurdering av et rektangel si at «*It is a rectangle because it looks like a box*» (Van Hiele, 1999, s. 311). Elever vil imidlertid ikke gjenkjenne en figur om formen «endres» fra det de har lært (Van Hiele, 2004, s. 62), som for eksempel om et kvadrat snus «på siden»:  til  .

Van Hieles beskrivelser fra dette nivået kan knyttes opp mot **nivå IIA** i arealteorien til Piaget et al., da begge definerer nivåene gjennom at elever baserer sin forståelse på visuelle inntrykk. Begge beskriver at elevene vurderer figurers form og størrelse ut ifra utseende. Van Hiele beskriver at en figur blir gjenkjent av dens form, og Piaget et al. beskriver at elever er i stand til å se at enheter kan plasseres inni en større figur. Det siste kan tolkes til at elever gjenkjenner likheter mellom formene og ser en visuell kongruens mellom enheter og helhetens. Piaget et al. beskriver videre at elever ikke skjønner hva enhetene representerer. Dette kan knyttes sammen med det van Hiele skriver om at elever ikke foretar noen vurderinger rundt figurers geometriske egenskaper. Det kan da tolkes til at elever ikke ser hva enheter representerer da de ikke ser en sammenheng mellom geometriske egenskaper til enheter og helheten. Videre kan det van Hiele sier om at elever ikke vil gjenkjenne en figur om formen endres, knyttes sammen med Piaget et al. sine beskrivelser om at elever ikke ser at figurer kan være like store om formen endres. Dette kan knyttes sammen med at elever ikke foretar geometriske vurderinger av enheters form og egenskaper for å se at en figur er like stor uansett hvordan enhetene er plassert.

Van Hieles visuelle nivå kan videre knyttes opp mot det Piaget et al. beskriver for **nivå IIB** om at elever ikke er i stand til å vurdere enheter av trekanter og firkanter opp mot hverandre. Van Hiele beskriver at elever på et visuelt nivå ikke vurderer figurers geometriske egenskaper, noe som er i tråd med Piaget et al. sine beskrivelser av at elever vurderer enheter av forskjellig form som likeverdige. Elever vurderer altså ikke at trekantene og firkanter har forskjellige geometriske egenskaper.

<u>Nivå 1: Analyse (Descriptive level)</u>

Ved dette nivået starter elever en analyse av geometriske egenskaper. Figurer blir bærere av spesifikke egenskaper, og en figur blir ikke bare vurdert ut ifra hvordan den ser ut eller hva den ligner på, men også gjennom sine egenskaper (Van Hiele, 1999). Et eksempel er at selv om et rektangel er tegnet skjevt på tavlen så er det et rektangel om det er markert at alle vinkler er 90 grader. De spesifikke egenskapene til en figur og relasjonene mellom egenskapene er imidlertid ikke ordnet. Et eksempel kan være at et kvadrat enda ikke er identifisert som et rektangel. Elever klarer heller ikke å se sammenhenger mellom egenskapene til forskjellige figurer (Van Hiele, 2004, s. 62).

Piaget et al. sitt **nivå IIB** kan ses i sammenheng med van Hieles nivå for analyse. Piaget et al. beskriver at elever nå ser en sammenheng mellom enheter og figurens helhet, og at enheters plassering kan variere uten at figuren endrer størrelse. Dette kan ses på som at elever starter en analyse av enhetenes geometriske egenskaper, og at de ser hvordan de kan settes sammen og bli lik de geometriske egenskapene til helheten. De ser også hvordan enheter kan flyttes på uten at de geometriske egenskaper blir forandret, og vurderer da at helheten er like stor ut ifra en analyse og ikke ut ifra hvordan den ser ut.

Van Hiele sier at elever har startet en analyse av figurers geometriske egenskaper, som er i tråd med det Piaget sier på **nivå IIIA** om at elever nå er i stand til å benytte enheter av trekanter og firkanter sammen for å dekke en flate. Elever har da foretatt en analyse av at egenskapene kan brukes sammen. Videre beskriver Piaget et al. at elever imidlertid har problemer med å forstå at enhetene ikke er likeverdige, og vil telle dem som likeverdige om dette ikke blir påpekt. Dette er i tråd med det van Hiele beskriver om at egenskapene ikke er ordnet og at elever ikke klarer å se sammenhenger mellom egenskapene til forskjellige figurer. Da elever ikke klarer å se sammenhenger mellom egenskaper kan det tolkes at de ikke helt klarer å skille egenskaper fra hverandre, og det kan da tolkes at elever ikke helt klarer å se at enhetene ikke er likeverdige.

Nivå 2: Logisk ordning (Informal deduction)

Under neste nivå er de spesifikke egenskapene til figurer logisk ordnet, og avgrenset fra hverandre. Elever kan påpeke relasjoner mellom egenskapene til en figur, og sammenhenger mellom egenskapene til forskjellige figurer. De forstår for eksempel at alle kvadrater er rektangler, men ikke at alle rektangler ikke er kvadrater, og hvorfor det er sånn. Definisjoner er forståelige for elever, men de har imidlertid ikke oppnådd en formell forståelse av definisjoner (Van Hiele, 1999, s. 311). De har altså ikke en forståelse for avgrensninger og skjønner ikke at en definisjon kun skal ha med det som er nødvendig for å definere figuren, og ikke noe overflødig. Et eksempel på overflødighet elever ikke forstår er «et kvadrat er en firkant der alle vinkler er 90 grader».

Van Hieles beskrivelser av dette nivået kan knyttes opp mot Piaget et al. sine beskrivelser av **nivå IIIB**. Piaget et al. skriver at elever forstår hvordan forskjellige enheter relateres til hverandre, der de ser at en trekant er halvparten av en firkant og at trekanter kan settes sammen til å bli lik en firkant. Dette er i tråd med van Hieles beskrivelser om at elever ser relasjoner mellom egenskaper til en figur, og sammenhenger mellom egenskapene til forskjellige figurer.

Det kan tolkes gjennom dette at elever er i stand til å se sammenhenger mellom geometriske egenskaper for enheter, og det kan da også tolkes at elever er i stand til å se sammenhenger mellom geometriske egenskaper for helheter. Piaget et al. sine beskrivelser rundt elever kan da knyttes opp mot det van Hiele skriver om at elever har foretatt en logisk ordning av figurers geometriske egenskaper.

Nivå 3: Deduksjon (Formal deduction)[2]

I følge Crowley (1987, s. 3) forstår elever nå deduktive systemer som å bygge opp geometriske teorier gjennom bruk av aksiomer og definisjoner. Elever på dette nivået kan både memorere bevis og konstruere bevis på egenhånd. Van Hiele (2004, s. 62) nevner at elever vurderer definisjoner ut ifra nødvendige og tilstrekkelige betingelser for en figur.

Van Hieles beskrivelser kan her knyttes opp mot det Piaget et al. presenterer for **nivå IV**. Van Hiele sier at elever er i stand til å forstå systemer som er bygget opp av geometriske teorier ved bruk av definisjoner, som kan ses i sammenheng med det Piaget et al. beskriver om at elever er i stand til å se hvordan geometriske sidelinjer kan produsere areal gjennom den aritmetiske definisjonen «lengde · bredde». Piaget et al. beskriver også at elevene har full forståelse av relasjonene mellom sidelengder og areal, noe som kan tolkes til at elever vet hvorfor formelen for areal virker. Her ser jeg sammenhenger mellom det Piaget et al. skriver og van Hieles beskrivelser om at elever er i stand til å konstruere bevis. Van Hiele sier videre at elever kan vurdere definisjoner for en figur ut ifra nødvendige og tilstrekkelige betingelser, som er i tråd med det Piaget et al. skriver om at elever vurderer at de ikke trenger konkretiserte enheter for å regne areal, men kan vurdere et areal ut ifra sidelinjene figuren er bygget opp av. De ser da at definisjonen for areal kan begrenses til en aritmetisk multiplikasjon av lengdene i figuren.

Nivå 4: Stringens (Rigor) [3]

I følge Crowley (1987, s. 3) kan elever på dette nivået arbeide med mange forskjellige aksiomer og systemer, da også aksiomer som ikke bygger på Euclids geometri. Elever er i stand til å

[2] Van Hiele beskriver dette nivået veldig kort og noe uforståelig, og henviser til andre tekster han har skrevet, i de originalskrifter jeg har hatt tilgang til. Jeg velger derfor å knytte inn Crowley (1987) for å bedre kunne forklare dette nivået da hun presenterer van Hieles nivåer.

[3] Van Hiele sier at det er 5 nivåer for utvikling av geometrisk tenkning, men beskriver bare 4 i de originalskrifter jeg har hatt tilgang til. Crowley (1987, s. 3) beskriver at van Hiele hadde mest interesse for de tidligste nivåene i utviklingen, og at det siste nivået da ble tildelt lite oppmerksomhet. Crowley skriver imidlertid kort om dette nivået, og oppgaven presenterer hennes beskrivelser.

sammenligne og analysere forskjellige systemer, og arbeide på et abstrakt plan. Veldig få elever når, eller blir i det hele tatt introdusert for tenkning innen dette nivået (Crowley, 1987, s. 2).

Udefinert nivå

Smestad (2008, s. 2) trekker frem at modellen til van Hiele har blitt kritisert da den ikke inkluderer et nivå før visualisering. Det påpekes at det bør være et nivå for når elever enda ikke gjenkjenner figurer, der elever forholder seg til figurer uten sammenligning eller forståelse for navn.

Piaget et al. presenterer under **nivå I** at elever ikke klarer å følge en undersøkelse og har ingen forestilling om hvordan de skal bruke enheter, som er i tråd med det Smestad beskriver for nivået før visualisering. Elever klarer muligens ikke å visuelt se for seg arealproblemer, og da elever heller ikke bruker enheter kan det tyde på at det ikke foregår en sammenligning mellom formen til enheten og helheten som skal måles.

Tabelloversikt:

Tabell 1 gir et bilde over hvordan nivåene av geometriforståelse kan trekkes inn i nivåene for arealforståelse, altså hvilken geometriforståelse som kan identifiseres for hvert nivå i arealforståelsen.

<table>
<tr><th>Van Hiele: geometriforståelse</th><th>Piaget et al.: arealforståelse</th></tr>
<tr><td>Udefinert nivå:
Ingen visualisering</td><td>Nivå I</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivå 0: Visualisering</td><td>Nivå IIA:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivå IIB</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivå 1: Analyse</td></tr>
<tr><td>Nivå IIIA</td></tr>
<tr><td>Nivå 2: Logisk ordning</td><td>Nivå IIIB</td></tr>
<tr><td>Nivå 3: Deduksjon</td><td>Nivå IV</td></tr>
</table>

Tabell 1: Sammenligning av van Hiele: geometriforståelse, og Piaget et al.: arealforståelse

3.3.2. Rammer

Van Hiele (2004, s. 60) beskriver at modellen bygger på flere antakelser omhandlende elevers utvikling. Utvikling av geometriforståelse er en kontinuerlig prosess med utgangspunkt i forskjellige nivåer av tenkning. Disse nivåene er hierarkiske, som vil si at læring er en stegvis bevegelse der elever må gå gjennom nivåene i rekkefølge. Videre må elever ha tilegnet seg all kunnskap fra de tidligere nivåer for å mestre neste nivå. Van Hiele (2004, s. 63) påpeker at utviklingen inneholder en ekstrinsik og intrinsik inndeling av forståelse. Det elevene forstår implisitt i ett nivå, blir eksplisitt i neste nivå. Dette vil si at en elev muligens vurderer en figur også ut ifra dens spesifikke egenskaper under nivå 0 (visualisering), for eksempelvis å kunne se at en figur ligner en boks, men eleven er ikke klar over dette selv. Kunnskapen er implisitt. Denne kunnskapen blir først eksplisitt på nivå 1 (analyse). Videre beskriver van Hiele (2004, s. 60) at hvert nivå består av et eget matematisk språk. Språk på ett nivå vil bli modifisert i neste nivå, der for eksempel figurer kan ha mer en ett navn: en firkant er også et rektangel eller parallellogram. Denne forståelsen er eksempelvis fundamental på nivå 2 (Crowley, 1987, s. 4).

Van Hiele (2004, s. 62) fremhever at undervisning som foregår på et nivå elever enda ikke har nådd resulterer i at elever lett lærer regler og prosedyrer uten at forståelse finner sted. Videre vil elever ha vanskelig for å kunne bruke kunnskapen i nye situasjoner, og vanskelig med å tilpasse kunnskapen til nye oppgaver. Denne type forståelse er i samsvar med Skemps beskrivelser av instrumentell forståelse som inneholder memorering av formler og regler uten en forståelse for hvorfor de virker. Van Hiele (2004, s. 62) påpeker imidlertid at forståelse ikke finner sted, og indikerer at han ikke vurderer instrumentell forståelse som en forståelsesform i det hele tatt.

3.3.3. Faser av læring

Van Hiele (1999, s. 311) beskriver at utvikling fra ett nivå til det neste ikke er avhengig av elevers alder eller biologiske modenhet, men instruksjoner de blir utsatt for. Instruksjoner kan både fremme og hemme utvikling. Han beskriver fem faser, og innhold i disse, som må til for at elever skal bevege seg fra ett nivå i modellen til det neste (Van Hiele, 1999, s. 315). Disse blir imidlertid ikke utdypet videre da oppgaven ikke har et inngående fokus på undervisning.

3.3.4. Kritikk og relevans

Van Hiele er tydelig på at utvikling av geometrisk forståelse er en hierarkisk stegvis bevegelse. Dette indikerer at modellen presenterer kun én virkelighet for hvordan elever utvikler forståelse.

Jeg mener imidlertid denne måten å se utvikling på er noe «firkantet». Jeg tror elever, med sine forskjellige virkeligheter, vil bevege seg annerledes fra dette, gjerne frem og tilbake i sin utvikling, og forskjellig fra hverandre. Elever bringer med seg forskjellige erfaringer og bakgrunnskunnskaper, og disse vil påvirke hvordan de lærer. Dermed vil det ikke være mulig å forutsi på en så presis måte bevegelsene de vil ta i utvikling av forståelse.

Selv om modellen på noen punkter «kolliderer» med mine perspektiver er den allikevel inkludert som analytisk verktøy da det er kvaliteter i van Hieles fremstilling av geometriforståelse som kan brukes i forhold til elevers arealforståelse. Forståelse av areal og geometri kan knyttes sammen der geometriforståelse kan tydeliggjøre elevers arealforståelse ved å tilføre flere nyanser. Sammenhengen mellom disse er vist gjennom de foregående avsnitt, der de forskjellige stadiene i geometrisk forståelse er til stede i utvikling av arealforståelse.

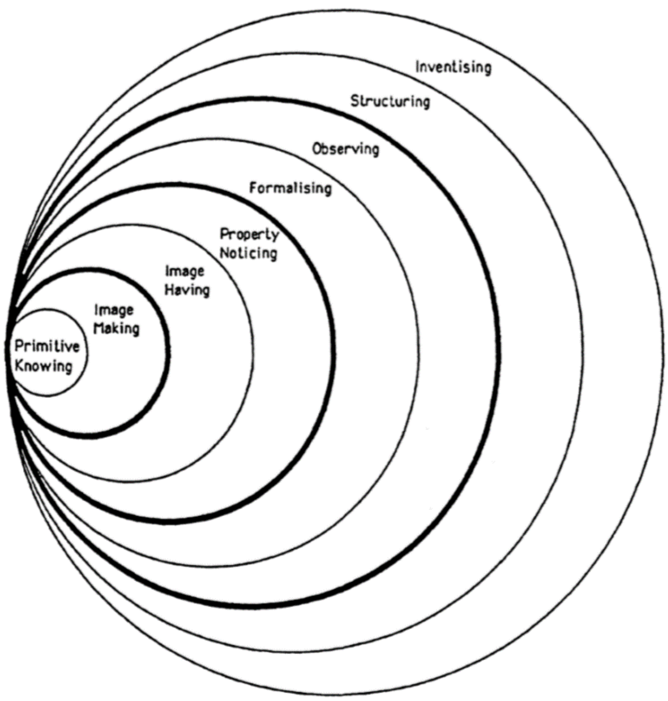
3.4. Pirie-Kieren modell for utvikling av forståelse

Fokuset for oppgaven vektlegger hvordan elevers arealforståelse kan være dynamisk i en læringsprosess, og jeg har da valgt å trekke inn Pirie og Kieren sin modell for dynamisk utvikling av matematikkforståelse. Pirie og Kieren (1989, s. 7) stiller seg kritiske til utvikling av forståelse presentert som en hierarkisk ervervelse, da de ser på læring som en prosess med ikke lineær tilegnelse. Med mål om å bedre beskrive utvikling av matematisk forståelse laget de en ny modell (Pirie & Kieren, 1994, s. 165). Denne illustrerer hvordan elever utvikler forståelse og lar elever bevege seg frem og tilbake i modellen, samt identifiserer forskjellige stadier av forståelse: «It is a theory of the growth of mathematical understanding as a whole, dynamic, levelled but non-linear, transcendently recursive process» (Pirie & Kieren, 1994, s. 166).

3.4.1. Modell

I følge Pirie og Kieren (1994, s. 170) består utvikling av forståelse av åtte forskjellige nivåer (*levels*). Hvert nivå inneholder alle de foregående nivåer (Pirie & Kieren, 1994, s. 172). Pirie og Kieren (1994, s. 175) ser på forståelse som en dynamisk prosess der utvikling foregår ved en bevegelse frem og tilbake mellom nivåene, og ikke som en «enten-eller»-ervervelse. Dette skiller seg fra van Hieles modell, der han skriver at elever går gjennom nivåene i rekkefølge. Pirie og Kieren (1994, s. 181) beskriver at nivåene representerer måter av forståelse, og inneholder ikke nødvendigvis et standard matematisk innhold. De ser på forståelse som en aktivitet og ikke som et spesielt innhold. Dette skiller seg fra Piaget et al. og van Hieles beskrivelser, som begge presenterer et spesifikt forståelsesinnhold for nivåene sine. Pirie og Kieren (1994, s. 172) påpeker også at de ytre nivåene ikke nødvendigvis tilknyttes «high level mathematics» selv om betegnelsen «nivåer» benyttes. Det øverste nivået for det som arbeides med, kan i en annen matematisk situasjon fungere som grunnforståelse. Van Hieles modell presenterer imidlertid at nivåene for utvikling av geometrisk forståelse går mot den høyeste forståelse av geometri.

Teorien illustreres gjennom en todimensjonal modell bygget opp av en sekvens med sirkler, der sirklene står for aktiviteter og måter av forståelse og ikke utgående monotone nivåer (modell 1). I det videre vil hvert nivå i modellen forklares. For å tydeliggjøre innholdet i hvert nivå vil et eksempel for areal følge beskrivelsene. Eksempelet vil basere seg på Piaget et al. sine beskrivelser rundt utvikling av arealforståelse, samt van Hiele's modell for geometriforståelse. Som nevnt er deres nivåer basert på forståelsesinnhold for hvert nivå, men dette er gjort om ved bruk av verb for å vise hvilke aktiviteter elever kan foreta, istedenfor å vektlegge forståelsesinnhold. Hvordan Pirie og Kieren sine nivåer av aktiviteter passer sammen med Piaget et al. og van Hieles forståelsesnivåer blir også presentert i tabell 2 til slutt.



Modell 1: Pirie-Kieren modellens: sirkelsekvenser og nivånavn (Pirie & Kieren, 1994, s. 167).

Grunnforståelse (primitive knowing)

Prosessen for utvikling av forståelse starter med en grunnforståelse (Pirie & Kieren, 1994, s.

170). Dette representerer hva elevene kan fra før og bringer med seg før de arbeider med oppgaven eller emnet. Betegnelsen «primitiv» (som benyttes i det engelske navnet for nivået) impliserer imidlertid ikke lav matematisk kunnskap, men startstedet for utvikling av hvilken som helst matematisk forståelse (Pirie & Kieren, 1989, s. 8). En full strukturell forståelse over ett problem eller emne kan for eksempel fungere som grunnforståelse i et nytt matematisk emne (Pirie & Kieren, 1994, s. 172).

Dette blir ikke diskutert av Piaget et al. eller van Hiele, men grunnforståelse elever bringer med seg i arbeid med areal vil være alle erfaringer de har fra skole og hverdagen. Eksempel på grunnforståelse elever muligens tar med seg fra måling kan være arbeidet med måling av lengder da de ofte introduseres for dette før arealkonseptet, og de fire regneartene: addering, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon. Elever kan også ha erfaringer med måling fra hverdagen.

Illustrasjon (image making)

Det andre nivå i utviklingen er illustrasjon (Pirie & Kieren, 1994, s. 170). Pirie og Kieren (1989, s. 8) beskriver at elever på dette nivået lager illustrasjoner av problemer for å løse dem. De ser imidlertid ikke sammenhengen mellom illustrasjonene enda, og kan ikke påpeke generelle observasjoner (Pirie & Kieren, 1989, s. 9).

Illustrasjon kan knyttes opp mot nivå IIA i Piaget et al. sin modell, og nivå 0 i van Hieles modell. Her arbeider elever med å *lage* illustrasjoner og bruker gjerne enheter som eksempelvis firkanter og trekanter, der de enten deler figuren opp i disse eller bruker konkreter som de dekker figuren med. *Vurderingene* elevene foretar er basert på visuelle inntrykk. Elever vurderer visuelt at enheter kan plasseres inni en større helhet og plasserer enhetene slik at de dekker flaten. Dette gjøres da de ser en visuell kongruens mellom enhetene og helheten. Elever har imidlertid vanskeligheter med å se hva enheter representerer, at et antall enheter representerer helhetens størrelse, og har vanskelig for å vurdere figurenes geometriske egenskaper. De vil vurdere at en figur er større enn en annen gjennom hvilken figur de syns ser størst ut, og ser ikke at enheter kan flyttes på uten at helheten blir endret. De ser ikke at de geometriske egenskapene for en enhet er like uansett hvor de plasseres, og at enhetene kan settes sammen til å «bli lik» en annen figur.

Mentalt bilde (image having)

Ved neste nivå erstattes illustrasjonene med en forståelse for bildet, som kan kalles mentalt bilde

(Pirie & Kieren, 1994, s. 170). Elever føler ikke lenger nytten ved å tegne opp problemet, og har byttet ut illustrasjonene med et mentalt bilde som de kan snakke om. Dette er et første nivå for abstrahering av problemet og matematikken som læres. For at forståelsen skal utvikles er det viktig at abstraksjonen kommer fra eleven selv, gjennom bilder i hodet fra erfaringer med illustrering av problemet, og at denne abstraksjonen ikke blir presentert av en ytre part (Pirie & Kieren, 1989, s. 8).

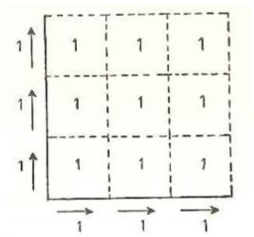
Mentalt bilde kan knyttes opp mot nivå IIB i Piaget et al. sin modell, og i en overgang mellom nivå 0 og nivå 1 i van Hieles modell. Elever begynner her å *se* hvordan enheter som dekker flaten representerer størrelsen. De ser hvordan enheter kan adderes sammen og ser at enhetene kan flyttes på uten at størrelsen til figuren forandres. Kongruensen elevene ser mellom enheter og helhet gjør at de ser at et antall enheter som har samme form som helheten kan settes sammen og representere helheten gjennom at de dekker flaten fullstendig. Elever er bevisst forholdet mellom enheter og helheten, og har dannet seg et mentalt bilde av areal som de kan *fortelle* om. Elevene ser imidlertid ikke at enhetene må være av samme størrelse. De har problemer med å bruke og sammenligne enheter av trekanter og firkanter da de betrakter disse to geometriske formene som likeverdige, og teller enheter deretter.

Egenskap-oppdaging (property noticing)

Da elever er i stand til å snakke om det lærte som objekter kan de mentale bildene av problemet nå undersøkes og elever oppdager relevante og spesifikke egenskaper ved det gitte problemet (Pirie & Kieren, 1994, s. 170). Disse egenskapene kan være utmerkelser, forskjeller, kombinasjoner eller sammensetninger mellom bilder (Pirie & Kieren, 1989, s. 8).

Egenskap-oppdaging kan identifiseres under nivå IIIA og nivå IIIB i Piaget et al. sin modell, og under nivå 1 og nivå 2 i van Hieles modell. Elever starter en analyse av figurer der de sammenligner bildene av problemet og begynner å *forutse* egenskaper ved figurer. De kan nå forutse hvordan forskjellige figurer relaterer seg til hverandre, og avgrenser seg fra hverandre, gjennom en forståelse av relasjoner mellom egenskapene til figurer. Eksempelvis ser de nå hvordan enheter av trekanter og firkanter kan brukes sammen for å dekke en helhet. De ser også at måleenheter må være like store, eller settes sammen til å bli like store gjennom en vurdering av geometriske egenskaper. Elevene oppdager også geometriske sammenhenger mellom helheter, der de eksempelvis kan forandre en helhet til å bli lik en annen ved å flytte på enhetene de er bygget opp av. Disse egenskapene blir *registrert* som noe som eksisterer og ser ut til å fungere.

Videre kan disse oppdagelsene ordnes, og elevene *forutser* hvordan areal kan fremstilles som repetisjon av enheter, der enheter kan ganges sammen for å finne areal gjennom en logisk multiplikasjon for todimensjonale figurer (figur 7). Elevene ser at areal er representert av enheter langs sidelinjene. Disse oppdagede egenskapene blir *registrert* som noe som eksisterer og ser ut til å fungere.

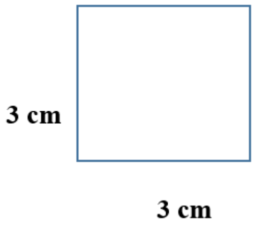


Figur 7: areal som repetisjon av enheter (Piaget et al., 1960, s. 349).

Formalisering (formalising)

Ved neste nivå danner elever bevisste tanker rundt de oppdagete egenskapene ved problemet, og formaliserer deres egen forståelse (Pirie & Kieren, 1994, s. 170). De ser at objektene kan klassifiseres sammen, og abstraherer en metode eller felles egenskap. Det er ved dette steget matematiske formler og definisjoner kan fremtre da elever nå er bevisst problemets egenskaper (Pirie & Kieren, 1989, s. 9).

Formalisering kan knyttes sammen med nivå IV i Piaget et al. sin modell, og nivå 3 i van Hieles modell. Her begynner elever å *bruke* aritmetisk multiplikasjon og den formelle formelen «lengde · bredde» for å finne areal (figur 8). Elever har dannet bevisste tanker rundt oppdagelsen av relasjonen mellom enheter og helheten. Elever klarer nå å se hvordan multiplikasjon kan brukes i kombinasjon med geometriske figurer for å finne areal. De ser en sammenheng mellom de geometriske sidelinjene og areal, at linjer kan produsere areal. Elevene kan fortelle hva areal er og *forsvare* hvorfor formelen virker, altså konstruere et slags bevis.



$l \cdot b = A$

$3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$

Figur 8: areal som aritmetisk multiplikasjon.

Observasjon (observing)

Elever som formaliserer egenskapene til objekter er videre i stand til å reflektere over de formaliserte aktivitetene og uttrykke teoremer (Pirie & Kieren, 1994, s. 171). Elever begynner å interessere seg for spørsmål som «Hva er sant for alle objekter?». Formelen er nå observert som en del av et større puslespill, og ikke bare som et middel for å nå et svar. Elever er også bevisst at de er bevisst, og kan observere sine egne tanker og strukturere dem (Pirie & Kieren, 1989, s. 9).

Dette nivået (og de neste) blir ikke beskrevet av Piaget et al., men det kan allikevel tenkes at en videre utvikling i areal inneholder dette stadiet. I det foregående har elever jobbet med firkanter, men under dette nivået søker elever å finne ut av spørsmålet om «hva som er sant for alle objekter». Elever observerer sammenhenger mellom formler for forskjellige figurer som areal av trekanter, sirkler o.l., og begynner å se sammenhenger mellom disse. De ser figurene som et større puslespill.

Strukturering (structuring)

Neste steg forekommer når elever føler trang til å ordne observasjonene gjort i forrige steg (Pirie & Kieren, 1994, s. 171). Elever er her bevisst hvordan et sett med teorem og formler relaterer seg til hverandre og prøver å tenke på observasjonene som en teori (Pirie & Kieren, 1989, s. 10). Eleven ønsker å komme frem til hvorfor observasjonene er sanne, og inkluderer formelle matematiske bevis (Pirie & Kieren, 1989, s. 9).

Elever vil prøve å ordne observasjonene de har gjort rundt forskjellige formler for areal av forskjellige figurer, og prøver å danne teorier. Videre vil de prøve å bevise sine egne observasjoner rundt hvordan formler relaterer seg til hverandre.

Skapelse (inventising)

Ved siste steg i modellen har elever full strukturell forståelse for problemet og vil være i stand til å stille nye spørsmål som kan utvikle seg til nye konsepter (Pirie & Kieren, 1994, s. 171). Elever handler her som «frie agenter» (Pirie & Kieren, 1989, s. 9).

Under dette nivået ser elever hvordan areal av forskjellige figurer relateres til hverandre gjennom teorier og formelle bevis. De vil nå utforske matematikken gjennom å stille nye spørsmål rundt areal og skape nye konsepter til dette emnet, da gjerne i sammenheng med andre emner.

<u>Tabelloversikt:</u>

Tabell 2 gir et bilde over hvordan nivåene for geometriforståelse av van Hiele og arealforståelse av Piaget et al. kan trekkes inn i nivåene for utvikling av forståelse presentert av Pirie og Kieren.

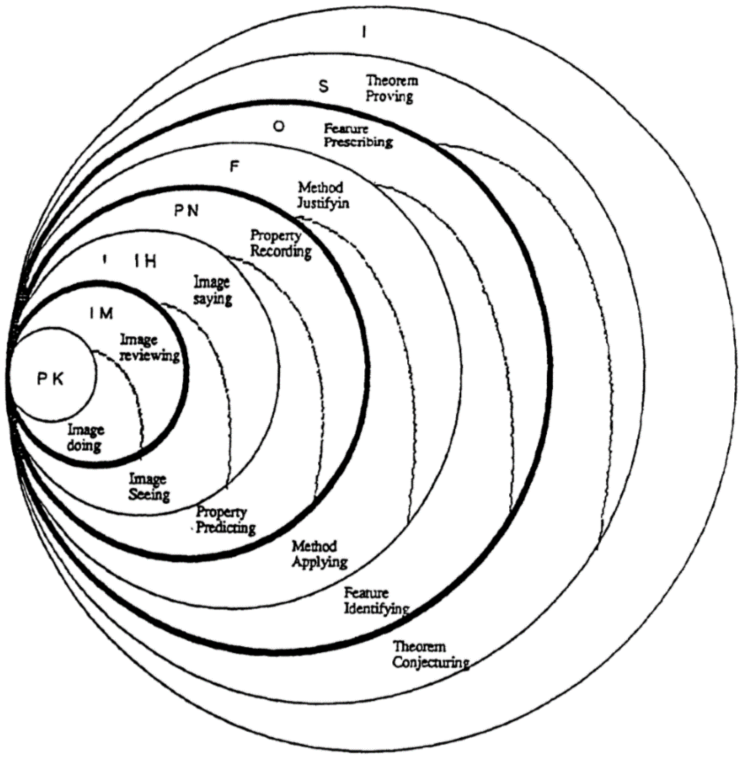
<table>
<tr><th>Van Hiele: geometriforståelse</th><th>Piaget et al.: arealforståelse</th><th>Pirie og Kieren: utvikling av forståelse</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivå 0</td><td>Nivå IIA</td><td>Illustrasjon</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivå IIB</td><td rowspan="2">Mentalt bilde</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Nivå 1</td></tr>
<tr><td>Nivå IIIA</td><td rowspan="2">Egenskap-oppdaging</td></tr>
<tr><td>Nivå 2</td><td>Nivå IIIB</td></tr>
<tr><td>Nivå 3</td><td>Nivå IV</td><td>Formalisering</td></tr>
</table>

Tabell 2: Sammenligning av van Hiele: geometriforståelse, Piaget et al.: arealforståelse og Pirie og Kieren: utvikling av forståelse.

3.4.2. «Handling og uttrykking»

Foregående avsnitt beskriver innholdet i hvert av nivåene i modellen, men nivåene selv inneholder også en inndeling. Pirie og Kieren (1994, s. 175) beskriver at hvert nivå, utenom grunnforståelsen (*primitive knowing*), er strukturert i en inndeling mellom **handling** (*acting)* og **uttrykking** (*expressing)* (se modell 2). Dette går ut på at elevenes arbeid kan deles inn i mental og fysisk *handling* for problemer, og *bevisst uttrykking* av hva som var involvert i handlingen (for seg selv eller andre). Begge disse aspektene av nivået er nødvendig for utvikling av forståelse.

For hvert nivå er handling og uttrykking tildelt verb (modell 2), for å konkretisere aktiviteten som foregår: lage/vurdere (*doing/reviewing*), se/fortelle (*seeing/saying*), forutse/registrere (*predicting/recording*) og bruke/forsvare (*applying/justifying*) (Pirie & Kieren, 1994, s. 175). Disse er brukt i forrige delkapittel for å tydeliggjøre aktiviteter i arealforståelse for hvert nivå, men for å tydeliggjøre begrepene vil nivået «illustrasjon» eksemplifiseres: Under illustrasjon vil elever først ta del i arbeid med handling, som under dette nivået blir kalt bilde-laging (*image doing*). Elever *lager* først enheter inni en figur. Dette skjer uten nærmere vurderinger rundt arbeidet. Videre vil elevene ta del i uttrykking, som under dette nivået er bilde-vurdering (*image reviewing*). Elever *vurderer* enhetene ut ifra helheten, og ser en likhet mellom enheter og helheten som er kongruente. Elever må ta del i begge disse aktivitetene for å oppnå forståelse. Å lage bilder alene uten noen vurderinger av arbeidet vil ikke være tilstrekkelig for utvikling av forståelse, da uttrykking gir innhold til nivået. Elever som bare forholder seg til handlings-aspektet ser på illustreringen som avsluttet og vurderer ikke arbeid i forhold til hverandre, og går ikke tilbake på arbeidet på noen annen måte enn gjennom regelforståelse.



Modell 2: Pirie-Kieren modell: nivåinndeling med «handling» og «uttrykking» (Pirie & Kieren, 1994, s. 176).

Inndeling i «handling» og «uttrykking» kan knyttes opp mot Skemp sine beskrivelser av relasjonell- og instrumentell forståelse. Pirie og Kieren påpeker at begge disse aktivitetene er nødvendig for utvikling av forståelse. Omvendt vil dette si at om elever bare benytter den ene aktiviteten vil de ikke utvikle forståelse. Det er mulig at Pirie og Kieren ikke anser, som van Hiele, instrumentell forståelse som en type forståelse i matematikk. Om dette er tilfellet kan dette tolkes til at elever vil utvikle en instrumentell forståelse om de bare deltar i den ene aktiviteten for nivåer. Omvendt kan det tolkes at elever vil utvikle en relasjonell forståelse om de deltar i både «handling» og «uttrykking».

3.4.3. «'Trenger-ikke' skillelinjer»

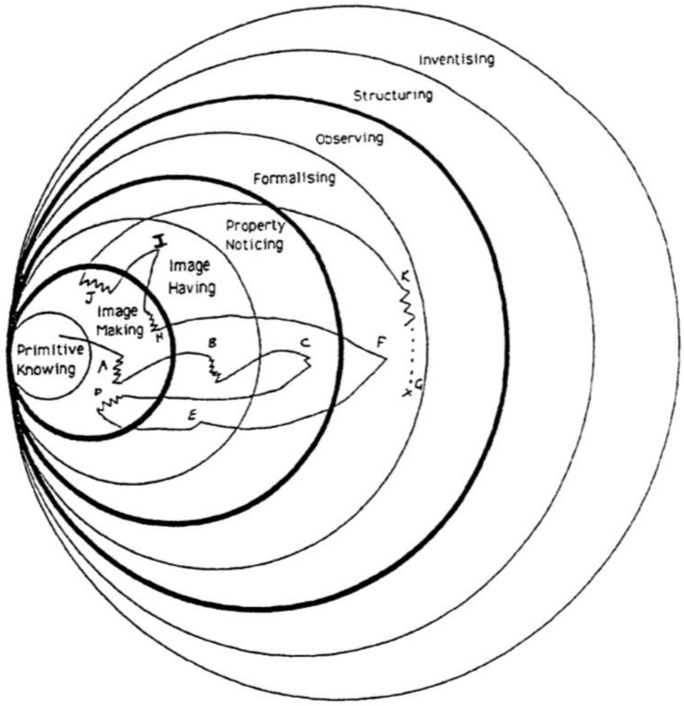
Som tidligere nevnt inneholder hvert nivå alle de foregående nivåer, men Pirie og Kieren (1994, s. 172) påpeker imidlertid at elever er i stand til å arbeide med matematiske symboler uten å måtte fysisk eller psykisk gå tilbake til konsepter på forgående nivåer når de skal løse et problem. Dette illustreres gjennom tykke ringer i modellen (se modell 1 eller 2), og kalles «trenger-ikke skillelinjer» (*don't need boundaries)*. Disse skillelinjene går mellom «illustrasjon» og «mentalt bilde», «egenskap-oppdaging» og «formalisering», og «observering» og «strukturering». Et eksempel er at når elever har dannet seg et bilde av en matematisk idé, arbeidet med «illustrasjon» og oppnådd «mentalt bilde», trenger ikke elever lenger å arbeide på et fysisk nivå ved å tegne opp problemene for å løse dem. At elever ikke har behov for å bevisst benytte tidligere nivå betyr imidlertid ikke at elever ikke er i stand til å referere til, gå tilbake til eller begrunne sine handlinger i tidligere nivåer om nødvendig (Pirie & Kieren, 1994, s. 173).

Gjennom en tolkning av Piaget et al. sin modell for areal kan det virke som at elever ikke slutter å illustrere problemet når de kommer til nivå IIB (som kan kobles opp mot mentalt bilde). Elever bruker konkreter, gjennom opptegning av enheter i en helhet, til og med på nivå IIIA og IIIB (som kan kobles opp mot egenskap-oppdaging) for å kunne utvikle forståelse. Det ser derfor ut til at Pirie og Kieren og Piaget et al. er uenige på dette punktet.

Videre presenterer imidlertid Piaget et al. at når elever når Nivå IV og oppnår en formell forståelse, arbeider med formelen for areal, er elever ikke lenger opptatt av metoder som ligger på tidligere nivåer. Dette kan knyttes sammen med Pirie og Kieren sine «trenger-ikke skillelinjer» mellom «egenskap-oppdaging» og «formalisering», da Piaget et al. indikerer at på dette nivået trenger ikke eleven å forholde seg til tidligere nivåer. Van Hiele nevner imidlertid ingenting om dette.

3.4.4. «Tilbakevending»

Pirie og Kieren (1994, s. 173) fremhever at aktiviteten «tilbakevending» (*folding back*) er avgjørende for utvikling av forståelse. Når elever støter på problemer på et hvilket som helst nivå i modellen som de ikke klarer å løse eller forstå, må de gå tilbake i modellen for å utvide den nåværende, ufullstendige forståelsen. eForskjellige elever vil bevege seg forskjellig gjennom modellen, og i forskjellig tempo, med tilbakevendinger for å bygge en rikere forståelse av problemet eller emnet. Denne aktiviteten understreker Pirie og Kieren sine meninger om at utvikling av forståelse ikke er en lineær prosess. For å illustrere elevers bevegelse for utvikling av forståelse kan denne vandringen tegnes som i modell 3:



Modell 3: En elevs bevegelse i Pirie-Kieren modell (Pirie & Kieren, 1994, s. 186).

Modell 3 illustrerer en elevs utvikling av forståelse gjennom å vise elevens bevegelse mellom nivåer. Elevens bevegelse er illustrert ved bruke av bokstaver (A, B, C) for å vise hvor eleven starter, og rekkefølgen eleven beveger seg gjennom modellens nivåer. Modell 3 viser at eleven går fra grunnforståelsen og starter på illustrasjon (A), går videre til mentalt bilde (B) og egenskap-oppdaging (C). Så tilbakevender eleven til illustrasjon igjen (D). Eleven går videre til mentalt bilde (E) og formalisering (F), og så tilbakevender til illustrasjon (H). Videre går eleven til mentalt bilde (I), tilbake til illustrasjon (J) for så til slutt å ende opp på formalisering (K). Når linjen er «taggete» innen et nivå viser dette at eleven arbeidet en stund på dette nivået (Pirie & Kieren, 1994, s. 185).

I modellen skiller punkt «G» seg ut. Bokstaven er i enden av en stiplet linje med et kryss under nivået formalisering. Dette signaliserer anvendelse av informasjon uten tilknytning til forståelse dannet på tidligere nivåer (Pirie & Kieren, 1994, s. 185). Et eksempel på dette er om lærer gir formelen for areal til eleven når eleven er på (F), uten at eleven har fått mulighet til å oppdage formelen selv. Eleven har da en formel å arbeide ut ifra, men formelen er «demontert» fra forståelsen. Formelen er ikke tilknyttet tidligere nivå, og eleven har heller ikke noen tidligere nivåer å tilbakevende til om han/hun møter på problemer angående formelen senere. Pirie og Kieren (1994, s. 185) påpeker at eleven videre ikke vil ha suksess med å bygge forståelse.

Pirie og Kieren sine beskrivelser av hvordan forståelsen blir «demontert» tidligere nivåer kan knyttes opp mot Skemps beskrivelser av instrumentell forståelse. Instrumentell forståelse viser til at formler og prosedyrer blir brukt uten en forståelse for hvorfor de virker, og dette blir tydelig vist gjennom modellen og teoriene ved at informasjon blir anvendt uten en tilknytning til forståelse dannet på tidligere nivåer. Beskrivelsene om at tildeling av informasjon som ikke eleven selv har arbeidet seg frem til resulterer i instrumentell forståelse, kan knyttes sammen med det van Hiele skriver om at undervisning på et høyere nivå enn der eleven befinner seg vil resultere i instrumentell forståelse.

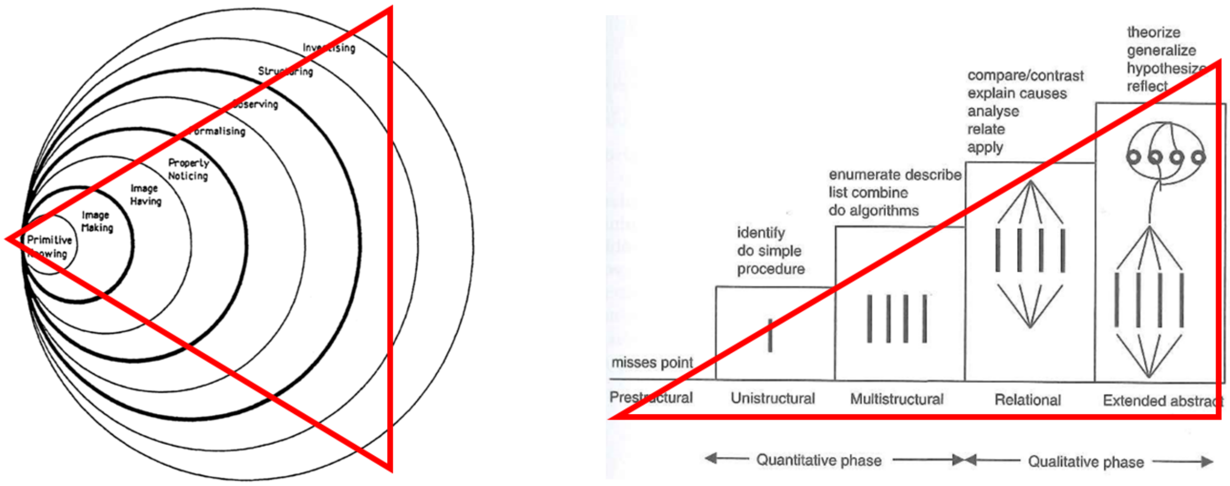
3.4.5. Kritikk og relevans

Pirie og Kieren er noe uklar i fremstillingen av deres modell som dynamisk. De fremlegger at elevene er fri til å bevege seg i modellen, mens de også påpeker at hvert nivå inneholder de foregående nivåer:

> We need to stress at this point that **we do not see the growth of understanding as a monodirectional process.** In an effort to convey this visually, we have presented the model as a sequence of nested circles or layers, thus emphasising the fact that **each layer contains all previous layers and is embedded in all succeeding layers**. (Pirie & Kieren, 1994, s. 172)

Dette kan forstås som en selvmotsigelse om at elever er fri i sin utvikling av forståelse, men samtidig ikke når alle nivåene bygger på hverandre. Formen til modellen kan også gjøre den noe uklar. Den er bygget opp av en sekvens med sirkler, der sirklene står for måter av forståelse og ikke utgående monotone nivåer. Problemet er at sirklene er organisert slik at de gir følelsen av at nivåene bygger på hverandre gjennom at linjene for sirklene er «trykket sammen» til venstre, med avstand mellom linjene til høyre. Formen gir på denne måten følelsen av at «denne veien skal eleven gå». Om den sammenlignes med Solo taksonomi, beskrevet av Biggs og Tang (2007,

s. 79) som en stegmodell med hierarkiske nivåer, kan det i «Bilde 1» ses at det visuelt ikke er mye som skiller dem:



Bilde 1: Sammenligning: Pirie og Kieren (1994, s. 167) sin modell og Solo taksonomi (Biggs & Tang, 2007, s. 79). Trekantene på modellene er tilføyd. Dette viser hvordan formen til Pirie-Kieren modell kan forstås som en stegmodell, som Solo taksonomi.

Jeg tolker at det ikke er nivåenes innhold som bygger på hverandre men at det menes at aktivitetene i ett nivå er mer avanserte enn aktivitetene fra de foregående nivåer, der eksempelvis aktiviteter som inneholder abstrakt formelbruk er mer avansert enn å illustrere et problem. Nivåene bygger også på hverandre i den forstand at det elever «tar inn» på ett nivå vil de ta videre med seg i arbeid på andre nivåer. Videre vil ikke elever beveger seg i en monoton retning (utover) i modellen og innta nivåene stegvis, men bevege seg frem og tilbake for å bygge forståelse. Pirie og Kieren gir mulighet for at elever beveger seg utover i modellen, uten helt å mestre et nivå før de inntar neste, og tilbakevende for å jobbe mer med tidligere nivåer om elever trenger det. Elever har også mulighet for å «hoppe over» nivåer og er på denne måten ikke nødt til å gå innom alle nivåer i sin bevegelse i modellen, selv om nivåene ligger etter hverandre som sekvenser. I kontrast er Van Hiele eksempelvis klar på at elever beveget seg utover fra nivå til nivå i en stegvis bevegelse, og det kan tolkes at elever ikke foretar tilbakevendinger og ikke går videre uten å ha mestret et nivå fullt ut.

Det at modellen er noe vanskelig å forstå kan ha rot i at den (og artiklene den er hentet fra) er «gammel», og muligens påvirket av datidens teorier. Pirie og Kieren (1994, s. 166) beskriver at modellen og deres teorier rundt utvikling av forståelse først ble publisert i 1989, og at strukturen i modellen ikke har endret seg siden den gang. Piaget sin stadie-tenkning var sterk på denne tiden. Dette kan ha påvirket Pirie og Kieren sitt arbeid med å løsrive seg fra holdningene om at forståelsesutvikling er hierarkisk, som kan forklare den noe tilbakeholdende formuleringen om en dynamisk forståelsesbygging samt strukturen på modellen.

Modellen er allikevel aktuell i dag, selv om den er noe gammel, da tanken om en dynamisk utvikling av forståelse kan knyttes sammen med «puslespill-metaforen». Johnsen-Høines og Rangnes (2012, s. 103) refererer til Magne (1994) som presenterer utvikling av forståelse for tallbegreper gjennom en «puslespill-metafor». Magne beskriver at utviklingen ikke nødvendigvis er en lineær prosess, men at utviklingen kan sammenlignes med et puslespill der barn legger ulike brikker til ulike tider. Dette står i kontrast til det utbredte synet om matematikk som en «mursteins-metafor», der elever bygger sin forståelse ved å legge «stein på stein» som til sammen danner en helhet (mursteins vegg), der hull kan resultere i kollaps. Johnsen-Høines (2003, s. 47) beskriver at «dagens klasserom korresponderer bedre med» «puslespill-metaforen». Da Pirie og Kieren sin modell kan knyttes sammen med denne metaforen, og viser at utvikling av forståelse kan være en dynamisk prosess, er den også aktuell i dag. Den er også en kontrast til «mursteins-metaforen» som det kan tolkes at både van Hiele og Piaget et al. fremlegger.

Videre er modellen relevant for oppgavens fokus. Pirie og Kieren (1994, s. 187) presenterer at modellen kan benyttes på alle alderstrinn og inn mot alle emner i matematikk, noe som åpner for bruk av modellen inn mot areal på 5. trinn. Dette er vist gjennom sammenligningen med areal og geometri av Piaget et al. og van Hiele. Men som påpekt stemmer ikke modellene helt overens, da Pirie og Kieren skriver at det befinner seg en «trenger-ikke skillelinje» mellom «illustrasjon» og «mentalt bilde», mens gjennom tolkning av Piaget et al. sin modell trenger elever å bruke konkreter også videre i utviklingen. Videre fungerer modellen som en generell presentasjon og analyseverktøy for utvikling av forståelse i en læringsprosess. Modellen kan brukes til å se på elevers utvikling, der elevens utvikling av matematikkforståelse kan «kartlegges» gjennom en visning av deres bevegelse mellom forskjellige nivåer. Dette gir mulighet for å se hvordan elevers forståelse kommer til uttrykk og kan være dynamisk, uten å «plassere» eleven under ett nivå.

Det foregående passer også godt inn mot mitt syn på at én virkelighet ikke finnes. Pirie og Kieren beskriver at utvikling av forståelse er en bevegelse frem og tilbake i modellen, og at elever beveger seg forskjellig i utviklingen. De forskjellige bevegelsene kan tolkes til elevers forskjellige bakgrunnskunnskaper og erfaringer, som gjør at de konstruerer forskjellige virkeligheter. Den dynamiske oppbygningen i modellen åpner på denne måten for muligheten av sameksisterende virkeligheter for utvikling av forståelse.

3.5. En kombinasjon av teorier og modeller

Under dette kapittelet vil alle de foregående teorier og modeller kombineres for å utvikle et «nytt» analyseverktøy for forståelse av areal. Det vil plukkets ut fra de enkelte det som er relevant for arealforståelse, og det jeg har argumentert at passer med mine perspektiver på hva forståelse og læring er. Struktur og innhold for modellen presenteres først, for så å vise modellens nye form. Til slutt blir instrumentell- og relasjonell forståelse identifisert for modellen.

3.5.1. Struktur

Nivå og elevenes bevegelse

Modellene presentert i det foregående er forskjellige i oppbygning av nivåer og elevers bevegelse gjennom disse. Gjennom tolkning av van Hiele og Piaget et al. sine modeller bygger nivåene hierarkisk på hverandre, der elever beveger seg fra første nivå og utover til siste nivå i en monoton retning. Elever kan heller ikke gå videre før de har oppnådd fullstendig forståelse av et nivå. Tolkninger av Pirie og Kieren sin modell viser at nivåene i deres modell bygger på hverandre i den forstand at nivåene blir mer avansert utover i modellen, men elever trenger ikke «slavisk» tilegne seg hvert nivå i rekkefølge. Pirie og Kierens modell åpner for at elever ikke trenger full innsikt i hvert nivå før de går videre. Elever er fri til å gå frem og tilbake for å utvikle forståelse, og til å «starte» hvor som helst i modellen. Videre ligger nivåene etter hverandre som sekvenser, men elever kan «hoppe over» nivåer om de vil. Jeg mener at Pirie og Kieren sin modell på best måte fremstiller hvordan utvikling av forståelse kan illustreres, samtidig som den åpner for en dynamisk utvikling som vektlegges i oppgavens fokus. Modellen for forståelse av areal som her presenteres vil følge denne modellens struktur.

Videre vil elevers bevegelse i modellen illustreres som presentert av Pirie og Kieren under kapittel 3.4.4.. Elevers uttalelser vil bli analysert og knyttet opp mot aktiviteter på nivåer i modellen. For å kunne illustrere elevers bevegelse fra nivå til nivå i modellen vil det brukes bokstaver i teksten: (A), (B), (C) osv. Videre vil bokstavene vise elevers bevegelse visuelt ved å plassere dem i modellen. Her er det viktig å ikke forbinde bokstavene A, B C, osv. med rekkefølgen på nivåene i modellen, da bokstavene står for rekkefølgen eleven uttrykker at de bruker aktiviteter på nivåer. «A» står altså ikke for første nivå i modellen, men for første plass eleven uttrykker at de bruker aktiviteter. «A» vil da settes inn i nivået i modellen som passer med aktiviteten eleven uttrykker. Hver bokstav blir også knyttet til et punkt i modellen, der punktene er sammenkoblet av linjer. Dette viser elevens bevegelse gjennom nivåene og bruk av aktiviteter fra nivåene. Kryss i enden av en stiplet linje representerer bruk av forståelse som ikke er knyttet til aktiviteter på tidligere nivåer.

Modellens form

Pirie og Kieren sin modell har en form som i det foregående ble kritisert for å være for lik formen til en stegmodell. For å tydeliggjøre det Pirie og Kieren prøver å få frem gjennom tanken om en dynamisk modell vil modellens form her forandres noe. Den vil fortsatt være bygget opp av en sekvens med sirkler for å vise hvordan aktivitetene utover i modellen blir mer avansert, og at nivåene ikke er helt likestilte. Sirklene vil imidlertid bli fremstilt med lik avstand fra hverandre, og ikke være «trykket sammen» i venstre ende. Dette gir mindre assosiasjoner til en stegmodell der elever «går i én retning». Modellens form fremstilles etter ferdig beskrivelse av struktur og innhold (Modell 4).

«Trenger-ikke skillelinjer»

«Mentalt bilde» som presenteres av Pirie og Kieren ser ut til å ikke passe helt med arealforståelse beskrevet av Piaget et al. Pirie og Kieren beskriver at elever ikke lenger trenger å illustrere problem når de når et nivå for mentalt bilde, og markerer overgangen med en «trenger-ikke skillelinje» i sin modell. Ifølge Piaget et al. sine beskrivelser vil elever trenge konkretisering også når de arbeider på andre nivå enn illustrasjon. Med utgangspunkt i Piaget et al. vil det ses vekk ifra at elever slutter med illustrasjon og konkretisering, da det er mulig elevene trenger dette i videre nivåer. «Trenger-ikke skillelinjen» blir derfor fjernet.

«Trenger-ikke skillelinjen» mellom «egenskap-oppdagelse» og «formalisering» vil holdes som den er da både Pirie og Kieren og Piaget et al. enes om at elever ikke bevisst trenger å inkludere arbeid fra tidligere nivåer når dette nivået er forstått. Det vil imidlertid bli forventet, som presentert av Pirie og Kieren, at elever er i stand til å gå tilbake til tidligere nivå for å forklare eller begrunne sine handlinger.

3.5.2. Innhold

Grunnforståelse, illustrasjon, mentalt bilde, egenskap-oppdaging og formalisering

Modellen tar utgangspunkt i Pirie og Kieren sine fem første nivåer. Van Hiele sin modell for geometriforståelse, Piaget et al. sin modell for arealforståelse og Pirie og Kieren sine beskrivelser av utvikling av forståelse som aktiviteter danner grunnlaget for innholdet i nivåene. Hvordan de er satt sammen er illustrert gjennom eksempelet for areal for Pirie og Kieren sin modell brukt i kapittel 3.4.1. Dette eksempelen er utgangspunktet for innholdet av aktiviteter for nivåene i modellen.

Pirie og Kieren presenterer at «grunnforståelse» er alt eleven kan fra før som de bringer med seg. Dette kan tolkes til at grunnforståelse er et utgangspunkt. Men et utgangspunkt inneholder også en fase før elever begynner å prøve å gi mening til omgivelser og objekter. Det kan tolkes at «grunnforståelsen» også inneholder et punkt der elever er i denne fasen. Dette punktet vil representere punkt null, altså før elever prøver å gi mening til objekt og omgivelse. Området mellom punktet og linjen som skiller «grunnforståelse» fra «illustrasjon» vil være området av grunnforståelse som elever utvikler. Dette er forståelse før de begynner å lage bilder av problemer for areal gjennom «illustrasjon». Når «grunnforståelse» blir beskrevet på denne måten kan Piaget sitt nivå I for arealforståelse og «udefinert nivå» for geometriforståelse settes inn her.

Eksempelet for areal som følger forklaringen av Pirie og Kieren sin modell viser at det gjøres flere oppdagelser på nivået «egenskap-oppdaging». Elever oppdager først egenskaper ved enheter og hvordan forskjellige enheter eller figurer relaterer seg til hverandre, for så å oppdage en relasjon mellom tall og antall enheter langs en sidelinje og hvordan enheter kan ganges sammen for å finne areal gjennom logisk multiplikasjon for todimensjonale figurer. Dette viser at oppdagelsene elever gjør for areal kan deles i to faser. Nivået for egenskap-oppdagelse vil derfor deles i to med en stiplet linje for å vise at nivået kan bestå av to oppdagelsesformer for areal.

Observasjon, strukturering og skapelse

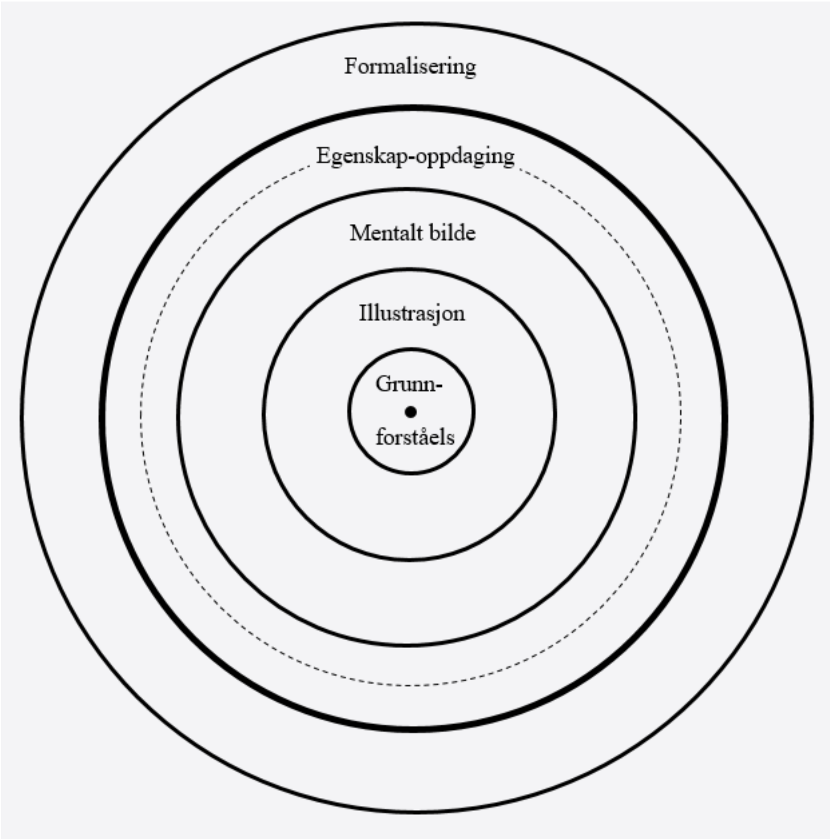
De tre siste nivåene i Pirie og Kieren sin modell og siste nivå i van Hieles modell vil ikke bli inkludert, da disse setter krav om arbeid på et høyt analytisk nivå som det ikke er forventet at elevene kan nå enda. Krummheuer (1995, s. 236) beskriver at barn på grunnivåer i matematikk ikke pleier å arbeide med aksiomer og utledninger i matematikk, der de sjeldent vil dra konklusjoner på et analytisk nivå. Struve, referert i Krummheuer (1995, s. 236) tekker også frem at barns matematikkunnskaper på barneskolen er empirisk med arbeid sentrert rundt virkelige objekter, som for eksempel å konkludere ut ifra en bestemt oppgave eller figur de har fremfor seg. Som tidligere nevnt påpeker Crowley (1987, s. 2) at svært få elever noen gang når siste nivå i van Hiele sin modell for geometriforståelse. Da forskningen foregår på 5. trinn vil modellen ut i fra dette ikke inkludere de siste nivåene i Pirie og Kieren sin modell, eller siste nivå i van Hieles geometrimodell.

Handling og uttrykking

«Handling» og «uttrykking» vil være en del av modellens innhold teoretisk, da de er med på å tydeliggjøre elevenes aktiviteter. Verbene for «handling» og «uttrykking» er lage/vurdere (illustrasjon), se/fortelle (mentalt bilde), forutse/registrere (egenskap-oppdaging) og bruke/forsvare (formalisering). Disse er brukt i eksempelet for arealforståelse som følger nivåene i kapittel 3.4.1., markert med kursivering og understrek, for å vise hvordan de kan være med på å identifisere elevens aktiviteter og forståelse. Det vil være mulig å få innsikt i alle aktivitetene der elevene «uttrykker» aktiviteter og forståelse, da elevene her er i stand til å fortelle dette eksplisitt. Under «handling» er imidlertid elevene muligens ikke i stand til å si noe om «hvorfor», og det kan være vanskelig å få innsikt her. Av «handlingsaspektene» er det imidlertid mulig å observere nivået for illustrasjon og formalisering direkte, da elever *lager* bilder av problemet og *bruker* formelen for areal. Mentalt bilde er vanskelig å få innsikt i da eleven her *ser* sammenhenger under «handling», og elever er ikke i stand til å påpeke kunnskapen før de *forteller* om disse sammenhengene: «uttrykking». Når elever imidlertid er i stand til å *fortelle,* kan det også antas at de *ser*. Det samme gjelder for egenskap-oppdaging der elever *forutser* en figurs egenskaper, og det er først mulig å få innsikt kunnskapen når de «uttrykke» disse *forutsigelsene* når egenskapene er *registrert.* Når elever imidlertid er i stand til å «uttrykke» det *registrerte* egenskapene kan det også antas at de *forutser* egenskapene.

3.5.3. Modell

Ut ifra struktur og innhold beskrevet over er modell 4 laget for utvikling av arealforståelse:



Modell 4: «Ny» modell for utvikling av arealforståelse.

Modell 4 er bygget opp av 5 nivåer: Grunnforståelse, illustrasjon, mentalt bilde, egenskap-oppdaging og formalisering. Nivåene er dynamiske, der elever kan bevege seg fritt frem og tilbake i modellen og benytte forskjellige aktiviteter. Grunnforståelse inneholder et punkt «null» som indikerer et punkt før elever prøver å gi mening til objekter og omgivelser. Nivå for egenskap-oppdaging er delt med en stiplet linje for å signalisere at elever kan foreta to forskjellige oppdaginger i areal. Mellom egenskap-oppdaging og formalisering ligger en «'trenger ikke'-skillelinje».

3.5.4. Instrumentell- og relasjonell forståelse i forhold til modellen

Skemp sine beskrivelser av instrumentell- og relasjonell forståelse har blitt trukket inn i og identifisert i teoriene og modellene beskrevet tidligere. For modellen for arealforståelse som her presenteres vil disse to forståelsesformene identifiseres på samme måte:

- Det vil antas at elever har utviklet en instrumentell forståelse om de ikke kan forklare hvorfor de gjør som de gjør, og dermed anvender informasjon som de ikke har kommet frem til selv. Omvendt vil det antas at elever har utviklet en relasjonell forståelse om de klarer å begrunne hvorfor de gjør som de gjør gjennom aktiviteter fra tidligere nivåer.

- Det vil antas at elever utvikler en relasjonell forståelse om de deltar i aktivitetene «handling» og «uttrykking». Omvendt vil det antas at elever utvikler en instrumentell forståelse om de bare deltar i den ene av disse aktivitetene for et nivå.

3.6. Oppsummering

Dette kapittelet presenterer først Skemps beskrivelser av instrumentell- og relasjonell forståelse, som gikk ut på å ha en ren regelforståelse, eller en forståelse for hva som skal gjøres og hvorfor. Disse forståelsesformene er identifisert og trukket inn i teoriene presentert av Piaget et al., van Hiele og Pirie og Kieren.

Det er videre laget en oversikt over arealteori utviklet av Piaget et al., som deretter er kombinert med van Hieles teorier for utvikling av geometriforståelse. Dette er gjort for å tydeliggjøre arealforståelse, og for å belyse hvordan forståelse for geometriske egenskaper påvirker arealforståelse.

Pirie og Kieren sin modell for utvikling av forståelse er videre trukket inn som en «motpol» til Piaget et al. og van Hieles hierarkiske modeller. Denne viser hvordan forståelse kan forstås som dynamisk, der nivåer representerer aktiviteter og måter av forståelse. Det er vist hvordan Piaget et al. og van Hieles teorier om arealforståelse og geometriforståelse kan kobles opp mot Pirie og Kieren sine nivåer, der det ble tydeliggjort gjennom verb hvilke areal- og geometriaktiviteter som kan finne sted for hvert nivå.

Til slutt er de foregående teorier og modeller kombinert for å utvikle et «nytt» analyseverktøy for forståelse av areal. Deler av hver er brukt for å utvikle teoretisk struktur og innhold, og en modell. Instrumentell- og relasjonell forståelse er igjen trukket inn for å vise hvordan forståelsesformene kan identifiseres.

4. Forskningsmetode

Oppgavens fokus er å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess. Dette kapittelet presenterer forskningsmetoden utført for å få innsikt i dette. Forskningen er del av et felles forskningsprosjekt, der planleggingen startet høsten 2014 og utførelsen ble foretatt i vårsemesteret 2015. Dette blir først kort presentert da det dannet grunnlag for min forsking. Videre presenteres forskningsmetoden for denne oppgaven, med valg av metode og av utførelse, behandling av datamateriale og analysearbeid. Avslutningsvis fremlegges oppgavens etiske overveielser, reliabilitet og validitet.

4.1. Felles forskningsprosjekt

Forskningsdeltakerne besto av en doktorgradsstipendiat og fire masterstudenter. Forskningsprosjektet var allerede i gang da vi masterstudenter kom inn, og noe forarbeid var ordnet. Utvalg og opptak av deltakere var ordnet, der tre matematikklærere på 5. trinn var inkludert. Lærerne var fra forskjellige skoler i samme kommune på Vestlandet.

Måling var valgt som emne, med delemnene lengdemåling, omkrets og areal da disse passet til elevenes pensum og klassenes lærebok *Multi* (Alseth, Nordberg, & Røsseland, 2006). Da prosjektet baserte seg på variasjonsteori var det viktig å få innsikt i elevers kritiske aspekter, og det ble utviklet tester i hvert delemnene (test for omkrets og areal: Vedlegg 2). Testene var utviklet i samarbeid mellom doktorgradsstipendiaten og matematikklærerne. Oppgavene var laget på bakgrunn av kunnskap om elevers problemer, hentet fra litteratur innen lengdemåling, omkrets og areal, doktorgradsstipendiaten og lærernes tidligere erfaringer, samt fra lærernes førstehåndskunnskap om elevene. Testene var bygget opp som en avkrysning, med flere svaralternativer for hver oppgave, der noen oppgaver krevde begrunnelse for svar. Testene ble gjennomført før undervisningsstart i regi av matematikklærerne, utført individuelt av alle elevene i hver av de tre klassene. Disse ble kalt pretester. Resultatene fra pretesten ble lagt inn i en tabell (tabell 3) og evaluert. Dette dannet en oversikt over hver enkelt elev og deres prestasjon innen delemnene, også i forhold til resten av klassen.

Navn	1	2a	2b	3aA	3aB	3aC	3aD	3bA	3bB	3bC	3bD	4	5	6	7	8	9	10	11a	11b	12	13	RESULTAT	
Hilde	X	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	0	X	19 av 22	86,4 %
Ruben	0	X	0	0	0	0	0	X	X	X	X	0	X	0	0	0	X	0	0	0	0	0	7	31,8%
Siri	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	0	0	X	19	86,4 %
Håkon	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	4	18,2 %

Tabell 3: Eksempel på tabell med noen elevers resultater fra pretesten i areal og omkrets. Elevene er listet til venstre i tabellen, der en lesning fra venstre til høyre gir oversikt over hvilke oppgavenummer elevene har svart rett (X) og galt (0) på. Helt til høyre vises en oversikt av antall rett svar av totalt antall oppgaver, og en prosentandel rette svar.

Videre ble et utvalg lavtpresterende og høgtpresterende elever intervjuet om hva de hadde gjort og tenkt, for å finne ut mer om hva elevene forsto i oppgavene. Til dette hadde doktorgradsstipendiat utviklet en semistrukturert intervjuguide (vedlegg 3). Denne ble brukt under selve intervjuene, og hadde åpne spørsmål som kunne hjelpe elevene med å utdype sine forklaringer. Den skulle videre sørge for at alle påfølgende intervjuer skulle foregå noenlunde likt, med tanke på at vi masterstudenter skulle delta. Videre dannet pretest og intervju et grunnlag for danning av kritiske aspekter (kritiske aspekter i areal: vedlegg 1) og hva som skulle jobbes med i den påfølgende undervisningen.

Vi masterstudenter kom inn da pretestene og intervjuene tilknyttet pretestene var gjennomført. Vi var med på vurdering av tester, planlegging av undervisningen som baserte seg på variasjonsteori, observasjon av undervisning og diskusjon om undervisning i forskningsgruppa sammen med lærerne og doktorgradsstipendiaten. Forskningsgruppa fulgte forskningsmetoden Learning Study, der lærere og forskere går sammen i et forskningsprosjekt, og gjennom planlegging, utprøving og vurdering har som mål å utvikle undervisningen med utgangspunkt i variasjonsteori (Kollegialt Lärande, u.å.). Da forskningsmetoden ikke er relevant for oppgavens fokus vil ikke dette utdypes videre.

Etter undervisning utførte elevene posttester i delemnene. Posttestene var identiske pretestene, og matematikklærerne gjennomførte også disse. Resultatene fra posttestene ble lagt inn i tabellen med pretestene. Etter posttestene ble elevene intervjuet om hva de hadde tenkt og gjort i oppgaveløsningen, der vi masterstudenter var delaktige i intervjuingen.

4.2. Valg av metode

Det felles forskningsprosjektet dannet grunn for datamateriale, og valg av metode er tatt i betraktning av hva som var tilgjengelig. Mine perspektiver om at det finnes flere virkeligheter og at kunnskap er konstruert gjennom et samspill, påvirket mitt valg av metode. Kvalitative metoder er i samsvar med disse perspektivene ved at de åpner for samspill og nærhet mellom deltakere, og fleksibilitet med gjengivelse av variasjoner og flere virkeligheter (Dalland, 2012, s. 113). I følge Hatch (2002, s. 15) er kvalitative forskningsmetoder foretrukket for datainnsamling blant konstruktivister.

Med utgangspunkt i fokuset om å få innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, var det videre hensiktsmessig å bruke kvalitative metoder. Forståelse er en side ved elevene som kan være vanskelig å få tilgang til. Ifølge Thagaard (2013, s. 58) er kvalitativ metode en god måte å få innblikk i personers opplevelser, refleksjoner, forståelse av seg selv og sine omgivelser. I følge Dalland (2012, s. 113) åpner metoden også for nærhet gjennom direkte kontakt med forskningspersoner som kan gi mulighet for å gå i dybden av temaet. Av kvalitative metoder sto elevintervju, observasjon og videoopptak av enkelttimer tilgjengelig fra forskningen. Jeg valgte å bruke elevintervjuer. Intervju med elever vil være en velegnet måte å få innsikt i deres forståelse av areal, da det åpner for fyldige data gjennom direkte kontakt med elevene som kan fortelle hvordan de har reflektert i regneprosesser. Observasjonene og videoopptakene som ble utført i fellesprosjektet ble valgt vekk, da de ikke gav mulighet for innsikt i elevers forståelse. Observasjonene var noe ustrukturerte, da de ikke hadde et spesifikt fokus eller observasjonsmetode. Videoopptakene gav oversikt over hele klasseromssituasjonen, uten inn-zooming på enkeltelever for å tydelig se «hva» de gjorde. Gjennom å se eleven arbeide ville det heller ikke vært mulig å få innsikt i «hvorfor» de gjorde som de gjorde. «Hva» og «hvorfor» presenterer en stor del av elevers forståelse av et problem. Ved bruk av observasjonene eller videofilmingen ville «hva» vært utydelig, og «hvorfor» ville kun blitt presentert gjennom min subjektive tolkning ved å tildele grunner for valgene elevene gjorde i oppgaveløsningene. Pirie (1988, s. 2) antyder også at det må vises forsiktig med å si noe om forståelse på bakgrunn av elevers handlinger. Intervjuene gav imidlertid elevene mulighet for å formidle «hvorfor» selv, som kunne gi innsikt i deres forståelse. Pirie og Kieren (1994, s. 175) påpeker også at det er hovedsakelig på bakgrunn av uttalelser at en observatør kan antyde noe om forståelsen til en elev.

Selv om fokuset trekker oppgaven over i en kvalitativ metodebruk er oppgaven bygd opp gjennom en kombinasjon av metoder, der kvantitativ metode blir trukket inn til hjelp for den kvalitative metoden. I følge Dalland (2012, s. 112) gir kvantitative metoder data som er målbare. Med utgangspunkt i dette kunne testene brukes for å identifisere lavtpresterende elever, da de kartla elevenes prestasjoner i areal i forhold til resten av klassen. På denne måten gav testresultatene grunnlag for hvilke elever som skulle velges til intervjuing. Testene kunne også være med på å danne et konkret grunnlag for intervjuene, da de stilte med elevenes egne svar på oppgaver.

Selv om kvantitativ metode ble trukket inn vil jeg presisere at testene alene ikke ville gitt svar på oppgavens fokus eller forskningsspørsmål. Elevers forståelse gjennom talldata gav overfladisk informasjon, og det kunne for eksempel ikke vurderes hvilken forståelsesform elevene viste gjennom kun rette og gale svar uten en forklaring som følger med. Rette og gale svar alene var derfor ikke interessant.

4.3. Gjennomføring av feltarbeid

Forskning som var relevant for oppgavens fokus var intervju av lavtpresterende elever, og pre- og posttester i areal som supplement. I det følgende vil utvalg av elever og gjennomføring av intervjuer presenteres nærmere.

4.3.1. Utvalg

Etter pre- og posttesten ble noen elever valgt for intervjuing for å få innsikt i deres forståelse av areal. Oppgavens fokus satte krav om et utvalg av lavtpresterende elever og det ble brukt strategisk utvalg, som Thagaard (2013, s. 60) beskriver går ut på å velge elever som kvalifiserer seg for forskningen. Matematikklærerne valgte ut elever ved bruk av resultatene fra pretesten for å identifisere elever som scoret lavt i areal, samt gjennom deres erfaringer med elevene. Jeg ville ha et utvalg med 2 lavtpresterende elever fra hver klasse, altså til sammen 6 elever. Antallet gav mulighet for nok data til forskningen, også med tanke på at noen intervjuer kunne bli mindre vellykket. De samme elevene som ble intervjuet etter pretesten ble valgt for intervjuing etter posttesten, slik at forståelsen elevene viste før undervisning kunne sammenlignes med den etter.

4.3.2. Intervju

Prosjektet besto av flere medforskere som alle deltok i arbeid med intervjuing, og det var da nødvendig å utvikle en felles forståelse om mål med intervjuene, og for oppsett av intervjusituasjonen. Dette var viktig da de første minuttene av et intervju, og hvordan intervjuet utspiller seg, ifølge Thagaard (2013, s. 110) er avgjørende for hvilke data som kommer frem. God kommunikasjon med elevene var viktig for å få innsikt i hva de hadde tenkt, og da stemningen og kontakten som etablertes påvirker elevers åpenhet (Thagaard, 2013, s. 96) var en god intervjusituasjon viktig. Det videre presenterer hvilke faktorer som var førende. Forsker vil også videre bli kalt for intervjuer.

Intervjusituasjonen var uformell og foregikk i kjente omgivelser for intervjupersonen. Intervjuene ble utført i tomme klasserom på elevenes skoler. Skolen og klasserom er et miljø som er kjent for både forsker og elev, og ifølge Thagaard (2013, s. 114) reduserer dette den sosiale avstanden mellom partene. Dette kan også skaper en trygghet og sosial nærhet mellom intervjuer og elev. Plasseringen tillot ro i intervjusituasjonen slik at elevene ikke ble forstyrret i sine forklaringer. Elevene assosierte gjerne intervjuer med en lærer da intervjuer hadde vært delaktig i undervisningen. Dette kan ha vært en fordel da elevene muligens lettere åpnet seg da de var vant med å gjøre dette for sin lærer.

Intervjuer startet med å fortelle eleven hva som var hensikten med intervjuet. Det ble fortalt at eleven skulle få fortelle hva de hadde tenkt, der intervjuet ikke ville fokusere på hva som var gjort rett og galt i testen. Dette signaliserte at intervjuer ikke var der for å hjelpe med problemer og rette opp testen. I følge Thagaard (2013, s. 113) er det viktig å klargjøre hva intervjuer kan tilby, og hva intervjuet vil handle om, slik at elever ikke blir forvirret over situasjonen. Å formidle hensikten eksplisitt for elevene kan også ha vært med på å minske eventuell nervøsitet eleven følte rundt tanker om å måtte prestere godt. Gjennom intervjuet prøvde intervjuer å skape en vennlig atmosfære, og fremtre interessert med en lyttende holdning. Dette kan ifølge Thagaard (2013, s. 66) være til hjelp for at eleven skal dele sine tanker, noe som var viktig i denne situasjonen.

Den semistrukturerte intervjuguiden (vedlegg 3) og testen (vedlegg 2) var førende for intervjuet. Den semistrukturerte intervjuguiden hjalp med åpne spørsmål for å invitere eleven til å gi fyldige kommentarer. Videre var intervjuet sentrert rundt testen som elevene hadde utført. I følge Thagaard (2013, s. 104) er det lurt å knytte spørsmål opp mot noe konkret for å unngå vage svar i intervju med barn. Testen elevene hadde gjennomført var konkretiserende ved at den inneholdt spørsmålene, og svarene til elevene som de kunne gjenkjenne og snakke ut ifra. Dette kan ha gjort det lettere for elevene å dele sin kunnskap, og åpnet for innsikt i deres forståelse. Intervjuene hadde preg av modellen «elv-med-sidestrømmer», der intervjuenes struktur følger en hovedelv som kan dele seg i sidestrømmer, som så flyter sammen til hovedelven igjen (Thagaard, 2013, s. 103). Testen fungerte her som utgangspunkt (elv), der det ble gått inn på delspørsmål i testen der elevene utdypet hva de hadde tenkt og gjort (sideelver). Thagaard (2013, s. 102) presiserer at oppfølgingsspørsmål er viktig å benytte innen denne modellen, noe som ble mye brukt for å få klarhet i hva elevene fortalte. Intervjuene varte i ca. 10-15 min. hver, som skapte nok tid for å få innsikt i elevenes forståelse, men ikke så lenge at elevene ville trenge pause.

For å sikre best mulig dokumentasjon rundt intervjuene ble det benyttet lydopptaker og videofilming. En kombinasjon av lydopptak og video gir utfyllende data rundt verbal og non-verbal kommunikasjon (Thagaard, 2013, s. 23). Dette var viktig da elevene mange ganger viste hvordan de hadde tenkt i oppgavene ved å benytte non-verbal kommunikasjon, som å peke på oppgavene og si «der» eller «jeg telte: 1, 2 …». I følge Kvale, Brinkmann, Anderssen, og Rygge (2009, s. 188) gir videoopptak «en enestående mulighet til å analysere det mellommenneskelige samspillet i et intervju», som her var viktig informasjon når dataene senere skulle studeres, og elevenes tenkning og forståelse skulle analyseres. Videre gav videofilming oversikt over hvilken oppgave elevene snakket om.

4.4. Datamateriale og analyse

Resultatene av forskningen var både kvalitativ og kvantitativ, med elevenes resultater fra pre- og posttest og intervjuer med elever. Jeg benyttet intervjuene for å få innsikt i elevers forståelse av areal, og vil i det videre presentere hvordan intervjuene ble behandlet og analysert. Testene gav oversikt over prestasjoner som ble brukt i utvelgelse av elever, og en beskrivelse rundt behandling av testenes resultater vil bli inkludert.

4.4.1. Sortering av kvantitative datamateriale

Pretesten i areal og omkrets gav talldata som ble brukt for å identifisere lavtpresterende elever i hver klasse. Resultatene fra pretesten ble lagt inn i en tabell der elevenes navn var listet til venstre. En lesning fra venstre til høyre gav oversikt over hvilke oppgavenummer elevene hadde svart rett (X) og galt (0) på. Helt til høyre viste en oversikt over antall rett svar av totalt antall oppgaver, og en prosentandel rette svar. Det ble laget tabell fra testresultatene for hver klasse. Ut ifra tabellene ble seks elever valgt ut, da de scoret lavt på pretesten i forhold til resten av sin klasse. Etter undervisning utførte elevene samme test på ny, en posttest. Resultatene fra denne ble lagt inn i tabellen for pretesten for hver klasse.

Tabell 4 viser eksempel for to lavtpresterende elevers resultater fra pretest (markert i blått) og posttest (markert i oransje) (For resultat for alle seks lavtpresterende elever som ble utvalgt se vedlegg 4):

Test	Navn	1	2a	2b	3aA	3aB	3aC	3aD	3bA	3bB	3bC	3bD	4	5	6	7	8	9	10	11a	11b	12	13	Resultat	Prosent
Pretest	Malin	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	X	0	X	0	X	0	0	0	5/22	22,7%
Posttest	Malin	0	X	X	X	X	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	X	0	X	18/22	81,8%
Pretest	Espen	X	0	X	0	0	0	0	X	X	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7/22	31,8%
Posttest	Espen	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	15/22	68,2 %

Tabell 4 Resultater pre- og posttest for Malin og Espen.

Tabell 4 viser at:

- Malin hadde et resultat på 5 rette svar av totalt 22 oppgaver, med en prosentandel på 22,7 % rett på pretesten. På posttesten hadde hun 18 rette av 22 oppgaver, med en prosentandel på 81,8 % rett.
- Espen hadde et resultat på 7 rette av 22 oppgaver, med en prosentandel på 31,8 % rett på pretesten. På posttesten hadde han 15 rette av 22 oppgaver, med en prosentandel på 68,2 % rett.

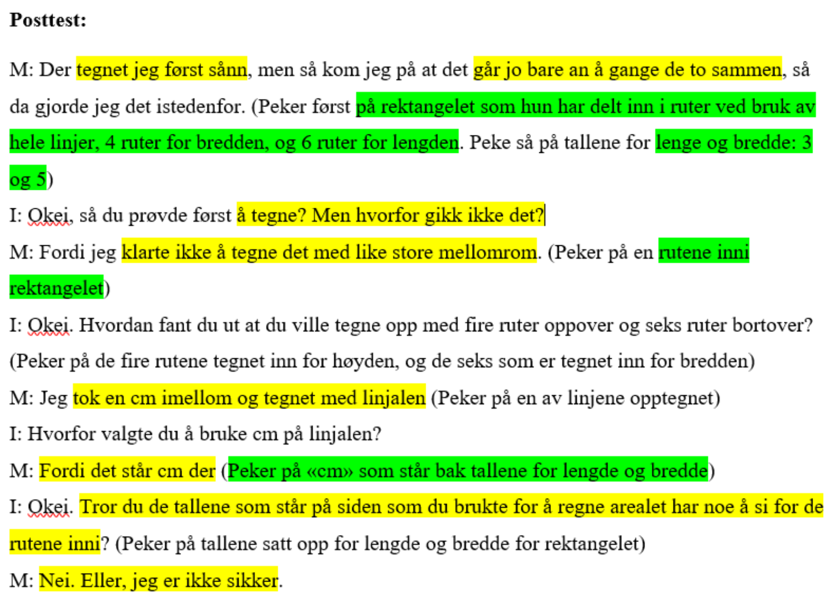
4.4.2. Sortering av kvalitativt datamateriale og analyse

Det ble foretatt et strategisk valg av elever for transkribering og analyse. Oppgavens fokus var å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal og det var da viktig med fyldige forklaringer rundt hva elevene hadde tenkt. Av de seks elevintervjuene var det to som skilte seg ut da de forklarte mye rundt hva de hadde tenkt og gjort. Disse ble utgangspunkt for videre transkribering og analyse.

Intervjuene ble gjort klart for analyse gjennom transkripsjon (vedlegg 5). Transkripsjonen inneholdt tale og nonverbal kommunikasjon der det var del av elevenes forklaringer, da begge uttrykksformene spilte en viktig rolle for å vurdere elevenes forståelse. Ytringer som «ehm» og «eh» ble ikke inkludert da de hindret flyt i teksten, og ikke hadde noen verdi for analysen da det ikke var mulig å si om elevene sa «ehm» fordi de var usikre eller fordi de tenkte. Tale ble videre gjengitt på standardisert skriftspråk for å bevare elevenes anonymitet. Bokmål ble valgt da resten av oppgaven også var på bokmål. Elevene ble tildelt fiktive navn: Malin og Espen. Navnene ble gitt uavhengig av kjønn, da dette ikke hadde noen betydning for oppgavens fokus. Elevene har blitt tildelt navn for å gi bedre flyt for oppgaven, istedenfor bruk av «elev 1» og «han/hun» i teksten. Transkripsjonen ble fremstilt ved bruk av en tabell med kategoriene: Oppgave, person, tale og nonverbal kommunikasjon.

Etter transkribering registrerte jeg hvilke oppgaver som var snakket om i intervju med hver elev. Dette var nødvendig da alle oppgavene ikke ble diskutert under hvert intervju. Ved å sammenligne hvilke oppgaver som var diskutert for hvert intervju kunne jeg se hvilke oppgaver som kunne sammenlignes fra pre- og posttest. Dette kunne gi innblikk i forståelse mellom annet gjennom om elevene endret svarene sine. Det ble valgt ut 3 oppgaver for hver elev, som gav mulighet for innsikt i forskjellige deler av forståelse for areal.

Under analysearbeidet ble oppgavene som var valgt ut organisert gjennom hvem som snakket, og hva de sa med nonverbal kommunikasjon i parentes, der interessante deler ble fargekodet (bilde 2). Uttalelsene til eleven ble uthevet i gult, mens nonverbal kommunikasjon ble uthevet i grønt. Den nonverbale kommunikasjonen var en annen farge for å skille den fra tale da den ikke var en «ny» interessant uttalelse, og for å signalisere at den viste hvorfor det som ble sagt var interessant.



Posttest:

M: Der tegnet jeg først sånn, men så kom jeg på at det går jo bare an å gange de to sammen, så da gjorde jeg det istedenfor. (Peker først på rektangelet som hun har delt inn i ruter ved bruk av hele linjer, 4 ruter for bredden, og 6 ruter for lengden. Peke så på tallene for lenge og bredde: 3 og 5)

I: Okei, så du prøvde først å tegne? Men hvorfor gikk ikke det?

M: Fordi jeg klarte ikke å tegne det med like store mellomrom. (Peker på en rutene inni rektangelet)

I: Okei. Hvordan fant du ut at du ville tegne opp med fire ruter oppover og seks ruter bortover? (Peker på de fire rutene tegnet inn for høyden, og de seks som er tegnet inn for bredden)

M: Jeg tok en cm imellom og tegnet med linjalen (Peker på en av linjene opptegnet)

I: Hvorfor valgte du å bruke cm på linjalen?

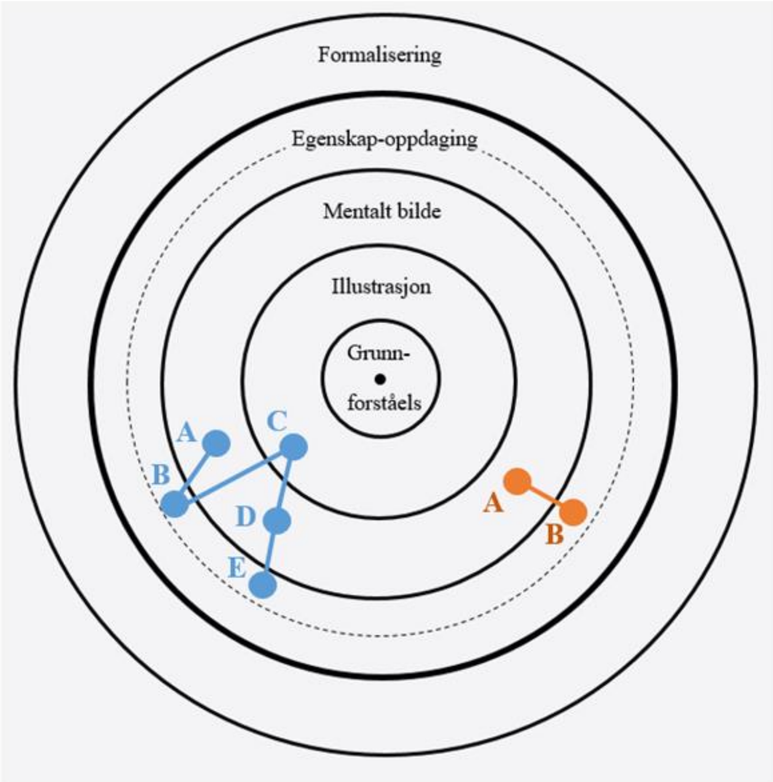
M: Fordi det står cm der (Peker på «cm» som står bak tallene for lengde og bredde)

I: Okei. Tror du de tallene som står på siden som du brukte for å regne arealet har noe å si for de rutene inni? (Peker på tallene satt opp for lengde og bredde for rektangelet)

M: Nei. Eller, jeg er ikke sikker.

Bilde 2: Fargekoding av intervjusekvens.

Uthevelsene ble videre vektlagt under analysen, der analysearbeidet foregikk ved en bevegelse mellom transkripsjon, teori, modell og drøfting. Prosessen var preget av en fortolkende tilnærming med en systematisk søken etter mening og sammenheng i det elevene uttalte ved bruk av det «nye» analyseverktøyet med teorier og modell for å få innsikt i deres forståelse. Verbene for «handling» og «uttrykking», og arealforståelse og geometriforståelse knyttet opp mot nivåene for aktiviteter i Pirie og Kieren sin modell, ble brukt for å få innsikt i hvilke aktiviteter elevene uttrykte. Dette viste hvilke nivå elevene arbeidet på, og identifiserte mulige forståelser elevene uttrykte. For hver del som ble analysert og identifisert med et nivå ble det markert (A), (B) osv. i teksten for å vise rekkefølge på aktiviteer som ble uttrykt, der A illustrerte den første aktiviteten eleven benyttet, B den neste osv. Bokstavene ble markert i modellen for å vise hvilke nivå elevene benyttet. Dette dannet et bilde over elevenes bevegelse og forståelse, som tydeliggjorde analysearbeidet. Modell 5 under viser eksempel på dette, der pretesten er markert i blått og posttesten i oransje:



Modell 5: Malins bevegelse for pre- og posttest oppgave 4.

4.5. Etiske overveielser

Forskningen innebar nær kontakt mellom forskere og deltakere, og dette reiste noen etiske overveielser gjennom arbeid med datainnsamling. Disse vil i det videre bli presentert og vurdert.

4.5.1. Godkjenning, informert frivillig samtykke, og behandling av datamateriale

Røsseland sin undersøkelse for hennes doktorgrad var allerede meldt opp og godkjent av *Personvernombudet for forskning* ved Norsk Samfunnsvitenskapelig Datatjeneste (NSD). Da vi masterstudenter kom inn i prosjektet ble det sendt ny søknad til NSD for prosjektets omfang, for å inkludere oss i forskningsprosjektet. Denne ble godkjent (Vedlegg 6).

Deltakerne for prosjektet deltok gjennom informert frivillig samtykke. Lærerne hadde mottatt informasjon om prosjektet og hva deltakelsen innebar, der foresatte hadde godkjent deres barns deltakelse. Alle parter ble orientert om at de kunne trekke seg, eller sitt barn, fra undersøkelsen når som helst uten konsekvenser.

Datamaterialet ble behandlet med et etisk bevisst ansvar for sikker lagring og rett gjengivelse. Datamaterialet ble håndtert i tråd med personopplysningsloven, der sikker lagring av datamaterialet og personopplysninger ble gjort i tråd med NSD sine retningslinjer. Forskningsmaterialet ble behandlet konfidensielt der anonymiteten til enkeltpersoner ble ivaretatt gjennom anvendelse av fiktive navn. Det ble også tatt hensyn til at dialekt kan identifiseres, og transkripsjonene er på standardisert skriftspråk for at ikke dialekt skal avsløre område for datainnsamling. Videre ble datamaterialet gjennomgått flere ganger for å sikre rett gjengivelse i overgangen fra tale til skrift. Dette er ifølge Kvale, Anderssen, og Rygge (1997, s. 69) viktig da det er et etisk krav i forhold til vitenskapelig kvalitet at datamaterialet er nøyaktig.

4.5.2. Etiske overveielser rundt elever

Det ble foretatt etiske overveielse for om elevene skulle få tilbakemelding på pretestene de gjennomførte, eller ikke. Ifølge §3-1 *Rett til vurdering* i Opplæringsloven (2009) har elever rett til underveisvurdering på sitt arbeid. Lærer har en etisk forpliktelse til å gi elevene dette. Det ble imidlertid bestemt at elevene ikke skulle få tilbakemelding, da dette kunne forstyrre for forskningens videre løp. Elevers viten om resultater fra pretesten ville kunne påvirket posttesten. Elevene kunne husket hva som var rett og galt, istedenfor å stole på sin egen forståelse av areal og svart i tråd med hva de hadde lært gjennom undervisningen. Dette var også et etisk problem for intervjuene, da elever gjerne er vant med å få tilbakemeldinger på uttalelser. Denne forpliktelsen ble imidlertid noe unngått ved å klargjøre intervjuets hensikt for elevene.

Det var lite konsekvenser av å delta i forskningen. Forskningen hadde ikke noen konsekvenser for elevenes videre utdanning, og deltakelsen gled inn i deres vanlige skolehverdag. Det kan allikevel ha vært mulige små belastninger for elevene. Elever opplever allerede mye testing i skolen, og forskningens tester økte dette tallet. Intervjuene kunne også være litt belastende for de lavtpresterende elevene. Det er mulig elevene følte ubehagelig ved å måtte forklare hva de hadde gjort i oppgaver uten å få tilbakemelding på sine uttalelser, når de «visste» at de muligens ikke hadde gjort det best i klassen. Elevene fikk imidlertid mulighet til å dele sin kunnskap med sine ord, med støttende kommentarer fra intervjuer, noe som kan ha vært med på å gjøre denne situasjonen mindre belastende.

4.6. Undersøkelsens reliabilitet og validitet

Oppgavens reliabilitet og validitet vil her vurderes. Ifølge Thagaard (2013, s. 201-206) går dette ut på å vurdere om forskningen er gjennomført på en pålitelig måte og om datamaterialet som kommer frem er relevant og gyldig. Det videre vil vurdere dette, sammen med styrker og begrensninger ved forskningsmetode og datamaterialet.

Pre- og posttestene for areal var identiske gjennom prosjektet. Dette kan ha virket negativt da elevene kunne husket spørsmålene til posttesten. For å minske denne innvirkningen fikk imidlertid ikke elevene tilbakemelding på pretestene. Elevene ble da i stor grad nødt til å stole på seg selv og sine kunnskaper når de utførte posttesten, som igjen gav et mer reelt bilde av deres forståelse. Elevene fikk heller ikke vite at testen de startet med før undervisning skulle utføres etter undervisning. Disse valgene er med på å øke reliabilitet i datamaterialet da elevens forståelse ikke har blitt påvirket av viten om rette og gale svar. Videre gjorde identiske tester det mulig å sammenligne resultatene fra testene. Jeg brukte ikke testene som hovedgrunnlag for tegn på forståelse, men at testene var identiske var relevant for oppgavens fokus da dette gjorde det mulig å vurdere om elevens forklaringer og refleksjoner hadde endret seg i læringsprosessen.

Det er imidlertid noen begrensninger ved testen generelt, og på enkeltoppgaver, som må fremheves. Av enkeltoppgaver vil jeg trekke frem oppgave 8 og 4 (vedlegg 2). Tallene oppgitt i cm for lengde og bredde i oppgave 8 samsvarer ikke med lengdene i figuren om det måles med linjal. Dette ble gjort for å få innsikt i om elevene klarte å se relasjonen mellom tall og antall enheter langs en sidelinje, men oppgaven kan ha skapt forvirring da den ikke gav noe signal om at målene oppgitt ikke var rett i forhold til lengdene. I virkeligheten ville det heller ikke blitt oppgitt på denne måten om lengdene ikke samsvarer med tallet som var oppgitt. Det ville vært oppgitt i målestokk. Videre kan oppgave 4 kritiseres, som er delt opp i ruter av forskjellig størrelse der rett svar er at det er umulig å finne arealet. Dette kan skape vranglære da det gir inntrykk om at det ikke er mulig å finne areal fordi en figur er delt inn i ruter av ulik størrelse. Det er faktisk mulig å finne areal ved å måle lengdene. Dette leder videre til den generelle kritikken av testen. Oppgavene var basert på en teoretisk «skolematematikk», der hverdagsrettet kunnskap med praktisk matematikk ikke var inkludert. Dette kan bygge opp under en statisk forståelse av utregning av areal.

Testen skapte, sammen med situasjon, begrensninger i hvilken forståelse det var mulig å få innsikt i. Testen gav innsikt i en forståelse for «skolematematikk», der resultatene var innhentet i en «skolesituasjon» som Mellin-Olsen beskriver som:

> Jeg har funnet ut hvordan de gir uttrykk for sine kunnskaper i en bestemt situasjon; i et klasserom, med en lærer, i en skole, det hele bestemt ut fra en rekke rammefaktorer hvor de tar det for gitt at de skal opptre slik og slik. (Mellin-Olsen, 1977, s. 37)

Situasjon og testene gjorde på denne måten at det ikke var mulig å få innsikt i forståelse av areal som er hverdagsrettet.

Intervjuene ble gjennomført av flere medforskere. Våre forskjellige personligheter kan ha påvirket elevenes svar eller åpenhet under intervjuene. Den semistrukturerte intervjuguiden, testene og oppsett av intervjusituasjon var imidlertid med på å gi retning og minske store variasjoner mellom intervjuerne. Thagaard (2013, s. 203) trekker frem at en forsker ikke klarer å opptre likt i enhver situasjon, og fremtrer forskjellig i kontakt med forskjellige personer. At det var flere intervjuere hadde dermed ikke så mye å si, da en og samme person allikevel ikke ville forhold seg likt gjennom intervjuforløpet. Videre beskriver Thagaard (2013, s. 203) at reliabiliteten må knyttes opp mot at det gjørs rede for fremgangsmåter i prosjektet. Åpenhet rundt intervju og situasjon skaper dermed reliabilitet for oppgaven.

En mulig begrensning i forhold til datamaterialet var intervjuers evne til å få eleven til å forklare og fremlegge sin forståelse. Intervjuene fikk ikke med mer av elevenes forståelse enn det som ble spurt etter. Elevene kan ha sittet inne med mer kunnskap som de ikke fikk vist. Videre kunne spørsmål i intervjuet begrense innsikt i forståelsen. Intervjuer spurte eksempelvis en gang «hva ville du ha telt nå», som gjorde at eleven ikke fikk mulighet til å si at han ville telt for å finne areal. Intervjuerne hadde imidlertid den semistrukturerte intervjuguiden til hjelp for å få elevene til å tydeliggjøre sin forståelse rundt oppgavene, og for å unngå spørsmål som begrenser innsikt.

Intervjuene og testene som ble gjennomført fanget inn mer enn det elevene lærte i selve undervisningen. Elever får hjelp fra foreldre, har hjemmelekser og blir ellers utsatt for påvirkning utenfor skolen. Alle disse faktorene spiller inn på elevers forståelse. Da jeg ikke skulle undersøke eller måle om variasjonsteori var bedre enn andre undervisningsmetoder, vil disse faktorene være mindre relevant for påliteligheten til forskningen. Det må imidlertid nevnes at elevers forståelse påvirkes av flere faktorer, da jeg så på om det var spor i forståelsen som kunne knyttes til variasjonsteori.

Undersøkelsene som ble gjennomført er relevant for oppgavens fokus, og resultatene er representative for det som forskes på. Oppgavens fokus gav retning for både teorigrunnlag og metodevalg. Metoden gav data med mulighet for innsikt i elevenes forståelse av areal, der intervjuene lot elevene få forklare sin tankeprosess. Resultatene ble videre utviklet gjennom en analyse av elevenes utsagn, der teori rund forståelse åpnet for å få innsikt i elevenes forståelse.

Oppgaven har vist åpenheten rundt valg tatt i forhold til teoretisk forankring, metode og analysearbeid, som gjør forskningsprosessen transparent. Thagaard (2013, s. 202) refererer til Silverman (2011) sine beskriver om at dette er med på å styrke oppgavens reliabilitet. Jeg har videre vært åpenhet rundt vitenskapsteoretisk forskningssyn, som dannet grunnlag for valg som ble gjort. Denne åpenheten gjør det mulig for andre å ta i bruk samme metoder, og rekonstruere forskningen. Om resultatene ville blitt like er imidlertid uvisst, da disse også avhenger av ytre faktorer, som elevers forkunnskaper og villighet til å uttrykke sin forståelse. Thagaard (2013, s. 202) henviser til Seale (1999) og trekker frem dette ved å beskrive at det gjennom kvalitative studier er vanskelig å oppnå repliserbarhet. Forskningen vil derfor også være vanskelig å generalisere. Denne studien brukte et begrenset antall elever, og deres personlige forutsetninger spilte inn. Studien har da ikke ekstern validitet, som ifølge Seale (1999) referert av Thagaard (2013, s. 205) går ut på at funnene vil være gyldige i andre sammenhenger. Målet var imidlertid ikke å kunne presentere en sannhet for hvordan forståelsen til lavtpresterende elever på 5. trinn er, men søke innsikt i mulige måter å forstå og tenke om areal på for lavtpresterende elever, og hvordan forståelse kan være dynamisk i en læringsprosess.

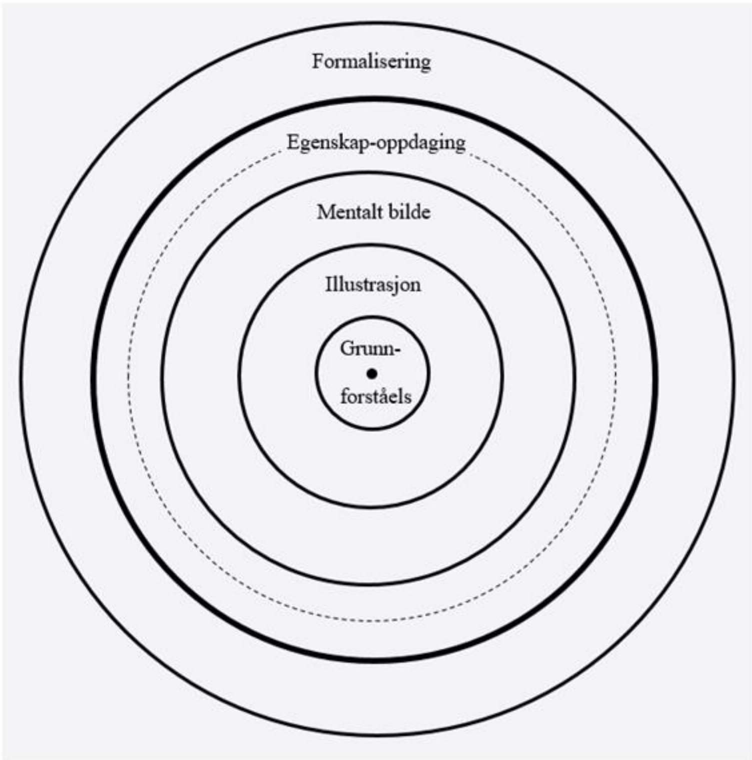
Oppgaven har reliabilitet gjennom at datamaterialet er tilgjengelig som vedlegg, samt gjennom at datamaterialet er utviklet og delt av flere parter. Datamaterialet ble utviklet av flere medforskere og var tilgjengelig for alle deltakere i det felles prosjektet. Samarbeid mellom flere forskere kan ifølge Thagaard (2013, s. 203) stryke reliabiliteten til oppgaven. Videre trekker Norsk Samfunnsvitenskapelige Datatjeneste (2015) og De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene (2015) frem deling av data som positivt. Det poengteres at deling av vitenskapelige data representerer gode muligheter for forskning i Norge, der deling kan fungere positivt i den forstand at «forskninger fungerer kumulativt» og det blir «bedre muligheter til å sammenstille data på nye måter, økt gjennomsiktighet i prosessen, økt samarbeid, etterprøvbarhet, økt innovasjon i næringslivet, økt effektivisering og utnytting av offentlige midler» (De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene, 2015). Videre ligger datamaterialet tilgjengelig som vedlegg, som gir mulighet for en tredjepart å sjekke analyse og diskusjon, og vurdere datamaterialets validitet.

4.7. Oppsummering

Kapittelet presenterte først den felles forskningen som dannet grunnlag for min studie. Her dannet variasjonsteori, med pre- og posttester for å identifisere kritiske aspekter og variasjonsmønster, grunnlaget i undervisningen. Videre ble min studie beskrevet, der metodevalg først ble presentert. Kvalitativ metode med intervju ble valg for å få innsikt i elevers forståelse, da de åpner for fyldige data der elever kan fortelle hvordan de reflekterer i regneprosesser. Kvantitative pretester ble valgt for utvelgelse av elever, samt som grunnlag for intervjuinnhold. Utvelgelsen av lavtpresterende elever ble beskrevet, med en videre utdyping av intervjusituasjon, og intervjumetode med semistrukurert intervjuguide og pre- og posttester. Videre ble det presentert hvordan de kvantitative og kvalitative data ble behandlet. Analysearbeidet ble forklart gjennom en utgreiing om hvordan den «nye» modellen og teorien for arealforståelse dannet grunn for hvordan intervjuene ble undersøkt, for å få innsikt i elevenes forståelse av areal. Til slutt fulgte en redegjørelse av etiske overveielser, og oppgavens reliabilitet og validitet for å klargjøre styrker og begrensninger i oppgaven.

5. Undersøkelsens resultater og drøfting

Oppgavens fokus er å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess. For å få innsikt i dette er det «nye» analyseverktøyet, med modell (modell 4) og teori for utvikling av arealforståelse, presentert i kapittel 3.5., brukt som grunnlag for drøfting av elevintervjuene.



Modell 4: «ny» modell for utvikling av arealforståelse.

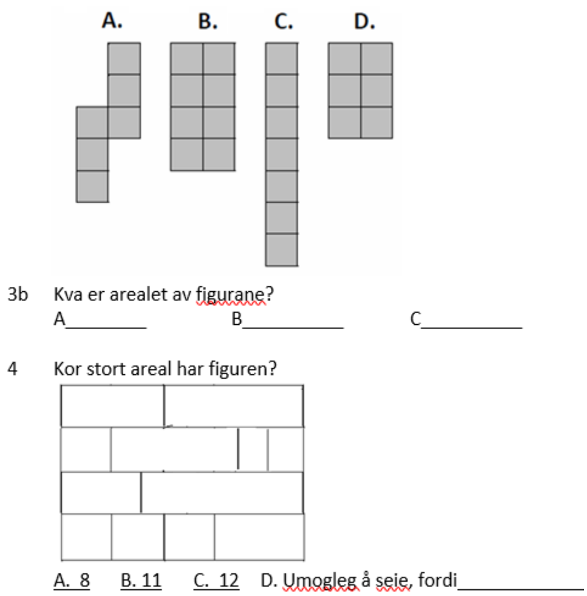
Det er valgt ut oppgaver som gir mulighet for innsikt i forståelse på forskjellige nivåer. Oppgaven det diskuteres rundt vises i starten av hvert delkapittel, og for noen oppgaver er også den foregående oppgaven inkludert da elevene i noen tilfeller refererer til disse. For hver oppgave presenteres intervju fra pre- og posttest, som drøftes i forhold teori som bygger på Piaget et a., van Hiele og Pirie og Kieren sine beskrivelser. Elevenes uttalelser knyttes opp mot aktiviteter på nivåer i modellen for arealforståelse. Det vil tydeliggjøres hvilke aktiviteter elevene foretar ved bruk av verbene for «handling» og «uttrykking»: lage/vurdere (illustrasjon), se/fortelle (mentalt bilde), forutsi/registrere (egenskap-oppdaging) og bruke/forsvare (formalisering). Disse markeres med kursivering i teksten. Elevens bevegelse tar utgangspunkt i deres uttalelser, og for å å illustrere bevegelsen mellom nivåene vil det brukes bokstaver i teksten: (A), (B), (C) osv. Bokstavene brukes for å vise elevenes bevegelse visuelt ved å plassere dem i modellen, der (A) vil være den første aktiviteten eleven uttrykker. Modellen er presentert til slutt for hvert delkapittel.

Gjennom forskningsspørsmålene undersøkes det om elevers forståelse er relasjonell eller instrumentell, og hvordan dette kommer til uttrykk, og om det finnes spor i forståelsen som kan knyttes til variasjonsteori, og eventuelt på hvilken måte. Hvordan elevers forståelse er relasjonell eller instrumentell er vurdert gjennom analysen for både pre- og posttesten for hver av oppgave. Videre er funn rundt elevenes forståelse vurdert opp mot variasjonsteori under eget kapittel i slutten for hver elev. Her er det sett nærmere på hvilken forståelse elevene har utviklet i forhold til de kritiske aspektene i variasjonsteori, som dannet grunnlaget for undervisningen. De kritiske aspektene for areal er blant annet: «oppfatte at måleenhetene må være like store», «finne areal når det er halve ruter», «Prikkarkfigur: Elever tror areal er det som er i midten, og teller da antall prikker i midten», «finne areal uten å telle ruter» og «koble antall ruter med lengdemålene langs kantene» (Se vedlegg nr. 1 for alle kritiske aspekter i areal).

5.1. Elev: Malin

Av oppgavene Malin uttaler seg om er det tatt utgangspunkt i oppgave 4, 8, og 9 for å få innsikt i hennes utvikling og forståelse av areal. I samtalesekvensene er intervjuer forkortet med I, og Malin forkortet med M.

5.1.1. Oppgave 4



Bilde 3: Oppgave 3b og 4 fra test i areal.

Intervju tilknyttet pretest:

M: Er det det som er inni? (Holder en blyant over rutene inni figuren på oppgave 4).

M: Det er det som er inni.

I: Mhm.

M: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. 12? (Bruker blyanten til å peke på rutene mens hun teller).

I: Mhm.

M: Det er det på denne. Men om jeg skulle gjort som på den andre oppgaven så måtte jeg ha delt dem opp i lik. (Refererer til oppgave 3b. Holder blyanten over ruten nede i høyre hjørne av figuren og simulerer at den deles vertikalt i to).

I: Du ville da delt de opp likt.

M: Ja, eller så bare har jeg den sånn som den er og da blir det 12.

M: For hvis jeg hadde delt det opp så hadde ikke det gått for noen av de der. (Peker på svaralternativene for oppgave 4).

I: Nei. Hva kunne du ha svart da da? Det blir mer enn 12?

M: Mhm.

I: Eller mindre enn 12?

M: Da blir det mer.

I: Så hvis D hadde vært rett, hva ville du ha sagt der da? (Peker på svaralternativ D).

M: Fordi.. De har, de har ikke like stort mellomrom. Eller.. noe sånt.

I: Ja, si det en gang til. Si det høgt en gang til du.

M: Fordi at hvis du deler de opp så blir det mange flere ruter en hvis du har det sånn som det. (Vifter blyanten over ruten oppe i høyre hjørnet av figuren og simulerer fort at den blir delt).

Malin starter med å si at det er det inni figuren som er arealet. Hun teller så alle rutene inni figuren, én etter én, og kommer frem til at det er 12. Vider legger hun på at det er slik for denne figuren, men at om hun skulle gjort som i oppgave 3b så måtte hun delt rutene opp likt. Malin simulerer at den store ruten nede i høyre hjørnet deles i to ruter. Intervjuer repeterer at Malin ville delt rutene opp likt. Malin sier at hun ville det, eller bare beholdt de som de er. Hun påpeker at om hun hadde delt opp rutene ville ingen av svaralternativene med tall vært riktige da hun ville fått mer. Intervjuer spør hva hun ville svart om svaralternativ D var riktig (umulig å si). Malin sier først at det er fordi rutene ikke har like store mellomrom, og så endrer hun svaret noe med å si at det er fordi det blir flere ruter hvis rutene deles opp.

Malin sier at arealet er «det som er inni» og teller rutene inni figuren «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. 12?». Hun *forteller* eksplisitt at areal er området inni en figur, for så videre å telle rutene inni figuren. Det Malin forteller kan tolkes til at hun *ser* en sammenheng mellom ruter og areal og *ser* at enhetene inni figuren representerer størrelsen. Dette viser at Malin har et mentalt bilde over hva areal er (A).

Videre begynner Malin å dra svaret i tvil da hun sier at «det er det på denne», men at hun selv ville delt rutene «opp i lik». Malin *registrerer* at enhetene er av forskjellig størrelse og *forutser* at dette kan ha noe å si. Hun sier så «om jeg skulle gjort som på den andre oppgaven». Dette kan tolkes til at Malin har startet en analyse av oppdelingen av ruter i figuren gjennom en sammenligning mellom bildet fra dette problemet med problemet i oppgaven før (3b) der enhetene var like. Hun gir uttrykk for at rutene muligens skal være like, og antyder at hun *forutser* at enheter må være av samme størrelse. Dette tyder på at Malin arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (B).

Malin viser hvordan en av rutene burde deles opp da hun «holder blyanten over ruten nede i høyre hjørne av figuren og simulerer at den deles i to». Malin prøver å *lage* ruter inni figuren som er av samme størrelse. Hun simulere hvordan hun måtte ha «delt dem opp i lik» og *vurderer* visuelt at noen ruter er større enn andre. Malin illustrerer problemet, og sine egne tanker for å løse problemet, og arbeider på et nivå for illustrasjon (C).

Malin *forteller* videre at «eller så har jeg den bare sånn som den er og da blir det 12». Malin åpner for muligheten for at figuren er rett, noe som kan tolkes til at hun viser usikkerhet rundt om det er så nøye at enhetene skal være like. Hun poengterer også at «For hvis jeg hadde delt det opp så hadde ikke det gått for noen av de der» og peker på svaralternativene. På et nivå for mentalt bilde har elever problemer med å se at enheter må være like store, og da hun viser usikkerhet rundt dette forflytter hun seg over til nivå for mentalt bilde igjen (D). Det kan imidlertid være at Malin tilpasser sitt svar ut ifra svaralternativene som er gitt, der hun leter etter hint i oppgaveteksten og andre oppgaver. Malin resonerer ut ifra alternativene at det må være 12 ruter eller «ikke mulig å si». Dette fordi det er 12 ruter i modellen, men om det skal være like ruter som i oppgave 3b må rutene være mindre og det vil gi flere ruter, og da er D rett. Dette kan ha grunn i viten og hvordan oppgaver i skolen blir formulert, der det ofte er underliggende hint om hva som er rett.

På spørsmål om hvorfor hun ville sagt at «D: umulig å si» ville vært riktig gir hun to svar. Ut ifra dialogen svarer Malin først at det er fordi «de har ikke like stort mellomrom». Dette viser at Malin *forutser* at rutene ikke kan telles som likeverdige fordi de ikke er av samme størrelse, og arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (E). Når Malin skal gjenta hvorfor hun mener at D er riktig endrer hun imidlertid svaret sitt til «hvis du deler de opp så blir det mange flere ruter». Malin går vekk fra den oppdagede egenskapen igjen, og det kan tolkes at hun sier at det er umulig å si fordi antallet ruter ikke er riktig. Dette kan tyde på at hun ikke helt har *registrert* egenskapen ved enheter som sann. Videre kan det tolkes at Malin har *registrert* at rutene må være mindre, som da ville gitt flere ruter inni figuren. Hun har allerede foretatt sammenligninger mellom rutene i dette problemet mot rutene i oppgave 3b. Der er rutene mindre, og dette kan signalisere at rutene også burde være mindre i oppgave 4. Om dette er tilfellet arbeider Malin fortsatt på et nivå for egenskap-oppdaging da hun sammenligner egenskaper mellom ruter, men hun kan da ha oppdaget en egenskap om at enheter må være en viss størrelse for å kunne representere et areal, og ikke at de nødvendigvis må være like store.

Intervju tilknyttet posttest:

M: Der skulle vi telle hvor stort arealet er.

I: Og da har du svart at det ikke er mulig. Hvorfor.

M: Fordi de er ikke like store mellomrommene (Peker på rutene inni figuren som er av forskjellige størrelse).

I: Har det noe å si?

M: Ja. Fordi at en så stor med en mindre, da går det ikke. Da blir det ikke likt. Og da kan du ikke telle. Kan ikke finne arealet. (Peker på en stor rute i figuren og en mindre rute).

Malin forteller at de skal telle arealet, men at det ikke er mulig fordi mellomrommene ikke er av samme størrelse, og henviser da til rutene inni figuren. Videre sier hun at dette har noe å si da de store rutene ikke går sammen med de mindre rutene. Hun avslutter med å si at hun ikke kan telle rutene, og dermed ikke finne arealet.

Malin sier at en kan «telle hvor stort arealet er». Dette kan tolkes til at hun *forteller* at ruter inni en figur er noe som kan telles for å finne areal, som vil si at antallet ruter representerer arealet for en figur. Ved å fortelle dette viser Malin at hun har et mentalt bilde av hva areal er, og at hun *ser* at enhetene inni en figur representerer størrelsen (A).

Malin sier videre at det ikke er mulig å si hvor stort arealet er fordi figuren ikke har «like store mellomrom». Dette kan tolkes til at Malin har *registrert* at enheter må være like store for å kunne representere et areal. Dette presiserer hun enda tydeligere ved å kommentere at «en så stor med en mindre, da går det ikke». Videre sier Malin at om enhetene ikke er like «kan du ikke telle» og dermed «ikke finne arealet». Dette kan tolkes til at Malin *forutser* at enheter som ikke er av samme størrelse ikke kan telles som likeverdige og ikke kan representere et areal. Dette viser at Malin arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (B).

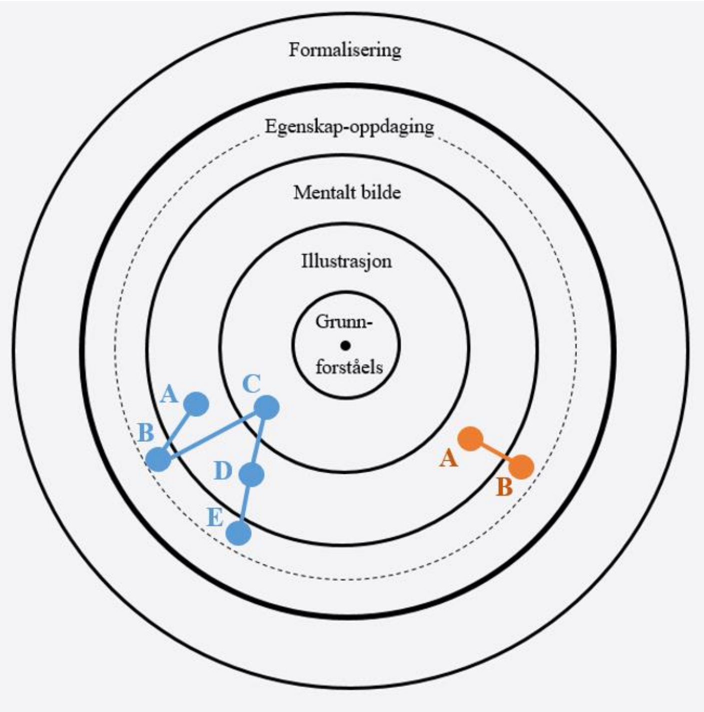
Sammenligning:

I pretesten teller Malin først enhetene inni figuren som likeverdige, og kommer frem til at arealet for figuren er 12. Hun viser imidlertid en begynnende oppdaging av egenskaper for enheter der hun kommenterer at rutene er av forskjellig størrelse og at om hun skulle tegnet det selv ville rutene vært av samme størrelse. Malin forutser at enheter må være av samme størrelse. Dette uttrykker hun også eksplisitt. Malin er imidlertid usikker på dette og gir uttrykk for at hun tror at det kan være umulig å finne areal fordi det skulle vært flere enheter inni figuren, delt inn som i oppgave 3b. Det at Malin går frem og tilbake betyr ikke at hun skifter meninger hun kommer med, men at hun bruker aktiviteter på forskjellige nivå for å utvikle forståelse for problemet, og for å utforske sine egne tanker.

I posttesten arbeider Malin på et nivå for egenskap-oppdaging da hun nå har registrert at enheter av forskjellig størrelse ikke er likeverdige, og at enheter må være av samme størrelse for å kunne telles. Da enhetene til figuren ikke går sammen med disse egenskapene gir hun uttrykk for at det er umulig å vurdere hva arealet for figuren er. Malin har nå funnet svar i usikkerheten hun viste i pretesten, og har ikke behov for å gå frem og tilbake i modellen for å undersøke sine egne tanker.

Det ser ut for at Malin har en relasjonell forståelse både under arbeid med pretesten og posttesten. Under pretesten og posttesten ser hun relasjoner mellom enheter og helheten, og forstår at enheter kan telles og representere arealet. På pretesten bruker Malin aktiviteter på flere nivåer for å finne sammenhenger for enheter, noe som kan tyde på at hun er i gang med å utvikle en relasjonell forståelse for enheters størrelse. Det ble imidlertid problematisert om Malin foretar en resonering av spørsmålet og prøver å finne hint som kan gi rett svar. Dette kan tolkes til en instrumentell arbeidsmetode, der hun muligens ikke benytter relasjonelle vurderinger av oppgavens elementer.

På posttesten har Malin dannet en forståelse for at enheter må være av samme størrelse. Det kan antas at forståelsen er relasjonell da hun var i gang med utforskningsarbeid i forhold til enheters størrelse under pretesten, og har registrert at enhetene er av forskjellig størrelse og ikke kan telles.

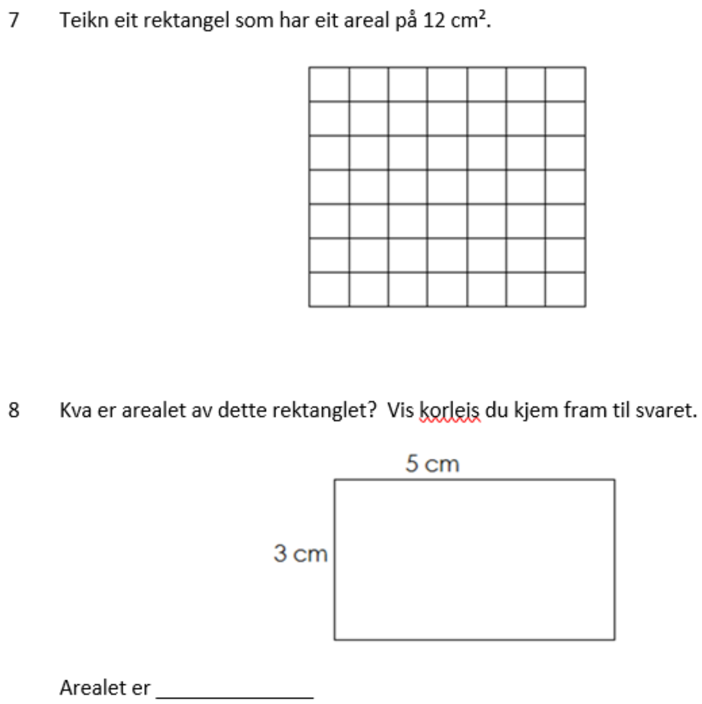


Modell 5: Malins bevegelse for pre- og posttest oppgave 4.

Pretesten er illustrert i blått. Malin viser at hun har et mentalt bilde av hva areal er (A), og begynner å forutse hvordan størrelsen til enheter har betydning gjennom sammenligning av ruter til figurer og arbeider på nivået egenskap-oppdaging (B). Videre illustrerer hun problemet (C). Malin forteller så at enhetene kan telles sånn som de står, og arbeider på et nivå for mentalt bilde (D). På spørsmål om hvorfor svaralternativ D kan være rett svarer hun først at enhetene ikke har like store mellomrom, men sier så at det blir flere enheter enn det som er tegnet opp. Her arbeider Malin på et nivå for egenskap-oppdaging (E).

Posttesten er illustrert i oransje. Malin viser at hun har dannet seg et mentalt bilde av areal (A), og at hun arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging da hun har registrert at enheter er nødt til å være like store (B).

5.1.2. Oppgave 8



Bilde 4: Oppgave 7 og 8 fra test i areal

For oppgave 8 står det at bredden er 3 cm og lengden er 5 cm. Det må imidlertid påpekes at i printet versjon var figuren større, der linjalen viste nesten 6 cm for lengden og nesten 3,5 cm for bredden. At tallene oppgitt og lengdene i figuren ikke stemte overens var for å skape mulighet for innblikk i om elevene så sammenhenger mellom tall og antall enheter langs en sidelinje.

Intervju tilknyttet pretest:

M: Da kan du ta og dele det opp i sånne ruter (Tar blyanten og linjalen. Legger linjalen loddrett over figuren).

I: Mhm. Du kan bare gjøre det du.

M: (Tegner inn 5 loddrette streker, slik at det blir 6 enheter i lengden).

M: Og så bortover (Snur linjalen og tegner 3 vannrette linjer, slik at det blir 4 enheter i bredden).

M: Og så teller du hvor mange det blir.

I: Mhm. Hvordan tenker du når du vet hvor mange mellomrom du skal ha?

M: Da ser du det på den oppe for den er jo.. (Tar linjalen og legger loddrett over figuren, slik at den når fra oppgave 8 og opp til oppgave 7 over. Linjalen ligger nå inntil en av de loddrette linjene på figuren for oppgave 8 og for oppgave 7).

M: og da blir det sånn akkurat når de tallene begynner. (Stryker fingeren langs tallrekken for cm på linjalen).
I: Okei, så du så rett og slett på den figuren over? Mhm.

Malin forteller at hun delte rektangelet opp i «sånne ruter» for å finne arealet. Hun delte rektangelet inn i 5 streker loddrett (6 enheter for lengden), og 3 streker vannrett (4 enheter for bredden). Deretter forteller hun at enhetene kan telles for å finne ut hvor mange det er. Når Malin blir spurt om hvordan hun fant ut hvor mange mellomrom hun skulle tegne sa hun at da kan en bare se på figuren over. Dette demonstrerer hun ved å legge linjalen loddrett over rektangelet slik at den når opp til den andre figuren. De loddrette strekene fra figuren i oppgave 7 er da ca. likt med de loddrette streker for rektangelet i oppgave 8. Videre viser Malin til tallene langs cm på linjalen og sammenligner de med linjene for bredden i oppgave 7, og bruker dette for å begrunne hvordan hun fant ut hvor mange linjer bredden til figuren i oppgave 8 skulle deles opp i. Til slutt påpeker hun at rutene hennes ble litt større enn de i figuren for oppgave 7.

Malin starter med å si at «Da kan du ta og dele det opp i sånne ruter», og tegner inn loddrette og vannrette linjer i rektangelet. Malin sier at hun *lager* ruter inni rektangelet, som kan tolkes til at hun *vurderer* at problemet kan løses ved å bruke mindre ruter for å dekke den større figuren. Da Malin *lager* og *vurderinger* visuelt at ruter kan plasseres inni figuren arbeider hun på et nivå for illustrasjon (A).

Malin sier videre at «så teller du hvor mange det blir». Malin *forteller* at enheter er noe som kan adderes sammen for å finne arealet, som kan tolkes til at hun *ser* hvordan enheter representerer helheten. Dette tyder på at Malin har et mentalt bilde over hva areal er (B).

På spørsmål om hva som avgjorde hvordan Malin delte opp rektangelet svarer hun «da ser du det på den oppe». Malin sier at hun ser på figuren i oppgaven over for å avgjøre hvor mange linjer som skulle tegnes inn. Dette kan tolkes til at Malin foretar en analyse av figurene i oppgavene gjennom en sammenligning for å løse problemet. Hun har muligens oppdaget geometriske egenskaper ved figurene, og *registrerer* at formen og størrelsen til figurene ligner på hverandre, og velger å ta utgangspunkt i oppgave 7 for å løse oppgave 8. Malin viser dette og plasserer linjalen langs de loddrette linjene i oppgave 7 og forlenger disse slik at de går over figuren i oppgave 8. Hun sier videre at hun benyttet cm på linjalen for å dele opp bredden gjennom å peke på cm på linjalen og si «sånn akkurat når de tallene begynner». Det kan tolkes at da det står «3» for bredden velger Malin å bruke dette som indikasjon på hvor mange streker som skal tegnes, men hun sier selv at hun bruker tallene på linjalen, som kan tolkes til en inndeling i cm, for å beregne hvor mange linjer bredden skulle deles i. Da Malin velger å dele rektangelet i oppgave 8 opp i et rutenett som ligner det i oppgave 7 viser det at hun muligens har foretatt en analyse av rutenettet og *registrert* egenskaper ved rutene som hun ser på som viktige. At hun bruker rutenettet viser også at hun *forutser* at egenskapene ved dette rutenettet kan brukes for å løse oppgave 8 da figurene gjennom sammenligning ligner på hverandre. Det kan tolkes at Malin sammenligner to figurer, og bruker egenskaper fra den ene for å løse et annet problem, noe som viser at hun arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (C).

Ut ifra analysen ser det ut for at Malin har en relasjonell forståelse da hun ser hvordan enheter relaterer seg til arealet gjennom at enhetene kan telles og representere størrelsen. Videre viser Malin at hun relaterer to figurer opp mot hverandre og bruker egenskaper ved den ene til å løse oppgaver i den andre, som viser at forståelsen er tilpasningsdyktig.

Intervju tilknyttet posttest:
M: Der tegnet jeg først sånn, men så kom jeg på at det går jo bare an å gange de to sammen, så da gjorde jeg det istedenfor. (Peker først på rektangelet som hun har delt inn i ruter ved bruk av hele linjer, 4 ruter for bredden, og 6 ruter for lengden. Peke så på tallene for lenge og bredde: 3 og 5)
I: Okei, så du prøvde først å tegne? Men hvorfor gikk ikke det?
M: Fordi jeg klarte ikke å tegne det med like store mellomrom. (Peker på en rutene inni rektangelet)
I: Okei. Hvordan fant du ut at du ville tegne opp med fire ruter oppover og seks ruter bortover? (Peker på de fire rutene tegnet inn for høyden, og de seks som er tegnet inn for bredden)
M: Jeg tok en cm imellom og tegnet med linjalen (Peker på en av linjene opptegnet)
I: Hvorfor valgte du å bruke cm på linjalen?
M: Fordi det står cm der (Peker på «cm» som står bak tallene for lengde og bredde).
I: Okei. Tror du de tallene som står på siden som du brukte for å regne arealet har noe å si for de rutene inni? (Peker på tallene satt opp for lengde og bredde for rektangelet).
M: Nei. Eller, jeg er ikke sikker.
I: Nei. Hvorfor brukte du de tallene på siden til å finne arealet? (Peker på tallene 3 og 5)
M: Fordi jeg klarte ikke å tegne, og de kan ganges sammen og så får du arealet.

Malin sier at hun først tegnet inn ruter (4 for bredden og 6 for lengden) for å finne arealet av rektangelet. Hun sier så at hun endret fremgang da hun kom på at hun kunne gange sammen tallene som sto oppført for rektangelet, og gjorde det. Når Malin blir spurt om hvorfor hun ikke fikk til å tegne problemet svarer hun at det var fordi hun ikke klarte å tegne rutene inni rektangelet med like store mellomrom. Videre forteller Malin at hun brukte linjalen for å tegne inn ruter i rektangelet, og valgte hvor mange ruter som skulle være inni ved å bruke cm som mål for hvor strekene skulle gå. Hun valgte cm fordi det sto bak tallene i oppgaven. Når Malin blir spurt om hun vet om tallene hun bruker for å finne arealet har noen sammenheng for rutene inni svarte hun at hun ikke er sikker. Til slutt blir Malin spurt om hvorfor hun valgte å bruke tallene, og svarer at hun ikke klarte å tegne, og tallene kan ganges sammen for å få arealet.

Malin sir først at «der tegnet jeg først sånn» og peker på rutene hun har delt rektangelet opp i. Malin *lager* ruter inni rektangelet, og har som på pretesten foretatt *vurderinger* om at problemet kan løses ved å bruke mindre ruter for å dekke den større figuren. Malin arbeider her på et nivå for illustrasjon (A).

Da Malin deler rektangelet opp i ruter som på pretesten og foretok *vurderingene* rundt sammenhengen mellom enheter og helheten, kan det antas at forståelsen for hva et areal er ikke har forsvunnet siden forrige gang, og Malin har også nå et mentalt bilde for hva areal er (B).

Malin forteller videre at «så kom jeg på at det går jo bare an å gange de to sammen, så da gjorde jeg det istedenfor» og peker på tallene i oppgaven oppført for lengden og bredden. Malin sier at hun *bruker* aritmetisk multiplikasjon og formelen «lengde · bredde» for å finne arealet. Dette tyder på at Malin arbeider på et nivå for formalisering (C). Malin *forsvarer* imidlertid ikke hvorfor formelen kan brukes da det ikke blir spurt om dette, og knytter dermed ikke denne aktiviteten opp til aktiviteter på tidligere nivå.

Intervjuer spør videre hvorfor Malin ikke fikk til å tegne opp ruter og Malin svarer at «jeg klarte ikke å tegne det med like store mellomrom». Når Malin snakker om mellomrom kan det tolkes at hun sikter til at rutene ikke var like store. Dette kan videre tolkes til at Malin har oppdaget at størrelsen for enheter har noe å si og hun har muligens *registrert* at enheter må være av samme størrelse. Om dette er tilfellet arbeider Malin på et nivå for egenskap-oppdaging (D). Videre forteller Malin at hun først hadde tegnet linjer som skulle dele opp figuren ved at hun «tok en cm imellom og tegnet med linjalen», og sa at hun brukte cm fordi det sto cm bak tallene i oppgaven.

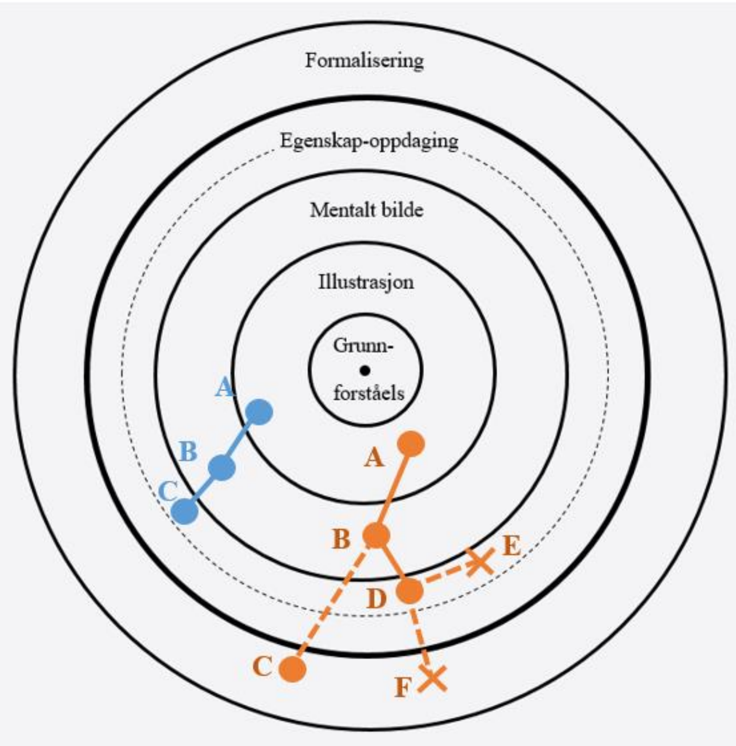
At Malin benytter cm kan tolkes til at hun har oppdaget at cm er en type enhet, og *registrert* at cm kan brukes for å tegne inn enheter i en figur ved hjelp av en linjal. Dette viser at Malin arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging da hun har oppdaget hvordan standardiserte enheter kan benyttes i vurdering av areal (D). Ut ifra de to egenskap-oppdagelsene Malin her har vist vil jeg da påpeke noe selvmotsigende. Rutene Malin tegnet opp var basert på cm fra linjalen og var dermed ganske like, men hun avviser sin egen tegning ut ifra at rutene ikke er like store. Gjennom dette kan det tolkes at Malin bruker egenskapen om at enheter må være like litt «ut over sine bredder» da hun vurderer størrelsen til enhetene så bokstavelig at om tegningen ikke er perfekt så kan den ikke brukes (E).

På spørsmål om Malin tror at tallene hun brukte for å regne areal har noe å si for rutene inni figuren svarer hun «Nei. Eller, jeg er ikke sikker». Dette kan tolkes til at Malin ikke har oppdaget hvordan tallene relaterer seg til enhetene langs sidelinjene inni figuren. På spørsmål om hvorfor Malin velger å bruke tallene svarer hun «fordi jeg klarte ikke å tegne, og de kan ganges sammen og så får du arealet». Malin sier at hun *bruker* tallene fordi hun ikke klarer å tegne, og fordi tallene kan ganges sammen for å få areal. Bruk av aritmetisk multiplikasjon viser igjen at Malin arbeidet på et nivå for formalisering (F). Malin *forsvarer* imidlertid ikke hvorfor formelen virker. Hun begrunner heller ikke valget om å bruke tallene gjennom aktiviteter på tidligere nivåer selv om hun ble spurt om hvorfor hun bruker de. Dette, sammen med at Malin ikke forutser sammenhenger mellom tall og antall enheter kan tyde på at hun ikke har oppdaget formelen selv. Det kan tolkes at formelen for areal er informasjon Malin har fått fra noen andre og bruker fordi hun vet at den skal gi rett svar for areal.

Ut ifra analysen viser Malin både relasjonell og instrumentell forståelse. Malin viser en relasjonell forståelse for hva areal er ved at enheter kan representerer størrelsen, og ved å bruke cm som måleenhet. Det ser imidlertid ut til at Malin har utviklet en instrumentell forståelse rundt enheters størrelse. Malin bruker egenskapen om at enheter må være like «ut over sine bredder», der en tegning ikke kan brukes om ikke rutene er «perfekte». Dette tyder på at hun har utviklet en instrumentell forståelse for at enheter må være av samme størrelse. Hun benytter egenskapen som en regel der enheter må være «perfekte», og ikke som en egenskap for at enheter skal kunne representere et areal. Videre har Malin en instrumentell forståelse for formelen for areal. Malin klarer ikke å forsvare hvorfor formelen kan brukes, og forutser ikke sammenhengen mellom tallene og enheter langs sidelinjen. Malin bruker dermed tallene som et instrument for å finne areal uten at hun forklarer hva tallene egentlig representerer.

Sammenligning:

På pretesten og posttesten viser Malin at hun har et mentalt bilde av hva areal er da hun forteller at figuren kan deles opp i enheter og telles, og viser at hun ser relasjoner mellom enheter og helheten. Hvordan Malin lager rutene er imidlertid forskjellig. På pretesten bruker Malin sammenligning mellom to figurer for å vurdere antall ruter. På posttesten blir dette imidlertid vurdert ut ifra bruk av linjalen, og Malin viser at hun har oppdaget at cm kan brukes for å dele en figur i ruter. Det som imidlertid er underlig er at Malin avviser sine egne ruter fordi de ikke er like store, selv om hun bruker mål på en linjal for å tegne dem. Dette gir inntrykk om at Malin bruker egenskapen om enheters størrelse som en regel, der enheter må være «perfekte». Videre bruker ikke Malin tallene som er oppført for figurens lenge og bredde under pretesten. Under posttesten ser Malin nå disse og bruker dem for å finne arealet. Malin klarer imidlertid ikke å fortelle hvorfor de kan brukes, noe som tyder på en instrumentell forståelse av formelen.



Modell 6: Malins bevegelse for pre- og posttest oppgave 8.

Pretesten er illustrert i blått. Malin lager ruter for å illustrere problemet og arbeider først på et nivå for illustrasjon (A). Videre forteller hun at hun adderte sammen rutene for å finne arealet, som viser at hun har et mentalt bilde over hva areal er (B). Til slutt forteller hun hvordan hun sammenlignet to figurer for å finne ut hvor mange ruter som skulle tegnes opp, og viser at hun arbeider på et nivå for egenskap-oppdagelse (C).

Posttesten er illustrert i oransje. Malin tegner først opp ruter og arbeidet på et nivå for illustrasjon (A), som videre ble tolket til (med bakgrunn i pretesten) at hun hadde et mentalt bilde av areal (B). Malin arbeider så på et formaliseringsnivå der hun bruker formelen for areal, men knytter ikke denne opp til aktiviteter og forståelse på andre nivåer (illustrert ved en stiplet linje) (C). Videre viser Malin at hun ser at enheter må være like store og at enheter for en figur kan være presentert som cm, og arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (D). Malin bruker imidlertid ideen om at enheter skal være like store som en regel uten å knytte denne opp mot tidligere oppdagelser (illustrert ved et kryss i enden av en stiplet linje) (E). Malin bruker til slutt formelen for areal og arbeider på et nivå for formalisering. Malin forutser imidlertid ikke hvordan tall representerer antall enheter langs en sidelinje, og bruker formelen for areal uten å kunne forsvare hvorfor den virker (illustrert ved et kryss i enden av en stiplet linje) (F).

5.1.3. Oppgave 9

For denne oppgaven ble både pre- og posttest diskutert under samme intervju, der pretesten kom frem i samtaler rundt posttesten. Posttesten vil her, til forskjell fra de andre delkapitlene, bli presentert før pretesten, da det gjennom intervjuet ble snakket om denne først.

9 Kva er arealet av figuren?

A. 16 B. 18 C. 15 D. Umogleg å seie, fordi____________

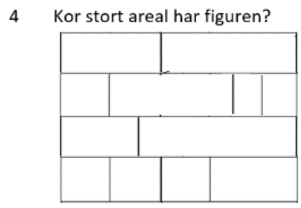
Bilde 5: Oppgave 9 fra test i areal.

Intervju tilknyttet posttest

I: Du har svart at det er «D: Det er ikke mulig å si».

M: Ja.

I: Hvorfor tenkte du at det ikke er mulig å finne ut?

M: Fordi det går bare med de som er der (Stryker fingeren over «rutene» i midten av figuren, som er hele).
M: Så når det er forskjellig størrelse, når det ikke bare er en halv, så blir det litt vanskelig (Peker på rutene som er oppdelt av figurens sider som skråner).
M: Så da blir det sånn som på den andre at det er forskjellig størrelse. Da kan du ikke finne det ut. Kan ikke telle de. (Refererer til oppgave 4: 

).

Malin sier at det ikke er mulig å finne arealet for figuren fordi det bare går an å bruke de rutene som er i midten. Videre sier hun at når rutene er av forskjellig størrelse, og ikke bare er delt opp i «halve», da blir det vanskelig. Videre refererer Malin til oppgave 4 i testen, der rutene er delt opp i forskjellige størrelser, og sier at en da ikke kan finne arealet. Hun avslutter med å si at rutene ikke kan telles.

Malin startet med å si at «det går bare med de som er der» og stryker fingeren over midten av figuren. Uttalelsen og bevegelsen kan tolkes til at Malin *ser* for seg at rutenettet i bakgrunnen av figuren går over selve figuren slik at den er delt opp i ruter. Rutenettet i oppgaven fungerer som en konkretisering av enheter. Da Malin *forteller* om enhetene («de som er der») viser dette at hun *ser* hvordan figuren kan være delt opp i enheter for å representere arealet. Dette viser at hun arbeider på et nivå for mentalt bilde (A).

Malin sier at det «går bare med de som er der» og stryker fingeren over de rutene som er hele inni figuren (visualisert gjennom rutenettet i bakgrunnen). Malin viser gjennom uttalelsen at hun har oppdaget at formen og størrelsen til enheter har noe å si, som kan tolkes til at hun *registrert* at enheter må være like for å representere arealet. Videre utdyper Malin dette ved å si at «når det er forskjellig størrelse» og peker på rutene som er oppdelt av figurens sider som skråner. Malin påpeker at enhetene har forskjellig størrelse, og viser at enhetene har forskjellig form grunnet sidene som skråner. Denne uttalelsen kan tolkes til en bekrefter på at Malin har *registrert* at størrelse og form er viktige egenskaper ved enheter, og at de må være likeverdige. Videre sier Malin at «når det ikke bare er en halv, så blir det litt vanskelig». Dette kan tolkes til at Malin har oppdaget sammenhenger mellom hele og halve enheter, altså trekanter og firkanter. Hun har muligens *registrert* hvordan egenskapene til disse figurene gjør at trekanter (halve ruter) kan settes sammen til firkanter (hele ruter) og dermed representere arealet. Da enhetene ikke er oppdelt i firkanter og trekanter sier hun imidlertid at det blir vanskelig. Dette kan tyde på at Malin ikke har oppdaget geometriske sammenhenger mellom helheter, og *forutser* ikke hvordan enhetene i trapeset kan flyttes på for å bli lik et rektangel og få «hele» ruter som kan telles. Ut ifra analysesekvensen er det tydelig at Malin arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging da hun har oppdaget at enheter må være like for å representere et areal, eller settes sammen til å bli like der hun har oppdaget hvordan enheter av trekanter kan settes sammen til firkanter (B).

Til slutt sier Malin at «da blir det sånn som på den andre at det er forskjellig størrelse», og refererer til figuren i oppgave 4 der enhetene er delt opp i forskjellig størrelse. På denne oppgaven har Malin allerede funnet ut og begrunnet at det ikke går å finne arealet når enheter er av forskjellig størrelse, og bruker oppgaven for å begrunne sitt svar i denne oppgaven. Hun presiserer videre at «da kan du ikke finne det ut. Kan ikke telle de». Malin sier at enhetene ikke kan telles grunnet forskjellig størrelse og at der ikke er mulig å finne arealet. Dette kan tolkes til at Malin *forteller* at enheter bare kan adderes sammen og representere arealet om de er like. Dette viser igjen at Malin har et mentalt bilde over hva areal er (C).

Ut ifra analysen ser det ut for at hun har en relasjonell forståelse. Malin forstår at en figur kan deles opp i enheter for å finne arealet gjennom at hun forstår at enheter relaterer seg til helheten. Hun forstår også at enheter må være av samme størrelse for å representere helheten, eller settes sammen til dette.

Intervju tilknyttet pretest

I: Okei. Jeg har med meg den første testen du gjorde. Der svarte du litt annerledes, men det er jo vanlig for det er jo lenge siden også. Her skreiv du at C var rett. Husker du hvorfor du mente det? (Tar fram elevens pretest som ble utført før undervisningen startet, og peker på oppgave 9 og svaralternativ C).

M: Nei. Eller, det kan hende fordi at du ser at den er litt større, så kan du sette den sammen med den. Da blir det kanskje.. (Peker på den «store biten» oppe til høyre på figuren, og så peker på den «lille biten» nede til venstre)

M: Og så setter du den sammen med den. (Peker på den «lille biten oppe til venstre på figuren, og så på den «store biten nede til høyre.)

M: Og så de to. Det går, kanskje. (Peker på den midterste «biten» til venstre på figuren, og den midterste «biten» til høyre.).

I: Så du bygde bitene sammen da eller?
M: Ja, sikkert det. Til de ble en hel. Og så telte resten. (Peker på de «hele rutene» inni figuren)
I: Okei. Og når du ser på den nyeste testen igjen, der du svarte at det ikke var mulig å si, kunne bu brukt denne metoden da? (Tar frem posttesten igjen, og peker på svaret som var gitt og figuren.)
M: Nei. For de er ikke samme størrelse. Det må de være eller så kan du ikke finne det ut.

Malin beskriver hvordan hun kom frem til at svaralternativ C var rett i pretesten. Hun sier at enhetene som ikke er hele kan settes sammen til å bli det: enheten oppe til høyre kan settes sammen med enheten nede til venstre, enheten oppe til venstre kan settes sammen med enheten nede til høyre, og enhetene i midten på hver side av bredden kan settes sammen. Malin sier videre at de nå er hele og kan telles. Malin uttrykker imidlertid at denne metoden ikke er mulig å benytte for å finne arealet, og går tilbake til at enhetene må være av samme størrelse.

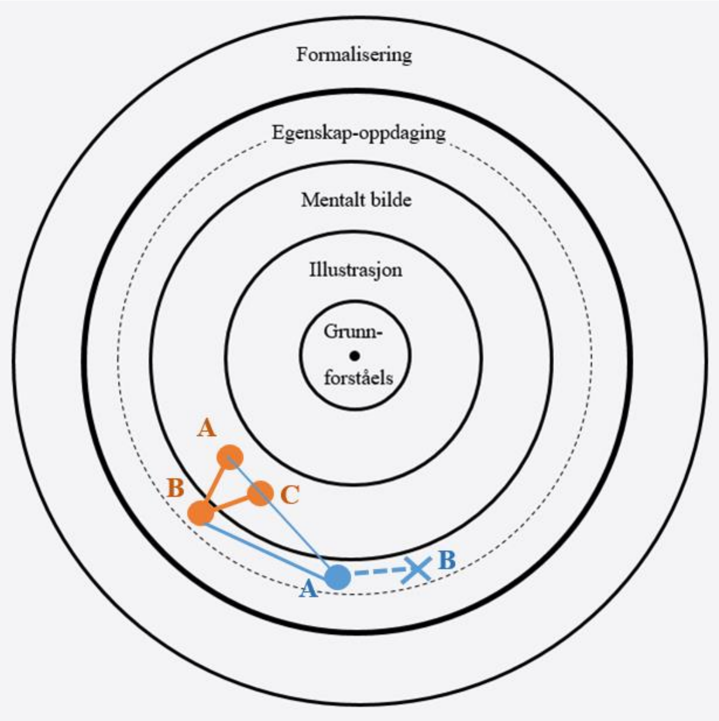
Malin sier at «du ser at den er litt større, så kan du sette den sammen med den» og peker på enheten oppe til høyre og enheten nede til venstre, «og så setter du den sammen med den» og peker på enheten oppe til venstre og enheten nede til høyre, «og så de to» og peker på enhetene i midten på hver side. Malin viser hvordan hun setter sammen enhetene som er av forskjellig størrelse. Dette kan tolkes til at Malin *forutser* hvordan enhetene i trapeset kan flyttes på for å bli «hele» ruter som kan telles. Det kan tolkes at Malin bruker geometriske egenskaper som er å finne i relasjonen mellom et trapes og et rektangel, der trapeset kan gjøres om til et rektangel for å danne hele enheter som kan telles. Hun sier ikke eksplisitt at hun flytter enheter for å gjøre trapeset om til et rektangel, men det er dette hun gjør. Dette viser at Malin arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (A). Oppdagelsen Malin viser bygger mest sannsynlig på forståelse fra nivå for illustrasjon og mentalt bilde, som hun viser at hun har i posttesten.

Det som videre er interessant er at Malin til slutt sier at «Nei. For de er ikke samme størrelse. Det må de være eller så kan du ikke finne det ut» på spørsmål om hun ville vurdere å bruke samme metode også på posttesten. Malin sier at metoden ikke kan brukes fordi enhetene ikke er av samme størrelse, og videre at enhetene må være det for å kunne finne arealet. Disse uttalelsene kan tolkes til at Malin avviser sine egne *forutsigelser* og *registreringer* rundt geometriske egenskaper for enheter og helheter. Dette kan videre tolkes til at hun har blitt fortalt at enheter må være av samme størrelse for å kunne finne areal, og har videre *registrert* denne informasjonen som sann. Malin benytter bare *registrering* i utvikling av forståelse, da hun registrerer noe som andre sier som sant, uten å benytte *forutsigelse* i utvikling av forståelse, der Malin ville ha oppdaget egenskapen selv gjennom bruk av aktiviteter på andre nivåer. Dette er da informasjon om egenskaper som Malin bruker uten tilknytning til tidligere nivå (B).

I forklaringssekvensen av hvordan enhetene kan bygges sammen til hele ruter viser Malin en tydelig relasjonell forståelse for sammenhengen mellom enheter og helheten. Hun viser forståelse for at enheter må være av samme størrelse, og klarer å se hvordan enhetene som verken er hele eller halve allikevel kan bygges sammen til hele enheter. Malin viser at forståelsen for enheter hun har utviklet er tilpasningsdyktig, da hun er i stand til å bruke det i en oppgave der formen til en figur skiller seg fra de andre figurene i testen. At Malin til slutt avviser hele forklaringssekvensen til fordel for at enheter må være like store tyde på at Malin sin forståelse for enheters størrelser og form er preget av instrumentalisme. Malin bruker informasjonen som en instrumentell regel ved at hun avviser metoden som hun har beskrevet fordi den går imot regelen om at enhetene MÅ være like store.

Sammenligning:

Forklaringer fra posttesten viser at Malin har en relasjonell forståelse for hvordan enheter representerer helheten. Malin sier at enhetene må være like eller settes sammen til å bli det, og signaliserer at hun kan sette enheter av trekanter sammen til firkanter, og har registrert en sammenheng mellom disse geometriske formene. Malin sier videre at da enhetene ikke er delt opp i disse formene og at det da blir vanskelig. Det antas at Malin ikke forutser en geometrisk sammenheng mellom helheter, og hvordan enhetene kan settes sammen til å få hele ruter. Dette viser seg imidlertid under samtaler rundt pretesten å ikke stemme. Malin har utviklet en relasjonell forståelse for dette, og har registrert hvordan problemet kan løses. Disse oppdagede sammenhengene blir imidlertid avvist til fordel for en instrumentell forståelse av informasjon om at «enheter må være like store», der dette blir en regel som «overvinner» hennes egne oppdagelser.



Modell 7: Malins bevegelse for pre- og posttest oppgave 9.

Posttesten er illustrert i oransje. Malin bruker rutenettet i bakgrunnen av figuren der hun viser hvordan figuren kan være delt i enheter som representerer et areal, og arbeider på et nivå for mentalt bilde (A). Videre viser Malin at hun har registrert at enheter må være av samme størrelse og form, og at hun ser relasjoner mellom enheter av firkanter og trekanter, og arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (B). Til slutt forteller Malin at enhetene ikke kan telles fordi de er av forskjellig størrelse, og viser at hun ser at bare likeverdige enheter kan adderes sammen og representere et areal. Hun viser at hun har et mentalt bilde av areal (C).

Pretesten er illustrert i blått. Malin viser at hun har oppdaget geometriske egenskaper som er å finne i relasjonen mellom et trapes og et rektangel, og gjennom dette klarer å sette enheter sammen til å bli hele. Hun arbeider da på et nivå for egenskap-oppdaging (A). (Det kan tolkes at denne forståelsen bygger på aktiviteter fra illustrasjon og mentalt bilde som Malin viser i posttesten, og har derfor linjer til nivåene i posttesten). Videre avviser Malin imidlertid sine egne resonnementer og bruker egenskapen «enheter må være like» som en regel uten å knytte den opp til forståelse og aktiviteter fra andre nivåer (illustrert med et kryss i enden av en stiplet linje) (B).

5.1.4. Variasjonsteori og spor i forståelsen

Et kritisk aspekt som undervisningen vektla var å «oppfatte at måleenhetene må være like store». I samtaler rundt pretesten for oppgave 4 og 8 kommer det frem at Malin ikke fullt har oppdaget at enheter må være av samme størrelse, selv om hun har oppdaget at rutenes form og størrelse har noe å si. Hun sammenligner oppgavene opp mot ruter i en annen oppgave for å løse dem. Etter undervisning viser imidlertid Malin gjennom samtaler fra posttesten for oppgave 4 og 8 at hun har oppdaget at størrelse og form er viktig. Det ble tolket at Malin imidlertid har en instrumentell forståelse for dette da hun utrykker at hun ikke er i stant til å tegne ruter fordi de ikke blir «perfekt» like. Det kritiske aspektet at «enheter må være like store» fungerer mer som en instrumentell regel enn en egenskap for at enheter skal kunne representere et areal. Det kan spørres om dette kritiske aspektet muligens ble tydeliggjort så mye i undervisningen at Malin nå velger å ta dette noe mer bokstavelig enn det er tenkt.

Det er imidlertid et annet interessant moment ved enheters størrelse og form som kan dras inn sammen med det foregående, nemlig det kritiske aspektet å «finne areal når det er halve ruter» som undervisningen også vektla. Under samtaler fra posttesten for oppgave 9 uttrykker Malin at «når de ikke bare er halve, så blir det litt vanskelig». Dette kan tolkes til at Malin uttrykker at hun vil klare å finne areal om rutene er halve, og at hun har oppdaget sammenhenger mellom hele og halve ruter. Under samtalen for pretesten viser imidlertid Malin at hun er i stand til å finne areal når rutene er delt opp i andre former enn «halve». Da Malin er i stand til å vurdere hvordan biter som ikke bare er halve kan settes sammen til å bli hele, kan det også tolkes at hun er i stand til å finne areal for figurer med halve ruter. At hun bygger sammen enhets-bitene kan også tolkes til at hun har en forståelse for at enheter må være av samme størrelse før undervisningsstart. Aspektene å «oppfatte at måleenhetene må være like store» og å «finne areal når det er halve ruter» er altså noe Malin har oppdaget før undervisningen fant sted, og var dermed i utgangspunktet ikke kritiske for henne. Regelen om at «enheter må være like store», som hun tolker til at ruter må være «perfekte», gjør imidlertid at hun avviser sine egne resonnement rundt hvordan enheter kan settes sammen for å bli hele. Undervisningen som fokuserte på det kritiske aspektet å «finne areal når det er halve ruter» gir muligens bare Malin en «regel for regelen», som sier at det er mulig å finne areal når det er halve ruter selv om ruter må være «perfekt like».

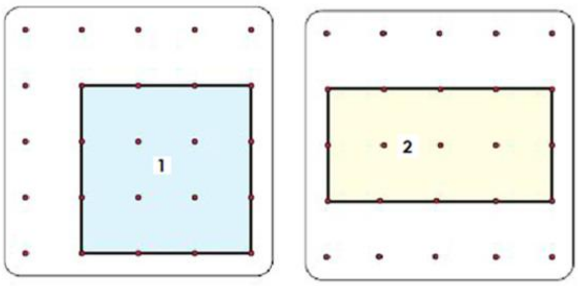
Det er nå verdt å påpeke at elever ofte blir presentert for «perfekte ruter» gjennom oppgaver der rutene allerede er opptegnet. Dette kommer også frem gjennom testen, der alle rutenettene som var laget for figurene var «perfekte, med hele ruter», og alltid fremstilt i én størrelse. Malin viser allerede tegn i pretesten til å ville bruke rutenett som var tegnet opp gjennom å sammenligne oppgaver opp mot hverandre for å løse dem. Om undervisningen har båret preg av de samme «perfekte rutene» kan dette ha påvirket Malin til å se på aspektet som en regel. Det ble i forrige avsnitt vurdert at å «oppfatte at måleenheter må være like store» ikke var et kritisk aspekt for Malin i det hele tatt, og det kan ut ifra diskusjonen som fremlegges vurderes om hun faktisk hadde et annen kritisk aspekt som gikk på dette med «perfekte ruter». Det kan dermed spørres om fokuset på det kritiske aspektet «oppfatte at måleenheter må være like store» er utgangspunktet for at Malin har utviklet en mindre hensiktsmessig forståelse?

To andre kritisk aspekt undervisningen vektla var å «finne areal uten å telle ruter» og å «koble antall ruter med lengdemålene langs kantene». Malin viser for pretesten at hun ikke prøver å finne areal uten å telle ruter, og arbeider ikke på et formalisert nivå. Etter undervisning kommer det frem fra posttesten at Malin bruker den aritmetiske formelen for areal i oppgave 8, og viser at hun er i stand til å finne areal uten å telle ruter. Malin uttrykker imidlertid at hun ikke har oppdaget sammenhengen mellom egenskapene til tallene og antall enheter langs sidelinjene. Dette kommer frem da hun tegner ruter inni figuren men viser usikkerhet på om tallene har noe å si for rutene. Hun forutser ikke hvordan disse kan ha innvirkning på hverandre, og uttrykker at hun ikke klarer å knytte dette opp mot forståelse på andre nivåer. Malin viser dermed at hun i utgangspunktet har problemer med det kritiske aspektet «koble antall ruter med lengdemålene langs kantene». Dette kritiske aspektet er viktig for å forstå hvordan areal kan regnes uten å telle ruter, og å «finne areal uten å telle ruter» bør ikke undervises i før elever har dannet forståelse for det førte. Da Malin viser at hun allikevel bruker formelen kan det settes spørsmål ved om undervisningen vektla å «finne areal uten å telle ruter», selv om Malin ikke hadde dannet forståelse for det kritiske aspektet å «koble antall ruter med lengdemålene langs kantene». For å si dette på en annen måte: Har fokus på det kritiske aspektet «finne areal uten å telle ruter» gjort at undervisningen har lagt opp til å lære formaliserte aktiviteter uten å klare å knytte dette sammen med aktiviteter på andre nivåer, som å oppdage at antall ruter henger sammen med lengdemålene langs kantene?

5.2. Elev: Espen

Av oppgavene Espen uttaler seg om er det tatt utgangspunkt i oppgave 2b, 8, og 12 for å få innsikt i hans utvikling og forståelse av areal. I samtalesekvensene er intervjuer forkortet med I, og Espen forkortet med E.

5.2.1. Oppgave 2b



2b Kva for ein av figurane har størst areal?

A. figur 1 B. figur 2 C. Lik omkrins D. Umogleg å seie, fordi____________

Bilde 6: Oppgave 2b fra test i areal.

Intervju tilknyttet pretest:

I: På det neste spørsmålet så er hvilken av figurene har størst areal.

I: Hva var det. Husker du hva det ordet betyr?

E: Veldig lenge siden. Helt når jeg begynte med, når jeg begynte med, og i 5. klasse så begynte vi å lære det i matte. Tror jeg.

I: Jeg tror ikke du har hatt dette siden 4. klasse. Det er heilt ok at du ikke husker det.

E: Jeg husker ikke det, men jeg tror det er figur B (Peker på svaralternativ B: «figur to»).

I: Ja, på areal. Hva tror, hva var, hva gjorde du for å finne, for å tenke det ut?

E: Jeg vet ikke egentlig. Det var.. Den måtte jeg tenke veldig mye til.

Espen sier at det er veldig lenge siden han har hatt om areal, og at han ikke husker det. Han prøver videre å gi et svar og sier at han tror svaralternativ B er rett, altså at figur 2 har størst areal. Han uttrykker imidlertid at han ikke vet hvorfor han tror at denne figuren er størst, og at han tenkte mye når han utførte testen.

På spørsmål om hva areal er, om hva ordet betyr, sier Espen «veldig lenge siden» og at de begynte å lære det i 5. klasse. Han svarer ikke på hva areal er, eller hva ordet betyr. Dette kan tyde på at Espen ikke har et mentalt bilde av hva areal er, da det ser ut for at han har problemet med å *fortelle* hva det er.

Espen sier videre at han tror figur 2 har størst areal, men på hvorfor han tror dette svarer han «Jeg vet ikke egentlig». Enten gjetter Espen på hvilket svar som er rett, eller så foretar han noen *vurderinger* av figurene. Ut ifra at Espen skal finne «den som har størst areal», er det mulig at han *vurderer* figurene ut ifra visuelle inntrykk. Han *vurderer* muligens at figur 2 er størst fordi han syns den ser størst ut, muligens fordi den er bredest. Selv om Espen ikke *lager* illustrasjoner for å løse problemet, foretar han muligens *vurderinger* basert på visuelle inntrykk av form og størrelse for de to figurene. Espen arbeider da på et nivå for illustrasjon (A). Dette er imidlertid noe usikkert da Espen ikke uttrykker dette eksplisitt.

Ut ifra samtalesekvensen er det usikkert om Espen har en relasjonell- eller instrumentell forståelse. Espen forteller veldig lite da han ikke husker hva areal er. Det kan antas at han ikke har kommet langt i sin utvikling av arealforståelse, og det er da vanskelig å anta noe om forståelsen.

Intervju tilknyttet posttest:

I: 2b, hva er det vi skal finne på den?

E: Den som har størst areal.

I: Hva er areal for noe da?

E: Hvor stor den er inni.

I: Okei. Hvordan fant du det?

E: Jeg telte, jeg telte liksom, jeg forestilte meg at det var firkanter der, der, der, der, der, der, der. Prikkene viser liksom. (Peker på prikkene med fingeren langs øverste-, venstre- og nederste side av figur 1).

E: Men liksom fulle firkanter.

I: Her er en blyant sånn at du kan tegne hvordan du tenker. (Gir Espen en blyant).

E: (Bruker blyanten til å tegne firkanter som ligger tett i tett inni figur 1, der linjene for en firkant går fra prikk til prikk inni figuren).

E: Sånn. Forestilte meg at den var delt opp i firkanter.

I: Du forestilte deg at det var firkanter inni?

E: Ja. Og så telte jeg dem for å finne ut hvilken som var størst. Det var den (peker på figur 1).

Espen sier at et areal er hvor stor en figur er inni. Videre tegner han inn firkanter i figur 1, som ligger tett i tett der linjene går fra prikk til prikk. Han sier at han på denne måten forestilte seg at figuren var delt opp i firkanter, og at han telte firkantene for å finne ut hvilken av figurene som var størst. Han kom frem til at figur 1 hadde størst areal.

Espen starter med å *fortelle* at et areal er «hvor stort det er inni». Dette kan tyde på at han *ser* at det er størrelsen til flaten inni en figur som er arealet. Dette viser at Espen har dannet seg et mentalt bilde av hva areal er (A).

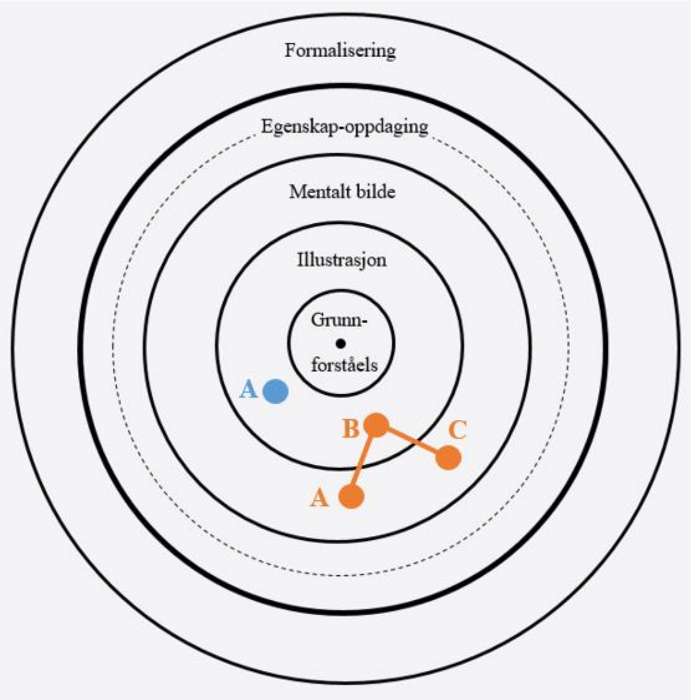
Videre viser Espen hvordan han kom frem til hvilken av figurene som har størst areal da han *lager* firkanter inni figur 1. Ved å gjøre dette viser Espen at han *vurderer* at enheter av firkanter kan settes inn i figuren, og at han gjennom dette ser visuelt hvordan de passer inn. Videre benytter Espen prikkene når han *lager* linjene til firkantene. Han sier videre «forestilte meg at det var firkanter» og både peker på og snakker om «prikkene». Dette viser at han *vurderer* visuelt at firkantene kan tegnes ved å benytte prikkene som indikasjon på størrelse. Espen arbeider her på nivå for illustrasjon (B).

Videre sier Espen at han «telte [firkantene] for å finne ut hvilken som var størst». Espen *forteller* at han ser på firkantene inni figuren som noe som kan telles for å finne ut hvor stor den er. Dette viser at han *ser* hvordan enhetene representerer arealet. Espen *forteller* også litt før at det var «fulle firkanter», noe som kan tolkes til at han *ser* hvordan enheter må dekke flaten fullstendig. Videre *forteller* Espen at han telte firkantene for å finne «hvilken som var størst» og viser at han *ser* hvordan to figurer kan sammenlignes ved å sammenligne antall enheter inni figurene. Espen arbeider her på et nivå for mentalt bilde (C).

Det kan tolkes at Espen har utviklet en relasjonell forståelse for hva areal er. Han kan fortelle at arealet er det som er inni figuren og viser hvordan størrelsen til en figur kan representeres ved bruk av enheter ved å tegne inn ruter som han teller. Han viser også forståelse på en relasjonell måte da han bruker kunnskapen om at enheter representerer størrelsen for å kunne vurdere hvilken figur som er størst gjennom å sammenligne antall enheter.

Sammenligning:

Espen viser at han har utviklet seg mye fra pre- til posttesten. På pretesten klarer han ikke å fortelle hva areal er, og vurderer muligens hvilken av figurene som er størst ut ifra visuelle inntrykk. På posttesten har imidlertid Espen utviklet et mentalt bilde av hva areal er, der han illustrerer hvordan figurene kan deles opp i firkanter som kan telles, for å vurdere hvilken av figurene som er størst. Han har utviklet en forståelse for at enheter inni en figur representerer størrelsen, og har utviklet en relasjonell forståelse rundt hva areal er.

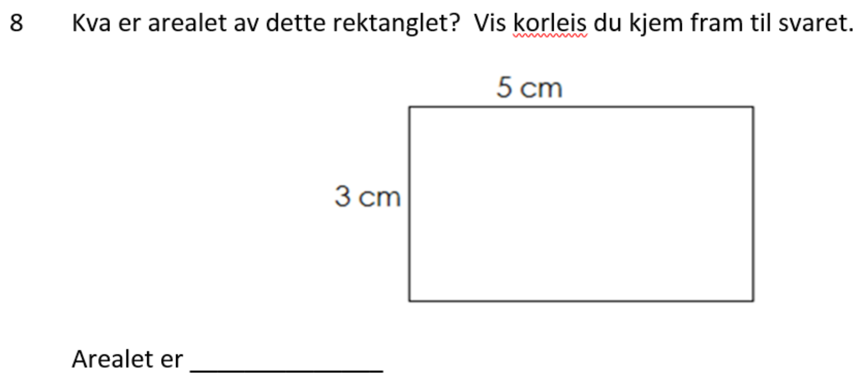


Modell 8: Espens bevegelse for pre- og posttest oppgave 2b.

Pretesten er illustrert i blått. Espen befinner seg på et nivå for illustrasjon da han muligens vurderer hvilke av figurene som har størst areal gjennom å visuelt vurdere form og størrelse (A).

Posttesten er illustrert i oransje. Espen forteller at areal er det inni figuren og har et mentalt bilde av areal (A). Videre tegner han firkanter inni figur 1 og arbeider på et nivå for illustrasjon (B). Til slutt teller han enheter for å finne størrelsene, og bruker antall enheter for å sammenligne to figurer og arbeider på et nivå for mentalt bilde igjen (C).

5.2.2. Oppgave 8



Bilde 7: Oppgave 8 fra test i areal.

I printet versjon var figuren i oppgave 8 større, der linjalen viste nesten 6 cm for lengden og nesten 3,5 cm for bredden. Grunnen til dette er forklart for oppgave 8 for Malin.

Intervju tilknyttet pretest:

I: Hvis du skulle ha funne ut arealet på den da. Hva ville du gjort da? (Peker på oppgave 8).

E: På prøven så tegnet jeg firkantene som var inni der (Peker inni rektangelet i oppgave 8).

E: Bare tok og tegnet (Tegner en strek loddrett ned i midten av rektangelet slik at den blir delt i to. Tegner en vannrett linje øverst i figuren).

I: Der er en linjal så du kan gjerne bruke den nå.

E: (Legger linjalen vannrett over figuren).

E: Tegnet jeg streker. (Tegner over den allerede opptegnede vannrette linjen øverst i figuren).

E: (Tegner tre loddrette linjer til venstre for den midterste linjen, og tre loddrette til høyre. Til sammen er det nå 7 loddrette linjer, med 8 enheter i lengden).

E: (Tegner inn vannrette linjer under den allerede opptegnede vannrette linjen. Tegner slik at det til sammen er 5 linjer, med 6 enheter i bredden).

I: Flott. Hva som bestemte deg for hvor mange sånne streker du skulle ha? (Peker på de opptegnede strekene loddrett i figuren).

E: Vet ikke egentlig. Jeg bare tegnet inn streker og så tok hvor mye det var, det er i den. (Holder blyanten over rektangelet og beveger den i en sirkelbevegelse inni).

I: Hva ville du gjort nå for å funne nå, hva ville du ha telt nå?

E: Egentlig så tenkte jeg på en slags sånn her oppgave, med den samme med ved den her. så tenker jeg hvor, hvis jeg husker litt rett så kan jeg huske at det var så, enten så mange streker eller ikke. Hvis.. jeg husker da ikke så bra. Ja.

Espen sier at han tegnet firkanter inni figuren for å finne arealet. Videre illustrerer han dette ved å tegne inn 7 loddrette linjer (til sammen 8 enheter for lengden), og 5 vannrette linjer (til sammen 6 enheter for bredden). Espen svarer først at han ikke vet hvordan han valgte hvor mange streker figuren skulle deles opp i, og sier at han bare tegnet dem inn og så tok hvor mange det var i den. Til slutt sier han imidlertid at han tenkte på en lignende oppgave, og vurderte ut ifra den hvor mange streker han skulle sette inn.

Espen starter med å *fortelle* at «på prøven så tegnet jeg firkantene som var inni» figuren. Dette utsagnet kan tolkes til at han forstår firkanter som noe som er inni figurer fra før. Han *forteller* at for å finne arealet kan en figur deles opp i disse, og indikerer at han *ser* at arealet er det som er inni figuren. Dette kan tolkes til at han har et mentalt bilde av hva areal er (A).

Espen *lager* videre loddrette og vannrette linjer inni figuren. Espen *vurderer* her visuelt hvordan figuren kan deles opp i ruter ved at han danner 8 ruter for lengden og 6 ruter for bredden. Videre sier han at han «vet ikke egentlig» hva som bestemte hvor mange streker han skulle tegne, noe som kan tyde på at vurderingene ikke går ut over den visuelle oppfattelsen av at rutene og figurens helhet har kongruente former. Ved å dele figuren opp i mindre rutener *vurderer* Espen muligens visuelt at disse kan plasseres inni den større figuren. Espen arbeider her på et nivå for illustrasjon (B).

Videre *forteller* Espen at han «tok hvor mye det var» og beveger blyanten i en sirkelbevegelse inni rektangelet. Uttalelsen med bevegelsen kan tolkes til at Espen telte rutene inni figuren etter han delte den opp. Han arbeider da på et nivå for mentalt bilde der han *ser* hvordan enheter som dekker flaten kan adderes sammen og representerer størrelsen (C). Espen svarer imidlertid ikke på «hvordan han ville ha telt» rett etterpå, men går tilbake til hvordan han delte rektangelet. Enten er dette fordi han ikke telte rutene, eller fordi han kom på noe annet han ville si om figuren. Det skaper uansett et mer usikkert bilde på hvor godt han forstår sammenhengen mellom antall enheter og areal.

Til slutt sier Espen at «egentlig så tenkte jeg på en slags sånn her oppgave […] huske at det var så.. enten så mange streker eller ikke». Espen sammenligner figuren og oppgaven opp mot noe han har gjort før, og foretar på det grunnlaget visuelle *vurderinger* av form og antall streker som skulle settes inn i oppgave 8. Dette kan tyde på at Espen går tilbake til et nivå for illustrasjon for å begrunne sine egne tanker og valg (D).

Espen viser tegn til en relasjonell forståelse. Han viser hvordan han tegner ruter inni figuren for å finne arealet, og viser da han ser at areal kan representeres gjennom bruk av enheter. Det er imidlertid videre noe vanskelig å si om forståelsen er relasjonell, som kan komme av at han ikke har kommet langt i utvikling av arealforståelse.

Intervju tilknyttet posttest:

E: Jeg tegnet først firkanter, men så ble det feil fordi det skulle egentlig være tre (Peker først på firkantene inni figuren. Peker så på tallet tre som står oppført for bredden. Peker så på rekken med fire ruter oppdelt for bredden, og legger hånden over raden øverst (fra bredden og langs lengden) slik at bare tre rader vises.)

E: Så da forestilte jeg meg, så da telte jeg bare de tre som var her, og bortover (Peker på de tre nederste radene med firkanter for bredden, og viser disse tre bortover raden slik at det blir til sammen de tre rutene fem ganger bortover lengden).

E: Men jeg vet ikke om det er riktig da.

I: Okei, så da telte du bare de tre nederste, og de tre nederste, og de tre, og de tre, og de tre. (Stryker fingeren langs de tre nederste rutene langs bredden til venstre på figuren. Stryker så fingeren på de tre neste rutene bortenfor, så de neste, og neste og neste).

E: Mhm.

I: Og bare droppet den øverste der? (Stryker fingeren langs raden øverst på figuren)

E: Mhm

I: Men hvordan kom du først frem til å tegne opp fire her? (Peker på de fire rutene tegnet opp for bredden).

E: Jeg prøvde å tegne, men jeg så ikke på den (Peker på tallet 3 oppsatt for bredden).

I: Nei. Brukte du linjal da?

E: Ja.

I: Hvordan kom du frem til at det skulle være 5 ruter bortover da? (Peker på de 5 rutene som er tegnet opp for lengden).

E: Det står jo 5 cm på toppen der.

Espen sier at han tegnet inn firkanter i figuren, men oppdaget at det ble feil fordi det skulle være tre ruter for bredden, og han hadde tegnet fire. Han peker på tallet «3» som er satt opp for bredden. Han var allerede ferdig med å tegne inn firkanter da han oppdaget dette, og han viser hvordan han da forestilte seg at det skulle være tre rader ved å legge hånden over den fjerde og øverste raden. Videre forteller Espen at han telte de tre rutene for bredden og gjorde dette bortover, og vister hvordan de tre rutene går fem ganger bortover lengden. Videre kommer det frem at han først hadde tegnet fire ruter for bredden fordi han hadde brukt linjalen til å dele opp figuren. Til slutt får Espen spørsmål om hvorfor han hadde valgt å ha fem ruter for lengden, og Espen henviser da til at det står at det skal være fem på toppen.

Espen sier at han «tegnet først firkanter», og han *laget* linjer inni rektangelet. Han har dermed *vurdert* at problemet kan tegnes opp for å finne areal ved at enheter kan plasseres inni en større helhet. Dette viser at Espen arbeider på et nivå for illustrasjon (A).

Espen forteller så at han oppdaget at det var «feil fordi det skulle egentlig være tre», og peker på tallet «3» oppsatt for bredden. Espen *forutser* at tallene oppsatt for sidene har noe å si for figuren, og har *registrert* at antall enheter langs en sidelinje skal være det samme som dette tallet. Dette viser at Espen arbeidet på nivå to for egenskap-oppdaging som inneholder oppdaging av at sidelinjene og flaten inni figuren relaterer seg til hverandre (B).

Videre sier Espen at «så da telte jeg». Han *forteller* at enheter en noe som kan adderes sammen og *ser* da hvordan enhetene representerer størrelsen. Dette viser at Espen har dannet et mentalt bilde av hva areal er (C). Han beskriver imidlertid videre hvordan han adderte tallene sammen: «telte jeg bare de tre som var her, og bortover», og viser hvordan han tar tre ruter fem ganger bortover. Espen bruker metoden gjentatt addisjon og teller 3+3+3+3+3. Espen *forutser* hvordan enheter kan adderes sammen uten å telle «en og en» enhet, og finner areal gjennom en logisk multiplikasjon. Espen arbeider igjen på nivå to for egenskap-oppdaging (D).

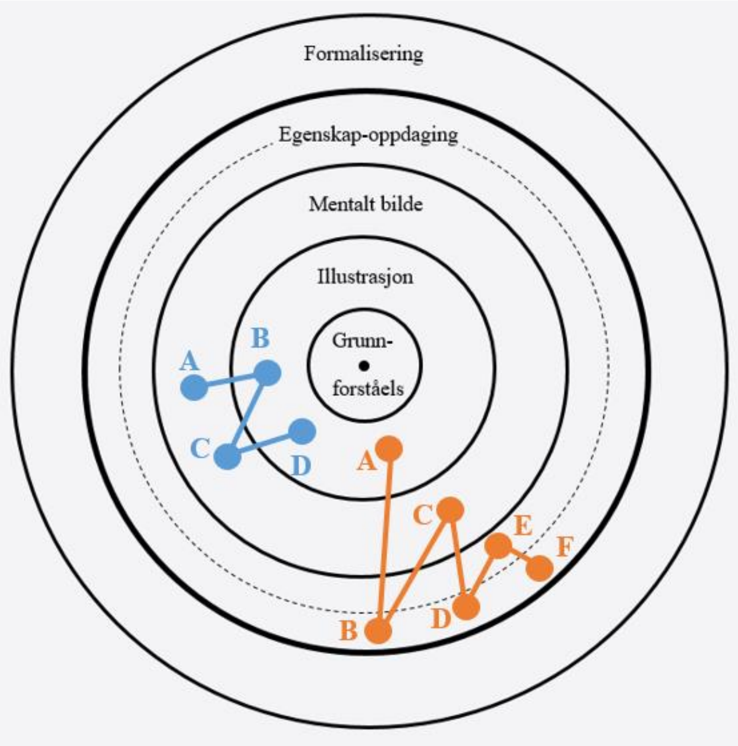
Det kommer frem at Espen først brukte linjalen for å tegne opp ruter i rektangelet. Det kan antas at han benyttet enhetene «cm» på linjalen til å vurdere hvor store rutene skulle være, og kom frem til at det skulle være fire ruter. Dette kan tyde på at Espen *forutser* at cm er en type enhet og har *registrert* at dette kan brukes for å dele en figur opp i ruter. Espen arbeider på nivå én for egenskap-oppdaging da han har oppdaget hvordan standardiserte enheter kan benyttes i vurdering av areal (E). Som for Malin kan det tolkes at Espen velger å dele bredden opp med tre linjer da det står «3» for bredden i oppgaven. Da han imidlertid sier selv at han brukte linjalen, som kan tolkes til cm, og at han tegnet før han la merke til tallet («jeg så ikke på den» og peker på tallet 3), er det ikke trolig at han bruker tallet «3» som indikasjon på antall linjer.

Til slutt blir Espen spurt om hvordan han beregnet hvor mange ruter det skulle være i lengden av figuren, da han til nå bare har snakket om rutene i bredden. Espen svarer at han valgte fem ruter fordi «det står jo 5 cm på toppen der». Igjen viser Espen at han har *registrert* at tallet representerer antall enheter. Espen viser igjen at han arbeider på nivå to for egenskap-oppdaging (F).

Espen viser en relasjonell forståelse gjennom samtalesekvensen. Han forstår hva areal er gjennom at enheter kan representere en størrelse, og at disse kan telles. Videre har han oppdaget hvordan logisk multiplikasjon kan brukes. Han ser også relasjonen mellom hvordan tall representerer antall enheter på en sidelinje. Dette danner et viktig grunnlag for å videre kunne få en relasjonell forståelse for formelen for areal, der også logisk multiplikasjon danner grunnforståelse for aritmetisk multiplikasjon.

Sammenligning:

Under pretesten viser Espen at han har et mentalt bilde av areal da han vurderer at figuren kunne deles opp i ruter og at rutene kan telles. Han arbeider imidlertid mest på et nivå for illustrasjon da mye av samtalesekvensen dreier seg om aktiviteter fra dette nivået, som tegning av problemet og visuell sammenligning. På posttesten viser imidlertid Espen at han har utviklet en rikere forståelse for areal. Han tegner opp problemet og viser at han har et mentalt bilde av areal. Videre viser han tydelig at han har registrert sammenhenger mellom tall og antall enheter for en sidelinje, som han ikke hadde under pretesten, og klarer å bruke logisk multiplikasjon for å telle antall enheter inni figuren. Espen har nå oppdaget at linjalen kan brukes for å tegne enheter inni en figur, men viser at han forstår at om det er satt opp tall for sidelinjene så kan det muligens ikke brukes cm.



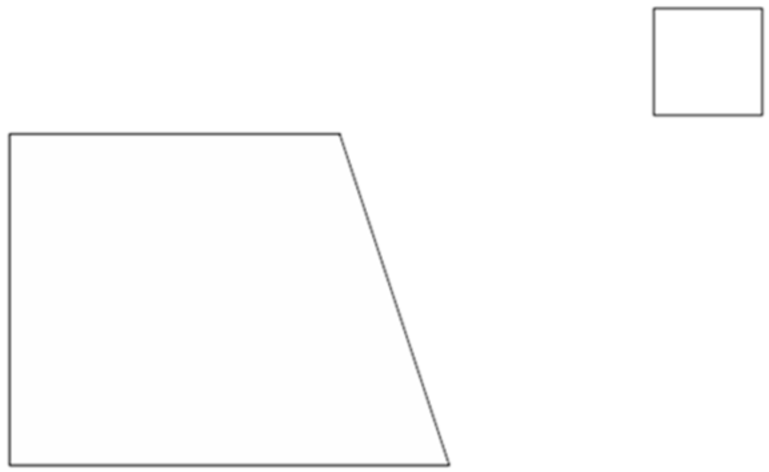
Modell 9: Espens bevegelse for pre- og posttest oppgave 8.

Pretesten er illustrert i blått. Espen forteller at firkanter er noe som er inni figuren og viser at han har et mentalt bilde av areal (A). Espen lager videre vannrette og loddrette streker inni figuren og arbeider på et nivå for illustrasjon (B). Videre forteller han at han tok hvor mye det var, og signaliserer at han telte rutene. Da han ser at ruter kan adderes arbeider han på et nivå for mentalt bilde (C). Til slutt foretar Espen visuelle vurderinger ved å sammenligne oppgaven med andre han har gjort før og arbeider på et nivå for illustrasjon (D).

Posttesten er illustrert i oransje. Espen sier at han tegnet opp problemer ved å lage ruter og arbeidet på et nivå for illustrasjon(A). Videre sier han at antall ruter var feil og viser at han har registrert at tallet som står oppsatt for sidelinjene bestemmer antall ruter og arbeider på nivå 2 for egenskap-oppdaging (B). Videre forteller Espen at han telte rutene og har et mentalt bilde av areal (C), for så å vise en forståelse for logisk multiplikasjon når han fant antall ruter og arbeider på nivå 2 for egenskap-oppdaging (D). Espen sier at han først brukte linjalen for å lage ruter og har registrert at cm kan brukes og beveger seg til nivå 1 for egenskap-oppdaging(E). Til slutt bekrefter Espen at han har registrert at tallet representerer antall ruter på sidelinjen og arbeider på nivå 2 for egenskap-oppdaging (F).

5.2.3. Oppgave 12

12 Kor mange slike kvadrater meiner du det er plass til i figuren under?
Vis med teikning korleis du løyste oppgåva.



Bilde 8: Oppgave 12 fra test i areal.

Intervju tilknyttet pretest:

E: Jeg begynte med å ta litt sånn utover her. (Simulerer at han tegner en firkant oppe i venstre hjørnet av figuren).

E: Så tegnet jeg firkantene så stor som den. (Peker på kvadratet oppe i høyre hjørnet).

E: Så tok jeg og målte den. Og så den her. (Legger linjalen langs lengden til kvadratet, og så langs bredden).

E: Og så tok jeg den samme formen som var inni der (Legger linjalen vannrett over figuren).

E: Og det jeg tenker det at man trenger bare å måle de to som er her. (Peker på lengden og bredden til det lille kvadratet).

E: Fordi at de to er de samme, og de to (Peker først på breddene for figuren, så på lengdene).

E: Så det pleier jeg å gjøre. Og så setter jeg firkantene inni her. (Peker på den store figuren).

I: Har du lyst å vise hvordan du gjorde det?

E: Ja, okei.

E: 5 og.. 5 og.. 5 da (Måler bredden av kvadratet).

E: Okei. Omtrent, her tror jeg (Legger linjalen vannrett over figuren litt nede på venstre side og tegner en vannrett strek på ca litt over 1 cm, der linjen starter noen millimeter inn fra bredden.)

E: Men hvis jeg ikke fikk plass så visket jeg vekk, hvis jeg ikke fikk plass oppe her og sånn (Peker over streken som er tegnet inn).

E: Så tegnet jeg under (Legger linjalen loddrett fra streken og ned).

I: Du kan og bare tegne sånn ca. hvis du vil med hånd, med blyanten og nå.
E: Okei. (Fullfører firkanten han har startet på. Tegner inn flere firkanter av forskjellige størrelser, som ikke ligger tett i tett.).
I: Sånn. Og så hva gjo, du kan bare stoppe der du. Hva var det du gjorde da for å finne svaret.
E: Jeg telte egentlig hvor mange det var, og så telte jeg det en gang til for å bare være sikker på det. Og så .. ja, så sånn.

Espen sier at han tok utgangspunkt i den lille firkanten, der han målte lengden og bredden for å finne ut hvor stor den var. Han påpeker at han bare trenger å måle lengden og bredden fordi han vet at to og to sider er like lange, og at de motsatte sidene da er samme lengde. Videre setter han den lille firkanten inn i den større figuren. Espen begynner å tegne firkanten sånn at den starter noen millimeter inn fra venstre side i figuren. Så tegner han flere firkanter inni figuren der firkantene er av forskjellig størrelse uten å ligge tett i tett. Til slutt teller han hvor mange firkanter det er inni den store figuren.

Espen sier at han målte lengden og bredden til det lille kvadratet: «Så tok jeg og målte den. Og så den her». Espen *forutser* at han måler hvor stor firkanten er og har sannsynligvis *registrert* at størrelse er en egenskap ved firkanten som setter krav til hvor mange det er plass til inni den større figuren. Videre sier Espen at «man trenger bare å måle de to som er her» og peker på lengden og bredden. Han presiserer også at «de to er de samme, og de to», og peker på breddene og lengdene for figuren. Dette viser at Espen har begynt å oppdage geometriske egenskaper ved figurer. Espen *forutser* at det bare trenges å måle to av sidene da han har *registrert* at to og to sider i den lille firkanten (kvadratet) har like lange sider. Espen har oppdaget forhold rundt størrelse og geometriske egenskaper for figurer som gjør at han arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging (A). Espen blander imidlertid muligens egenskaper mellom kvadrater og rektangler da han ikke forutser at han bare trenger å måle én side for kvadrater.

Espen sier videre at «så setter jeg firkantene inni her» og «omtrent her», og tegner firkantene inni figuren. Espen *lager* firkanter for å løse problemet. Han tegner opp firkantene uten at de er av samme størrelse, uten at de ligger tett i tett med hverandre, og uten at de er i kontakt med sidelinjene til den større figuren. Da Espen ikke tegner firkantene like store kan det tolkes at han har gått vekk fra bevisstheten om størrelsen for firkanten, og ikke tar med seg erfaringene fra egenskap-oppdaging. Espen foretar *vurderinger* basert på visuelle inntrykk der han ser at formen til firkanten kan få plass inni den større figuren flere ganger, men vurderer muligens ikke lenger størrelsen. Espen *lager* ruter og foretar *vurderinger* ut ifra visuelle inntrykk som signaliserer at han arbeider på et nivå for illustrasjon (B). Da firkantene Espen tegner ikke ligger tett i tett tyder dette på at han befinner seg på nivå for illustrasjon, og muligens ikke har et mentalt bilde av areal.

Til slutt sier Espen at «jeg telte egentlig hvor mange det var» for å finne svaret for oppgaven. Tidligere i analysearbeidet har elevenes uttalelser om at de telte hvor mange ruter det var inni figuren blitt tolket til at de har et mentalt bilde av areal da de kan *fortelle* at firkantene er noe som kan adderes sammen for å finne arealet, og dermed *ser* at firkantene som dekket flaten representerte størrelsen. Oppgaven spør imidlertid ikke «hva er arealet» men «hvor mange». Da oppgaven implisitt ber Espen om å telle «hvor mange» kan uttalelsen ikke uten videre tolkes til at Espen ser at enhetene representerer arealet gjennom at han forteller at han «telte». Espen teller muligens firkantene for å se «hvor mange» det er plass til. Han arbeidet muligens fortsatt gjennom visuelle inntrykk ved at han *vurderer* hvor mange mindre firkanter det var plass til i den store figuren. Han er derfor på et nivå for illustrasjon (B).

Ut ifra analysen er det noe vanskelig å identifisere om forståelsen Espen uttrykker er relasjonell eller instrumentell. Espen uttrykker en relasjonell forståelse for måling av størrelsen til den lille firkanten da han vet at bare to av sidene trenger å måles og hvorfor det er sånn. Problemet er at Espen videre ikke tar med seg forståelsen for firkantens størrelse, da han ikke bruker dette videre under illustrasjon. Dette indikerer at Espen har en instrumentell forståelse rundt måling av størrelse og ikke klarer å bruke kunnskapen i situasjoner som skiller seg noe fra måle-situasjoner han har utført tidligere.

Intervju tilknyttet posttest:
E: Jeg tenkte den firkanten inni der, og så telte. (Peker først på den lille firkanten, og så på den større figuren).
E: Da så får jeg et lite mellomrom som jeg kan telle: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. (Peker på rutene han har tegnet inn i rektangelet én etter én når han teller. Noen av ruter er delt av den skrå linjen til høyre. De hele rutene er ikke av samme størrelse, der noen er større enn andre, men ligger tett i tett. Han har tegnet fem enheter for bredden. Antall enheter for lengden er fem i bunn, så fire enheter på de to rekkene over der, og tre enheter på de to rekkene øverst).
E: Og da kom jeg til 19 cm.
I: Hvordan kom du frem til at firkantene inni figuren skulle ha den størrelsen?

E: Jeg bare tok den lille firkanten, og tegnet sånn ca. inni den store sånn at de dekket den. (tegner rundt den lille firkanten med en blyant, og tegner så rundt noen av firkantene han har tegnet inni den større figuren).
I: Hvordan tenkte du med den siden som er litt skrå her da? (peker på høyre sidelinje til den større figuren)
E: Jeg bare tok firkantene sånn at de passet sånn ca.

Espen sier at han plasserte den lille firkanten inni figuren slik at den ble delt opp, og så telte hvor mange det var. Figuren er delt opp i firkanter av forskjellig størrelse, men som ligger tett i tett. Han sier så at han kom frem til at det var 19 cm. Ved spørsmål om hvordan han tegnet firkantene utdyper Espen at han bruke den lille firkanten og tegnet de sånn ca. inni den store figuren slik at de dekket den fullstendig. Ved spørsmål om hva han tenker angående den skrå linjen til høyre i figuren svarer han at han tegnet firkantene sånn at de passet sånn ca.

Espen viser at han har tegnet den lille firkanten inni den store figuren og sier at «Jeg tenkte den firkanten inni der». Espen sier at han *laget* den lille firkanten inni den store figuren. Dette kan vise til at han gjør visuelle vurderinger av at den lille firkanten kan få plass inni den store figuren flere ganger. Firkantene Espen lager er av forskjellig størrelse. Dette kan tolkes til at Espen ikke vurderer enhetens størrelse og at den må være lik. Dette blir også bekreftet da han teller firkantene som likeverdige gjennom at han peker på dem og sier «1, 2, 3, […]» uten å *vurdere* at firkantene har forskjellig størrelse. Dette kan tyde på at Espen vurderer firkantene ut ifra visuelle inntrykk. Disse to faktorene signaliserer at Espen arbeider på et nivå for illustrasjon (A).

Espen sier videre at han teller firkantene og demonstrerer dette «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8». Som på pretesten er det imidlertid vanskelig å vurdere om Espen viser at han har et mentalt bilde av hva areal er, da det ikke kan vurderes om han ser at enheter kan adderes sammen for å representere areal da oppgaven spør etter «hvor mange» og ikke «hva er arealet». Det kan som på pretesten antas at han arbeider på et nivå for illustrasjon, ved at han ser visuelt at enhetene kan telles for å finne hvor mange det er (A).

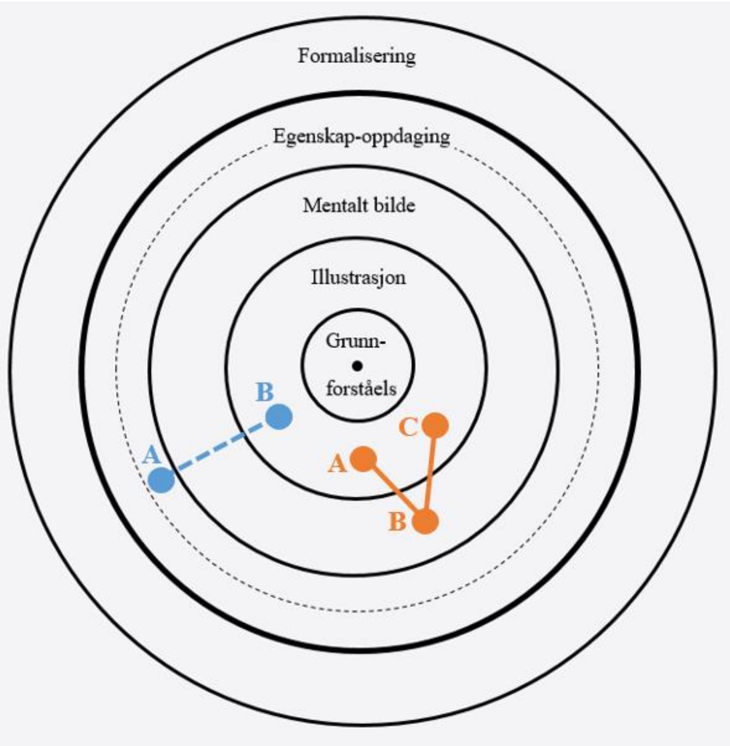
Espen *forteller* imidlertid videre at han «tok den lille firkanten, og tegnet sånn ca. inni den store sånn at de dekket den» og viser på tegningen at han har tegnet firkanter som dekker flaten fullstendig og ligger tett i tett. Dette kan tolkes til at han *ser* at enheter kan settes sammen og dekke en flate fullstendig for å representere helheten, som kan tolkes til at Espen har en forståelse for bildet som kan knyttes opp til nivå for mentalt bilde (B).

Helt til slutt svarer Espen at han «bare tok firkantene sånn at de passet sånn ca.» på spørsmål om hvordan han tenkte med den skrå linjen i figuren, og tegningen viser at firkantene er tegnet inn med forskjellig form og størrelse der den skrå linjen gjør at noen firkanter er delt. Espen sier at han *laget* firkantene «sånn at de passet sånn ca.». Ordet «ca.» kan gi assosiasjoner om øyemål, noe som kan si at han foretar visuelle *vurderinger* av firkantene og den store figuren. Espen *vurderer* altså gjennom visuelle inntrykk av størrelse hvordan han kan tegne firkantene sånn at de var ca. like store som de andre, selv om de hadde en skrå strek. Det ser heller ikke ut for at Espen vurderer den lille firkantens og den store figurens geometriske egenskaper, da han ikke sier noe om dette, og ser ut til å ikke reagere på at de har forskjellig form. Dette kan vise at Espen arbeider på et nivå for illustrasjon da han foretar visuelle vurderinger og har vanskeligheter med å vurdere figurers geometriske egenskaper (C).

Espens forståelse er noe vanskelig å identifisere. Espen tegner inn firkanter ved den skrå linjen ut ifra en forståelse om at enheter må ligge tett i tett og dekke flaten fullstendig, og tilpasser forståelsen han sitter med for å løse en oppgave som skiller seg fra oppgaver han mest sannsynlig er vant med (som rektangler). Han ser imidlertid ikke at oppgaven skiller seg så mye fra tidligere oppgaver at det ikke er mulig å foreta slike tilpasninger. En relasjonell forståelse innebærer at elever klarer å se når en oppgave skiller seg så mye fra det opprinnelige at en må endre løsningsstrategi, og da Espen ikke ser dette kan det være et tegn på at forståelsen er instrumentell. Da han mest sannsynlig gjør dette på grunn av at han ikke har oppdaget egenskaper som at enheter må være av samme størrelse og form, kan ikke forståelsen uten videre «stemples» som instrumentell. Espen kan ha en relasjonell forståelse rundt at firkanter kan plasseres inni en større figur, at de må dekke flaten og ligge tett i tett, selv om han her bruker det feil. Igjen er det vanskelig å avgjøre forståelsesformen til Espen da han er inni en utviklingsprosess.

Sammenligning:
På pretesten viser Espen at han har oppdaget egenskaper for figurers størrelse, og geometriske egenskaper til rektangler. Disse tar han imidlertid ikke med seg for å løse problemet gjennom illustrasjon da firkantene hans er av forskjellig størrelse.

På posttesten ser det ut til at Espen ikke arbeider med geometriske egenskaper da han ikke måler den lille firkanten som i pretesten, og viser ikke tegn til å vurdere at størrelsen til det lille kvadratet har noen hensikt. Han vurderer muligens heller ikke at størrelsen er viktig da han fortsatt tegner opp firkanter slik at de er av forskjellig størrelse, og teller firkantene som likeverdige. Under posttesten har imidlertid Espen muligens utviklet et mentalt bilde da han ser at firkantene må dekke flaten fullstendig og ligge tett i tett.



Modell 10: Espens bevegelse for pre- og posttest oppgave 12.

Pretesten er illustrert i blått. Espen forutser egenskaper angående størrelse og geometriske egenskaper for rektangler og arbeider først på et nivå for egenskap-oppdaging (A). Videre lager han ruter inni figuren og foretar visuelle vurderinger av problemet både ved opptegning og telling og arbeider på et nivå for illustrasjon (B). (Da Espen ikke tar med seg det han forutså i nivået for egenskap-oppdaging når han tegner ruter, er overgangen til nivå for illustrasjon markert med en stiplet linje).

Posttesten er illustrert i oransje. Espen lager firkanter inni den større figuren, der firkantene er av forskjellig størrelse, og arbeider på et nivå for illustrasjon (A). Videre forteller Espen at firkantene må dekke figuren, og ser at enheter kan settes sammen og dekke en flate fullstendig for å representere helheten og arbeider på et nivå for mentalt bilde (B). Til slutt bruker Espen vurderinger av visuelle inntrykk for å håndtere den skrå linjen i den store figuren og arbeider på nivå et nivå for illustrasjon (C).

5.2.4. Variasjonsteori og spor i forståelsen

Et kritisk aspekt som undervisningen vektla var «Prikkarkfigur: Elever tror areal er det som er i midten, og teller da antall prikker i midten». Dette er sett nærmere på under oppgave 2b i testen. Under pretesten viser Espen at han har problemer med dette, og sier at arealet er prikkene inni figuren. Under posttesten viser Espen at han har utviklet forståelsen til å se at arealet inni en prikkarkfigur ikke er antall prikker, men antall ruter som kan visualiseres gjennom å bruke prikkene som lengdemål. Det kan tolkes at dette var et kritisk aspekt for Espen, og at bruk av variasjonsteorien her har klart å tydeliggjøre hva areal er gjennom variasjonsmønster i undervisningen slik at Espen har klart å utvikle et mentalt bilde for dette.

To andre kritiske aspekter undervisningen vektla var å «finne areal uten å telle ruter» og å «koble antall ruter med lengdemålene langs kantene». Under pretesten har Espen problemer med begge disse aspektene, der han i oppgave 8 tegner opp antall ruter som ikke samsvarte med tallene for sidelengdene, og teller rutene. I posttesten har imidlertid Espen oppdaget hvordan tallene langs sidelengdene relaterer seg til antall enhetene langs sidelinjene. Videre teller han fortsatt rutene, men han bruker logisk multiplikasjon som gjør at han ikke teller én og én rute. Gjennom at Espen har oppdaget disse to egenskapene kan det tolkes at han er veldig nær ved å oppdage den aritmetiske formelen for areal og da videre kan regnet areal uten å telle ruter. Det kan tolkes at disse to aspektene var kritiske for Espen og at undervisning basert på variasjonsteori klarte å tydeliggjøre disse aspektene slik at de ble oppdaget.

To kritiske aspekter i areal var å «oppfatte at måleenhetene må være like store» og å «finne areal når det er halve ruter». Espen viser problemer med begge disse under både pre- og posttesten for oppgave 12. Han tar ikke notis av den skrå linjen til høyre i figuren som har til hensikt å dele enhetene opp, og Espen har muligens ikke oppdaget hvordan geometriske egenskaper gjør at delte enheter kan settes sammen til hele. Videre tegner Espen firkanter av forskjellig størrelse inni figuren, og teller dem som likeverdige, for både pre- og posttesten, noe som kan tyde på at han ikke har oppdaget egenskapen om at enheter må være like store. Under pretesten viser imidlertid Espen tegn til å «være på randen» til å oppdage at enheter må være like, da han velger å måle det lille kvadratet for å finne ut hvor mange det er plass til inni den større figuren. Under posttesten måler han imidlertid ikke kvadratet lenger. Da det ser ut for at Espen ikke har hatt noen respons på undervisningen med fokus på disse kritiske aspektene, men snarere en tilbakegang da han ikke lenger måler det lille kvadratet, kan det settes spørsmål ved om disse kritiske aspektene passet for Espen. Kan det være mulig at Espen i utgangspunktet hadde noen andre kritiske aspekter ved dette, enn det som var satt opp for undervisningen, da han her viser en tilbakegang?

5.3. Oppsummering

Malin:

Pretesten viser at Malin arbeider på et nivå for illustrasjon da hun *lager* ruter i figurene. Hun viser også at hun har et mentalt bilde av hva areal er gjennom at hun *forteller* at areal er område inni figuren, og teller ruter. Videre viser Malin at hun har en begynnende egenskap-oppdaging av at enheter må være like, gjennom sammenligning av ruter med andre figurer. Hun har oppdaget geometriske sammenhenger mellom egenskaper til figurer, og *forutser* hvordan et trapes kan omgjøres til et rektangel da hun klarer å sette sammen enheter som er delt slik at de blir hele. Dette kan også tyde på at Malin har *registrert* at enheter måtte være like. Analysen indikerer at Malin har en relasjonell forståelse av areal.

Posttesten viser at Malin *lager* ruter for å løse problemer i oppgave 8 og arbeider på et nivå for illustrasjon. Videre har hun et mentalt bilde av areal da hun kan *fortelle* at enheter kan telles for å representere areal. Malin viser at hun arbeider på et nivå for egenskap-oppdaging da hun har *registrert* egenskapen at enheter må være like for å kunne representere et areal gjennom at hun sier eksplisitt at enheter måtte være like. Hun gir også uttrykk for å ha *registrert* en sammenheng mellom hele og halve ruter. Videre bruker Malin en linjal til å tegne, og viser at hun har *registrert* at cm kan brukes for å dele en figur opp i enheter for å finne areal. Malin avviser imidlertid sin egen tegning på bakgrunn av at rutene ikke er helt like store, og viser en instrumentell forståelse for at ruter må være like. Malin arbeider på et nivå for formalisering for oppgave 8, der hun *bruker* formelen for areal. Hun *forsvarer* imidlertid ikke hvorfor formelen virker eller hva symbolene i formelen står for, og gir uttrykk for å ikke ha oppdaget sammenhengen mellom tall og antall enheter langs en sidelinje. Dette er tolket til at Malin hadde en instrumentell forståelse for arealformelen.

Under pretesten arbeider Malin på nivå for illustrasjon, mentalt bilde og egenskap-oppdaging. På posttesten arbeider Malin på alle nivåene i modellen.

Espen:

Pretesten viser at Espen arbeider mye på et nivå for illustrasjon. Han *lager* ruter for å løse problemene, og foretar *vurderinger* basert på visuelle inntrykk av figurenes form og størrelse. Han viser imidlertid tegn til å arbeide på et nivå for egenskap-oppdaging da han velger å måle det lille kvadratet i oppgave 12. Han viser at han har *registrert* at størrelse er en egenskap ved firkanten som setter krav til hvor mange det er plass til inni den større figuren. Oppdagelsen rundt størrelse blir imidlertid ikke brukt når han tegner rutene, der han bruker visuelle *vurderinger* igjen. Espen viser tegn på at han har dannet et mentalt bilde av areal da han muligens teller rutene for å finne areal, men dette er noe uklart. Det er vanskelig å identifisere hvilken forståelsesform Espen viser da han ikke har kommet langt i sin læringsprosess. Han viser imidlertid relasjonell forståelse for måling av det lille kvadratet, men da han ikke bruker kunnskapen videre er den vurdert som instrumentell da han ikke overfører kunnskapen til målemetoden for areal.

Posttesten viser at Espen *lager* ruter for å finne areal, og arbeider på nivået illustrasjon i alle oppgavene. Videre viser Espen at han har utviklet et mentalt bilde av hva areal er da han *forteller* at enheter er noe som kan adderes sammen for å finne helheten, og han *ser* at enheter må ligge tett i tett og dekke flaten fullstendig. Espen har videre oppdaget egenskaper for areal, der han har *registrert* sammenhengen mellom tall og antall enheter langs en sidelinje, og bruker logisk multiplikasjon. Han har også *registrert* at cm er en type enhet som kan brukes for å dele en figur opp i ruter og finne areal. Espen har imidlertid ikke oppdaget at enheter må være av samme form og størrelse for å kunne representere et areal, og tegner fortsatt opp firkanter av forskjellig størrelse og form i oppgave 12. Gjennom tolkningene ser det ut for at Espen har utviklet en relasjonell forståelse av areal.

Espen arbeider på nivåene illustrasjon, mentalt bilde og egenskap-oppdaging i modellen for både pre- og posttesten.

6. Diskusjon, konsekvenser og veien videre

Oppgavens fokus er å søke innsikt i lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan forståelsen kan være dynamisk i en læringsprosess.

For å få innsikt i dette er Piaget et al., van Hiele og Pirie og Kieren koblet sammen. Piaget et al. gir innsikt i grunnleggende teori for elevers utvikling av arealforståelse. Da emnene areal og geometri kan knyttes sammen er van Hieles teorier for utvikling av geometrisk forståelse trukket inn for å tydeliggjøre momenter i Piaget et al. sin arealteori. Videre er disse to teoriene kombinert med Pirie og Kieren sin modell for utvikling av matematikkforståelse, da denne tilbyr en dynamisk tilnærming. En kombinasjon av disse tre velkjente teoriene gir et teoretisk redskap for å få innsikt lavtpresterende elevers forståelse av areal, og hvordan de utvikler sin arealforståelse der modellen ved å være dynamisk åpner for at elever kan bevege seg frem og tilbake mellom nivåer i sin utvikling. Dette danner grunnlaget for en «ny» analysemodell for forståelse av areal.

Denne «nye» modellen brukes for å få innsikt i elevers uttalelser om hva de har tenkt og gjort i løsning av arealoppgaver, både for en pre- og en posttest. Analysen viser lavtpresterende elevers måter å forstå areal på. Det kommer frem at elevene kan ha mye forståelse for areal selv i tilfeller de ikke har en fullstendig forståelse enda. Både Malin og Espen viser for oppgave 8 i pretesten at de har dannet forståelse for at et areal kan deles opp i enheter som kan representere helhetens størrelse, og hvordan disse må ligge tett i tett, selv om begge manglet noe på forståelsen til å oppnå rett svar. At elevene kan ha mye grunnleggende forståelse innen emnet selv om denne ikke er fullstendig, viser at betegnelsen «lavtpresterende» ikke trenger å bety at elevene ikke har forståelse innen emnet. Dette viser også at resultater fra en test gir ufullstendig informasjon om elevers forståelse, da resultatene fra pretesten viser at Malin og Espen har svart «feil» på oppgave 8 (tabell 4) men ingenting om at de faktisk har mye forståelse av areal.

Videre viser analysen hvordan elevers forståelse og forståelsesutvikling kan være dynamisk. Modell 5-10 viser hvordan Malin og Espen arbeider på flere nivåer for å løse arealoppgaver, og beveger seg mellom disse i sine løsningsprosesser. Det kommer frem at de har oppnådd forståelse for forskjellige deler av begrepet areal, der eksempelvis Espen ser relasjoner mellom tall og antall enheter langs en sidelinje, uten at Malin ser dette. Malin har imidlertid oppdaget at enheters form og størrelse har noe å si, og er i stand til å bygge sammen enheter til å bli like store, mens Espen ikke gjør det. Dette viser at Malin og Espen har lagt forskjellige brikker av forståelse, som viser at forståelse kan være dynamisk gjennom at elever lærer momenter i forskjellig rekkefølge. Dette harmonerer med Magne (1994) sin «puslespill-metafor» (referert i Johnsen-Høines & Rangnes, 2012, s. 103) om at utviklingen kan sammenlignes med et puslespill der barn legger ulike brikker til ulike tider. Dette er med på å bekrefte at «stein på stein» metaforen for matematikforståelse alene ikke er nok.

Det kommer også frem at elevers forståelse er dynamisk gjennom at den kan forandre seg mye i en læringsprosess. Etter bare noen uker viser resultater fra pre- og posttesten at eksempelvis Espen har utviklet en rikere forståelse for areal under posttesten, der han nå ser sammenhenger mellom tall og antall enheter langt en sidelinje og det kan observeres at han arbeidet på flere nivåer enn ved pretesten. At elevene utvikler seg mye gjennom undervisningen, viser at betegnelsen «lavtpresterende» ikke trenger å være en statisk og altomfattende situasjon, (som den dessverre ofte tolkes til å være i skolesammenhenger). Å være «lavtpresterende» på én test trenger ikke bety at elever ikke kan utvikle seg til å få en rik forståelse.

Jeg viser i denne studien hvordan elever beveger seg dynamisk i en modell, hvordan de arbeider på mange nivåer, gjerne i varierende rekkefølge der de legger brikker i forståelsen til forskjellig tid. Disse funnene viser hvor viktig det kan være at elever blir introdusert for varierte oppgaver. Elever må få mulighet til å arbeide med oppgaver som inneholder elementer på flere enn ett nivå, uten at det stilles som krav at elevene skal utvikle «full» forståelse for et nivå før de får gå videre. Det kan på bakgrunn av dette settes spørsmålstegn ved nivåinndelt undervisning. Inndeling i nivåer kan gjøre at elever bare får arbeide med oppgaver som inneholder noen momenter av det som skal læres. Elevene får da ikke bevege seg mellom alle nivåene som den «nye» arealmodellen inneholder, noe som vil kunne begrense elevernes utvikling.

Gjennom oppgaven skal det også ses på om elevers forståelse er relasjonell eller instrumentell, og hvordan dette kommer til uttrykk. Relasjonell- og instrumentell forståelse er drøftet opp mot de tre teoriene rundt forståelse, som danner grunnlag for den «nye» modellen for utvikling av arealforståelse. Det er ut ifra dette presentert identifikasjoner for når en forståelse kunne ses på som relasjonell eller instrumentell. Dette gir grunnlag for å kunne få innsikt i hvilke forståelsesformer elevene uttrykker. Det kommer frem at elevene har grader av både relasjonell- og instrumentell forståelse av areal, der analysen viser at eksempelvis Malin har en relasjonell forståelse for aktiviteter på ett nivå og en instrumentell forståelse for et annet nivå. Videre kommer det frem at forståelsen kan bevege seg fra den ene forståelsesformen til den andre. Et eksempel på dette er Malin som først har en relasjonell forståelse for hvordan enheter av forskjellig størrelse kan settes sammen til hele enheter. Videre har hun utviklet en instrumentell forståelse for dette der enhetene må være «perfekt like», eller settes sammen som like ved å bruke «halve» ruter. Denne bevegelsen mellom de to forståelsesformene viser også hvordan forståelsen til elever er dynamisk. Det kommer også frem gjennom analysen at det kan være vanskelig å identifisere om forståelsen er relasjonell eller instrumentell når elever ikke har kommet langt i sin utvikling av arealforståelse, noe som var tilfellet for Espen under pretesten. Dette kan komme av at eleven hadde problemer med å forklare og begrunne valg og handlinger, som igjen gjør at grunnlaget for å si noe om elevens forståelsesform blir noe begrenset.

Det er sett nærmere på om det er spor i forståelsen som kan knyttes til variasjonsteori, og eventuelt på hvilken måte. Dette er vurdert gjennom å se nærmere på hvilken forståelse elevene har utviklet i forhold til de kritiske aspektene for areal, som ut ifra variasjonsteorien danner grunnlaget for hva undervisningen vektlegger. Det kommer frem at elevene har utviklet veldig forskjellige forståelser, og i noen tilfeller kan det se ut til at de kritiske aspektene ikke passer like godt for alle elevene. Malin viser i pretesten at hun ikke har problemer med det kritiske aspektet «oppfatte at måleenhetene må være like store», da hun viser tegn til å se at enheter må være like gjennom sammenligning med andre oppgaver og ved å sette enhets-bitene i oppgave 9 sammen for å danne hele ruter. Posttesten viser at etter undervisning har imidlertid Malin utviklet en instrumentell regel for at enheter må være like store, der hun ser på dette som at ruter måtte være «perfekte». Denne forståelsen gjør at hun avviser sine egne relasjonelle metoder for å finne areal når ruter er delt. Videre viser Espen tegn til å oppdage at enheter må være like da han under pretesten måler det lille kvadratet i oppgave 12. Etter undervisning viser han imidlertid ikke tegn til å forstå at enheter måtte være like, og måler ikke lenger kvadratet. Det er problematisert om elevene har kritiske aspekter som samsvarte med de som er oppsatt for undervisningen, eller om de muligens har noen andre kritiske aspekter. Om sistnevnte er tilfellet kan det spørres: Er det hensiktsmessig å sette opp et knippe kritiske aspekter og basere undervisningen på disse, da det ser ut for at elevene kan ha veldig forskjellige kritiske aspekter? Å utvikle kritiske aspekter for en hel klasse på denne måten kan føre til en noe statisk tenkning og undervisning, som kan være uheldig for den enkelte elevs tilpassede opplæring. Ling (2014, s. 44) beskriver at resultatene fra pre- og posttest viste at lavtpresterende elever har stor nytte av undervisningsmetoden, og at variasjonsteori har blitt regnet som spesielt egnet for disse elevene. Pre- og posttest i denne undersøkelsen viser også at Malin og Espen gjør fremgang, der eksempelvis Malin går fra 22,7

% rett på pretesten til 81,8 % rett på posttesten (tabell 4). Når jeg søker nærmere innsikt i enkeltelementer viser analysen imidlertid at blant annet Malin kan ha utviklet en mindre hensiktsmessig forståelse av areal. Det må selvfølgelig tas i betraktning at denne studien har brukt et fåtall elever, og at den har foregått i andre kontekster, som gir begrensninger i forhold til sammenligning og hvor omfattende resultatene kan regnes. Når dette er sagt viser den imidlertid noe annet enn det som tidligere er presentert. Det kan da settes spørsmål ved om undervisningsmetoden er så egnet som tidligere vist.

Studien som presenteres viser hvordan tre teorier kan kombineres for å få innsikt i elevers arealforståelse, og utviklingen av denne. Studien gir innsikt i lavtpresterende elevers måter å forstå areal på, og det kommer frem at lavtpresterende elever kan ha mye forståelse for emnet selv i tilfeller de ikke har en fullstendig forståelse. Videre viser studien hvordan forståelsen kan ses på som relasjonell eller instrumentell, der det kommer frem at elevene har grader av begge forståelsesformene og at forståelsen kan bevege seg fra den ene forståelsesformen til den andre i en læringsprosess. Studien viser også hvordan forståelsen kan være dynamisk, gjennom at elevene beveger seg mellom flere nivåer for å bygge forståelse, oppnår forståelse for ulike deler av arealbegrepet, og at forståelsen forandrer seg mye i læringsprosessen. Til slutt er forståelsen elevene uttrykte knyttet opp mot variasjonsteori og kritiske aspekter, der det er vurdert hvordan disse kan ha påvirket elevenes forståelse. Det ser ut for at de kritiske aspektene ikke passer helt med de lavtpresterende elevenes forutsetninger, og det er problematisert om det da er hensiktsmessig å basere undervisningen på noen få kritiske aspekter. Studien som her er presentert gir innsikt i viktige faktorer i arealforståelse, kunnskap om hvordan lavtpresterende elever kan forstå areal, kompleksiteten som ligger i utvikling av forståelse og hvordan forståelse kan være relasjonell eller instrumentell. Denne innsikten kan gi konsekvenser for forskning om forståelse og areal, læremiddelprodusenter og læreres arbeid med undervisning i areal.

I en videre studie vil det ut ifra det som presenteres være interessant å se nærmere på høgtpresterende elevers forståelse av areal, om deres forståelse kan identifiseres som dynamisk og hvilke forståelsesformer de viser for areal. Det ville da muligens også være nødvendig å utvikle den «nye» modellen som er presentert til å inneholde høyere nivåer. Det kan også ses på om de samme kritiske aspektene passer med høgtpresterende elevers forutsetninger hvis undervisningen baserer seg på variasjonsteori.

Videre kan det vært interessant å se på om resultatene vil vært de samme om undervisningen var mer hverdagsrettet, der areal er lært utenfor «skolematematiske teoretiske rammer». Det kan også være interessant å bruke denne modellen som et analyseverktøy for å se på forståelsene til elever før undervisning, og bruke informasjonen til å tilrettelegge videre undervisning i areal. Det ville være spennende å se hvordan forståelsen til elevene utviklet seg ved bruk av innsikt som modellen kan gi.

7. Referanseliste

Alseth, B., Nordberg, G., & Røsseland, M. (2006). *Multi 5b*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag.

Antonsen, R. (2013, 20.12.). Matematikk og forståelse. *Aftenposten Viten*. Lastet ned fra http://www.aftenposten.no/viten/Matematikk-og-forstaelse-7411849.html

Biggs, J.B., & Tang, C. (2007). *Teaching for quality learning at university: what the student does* (3. utg.). Maidenhead: McGraw-Hill/Society for Research into Higher Education and Open University Press.

Crowley, M.L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12*, 1-16. Hentet fra http://www.csmate.colostate.edu/docs/math/mathactivities/june2007/The%20van%20Hiele%20Model%20of%20the%20Development%20of%20Geometric%20Thought.pdf

Dalland, O. (2012). *Metode og oppgaveskriving* (5. utg.). Oslo: Gyldendal Norsk Forlag AS.

De Nasjonale Forskningsetiske Komiteene. (2015). Deling av data: policy, etikk og erfaringer. Lastet ned fra https://www.etikkom.no/Aktuelt/Nyheter/2015/deling-av-data-policy-etikk-og-erfaringer/

Flaa, J. (2015, 20.04.). Scorer svakt på nasjonale prøver. *Agderposten*. Lastet ned fra https://web-retriever-info-com.galanga.hib.no/services/archive/displayDocument?documentId=0550232015042059a29515d496b842469dfc669839016e&serviceId=2

Hatch, J.A. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Albany, N.Y: State University of New York Press.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge : the case of mathematics*. Hillsdale, N.J: Erlbaum.

Johnsen-Høines, M. (2003). Det skjer i mellomrommet. *Tangenten - tidsskrift for matematikkundervisning, 2*(2003), 42-48.

Johnsen-Høines, M., & Rangnes, T.E. (2012). Å endre matematikkundervisningen - et risikoforetak. I Johnsen-Høines, M. & Alrø, H. (Red.), *Læringssamtalen i matematikkfagets praksis* (s. 93-106). Bergen: Caspar Forlag.

Kollegialt Lärande. (u.å.). Learning study. Lastet ned fra http://www.learningstudy.se/index.php?page=learning-study

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. I Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Red.), *The emergance of mathematical meaning: Interactions in classroom cultures* (s. 229-270). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kvale, S., Anderssen, T.M., & Rygge, J. (1997). *Det kvalitative forskningsintervju*. Oslo: Ad notam Gyldendal.

Kvale, S., Brinkmann, S., Anderssen, T.M., & Rygge, J. (2009). *Det kvalitative forskningsintervju* (2. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Ling, L.M. (2014). *Variationsteori - för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur AB.

Marthinsen, K.B., Melgård, M., & Strømmen, O. (2011, 07.07.). Dette er norges beste skoler. *Dagbladet*. Lastet ned fra http://www.dagbladet.no/2011/07/07/nyheter/kommuneborsen/innenriks/skole/17219870/

McCool, J.K., & Holland, C. (2012). Investigating Measurement Knowledge. *Teaching Children Mathematics, 18*(9), 542-548.

Mellin-Olsen, S. (1977). *Læring som sosial prosess.* Hentet fra http://www.nb.no/nbsok/nb/af62661466b5f6eee350f3feed647c07.nbdigital?lang=no#5

Mellin-Olsen, S., & Hoel, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet: en undervisninglære*. Bekkestua: NKI-forl.

Nordheim, L. (2015, 21.11.). Larvik under snittet på nasjonale prøver. *Østlands-Posten*. Lastet ned fra http://web.retriever-info.com.galanga.hib.no/services/webdocument?documentId=0096422015112123682126 8&serviceId=2

Norsk Samfunnsvitenskapelige Datatjeneste. (2015). Fremtidens forskning på deling. Lastet ned fra http://www.nsd.uib.no/tema.html?a=/tema/tema0003.html

Opplæringsloven. (2009). *Forskrift til opplæringslova*. Lastet ned fra https://lovdata.no/dokument/SF/forskrift/2006-06-23-724/KAPITTEL_4#KAPITTEL_4.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics, 9*(3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 165-190.

Pirie, S.E. (1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalised...? How can we know? *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 2-6.

Putrawangsa, S., Lukito, M.W.A., & Siti, M. (2014). *Educational Design Research: Developing Students' Understanding Of Measurement Units Of Area*. Paper presentert ved International Seminar on Innovation in Mathematics and Mathematics Education, Departement of Mathematics Education Faculty of Mathematics and Natural Science Yogyakarta State University.

Ravlo, G., Vinje, B., Johansen, O.H., & Åsenhus, R. (2014). *RAPPORT NASJONALE PRØVER I REGNING 8. og 9. TRINN 2013.* Trondheim: NSMO/NTNU.

Rydje, O.M. (2016, 18.01.). Kan skolens kvalitet måles?. *Agenda*. Lastet ned fra http://www.tankesmienagenda.no/notater/kan-skolens-kvalitet-males/

Rydje, O.M. (2016, 26.01.). Fordumming og forenkling av skolen. *Dagbladet*. Lastet ned fra http://www.dagbladet.no/2016/01/26/kultur/debatt/meninger/kronikk/sskolepolitikk/42883849/

Skemp, R.R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Smestad, B. (2008). Geometriaktiviteter i lys av van Hieles teorier. *Tangenten - tidsskrift for matematikkundervisning, 1*(2008), 2-6.

Star, J. (2014). Instrumental and Relational Understanding in Mathematics Education. I Lerman, S. (Red.), Encyclopedia of Mathematics Education (s. 304-307): Springer Netherlands: Dordrecht. Hentet fra http://link.springer.com.galanga.hib.no/book/10.1007%2F978-94-007-4978-8.

Sætre, J. (2014, 09.08). Vil erstatte pugging med tanketeknikker. *Bergens Tidende*. Lastet ned fra http://www.bt.no/nyheter/lokalt/Vil-erstatte-pugging-med-tanketeknikker-3173921.html

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: en innføring i kvalitativ metode* (4. utg.). Bergen: Fagbokforl.

Thompson, T.D., & Preston, R.V. (2004). Measurement in the Middle Grades: Insights from NAEP and TIMSS. *Mathematics teaching in the Middle School, 9*(9), 514-519.

Utdanningsdirektoratet. (2010). *Rammeverk for nasjonale prøver*. Lastet ned fra http://www.udir.no/Upload/Nasjonale_prover/2010/5/Rammeverk_NP_22122010.pdf?epslanguage=no.

Utdanningsdirektoratet. (u.å.). *Nasjonale prøver*. Lastet ned fra http://www.udir.no/Vurdering/Nasjonale-prover/#Mestringsbeskrivelser-og-hva-provene-maler.

Valenta, A., Enge, O., & Botten, G. (2012, 06.11.). Matte er mer enn pugging. *Aftenposten Kronikker*. Lastet ned fra http://www.aftenposten.no/meninger/kronikker/Matte-er-mer-enn-pugging-7038364.html

Van Hiele, P.M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics, 5*(6), 310-316.

Van Hiele, P.M. (2004). The child's thought and geometry. I Carpenter, T.P., Dossey, J.A. & Koehler, J.L. (Red.), *Classics in mathematics education research* (s. 60-65). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics

Yuberta, K.R., Zulkardi, Z., Hartono, Y., & Galen, F.v. (2011). Developing Student's Notion of Measurement Unit For Area. *IndoMS. JME, 2*(2), 173-184.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 224-239.

8. Vedlegg

8.1. Vedlegg 1: Kritiske aspekter i areal

Våre hypoteser om kritiske aspekt:

Mange elever har problemer

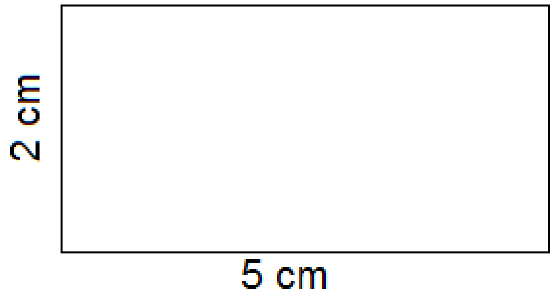
- Oppfatte at måleenhetene må være like store.
- Finne areal uten å telle ruter
- Finne areal når det er halve ruter.
- Finne areal av trekanter.

Enkelt elever har problemer

- Tegner ruter og teller, men kobler ikke antall ruter med lengdemålene langs kantene.
- Kvadratcentimeter er kantene.
- Multipliserer lengde med bredde. Tegner ikke ruter. *Kan* være mekanisk, for eleven klarer ikke oppgave 6, der en skal finne areal ved å tegne og telle ruter.
- Legger sammen tallene som står langs sidene. Kobler ikke telle ruter med areal.
- Er usikker, henviser til mekanisk regning: «noen ganger så plusser eg, og noen ganger så ganger jeg.»
- Areal på 4 cm^2 - da har figuren sider på 4 cm.
- «Skal vi ikke gange sidene?" Eleven teller alle rutene langs begge sidene og får ti «Det blir 10 * 10, som er 100»
- Prikkarkfigur: «Areal tror jeg er det som er i midten» Teller antall prikker i midten. Den har tre og den har fire. Det er tre centimeter.
- Er ikke sikker hva areal er, men tror areal er det rundt.
- Tenker at areal er antall ruter rundt figuren.

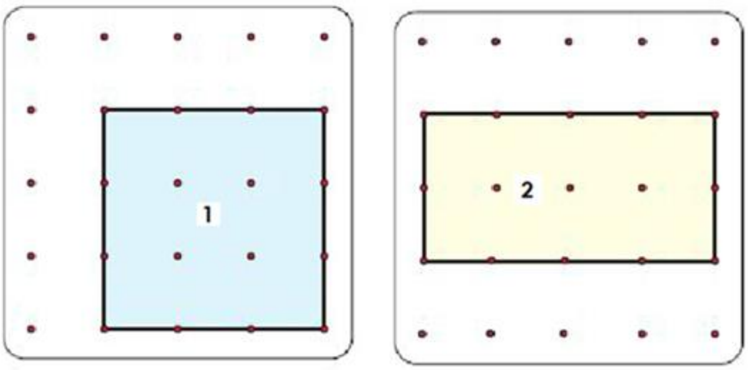
8.2. Vedlegg 2: Test i areal og omkrets

1 Kva er omkrinsen til figuren?



Omkrinsen er ____________

2a Kva for ein av figurane har størst omkrins? Set ring rundt rett svar.



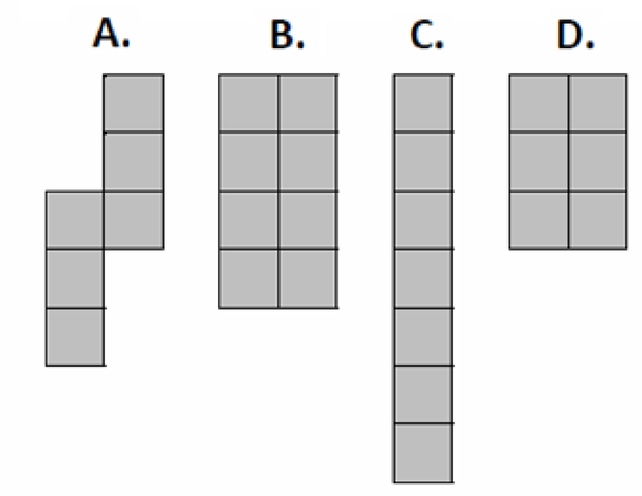
A. figur 1   B. figur 2   C. Lik omkrins   D. Umogleg å seie, fordi_____________________________

____

2b Kva for ein av figurane har størst areal?

A. figur 1   B. figur 2   C. Lik omkrins   D. Umogleg å seie, fordi_____________________________-
____

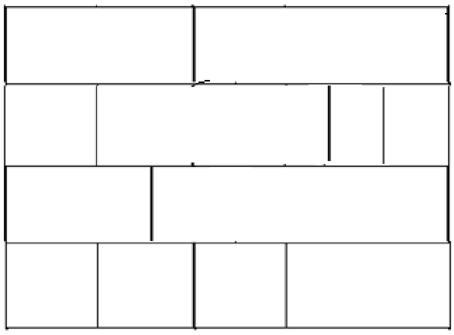
3a Kva er omkrinsen til figurane?



A_________ B___________ C___________ D______________

3b Kva er arealet av figurane?
A_________ B___________ C___________ D______________

4 Kor stort areal har figuren?

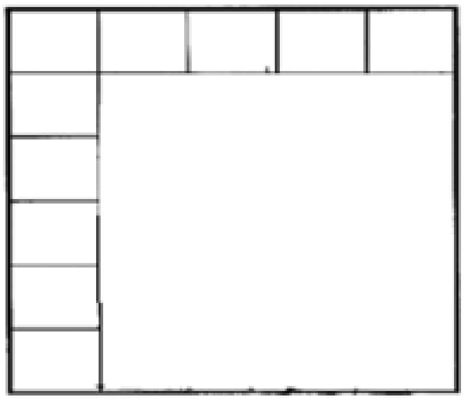


A. 8 B. 11 C. 12 D. Umogleg å seie,
fordi________________________________

____

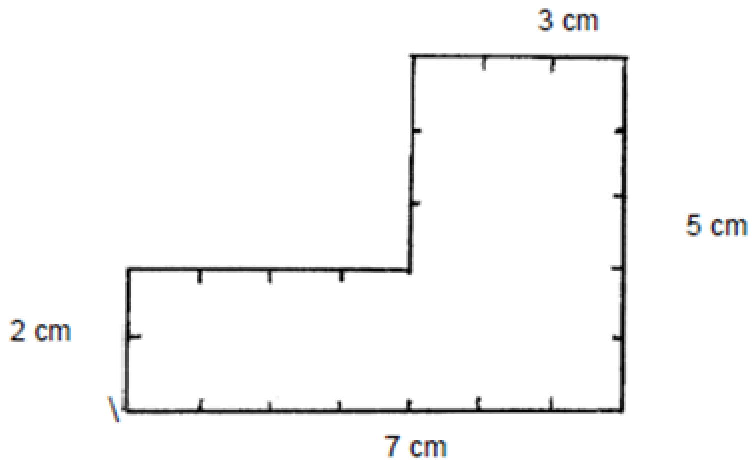
5

Kva er arealet av figuren? Vis korleis du kjem fram til svaret.

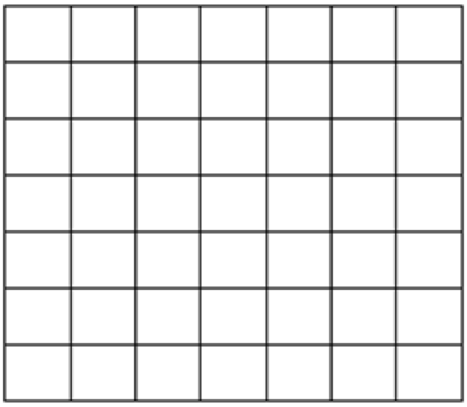


Arealet er _______________

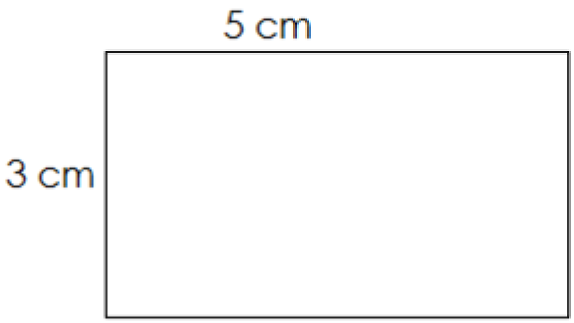
6 Kva er arealet av figuren? Vis korleis du kjem fram til svaret.



7 Teikn eit rektangel som har eit areal på 12 cm^2.

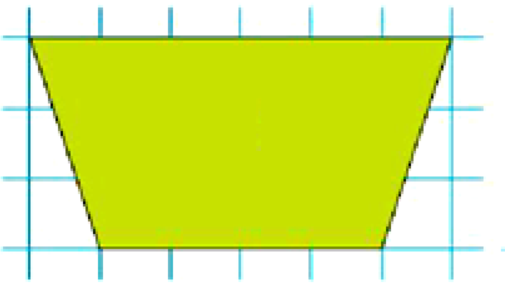


8 Kva er arealet av dette rektanglet? Vis korleis du kjem fram til svaret.



Arealet er _______________

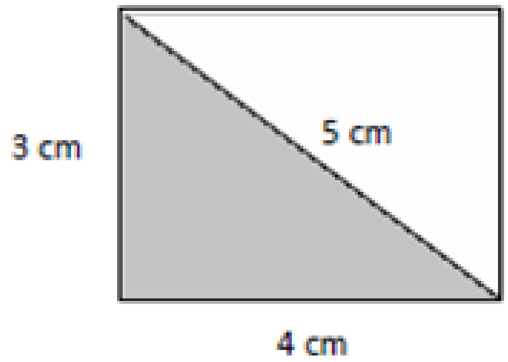
9 Kva er arealet av figuren?



A. 16 B. 18 C. 15 D. Umogleg å seie,
fordi_____________________________

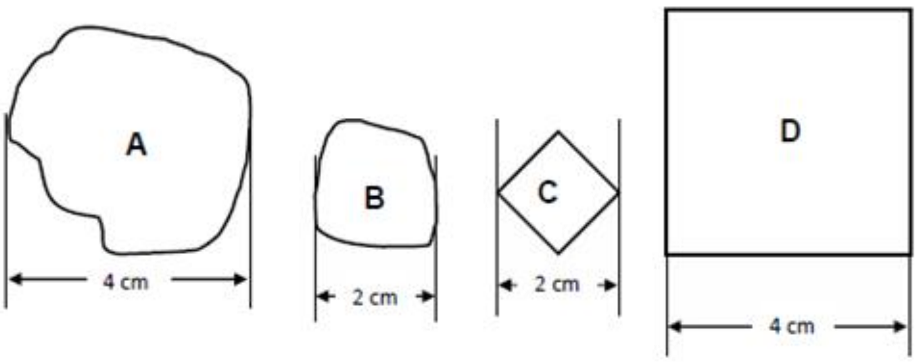
____

10 Rektanglet har eit areal på 12 cm². Kva er arealet av den grå trekanten inn i rektanglet?



Arealet er___________________________

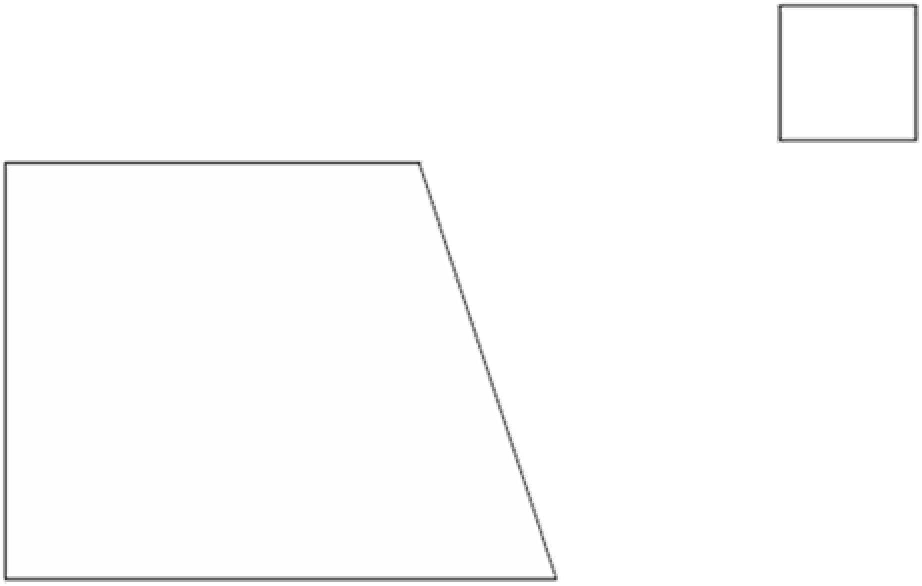
11 Kva for ein av figurane har eit areal på nærmast 4 cm²?



a) Figur ______,
b) fordi____

____

12 Kor mange slike kvadrater meiner du det er plass til i figuren under?
Vis med teikning korleis du løyste oppgåva.



13 Sindre skal klippe ein plen som har form som eit rektangel. Den lengste sida er 6 meter lang. Omkretsen til plenen er 20 meter. Kva er arealet til plenen?
Du kan gjerne teikne til oppgåva.

8.3. Vedlegg 3: Semistrukturert intervjuguide

Intervjuguide til semi-strukturert oppgavebasert intervju med elever

Hensikten med elevintervjuene er å forstå hvordan elevene tenker og resonnerer. Målet er å prøve å finne kritiske faktorer, dvs på hvilke måte elevene oppfatter ulike emner innen måling. Gjennom slike intervju kan en oppdage og avdekke mulige misoppfatninger eller misforståelser som elever kan ha. Intervjuet kan også ytterligere avdekke elever forståelse for et emnet, dette kan være elever som har alt eller svært mye riktig på testen.

Målet er at elevene får anledning til å vise og forklare, og at vi på denne måten kan forsøke å forstå hvordan eleven tenker og resonnerer når han forsøker å løse en oppgaver eller forklarer hvordan han tenkte når han løste oppgaven.

Intervjusituasjonens hovedfokus er å få klarhet i elevenes tenkemåte, det vil si at en ikke skal drive undervisning.

1. **La elevene stå for snakkingen**. Om eleven ikke sier så mye, så er det viktig at han blir oppmuntret til å forklare og beskrive og at intervjuer bare bryter inn og klargjør utydeligheter, og fortsetter å sørge for at elevene og elevens tanker er i fokus.
2. **Unngå å undervise i intervjusituasjonen**. Hensikten er å få tak i elevens forkunnskaper. Den informasjonen som eleven gir, skal brukes til å planlegge undervisningen. Hvis intervjuer forsøker å få eleven til å riktig svar eller foreslå passende strategier, kan dette forstyrre elevens egen tankeprosess.
3. **Ikke vis hvordan du tenker underveis i intervjuet.** Svarene til eleven bør ikke underveis i intervjuet bli vurdert som riktige, gale, gode eller dårlige, men som interessante og informative. «Gale» svar er gjerne mer verdifulle i denne situasjonen.

Velg ut noen oppgaver fra testen, f.eks 5 stykker. Ta også med et par oppgaver som eleven har svart riktig på. Ha testen til eleven med på intervjuet. Hele intervjusituasjon videofilmes eller tas opp på lydbånd. Ta gjerne notater underveis i intervjuet, bruk vedlagt skjema.

Ha med papir, blyant og materiell (linjal, kvadratiske plastbrikker) som elevene kan bruke underveis. Plasser eleven slik at distraksjoner kan unngås (f.eks utsikt gjennom vindu, dør).

Gjennomføring av intervju

Oppstart: Forklar at du har lyst til å høre hvordan eleven har kommet fram til noen av svarene og hvordan han har tenkt.

- ***Jeg er interessert i hvordan du tenker. Det hadde derfor vært fint om du tenker høyt. Jeg er ikke opptatt av hvor <u>godt</u> du løser oppgavene, men hva du tenker.***

Start gjerne med en oppgave de har løst riktig.

Disse spørsmålene kan være greie å ha i bakhodet i intervjuet, fordi de dekker alle trinn i en løsningsprosess.

1. ***Kan du lese spørsmålet for meg?*** (Lese)

2. ***Hva spørres det etter i oppgaven?*** (Forstå)
3. ***Kan du vise meg hvordan du fant svaret og si meg hvordan du går fram for å finne det?*** (Beskrive fremgangsmåte)
4. ***Kan du skrive ned eller tegne svaret på oppgaven?*** (Avkode).

En kan også starte med å spørre:

- ***Kan du fortelle meg hvordan du kom fram til svaret på denne oppgaven?***

Følg opp med spørsmål som:

- ***Hvorfor tenkte du sånn? Hvorfor valgte du den løsningen?***

Andre eksempel på spørsmål:

1. Hvis eleven er stille i mer enn 3 sekunder, kan disse kommentarene hjelpe:
- ***Fortsett å snakk høyt***
- ***Hva tenkte du når du forsøkte å løse oppgaven?***
- ***Fortell meg hvorfor du valgte det svaret.***

2. Hvis eleven spør om hjelp eller ber om ytterligere informasjon, spør lignende spørsmål:
- ***Hvis jeg ikke kan hjelpe deg, hva ville du bestemt deg for å gjøre?***
- ***Det kan virke som oppgaven var litt vanskelig. Kan du fortelle meg hvorfor du synes den ble vanskelig?***

3. Dersom du trenger ytterligere informasjon hvordan eleven har tenkt i en oppgave, så spør følgende oppfølgingsspørsmål:

   - ***Jeg la merke til at du nevnte ____, hva mente du med det?***
   - ***Hva tenker du at dette ordet betyr?***
   - ***Kan du fortelle meg hva oppgaven ville du skulle gjøre?***
   - ***Kan du gjengi hva oppgave med dine egne ord?***

8.4. Vedlegg 4: Resultater fra pre- og posttest for seks lavtpresterende elever

Test	Navn	1	2a	2b	3aA	3aB	3aC	3aD	3bA	3bB	3bC	3bD	4	5	6	7	8	9	10	11a	11b	12	13	Resultat	Prosent
Pretest	Malin	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	X	0	X	0	X	0	0	0	5/22	22,7%
Posttest	Malin	0	X	X	X	X	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	X	0	X	18/22	81,8%
Pretest	Espen	X	0	X	0	0	0	0	X	X	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7/22	31,8%
Posttest	Espen	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	15/22	68,2 %
Pretest	Håkon	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	4/22	18,2%
Posttest	Håkon	X	X	X	0	0	0	0	X	X	X	X	0	X	X	0	0	X	0	0	0	0	0	10/22	45,5%
Pretest	Silje	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	X	0	0	0	X	0	3/22	13,6%
Posttest	Silje	X	X	X	0	0	0	0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0	0	14/22	63,6%
Pretest	André	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/22	4,5%
Posttest	André	X	0	0	X	X	X	X	X	X	X	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10/22	45,5%
Pretest	Tonje	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	3/22	13,6%
Posttest	Tonje	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	0	X	0	0	X	0	18/22	81,8%

8.5. Vedlegg 5: Transkripsjoner

Transkripsjon intervju Malin: Pretest

Personer:
Intervjuer = I
Malin = M

Oppgave	Person	Tale	Nonverbal-kommunikasjon
2b	I	Da skal vi se på den Og da har jeg lyst at du skal snakke litte gran om de to første oppga, eller den 2a og 2b. (Tar ikke med oppgave 2a da den handler om omkrets	Tar frem pretest for areal og omkrets
	I	På b der da?	
	M	Hvilken av figurene har størst areal	
	M	Den.	Peker på kvadratet
	I	Hvordan tenkte du da?	
	M	For areal det tror jeg er det som er i midten, og den har tre i midten og den har fire	Peker først på de tre prikkene inni rektangelet, og så på de fire prikkene inni kvadratet
	I	Hva er det som.. tre hva for noe? 3?	
	M	Cm	
	I	Ja, er det de prikkene du ser på?	Peker på prikkene inni kvadratet
	M	Mhm	
	I	Så den har fire prikker, og den har tre. Er det det samme som cm?	
	M	Jeg vet ikke.. skal vi se	Tar frem linjalen. Legger den vannrett over kvadratet slik at 0 ligger på prikken nede til venstre, og 1 er på prikken nede til høgre.

	M	Jepp	
	I	Ja, flott. Da skal vi se litte her på disse to. Vi skal bare ta A	Tar prøven og lar om til oppgave 3. Peker på figur A
		(Hopper over 3a da denne omhandler omkrets)	
3b	I	Hva er arealet til figur A da?	
	M	6.	
	I	Hva gjorde du da?	
	M	Telte rutene	Peker på rutene inni figur A, og stryker fingeren over rute for rute.
	I	Mhm.	
4	I	Hvis vi ser på oppgave 4 da	
	M	Hvor la.. stor areal er figuren	
	I	Mhm	
	M	Er det det som er inni?	Holder en blyant over rutene inni figuren på oppgave 4
	M	Det er det som er inni.	
	I	Mhm	
	M	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. 12?	Bruker blyanten til å peke på rutene mens hun teller
	I	Mhm	
	M	Det er det på denne. Men om jeg skulle gjort som på den andre oppgaven så måtte jeg ha delt dem opp i lik	Refererer til oppgave 3b. Holder blyanten over ruten nede i høgre hjørne av figuren og simulerer at den deles vertikalt i to.
	I	Du ville da delt de opp likt	
	M	Ja, eller så bare har jeg den sånn som den er og da blir det 12.	

	M	For hvis jeg hadde delt det opp så hadde ikke det gått for noen av de der.	Peker på svaralternativene for oppgave 4
	I	Nei. Hva kunne du ha svart da da? Det blir mer enn 12?	
	M	Mhm	
	I	Eller mindre enn 12?	
	M	Da blir det mer	
	I	Så hvis D hadde vært rett, hva ville du ha sagt der da?	Peker på svaralternativ D.
	M	Fordi.. De har, de har ikke like stort mellomrom. Eller.. noe sånt	
	I	Ja, si det en gang til. Si det høgt en gang til du	
	M	Fordi at hvis du deler de opp så blir det mange flere ruter en hvis du har det sånn som det.	Vifter blyanten over ruten oppe i høgre hjørnet av figuren og simulerer fort at den blir delt
5	I	Mhm. Flott. Da tror jeg jeg vil se på, Kan du ta den også?	Peker på oppgave 5.
	M	Da tok jeg og delte de opp sånn	Legger linjalen loddrett over figuren og bruker rutene som er der til å tegne videre ved først å tegne inn loddrette streker fra rutene øverst og ned.
	M	Og så bortover	Snur linjalen og tegner inn en vannrett linje fra nederste rute til venstre og bort til høgre side.
	M	Er den streken vekke, eller?	Flytter linjalen opp. Peker på en svakt markert linje.
	I	Ja, den skal være der. Har bare blitt dårlig kopi	
	M	Det var ikke så nøye da.	Fortsetter å tegne inn vannrette linjer ved å følge te opptegnede rutene langs venstre side
	I	Nei, men det er ikke så farlig	

	M	Og så telte de	Peker på rutene inni figuren
	I	Så telte du hvor mange ruter det var.	
	M	Mhm	
	I	Mhm	
8	I	Hvordan ville du gjort 8 der da?	Blar om siden og peker på oppgave 8.
	M	Hva areal, hva har arealen av den rektangelen. Vis hvordan du kom frem til svaret	
	M	Da kan du ta og dele det opp i sånne ruter	Tar blyanten og linjalen. Legger linjalen loddrett over figuren
	I	Mhm. Du kan bare gjøre det du	
	M		Tegner inn 5 loddrette streker slik at det blir 6 enheter i lengden
	M	Og så bortover	Snur linjalen og tegner 3 vannrette linjer slik at det blir 4 enheter i bredden
	M	Og så teller du hvor mange det blir	Legger fra seg linjalen og lener seg bak
	I	Mhm. Hvordan tenker du når du vet hvor mange mellomrom du skal ha?	
	M	Da ser du det på den oppe for den er jo..	Tar linjalen og legger loddrett over figuren, slik at den når fra oppgave 8 og opp til oppgave 7 over. Linjalen ligger nå inntil en av de loddrette linjene på figuren for oppgave 8 og for oppgave 7.
		Og da blir det sånn akkurat når de tallene begynner.	Stryker fingeren langs tallrekken for cm på linjalen
	I	Okei, så du så rett og slett på den figuren over? Mhm.	

	M	Selv om de ble litt større.	Flytter litt på linjalen når hun sammenligner linjene for de to figurene.
	I	Ja	
	I	Skal vi se.. og så har vi, Går det bra? Eller går det for lang tid?	Løfter opp pretesten og blar om sidene.
	M	Mhm	
10	I	Du skal få prøve deg på den du da.	Peker på oppgave 10
	M	10?	
	I	Ja	
	M	Rektangelet har et areal på sek, 12 centimeter. Hva er, hva er arealen av den grå trekanten inn i rektangelet.	
	I	Ja	
	M	Da gjorde jeg sånn som jeg gjorde på den andre. Da tok jeg og delte opp i sånne ruter.	Tar opp linjalen og legger den loddrett over figuren i oppgave 10 slik at den når opp til oppgave 9 som er rett over.
	M		Tegner loddrette linjer på trekanten i oppgave 10 ved å legge linjalen midt mellom de loddrette linjene i figuren til oppgave 9. Tegner da inn 5 loddrette linjer som danner 6 ruter bortover.
	M		Snur arket på siden, og tegner inn 4 linjer som går vannrett på trekanten i oppgave 10, og danner 5 ruter oppover.
	M	Da blir det sånn. Og så tar, egentlig sånn 1,2,3,4, 5.	Peker med blyanten de 5 første rutene, én etter én, vannrett nederst på trekanten (rekke 1)
	M	Så blir det 6 med de to	Peker med blyanten på den siste ruten nederst i trekantens høgre hjørne (reke 1) som ikke er helt, og peker så på en rute over (rekke 2) som ikke er hel.

	M	Og så blir det 7, 8, 9	Bruker blyanten til å telle resten av rutene som er hele på rekke 2 ved å peke på dem.
		10 med de to	Peker med blyanten på ruten som ikke er hel i enden av rekke 3, og på ruten som ikke er hel i enden av rekke 4
	M	Så blir det 11, 12, 13	Bruker blyanten til å telle resten av rutene som er hele på rekke 3 og 4.
	M	14.	Peker på ruten på rekke 5 som er halv, og drar blyanten ned langs den skrå linjen fra venstre hjørne øverst i rektangelet og ned til høgre hjørne nederst i rektangelet.
	I	Mhm. Hva som bestem, hva som bestemte nå for kor store ruter du lagde? Hvordan tenkte du da?	
	M	Egentlig likt	Plukker opp linjalen, og peker på strekene på linjalen
	I	At det var da en cm?	
	M	Ja	
	I	Mhm. Flott	
13	I	Da er ei oppgave til jeg vil spørre deg om, og det er den	Snur siden i testen, og legger hånden på oppgave 13
	M	Mm, hehe. Den klarer jeg ikke	
	I	Hæ? Nå skal vi se. Bare les den høgt du	
	M	Sindre skal klippe plee.. plenn.. hva er det?	Følger teksten med blyanten. Stopper på ordet plen
	I	En plen.	
	M	Åja. En plen som har form som et rektangel. Den lengste siden er 6 meter lang. Omkretsen til plenen, plenene er 20 meter. Hva er arealet til plenen. Du kan	Følger teksten med blyanten

		gjøre tegningen til oppgaven.	
	I	Du hadde forsøkt deg på den på prøven	
	M	Ja, men..	
	I	Hvordan tenkte du da?	
	M	Jeg tok.. Jeg vet ikke. jeg husker ikke.	Holder linjalen loddrett over det åpne området under oppgave 13, og svinger blyanten lett opp og ned langs siden av linjalen.
	I	Nei. Vet du hvordan du ville løst den nå, eller forsøkt?	
	M	Nei, den er så vanskelig	
	I	Ja. Nei men da bare lar du den ligge. Det er ikke farlig.	
	M	Okei	

Transkripsjon intervju Malin: Posttest

Personer:

Intervjuer = I

Malin = M

Oppgave	Person	Tale	Nonverbal-kommunikasjon
	I	(Vi har snakket om oppgave 3a først, men den blir ikke inkludert da den omhandler omkrets og ikke areal.) Oppgavene 3b da. Hva sier den at du skal gjøre?	Peker på oppgave 3
3b	M	Ja. Hva er arealet av figurene	
	I	Ja	
	M	Da telte jeg det inni, sånn ruter	Peker med fingeren på rutene inni figuren, og viser at h*n teller rutene
	I	Så arealet er det inni? Gjorde du sånn for alle figurene?	
	M	Ja	
4	I	Da kan vi gå videre til oppgave 4. Hva skulle gjøres der?	Peker på oppgave 4
	M	Der skulle vi telle hvor stort arealet er	
	I	Og da har du svart at det ikke er mulig. Hvorfor.	
	M	Fordi de er ikke like store mellomrommene	Peker på rutene inni figuren som er av forskjellige størrelse.
	I	Har det noe å si?	
	M	Ja. Fordi at en så stor med en mindre, da går det ikke. Da blir det ikke likt. Og da kan du ikke telle. Kan ikke finne arealet.	Peker på en stor rute i figuren og en mindre rute.
	I	Okei	

8	I	Da går vi videre til oppgave 8. Hva skal vi finne her?	Blar frem til oppgave 8
	M	Arealet av den	Peker på rektagelet
	I	Av rektangelet?	
	M	Der tegnet jeg først sånn, men så kom jeg på at det går jo bare an å gange de to sammen, så da gjorde jeg det istedenfor.	Peker først på rektangelet som hun har delt inn i ruter ved bruk av hele linjer, 4 ruter for bredden, og 6 ruter for lengden. Peke så på tallene for lenge og bredde: 3 og 5.
	I	Okei, så du prøvde først å tegne? Men hvorfor gikk ikke det?	
	M	Fordi jeg klarte ikke å tegne det med like store mellomrom	Peker på en rutene inni rektangelet
	I	Okei. Hvordan fant du ut at du ville tegne opp med fire ruter oppover og seks ruter bortover?	Peker på de fire rutene tegnet inn for høyden, og de seks som er tegnet inn for bredden
	M	Jeg tok en cm imellom og tegnet med linjalen	Peker på en av linjene opptegnet
	I	Hvorfor valgte du å bruke cm på linjalen?	
	M	Fordi det står cm der	Peker på «cm» som står bak tallene for lengde og bredde
	I	Okei. Tror du de tallene som står på siden som du brukte for å regne arealet har noe å si for de rutene inni?	Peker på tallene satt opp for lengde og bredde for rektangelet
	M	Nei. Eller, jeg er ikke sikker.	
	I	Nei. Hvorfor brukte du de tallene på siden til å finne arealet?	Peker på tallene 3 og 5
	M	Fordi jeg klarte ikke å tegne, og de kan ganges sammen og så får du arealet.	
	I	Okei	
7	I	Men her på oppgave 7 da, hva skulle du gjøre her?	Peker på oppgave 7
	M	Da skal du lage en areal på 12cm	

	I	Hvordan tenkte du når du gjorde det?	
	M	Da telte jeg 12 sånne bortover. Eller jeg tok først tre nedover, så telte jeg hvor mange det gikk sånn at det gikk til 12.	Peker først i midten av på rutene som er tegnet rundt. Peker på de tre rutene tegnet opp for bredden av figuren
	I	Okei. Hvordan fant du ut når du skulle stoppe da? Kan du vise?	
	M	Jeg telte sånn: 3, 6, 9, 12	Peker på rekkene for bredden og følger langs lengden av rektangelet mens h*n teller.
	M	Og så satte strek rundt	Viser med pekefinger hvordan h*n tegnet rundt rektangelet.
9	I	Okei. Da kan vi gå videre til oppgave 9	Blar frem til oppgave 9
	M	Hva er arealet av figuren	
	I	Ja. Og den er jo litt annerledes fra de andre. Du har svart at det er «D: Det er ikke mulig å si».	
	M	Ja	
	I	Hvorfor tenkte du at det ikke er mulig å finne ut?	
	M	Fordi det går bare med de som er der	Stryker fingeren over «rutene» i midten av figuren, som er hele.
	M	Så når det er forskjellig størrelse, når det ikke bare er en halv, så blir det litt vanskelig	Peker på rutene som er oppdelt av figurens sider som skråner.
	M	Så da blir det sånn som på den andre at det er forskjellig størrelse. Da kan du ikke finne det ut. Kan ikke telle de.	Refererer til oppgave 4.
	I	Okei. Jeg har med meg den første testen du gjorde. Der svarte du litt annerledes, men det er jo vanlig for det er jo lengesiden også. Her skreiv du at C var rett. Husker du hvorfor du mente det?	Tar fram elevens pretest som ble utført før undervisning startet, og peker på oppgave 9 og svaralternativ C.

	M	Nei. Eller, det kan hende fordi at du ser at den er litt større, så kan du sette den sammen med den. Da blir det kanskje..	Peker på den «store biten» oppe til høyre på figuren, og så peker på den «lille biten» nede til venstre
	M	Og så setter du den sammen med den.	Peker på den «lille biten oppe til venstre på figuren, og så på den «store biten nede til høgre.
	M	Og så de to. Det går, kanskje.	Peker på den midterste «biten» til venstre på figuren, og den midterste «biten» til høyre.
	I	Så du bygde bitene sammen da eller?	
	M	Ja, sikkert det. Til de ble en hel. Og så telte resten.	Peker på de «hele rutene» inni figuren
	I	Okei. Og når du ser på den nyeste testen igjen, der du svarte at det ikke var mulig å si, kunne bu brukt denne metoden da?	Tar frem posttesten igjen, og peker på svaret som var gitt og figuren.
	M	Nei. For de er ikke samme størrelse. Det må de være eller så kan du ikke finne det ut.	
10	I	Okei. Neste oppgave, oppgave 10. Hva skal vi finne der?	Peker på oppgave 10
	M	Arealet.	
	I	Av hele rektangelet?	
	M	Nei, av halve.	
	I	Hvordan fant du det da?	
	M	Jeg plusser.. nei, ganger de to, og det blir 12. Og så tok jeg halvparten, og det blir 6	Peker på tallene for lengde og bredde i figuren
	I	Hvordan visste du at du skulle ta halvparten?	
	M	Fordi, det er jo halvparten, den som er der	Peker på den fargede delen som utgjør halvparten av hele rektangelet. Følger linjen som deler kvadratet i to med pekefingeren.
	M	Og så står det i teksten også	Peker på oppgaveteksten til oppgave 10.

	I	Ja, okei!	
13	I		Blar om i heftet
	M	Den klarte jeg ikke forrige gang	Peker på oppgave 13
	I	Du klarte ikke den sist nei?	
	M	Nei, jeg skjønte den ikke i det hele tatt	
	I	Du skjønte den ikke i det hele tatt nei. Skjønte du den denne gangen? Var det lettere nå?	
	M	Da leste «lærers navn» den for meg	Peker på oppgaveteksten til oppgave 12
	I	Du fikk litt hjelp med teksten. Ja, for det er jo en lang tekst. Hva skulle vi gjøre på denne oppgaven da?	
	M	Du skulle lage, du skulle finne arealet av en som var 20 meter lang	
	I	Ja, omkretsen var 20 meter, og så får vi vite at den ene siden i rektangelet er 6 meter. Hvordan gjorde du da?	
	M	Jeg tok 6. Den her ble ikke så bein (rett) da.	Peker på lengden oppe på et rektangel h*n har laget. Så peker på neste linje inni rektangelet som var litt skjev.
	I	Det gjør ingenting.	
	M	Jeg tok 6 bortover, og så tok jeg 4 nedover.	Drar pekefingeren langs lengden oppe på rektangelet, og så nedover høyre side (bredden) av rektangelet.
	M	Og så telte jeg sånn hver sånn del, og det ble 20	Peker på rutene inni rektangelet
	I	Men hvordan visste du at det skulle være 4 der?	Peker på høyre siden (bredden) av rektangelet
	M	Jeg vet ikke. Jeg bare prøvde, og så gikk det	

	I	Ja. Fant du ut om det var 20 meter rundt rektangelet?	
	M	Jeg tok 6 bortover. cm i mellom skal det være.	Peker med fingeren på rutene langs lengden oppe på rektangelet
	M	Og så tok jeg og gjorde.. husker ikke så mye egentlig men.. Så tok jeg 6 bortover, og 4 nedover på grunn av at det.. jeg vet ikke. Tror jeg bare prøvde og så gikk det.	Peker igjen med fingeren langs rutene oppe på rektangelet, og nedover høyre side (bredden).
	I	Du prøvde deg frem?	
	M	Ja. og så telte jeg arealet som var inni, som var 20.	Peker på rutene inni rektangelet
	I	Kan du telle det for meg?	
	M	Ja	Peker på rutene mens hun teller
	M	Nei, 24 er arealet	
	I	Okei. Så det er 24. 24 hva da?	
	M	24 ruter.	
2	I	(Hopper over samtaler rundt 2a, da denne omhandler omkrets) Den da?	Blar tilbake til oppgave 2 Peker på oppgave 2b, og svaret som er gitt for hvilken figur som har størst areal: A, figur 1.
	M	Der er det areal, og det er det inni. Og da er det 4 der, og bare 3 der	Peker først på de 4 prikkene inni figur 1, og så på de tre prikkene inni figur 2.
	I	Da teller du prikkene?	
	M	Ja	
	I	Så den med mest prikker har størst areal?	
	M	Ja	
6	I	Okei. denne her da. Den figuren er ulik de andre igjen. Hva skulle vi gjøre her?	Blar om til oppgave 6

	M	Vi skulle finne ut arealet	
	I	Hvordan tenkte du da?	
	M	Jeg tok og delte det opp sånn	Peker på blyantstreker som er brukt for å sette sammen «tappene» i figuren
	I	Delte det opp i linjer?	
	M	Ja, sånn fra den streken til den. Til de de hørte til.	Peker på tappen midt på bredden til venstre, og følger en linje som er tegnet inn og går vannrett over til høyre side i figuren.
	M	Og så telte de	Peker på rutene inni figuren
	I	Brukte du de tallene rundt?	Peker på tallene satt opp for å vise lengdene til figuren
	M	Nei. Det kunne jeg ha gjort, men det gjorde jeg ikke	
	I	Hvordan ville du gjort da? Hvis du ikke skulle telt, kunne du brukt tallene istedenfor?	
	M	Du kunne, men det hadde vært vanskelig for meg vertfall. Og så står det ikke noe tall på de to, da måtte jeg ha målt da.	Peker på de to lengdene på figuren som ikke har tall
	I	Okei.	

Transkripsjon intervju Espen: Pretest

Personer:

Intervjuer = I

Espen = E

Oppgave	Person	Tale	Nonverbal-kommunikasjon
		(Hopper over 2a da den omhandler omkrets)	
2b	I	På det neste spørsmålet så er hvilken av figurene har størst areal.	
	I	Hva var det. Husker du hva det ordet betyr?	
	E	Veldig lengesiden. Helt når jeg begynte med, når jeg begynte med, og i 5. klasse så begynte vi å lære det i matte. Tror jeg	
	I	Jeg tror ikke du har hatt dette siden 4. klasse. Det er heilt ok at du ikke husker det	
	E	Jeg husker ikke det, men jeg tror det er figur B	Peker på svaralternativ B: «figur to»
	I	Ja, på areal. Hva tror, hva var, hva gjorde du for å finne, for å tenke det ut?	
	E	Jeg vet ikke egentlig. Det var.. Den måtte jeg tenke veldig mye til	
	I	Ja, men vi trenger ikke bruke så masse tid på det.	
7	I	Skal vi se her. Hvis du ser på, vi kan ta den. Oppgave 7	Blar om i testen. Peker på oppgave 7
	E	Mhm	

	I	Kan du tegne et rektangel som areal på 12 cm2	
	E		Tegner en strek opp langs tre ruter
	I	Fint hvis du bare tenker, sier, snakker høyt mens du tenker nå. Hva tenker du nå?	
	E	Jeg tenker at hvis jeg tar så stort areal, litt lenger, nei. Litt større enn et rektangel	Fortsetter å tegne uten å løfte blyanten: fire ruter bortover for lengden, tre ruter nedover for bredden og fire ruter bortover til hvor han startet figuren
	E	Så har jeg da, så er det seks på begge sider	Stryker bakenden av blyanten rundt inni figuren
	E	Så da blir det jo 12 cm	Peker på oppgaveteksten der det står 12cm2
	I	Kan du peke på de seks sidene som du har der nå?	
	E	Den og den	Stryker blyanten vannrett inni figuren
	I	En gang til	
	E	Den og den. Den på høgre og venstre	Peker på venstre side i figuren, så på høgre side
	I	Ja. Altså, den og den. At det er seks på de sidene.	Drar fingeren langs lengden øverst og ned bredden på venstre side av figuren
	E	Mhm	
	I	Kan du telle for meg og se hvor mange det er	
	E	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.	Peker på rute for rute inni rektangelet mens han teller
	I	Flott. Ja	

8	I	Hvis du skulle ha funne ut arealet på den da. Hva ville du gjort da?	Peker på oppgave 8
	E	På prøven så tegnet jeg firkantene som var inni der	Peker inni rektangelet i oppgave 8
	E	Bare tok og tegnet	Tegner en strek loddrett ned i midten av rektangelet slik at den blir delt i to. Tegner en vannrett linje øverst i figuren
	I	Der er en linjal så du kan gjerne bruke den nå	
	E		Legger linjalen vannrett over figuren
	E	Tegnet jeg streker	Tegner over den allerede opptegnede vannrette linjen øverst i figuren
	E		Tegner tre loddrette linjer til venstre for den midterste linjen, og tre loddrette til høgre. (til sammen er det nå 7 loddrette linjer, med 8 enheter i lengden)
	E		Tegner inn vannrette linjer under den allerede opptegnede vannrette linjen. Tegner slik at det til sammen er 5 linjer, med 6 enheter i bredden
	I	Flott. Hva som bestemte deg for hvor mange sånne streker du skulle ha?	Peker på de opptegnede strekene loddrett i figuren
	E	Vet ikke egentlig. Jeg bare tegnet inn streker og så tok hvor mye det var, det er i den	Holder blyanten over rektangelet og beveger den i en sirkelbevegelse inni
	I	Hva ville du gjort nå for å funne nå.. hva ville du ha telt nå?	
	E	Egentlig så tenkte jeg på en slags sånn her oppgave, med den samme med ved den her. så tenker jeg hvor, hvis jeg husker litt rett så kan jeg huske at det var så, enten så mange streker eller ikke. Hvis.. jeg husker da ikke så bra. Ja	

12	I	Flott. Da skal vi ta og se på den oppgaven. Den er den siste	Peker på oppgave 12
	I	Hvor mange slike kvadrater mener du det er plass til i figuren under?	Peker på det lille kvadratet oppe i høgre hjørne i oppgaven
	E	Jeg begynte med å ta litt sånn utover her.	Simulerer at han tegner en firkant oppe i venstre hjørnet av figuren.
	E	Så tegnet jeg firkantene så stor som den	Peker på kvadratet oppe i høgre hjørnet
	E	Så tok jeg og målte den. Og så den her	Legger linjalen langs lengden til kvadratet, og så langs bredden
	E	Og så tok jeg den samme formen som var inni der	Legger linjalen vannrett over figuren
	E	Og det jeg tenker det at man trenger bare å måle de to som er her.	Peker på lengden og bredden til det lille kvadratet
	E	Fordi at de to er de samme, og de to	Peker først på breddene for figuren, så på lengdene
	E	Så det pleier jeg å gjøre. Og så setter jeg firkantene inni her	Peker på den store figuren
	I	Har du lyst å vise hvordan du gjorde det?	
	E	Ja, okei	
	E	5 og.. 5 og.. 5 da	Måler bredden av kvadratet.
	E	Okei. Omtrent, her tror jeg	Legger linjalen vannrett over figuren litt nede på venstre side og tegner en vannrett strek på ca litt over 1 cm, der linjen starter noen millimeter inn fra bredden.
	E	Men hvis jeg ikke fikk plass så visket jeg vekk, hvis jeg ikke fikk plass oppe her og sånn	Peker over streken som er tegnet inn
	E	Så tegnet jeg under	Legger linjalen loddrett fra streken og ned

	I	Du kan og bare tegne sånn ca. hvis du vil med hånd, med blyanten og nå	
	E	Okei	Fullfører firkanten han har startet på. Tegner inn flere firkanter av forskjellige størrelser, som ikke ligger tett i tett
	I	Sånn. Og så hva gjo, du kan bare stoppe der du. Hva var det du gjorde da for å finne svaret	
	E	Jeg telte egentlig hvor mange det var, og så telte jeg det en gang til for å bare være sikker på det. Og så .. ja, så sånn.	
	I	Mhm. Veldig bra.	

Transkripsjon intervju Espen: Posttest

Personer:

Intervjuer = I

Espen = E

Oppgave	Person	Tale	Nonverbal-kommunikasjon
		(Hopper over 2a da det omhandler omkrets)	
2b	I	2b, hva er det vi skal finne på den?	
	E	Den som har størst areal	
	I	Hva er areal for noe da?	
	E	Hvor stor den er inni	
	I	Okei. Hvordan fant du det?	
	E	Jeg telte, jeg telte liksom., jeg forestilte meg at det var firkanter der, der, der, der, der, der, der. prikkene viser liksom.	Peker på prikkene med fingeren langs øverste-, venstre- og nederste side av figur 1
	E	Men liksom fulle firkanter.	
	I	Her er en blyant sånn at du kan tegne hvordan du tenker	Gir Espen en blyant
	E		Bruker blyanten til å tegne firkanter som ligger tett i tett inni figur 1, der linjene for en firkant går fra prikk til prikk inni figuren
	E	Sånn. Forestilte meg at den var delt opp i firkanter.	
	I	Du forestilte deg at det var firkanter inni?	
	E	Ja. Og så telte jeg dem for å finne ut hvilken som var størst. Det var den	Peker på figur 1

	I	Ja	
	I	Skal vi se. Disse. (hopper over 3a da det omhandler omkrets)	Peker på figurene i oppgave 3
3b	I	På b da, 3b. Der skulle vi finne noe annet. Hva var det?	Peker på oppgave 3b
	E	Hva er arealet av figurene. Det som er inni.	
	I	Det inni. Og hvordan gjorde du da?	
	E	Bare telte firkantene inni.	peker på en og en firkant inni figur A
	I	Ja, okei. Bare telte firkantene inni.	
4	I	Denne oppgave 4 da. Hva gjorde du her?	Peker på oppgave 4
	E	Jeg tok «umulig å si» fordi at den har ikke like. like firkanter så det blir nesten umulig å telle. ja telle de og alt det der.	
	I	Må de være like?	
	E	Mhm	
	I	Ja. Flott	
6	I	Skal vi se. Da vil jeg gjerne at du forklare meg hvordan du har tenkt på den. Hva skulle vi finne der?	Blar om siden og peker på oppgave 6
	E	Vi skulle finne arealet av figuren.	
	I	Mhm	
	E	Så jeg laget strekene som manglet, og så telte jeg da sånn	Peker på strekene han har delt figuren opp i, og peker på så en og en rute inni figuren

	I	Hvordan tenkte du når du skulle finne ut hvor strekene skulle gå?	
	E	Det var markert med en sånn liten bit hvor strekene begynte og sluttet	Peker på midten av den loddrette linjen helt til venstre på figuren.
	I	Ja. Brukte du de tallene noe?	Peker på tallene som står ved siden av lengdene i figuren
	E	Egentlig ikke	
	I	Nei. Tror du vi kunne brukt de? For eksempel hvis man ikke skulle telt firkantene inni?	
	E	Mhm	
	I	Hvis du skulle prøvd det da, hva ville du gjort da?	
	E	Jeg vill ha telt alle sammen som pluss. For hvis du tar gange så får du det som var inni, arealet	Peker på tallene som står ved siden av lengdene i figuren
	I	Ja, men det var arealet vi skulle finne. Hvordan skulle vi ha ganget dette her da?	
	E	Det blir vanskelig	
	I	Det blir vanskelig. Ja, det gjør det.	
8	I	Ja. Oppgave 8. Er det 15 som står her? Her skulle vi også finne arealet. Hva gjorde du da?	Peker på svaret som er skrevet opp
	E	Jeg tegnet først firkanter, men så ble det feil fordi det skulle egentlig være tre	Peker først på firkantene inni figuren. Peker så på tallet tre som står oppført for bredden. Peker så på rekken med fire ruter oppdelt for bredden, og legger hånden over raden øverst (fra bredden og langs lengden) slik at bare tre rader vises.

	E	Så da forestilte jeg meg, så da telte jeg bare de tre som var her, og bortover	Peker på de tre nederste radene med firkanter for bredden, og viser disse tre bortover raden slik at det blir til sammen de tre rutene fem ganger bortover lengden.
	E	Men jeg vet ikke om det er riktig da	
	I	Okei, så da telte du bare de tre nederste, og de tre nederste, og de tre, og de tre, og de tre.	Stryker fingeren langs de tre nederste rutene langs bredden til venstre på figuren. Stryker så fingeren på de tre neste rutene bortenfor, så de neste, og neste og neste.
	E	Mhm	
	I	Og bare droppet den øverste der?	Stryker fingeren langs raden øverst på figuren
	E	Mhm	
	I	Men hvordan kom du først frem til å tegne opp fire her?	Peker på de fire rutene tegnet opp for bredden
	E	Jeg prøvde å tegne, men jeg så ikke på den	Peker på tallet 3 oppsatt for bredden
	I	Nei. Brukte du linjal da?	
	E	Ja	
	I	Hvordan kom du frem til at det skulle være 5 ruter bortover da?	Peker på de 5 rutene som er tegnet opp for lengden
	E	Det står jo 5 cm på toppen der.	
	I	Okei. Ja	
9	I	Oppgave 9. Hvordan har du tenkt der?	Blar om til oppgave 9
	E	Den syns jeg var litt vanskelig. Så den gjettet jeg på	

	I	Du gjettet på den ja. okei	
10	I	Den da, oppgave 10 Hva skal vi finne der?	Peker på oppgave 10
	E	Vi skal finne arealet på 12 c. ja. Skal finne. nei. Rektangelet har et areal på 12 cm. Hva arealet av den grå trekanten inni rektangelet	
	I	Ja. Hva skal vi finne da?	
	E	Vi skal finne hvor mange cm det er inni der	Peker på den grå trekanten i rektangelet
	I	Hvordan har du tenkt da?	
	E	Da tenkte jeg sånn at der er en halv firkant, og der er en halv. Og de to blir en, to, tre	Peker på den skrå linjen som deler rektangelet i to, og legger fingeren over først en innbilt firkant som er delt i to, og så en annen som er delt i to. Legger fingeren over disse, og flytter fingeren nedover den skrå linjen mens han teller
	E	Og så teller jeg resten inni	
	I	Okei, og da kom du frem til?	
	E	12 cm	
12	I	Den da. Oppgave 12	
	E	Jeg tenkte den firkanten inni der, og så telte.	Peker først på den lille firkanten, og så på den større figuren
	E	Da så får jeg et lite mellomrom som jeg kan telle: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.	Peker på rutene han har tegnet inn i rektangelet én etter én når han teller. Noen av ruter er delt av den skrå linjen til høgre. De hele rutene er ikke av samme størrelse, der noen er større enn andre, men ligger tett i tett. Han har tegnet fem enheter for bredden. Antall enheter for

			lengden er fem i bunn, så fire enheter på de to rekkene over der, og tre enheter på de to rekkene øverst.
	E	Og da kom jeg til 19 cm	
	I	Hvordan kom du frem til at firkantene inni figuren skulle ha den størrelsen?	
	E	Jeg bare tok den lille firkanten, og tegnet sånn ca. inni den store sånn at de dekket den.	Tegner rundt den lille firkanten med en blyant, og tegner så rundt noen av firkantene han har tegnet inni den større figuren
	I	Hvordan tenkte du med den siden som er litt skrå her da?	Peker på høgre sidelinje til den større figuren
	E	Jeg bare tok firkantene sånn at de passet sånn ca.	
	I	Okei. Flott	

8.6. Vedlegg 6: Godkjenning fra NSD

Från: Anne-Mette Somby <anne-mette.somby@nsd.uib.no>
Datum: 12. februar 2015 15:01
Till: Mona Røsseland <mona@fiboline.no>
Ämne: Meldeskjema for prosjektnummer 39894 registrert hos personvernombudet

BEKREFTELSE PÅ ENDRING

Personvernombudet bekrefter at utvalget er utvidet til tre lærere.

Vi har også registrert at fire studenten deltar som prosjektmedarbeidere. I den forbindelse minner vi om at studentene må lagre data på forsvarlig måte, og slette eller anonymisere dette materialet senest ved prosjektslutt. Som en hovedregel bør personopplysninger ikke behandles i f.eks nettsky, på mobiltelefon eller minnepinne uten kryptering. Utvalget må også informeres om at studentene deltar i prosjektet.

Vennlig hilsen

Anne-Mette Somby
Seniorrådgiver

Norsk samfunnsvitenskapelig datatjeneste AS
Personvernombudet for forskning
Harald Hårfagres gate 29, 5007 BERGEN